INFORMATICA 1/85

BARVANJA TOČK GRAFOV

VLADIMIR BATAGELJ

UDK: 519.174

UNIVERZA EDVARDA KARDELJA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO
VTO MATEMATIKA IN MEHANIKA

V sestavku je podan pregled najpomembnejših rezultatov o teoretičnih in algoritmičnih vidikih problema barvanja grafov. Na koncu je podan postopek, ki združuje trenutno najuspešnejša hevristična postopka za barvanje grafov: Szekeres-Wilfov in Brélazov postopek.

GRAPH COLORING

In the paper a survey of the most important results on theoretic and algorithmic aspects of the graph coloring problem is given. A heuristic procedure which combines the Szekeres-Wilf and Brélaz coloring procedures is presented at the end.

Math.Subj.Class.(1980): 05C15

NEKAJ PRIMEROV PREVEDBE PROBLEMOV NA NALOGO O BARVANJU TOČK GRAFA

Nalogo o barvanju točk grafa zastavimo takole:

Dan je graf $G = (V,E)$. Pobarvaj točke grafa G tako, da ne bo noben par sosednjih točk pobarvan z isto barvo.

Običajno zahtevamo še:

Pri tem uporabi čim manjše število različnih barv.

Naloga o barvanju točk grafa sodi v seznam "osnovnih" (kanonskih) kombinatoričnih nalog, saj lahko nanjo prevedemo celo vrsto, navidez neprimerljivih, nalog. Poglejmo si nekaj primerov:

1. Radijski oddajniki

Radijska oddajnika lahko motita eden drugega, če sta si preblizu. Kako razdeliti valovne dolžine dani množici oddajnikov, tako da se ne bodo medsebojno motili? Koliko najmanj valovnih dolžin je za to potrebnih?

Prevod:

TOČKE GRAFA: oddajniki
POVEZAVE: oddajnika sta sosednja (povezana), če sta si preblizu (lahko motita eden drugega)
BARVE: valovne dolžine

2. Turistični vodiči

Turistična agencija namerava organizirati n izletov. Za vsak izlet i poznamo datum njegovega začetka Z_i in datum njegovega konca K_i . Koliko (najmanj) vodičev je potrebnih za izvedbo teh izletov? Katere izlete bo vodil posamezni vodič?

Prevod:

TOČKE GRAFA: izleti (oziroma skupine, če je za isti izlet predvidenih več vodičev)
POVEZAVE: izlet i je povezan z izletom j natanko takrat, ko je: $(Z_i, K_i) \cap (Z_j, K_j) \neq \emptyset$.
BARVE: vodiči

3. Optimizacija porabe pomnilnika

Naj bo $X = \{X_i\}$ množica spremenljivk (istega tipa, da ne bo težav), ki nastopajo v nekem programu. Nekaj prostora prihranimo, če nekaterim spremenljivkam priredimo isti prostor; seveda tako, da dobimo ekvivalenten program. Koliko najmanj prostora je potrebnega? Katerim spremenljivkam pripada isti prostor?

Prevod:

TOČKE GRAFA: spremenljivke
POVEZAVE: točki sta povezani, če sta ustrezni spremenljivki lahko istočasno aktivni
BARVE: prostor v pomnilniku

Morda ne bo odveč, če malo natančneje opišemo, kako določimo povezanost (istočasno aktivnost) dveh spremenljivk: Sestavimo shemo programa in v njej povsod zamenjamo akcije z ustreznimi:

Use X - vrednost spremenljivke X je bila uporabljena

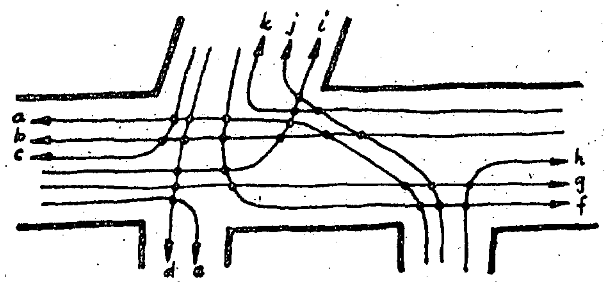
oziroma

Def X - vrednost spremenljivke X je bila spremenjena

V pravilno sestavljenem programu mora biti na vsaki poti po shemi programa od začetka do nekega Use X vselej vsaj en Def X . Točki X in Y sta povezani natako takrat, ko lahko v shemi programa najdemo pot z začetkom v Def Y in koncem v Use X , ki ne vsebuje nobene točke z oznako Def X .

4. Semaforji

Na danem križišču so predvidene določene smeri vožnje. Na primer križišče (Ajdovščina v Ljubljani):



Sestavi režim delovanja semaforjev na križišču (določi istočasne smeri) z najkrajšim ciklusom

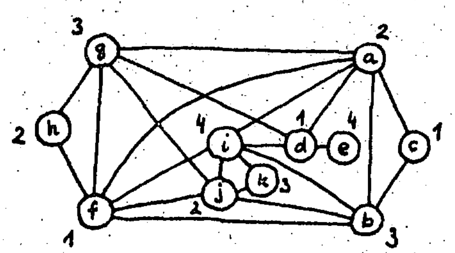
Prevod:

TOČKE GRAFA: smeri vožnje

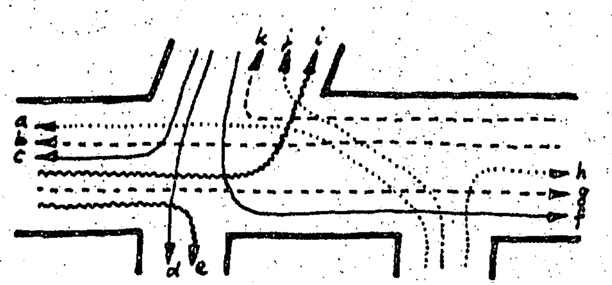
POVEZAVE: smeri sta povezani, če se v križišču sekata (lahko pride do trčenja)

BARVE: faze semaforskega režima

V našem primeru dobimo naslednji graf, ki ga lahko pobarvamo s štirimi barvami (1,2,3,4):



in določa naslednji režim:



BARVANJA TOČK GRAFOV - OSNOVNI POJMI

Naj bo dan graf $G = (V,E)$, množica barv C in "barva" nepobarvano $s \notin C$. Vpeljimo še okrajšavo $C_s = C \cup \{s\}$. Tedaj imenujemo **delno barvanje** točk grafa G vsako preslikavo

$$c : V \longrightarrow C_s$$

ki zadošča pogoju

$$\forall u,v \in V : ((u:v) \in E \wedge c(u)=c(v) \Longrightarrow c(u)=s)$$

Delno barvanje je **barvanje** natanko takrat, ko je $c(V) \subseteq C$. Torej vsako barvanje zadošča pogoju

$$\forall u,v \in V : ((u:v) \in E \Longrightarrow c(u) \neq c(v))$$

Posebna primera (delnih) barvanj sta barvanje c_s , ki je določeno s predpisom $c_s : v \longmapsto s$ in injektivno barvanje $\hat{c}$, ki zadošča pogoju $u \neq v \Longrightarrow \hat{c}(u) \neq \hat{c}(v)$.

V nadaljevanju se bomo omejili na končne grafe - grafe, pri katerih sta množica točk V in množica povezav E končni.

Barvitost delnega barvanja c imenujemo število

$$\chi(G/c) = \mathrm{card}(c(V) \cap C)$$

Graf G je *r-(delno)***obarvljiv** *natanko takrat, ko obstaja* (delno) barvanje c , tako da je $\chi(G/c) \leq r$. Predvsem pa je v tej zvezi zanimivo število

$$\chi(G) = \min_{c \text{ je barvanje}} \chi(G/c)$$

ki mu pravimo **barvnost** grafa G ali tudi **kromatično število**. Rečemo tudi, da je graf G χ-**barven.**

Podobne pojme lahko definiramo tudi za barvanja povezav. V tem sestavku se z barvanji povezav ne bomo ukvarjali.

Posamezni točki $v \in V$ grafa G lahko glede na delno barvanje c priredimo nekaj karakterističnih množic:

- **množica barv sosedov** točke v

$$\bar{C}(v/c) = \{ c(u) : (v:u) \in E \}$$

Zanjo velja ocena $\mathrm{card}(\bar{C}(v/c)) \leq d(v)$, kjer smo z $d(v)$ označili stopnjo (= število sosedov) točke v .

- **množica prostih barv** za barvanje točke v glede na c

$$C(v/c) = C \setminus \bar{C}(v/c)$$

oziroma, če dopuščamo še "barvo" nepobarvano

$$C_s(v/c) = C(v/c) \cup \{ s \}$$

Točka $v \in V$ grafa je **zasičena** za barvanje c , natanko takrat, ko je

$$C(v/c) = \{ c(v) \}$$

Barvanje, v katerem so vse točke zasičene, imenujemo **zasičeno barvanje.**

- **barvni razred** barve $a \in C$

$$V(a/c) = \{ v \in V : c(v) = a \}$$

Očitno je vsak $V(a/c)$ neodvisna množica.

Gornje množice lahko na naraven način posplošimo na več elementov. Na primer:

$$V(a,b/c) = V(a/c) \cup V(b/c)$$

- **Kempejeve komponente** grafa G za barvi a in b imenujemo povezane komponente podgrafa

$$(V(a,b/c), E(a,b)) ,$$

kjer je

$$E(a,b) = \{ (u:v) \in E : \{ c(u),c(v) \} = \{a,b\} \}$$

Pogosto nas zanima med njimi komponenta, ki vsebuje povezavo $p(u:v)$, seveda za barvi $c(u)$ in $c(v)$. Označimo jo $K(p/c)$, oziroma, če hočemo biti določnejši $K(p;a,b/c)$, pri čemer je $a = c(u)$ in $b = c(v)$. Komponento za barvi a in b , ki vsebuje točko v , $c(v) = a$, pa označimo $K(v;b/c)$ oziroma daljše $K(v;a,b/c)$.

Pravkar definirani pojmi nam omogočajo vpeljati pri dani množici barv C naslednji transformaciji nad barvanji:

- **zamena barve** v točki v

$c' = S(v;a/c)$, $a \in C(v/c)$

Novo barvanje c' je določeno s predpisom

$$c'(u) = \begin{cases} c(u) & u \neq v \\ a & u = v \end{cases}$$

V primeru, ko dopuščamo tudi "barvo" nepobarvano, $a \in C_*(v/c)$, pa dobimo močnejšo transformacijo

$c' = S^*(v;a/c)$

ki je definirana s podobnim predpisom kot S .

- **Kempejeva zamena** glede na barvi a in b v komponenti, ki vsebuje točko v , $c(v) = a$:

$c' = I(v;a,b/c)$

Novo barvanje c' je določeno s predpisom:

$$c'(u) = \begin{cases} a & c(u)=b \wedge u \in K(v;a,b/c) \\ b & c(u)=a \wedge u \in K(v;a,b/c) \\ c(u) & u \notin K(v;a,b/c) \end{cases}$$

Ker nas oznake barv ne zanimajo, je smiselno izbrati nek standardni nabor barv. Pri končnih grafih lahko izberemo *na primer* $C \subset N$; *oziroma*, če želimo izbor barv še bolj omejiti, postavimo za množico barv $C_n = [1..n]$.

Naj bo c C_n-barvanje grafa G . Poglejmo si pobliže postopek:

while $\exists v : c(v) > \min C(v/c)$ **do**
  $c := S(v; \min C(v/c) / c)$;

Vpeljimo funkcijo

$\sigma(c) = \sum_{v \in V} c(v)$.

Za vrednosti funkcije σ velja ocena $\sigma(c) \geq p$, kjer je $p = card(V)$. Ker se na vsakem koraku postopka vrednost $\sigma(c)$ zmanjša, se mora postopek v končno korakih izteči. Dobljeno končno barvanje označimo s c_{red} in mu pravimo **reducirano** barvanje.

Danemu barvanju c v splošnem pripada več reduciranih barvanj (odvisnih od zaporedja redukcij). Za vsa pa velja ocena $\chi(G/c_{red}) \leq \chi(G/c)$ in naslednja lastnost

$\forall v \in V, \forall k \in [1..c_{red}(v)-1], \exists u \in V$:
  $((u:v) \in E \wedge c_{red}(u)=k)$

Torej je c_{red} Grundyeva funkcija grafa G .

BARVNOST GRAFA - LASTNOSTI IN OCENE

Neposredno iz definicije barvnosti $\chi(G)$ grafa G razberemo naslednje lastnosti:

(1) $\chi(G) \leq \chi(G/c) \leq card(V)$

(2) $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H/c) \leq \chi(G/c)$

(3) naj bodo G_i komponente povezanosti grafa G , potem je

$$\chi(G/c) = \max_i \chi(G_i/c)$$

(4) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, kjer je $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$

če v (2) in (3) postavimo namesto c barvanje c^{opt} $\chi(G/c^{opt}) = \chi(G)$, dobimo, po krajšem razmisleku

(2') $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

(3') $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$

Iz lastnosti (2') dobimo takoj oceno:

(5) $\omega(G) \leq \chi(G)$

kjer je $\omega(G)$ moč največjega skupka (klike, polnega podgrafa) grafa G .

Enakost v oceni (5) velja na primer za polni graf $\omega(K_n) = \chi(K_n) = n$. Po drugi strani pa je Tutte pokazal, da obstajajo grafi z $\omega(G) = 2$ in poljubno velikim $\chi(G)$. Še močnejši je Erdös-Lovászev izrek, ki pravi, da za vsak par naravnih števil m in n obstaja n-barven graf, v katerem dolžina najkrajšega cikla presega m .

Zanimivo oceno barvnosti grafa G nam daje tudi naslednji izrek (Roy, Gallai):

Naj bo $G' = (V, A(E))$ usmerjeni graf, ki ga dobimo tako, da poljubno usmerimo povezave grafa $G = (V, E)$ in naj bo m dolžina najdaljšega enostavnega sprehoda po G' , potem je

$$\chi(G) \leq m + 1$$

Königov izrek pa pravi:

$\chi(G) \leq 2$ natanko takrat, ko je G dvodelen graf.

Leta 1976 sta K. Appel in W. Haken, s pomočjo računalnika, pozitivno odgovorila na več kot sto let stari **problem štirih barv**: vsak ravninski graf je mogoče pobarvati z največ štirimi barvami. Za orientabilne ploskve višjih redov so Heawood (1890), Heffter (1891), Ringel in Youngs (1968) pokazali, da je vsak graf, ki ga lahko vložimo v orientabilno ploskev reda n 0 , mogoče pobarvati z največ

$$\lfloor (7 + \sqrt{1 + 48.n}) / 2 \rfloor$$

barvami.

Zanimivi sta tudi zvezi med barvnostjo grafa G in njegovega komplementa $\bar{G}$, ki sta ju našla Nordhaus in Gaddum:

$$\lfloor 2\sqrt{p} \rfloor \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq p + 1$$
$$p \leq \chi(G).\chi(\bar{G}) \leq \lceil ((p+1)/2)^2 \rceil$$

kjer je $p = card(V)$.

Omenimo še znani Brooksov izrek:

V povezanem nepolnem grafu G z $\Delta(G) \geq 3$ velja

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Dokaze naštetih izrekov in še nekaj drugih rezultatov najdete v (Batagelj, 1980).

ALGORITMI ZA BARVANJE GRAFOV

Raziskave na področju zahtevnosti algoritmov so pokazale, da sodi problem barvanja točk grafa med NP-polne probleme (Karp 1972, Aho, Hopcroft, Ullman 1974). Zato najbrž ne obstaja polinomsko omejen postopek za reševanje tega problema - vsi postopki, ki zagotavljajo minimalno barvanje, zahtevajo v najslabših primerih prebor skoraj vseh možnih barvanj in so pomemtakem reda p! .

Iz literature so znani postopki "usmerjenega" prebora, ki z domiselnim odmetavanjem neperspektivnih delnih barvanj lahko ponavadi v zmernem času (do 1000 s na računalniku, kot je CYBER) določijo minimalna barvanja grafov s tja do 100 točkami. Za najuspešnejše med njimi so se izkazale izpeljanke naslednje zamisli, ki jo je že leta 1949 uporabil Zykov v zvezi s kromatičnimi polinomi:

Vzemimo v grafu, ki ga želimo pobarvati poljubni nepovezani točki. Nastopita dve možnosti

- točki sta v (minimalnem) barvanju enako pobarvani;
- točki sta v (minimalnem) barvanju različno pobarvani.

Obe možnosti lahko popišemo z ustreznima transformacijama osnovnega grafa:

- če sta točki enako pobarvani, ju združimo v eno (identificiramo);
- če sta točki različno pobarvani, ju povežemo s povezavo.

Tako dobimo drevo, katerega točke so grafi, listi pa polni grafi. Stopnja polnega grafa - lista je enaka številu barv v barvanju, ki ga določa pot po drevesu od vrha do lista. Posamezni postopki se razlikujejo v načinu pregledovanja tega drevesa in v *pravilih odmetavanja neperspektivnih vej*.

Za zelo učinkoviti sta se izkazali naslednji, sicer preprosti, Hedetniemijevi pravili:

P1. če v grafu obstaja točka u, ki je povezana z vsemi ostalimi (po povezavi), potem bo v vsakem barvanju točka u imela barvo drugačno od vseh drugih točk.

P2. če v grafu obstajata točki u in v, taki da si vsi sosedi točke u tudi sosedi točke v, potem obstaja minimalno barvanje grafa, v katerem sta obe točki enako pobarvani.

Obe pravili omogočata, da točko u "izločimo" iz grafa - nadaljnjega pregledovanja.

Nekoliko drugačen pristop je ubral Christofides, ki je pokazal, da je χ-barven graf mogoče pobarvati s χ barvami tako, da najprej pobarvamo maksimalno neodvisno množico $V_1 = N(G)$ s prvo barvo, nato z drugo barvo pobarvamo maksimalno neodvisno množico $V_2 = N(G(V \setminus V_1))$, ... Seveda moramo tudi tu pregledati vse možne maksimalne neodvisne množice.

Podrobneje so tovrstni algoritmi opisani v (Godec, 1983).

Kaj pa, če je graf prevelik ali pa je cena za iskanje minimalnega barvanja s postopkom prebora prevelika? Tedaj se moramo zateči k hevrističnim postopkom barvanja in se s tem odpovedati zagotovilu, da je dobljeno barvanje minimalno; čeprav lahko slednje včasih pokažemo, tako da najdemo polni podgraf na $\chi(G)$ točkah.

Stvar je še hujša. Garey in Johnson (1976) sta pokazala naslednje: Naj $A(G)$ označuje število barv, s katerimi pobarva postopek A dani graf G. Potem najbrž (zaradi NP-polnosti) ne obstaja polinomsko omejeni postopek, ki bi zagotavljal, da je

$$A(G) / \chi(G) \leq r < 2$$

Trenutno nista znana nobena konstanta $r > 0$ in polinomsko omejeni postopek A, za katera bi veljalo

$$A(G) / \chi(G) \leq r$$

Najboljša meja je reda $p / \log p$.

Večina hevrističnih postopkov za barvanje točk grafa zadošča shemi postopkov zaporednega barvanja:

```
c := c_a
while ∃v : c(v) = a do
    izberi barvo a∈C(v/c)
    c := S(v;a/c)
```

Zato, da bi opisani postopek vedno tekel, mora biti vsakokzi $C(v/c) \neq 0$. Za to zadostuje, če je

$$\mathrm{card}(C) = \Delta(G) + 1 .$$

Postopki zaporednega barvanja se med seboj razlikujejo po pravilu izbire naslednjega kandidata za barvanje in po načinu izbire barve, s katero ga pobarvamo.

Preden nadaljujemo omenimo "v tolažbo in vzpodbudo" nekaj verjetnostnih rezultatov o postopkih zaporednega barvanja (Erdös, Grimmett, McDiarmid):

Naj bo $G(n,p)$ slučajni graf na n točkah, v katerem nastopa posamezna povezava z verjetnostjo p. S $\chi(n,p)$ in $\vartheta(n,p)$ pa označimo slučajni spremenljivki za barvnost oziroma število barv dobljenih z zaporednim barvanjem grafa $G(n,p)$. Tedaj veljata skoraj za vsak graf oceni:

$$\chi(n,p) \geq (1 - \varepsilon)\ \frac{n}{2} \log_n q^{-1}$$

in

$$\vartheta(n,p) \leq (1 + \varepsilon)\ n . \log_n q^{-1}$$

kjer je $q = 1 - p$, $p \neq 1$ in $\varepsilon > 0$.

Iz zgornjega razberemo, da velja

$$\vartheta(n,p) / \chi(n,p) \leq 2 + \varepsilon$$

Torej zaporedna barvanja v povprečju le niso tako slaba.

Povrnimo se k postopkom zaporednega barvanja. Kako lahko izberemo prosto barvo? Običajno ne razmetavamo z barvami in jih zato raje po potrebi dodajamo. Torej:

- če za dano točko obstaja prosta barva, izberemo eno izmed njih: najmanjšo, kar da reducirano barvanje; ali slučajno, kar omogoča večkratno poskušanje; ali pa najmanjkrat uporabljeno, kar da razmeroma enakomerno pobarvan graf;
- če ima točka sosede vseh dotedaj uporabljenih barv, dopolnimo množico barv z novo barvo. Včasih se temu lahko izognemo, tako da s Kempejevimi zamenami sprostimo neko barvo na sosedih dane točke.

Vsakemu zaporednemu barvanju ustreza zaporedje izbir točk, ki popisuje vrstni red barvanja. To zaporedje je v bistvu permutacija točk.

Za vsak graf G obstaja taka permutacija točk π, da da zaporedno barvanje točk v zaporedju, ki ga določa π, pri čemer vselej izbiramo najmanjšo prosto barvo, minimalno barvanje grafa G. V to se prepričamo takole: Naj bo c reducirano minimalno barvanje grafa G. Uredimo točke grafa po naraščajočih vrednostih pripadajočih barv. Dobljeno zaporedje točk določa iskano permutacijo π.

Torej je osnovno vprašanje pri zaporednih postopkih barvanja: Kako najti "ta pravo" permutacijo - določiti pravi vrstni red barvanja?

Poglejmo si nekaj možnosti:

Welsh-Powellov postopek: temelji na naslednjem receptu: permutacija π je določena s padajočim vrstnim redom stopenj d_i točk grafa G. Za WP-postopek je mogoče pokazati oceno:

Naj bo $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \ldots \geq d_p$ padajoče zaporedje stopenj točk grafa G, potem je

$$\chi(G) \leq WP(G) \leq \max \{ i : i \leq d_i + 1 \}$$

Drevesni postopki: temelje na drevesnih permutacijah: permutacija π je drevesna natanko takrat, ko za vsak $i \in [2..p]$ velja:

$$\{u : (v_i : u) \in E\} \cap \{v_k : k \in [1..i-1]\} \neq \emptyset$$

Ti postopki imajo naslednjo lepo lastnost

Drevesni zaporedni postopki barvanja so eksaktni za dvodelne grafe.

Primer drevesnega postopka je Brélazov postopek. Tu je permutacija π takole določena:

```
vse točke imajo vrednost 0 ,
točki, ki ima največjo stopnjo, postavi vrednost na 1
for i = 1,2, ... ,p do
   π(i) = točka z največjo vrednostjo, ki še ni v π
   vsem sosedom točke π(i) povečaj vrednost za 1
```

V Brélazov postopek je v bistvu vgrajena ideja takojšnjega barvanja poln(ejš)ih pografov.

Szekers-Wilfov postopek: je stranski produkt pri izpeljavi naslednje ocene za barvnost grafa:

Naj preslikava $f : G \rightarrow R$ zadošča pogojema:

(1) $H \subseteq G \Rightarrow f(H) \leq f(G)$

(2) $f(G) \geq \min_{v \in V(G)} d(v)$

potem velja

$$\chi(G) \leq f(G) + 1$$

Ena izmed funkcij f, ki zadoščajo pogojema (1) in (2) je $f(G) = max\ \lambda(G)$ - *največja lastna vrednost grafa.* Szekeres in Wilf pa sta pokazala še:

Najmanjša funkcija, ki zadošča pogojema (1) in (2) je

$$f_0(G) = \max_{H \subseteq G} \min_{v \in V(H)} d_H(v)$$

Označimo $SW(G) = f_0(G) + 1$

Ker je vedno $SW(G) \leq WP(G)$, nima smisla programirati WP-postopka. Tako nam ostaneta na izbiro še SW-postopek in Brélazov postopek. Izkaže se, da ju lahko združimo v enoten postopek odvisen od dveh parametrov r in s :

```
določi stopnje točk d[v] , v∈V ;
sw := min {d[v] : v∈V } ;
val := 0 ;  W := V ;
for i := 1 to p do
   v := argmin {d[w] : w∈W } ;
   if d[v] > sw then
      val := val + r ;  sw := d[w]
   endif ;
   d*[v] := val ;  W := W \ {v} ;
   for u∈EXT(STAR(v)) ∩ W do
      d[u] := d[u] - 1
   endfor
endfor ;
W := V ;
for i := 1 to p do
   v := argmax {d*[w] : w∈W } ;
   col[v] := selectcolor ;
   W := W \ {v} ;
   for u∈EXT(STAR(v)) ∩ W do
      d*[u] := d*[u] + s
   endfor
endfor ;
```

Gornji postopek nam pri $r = 0$ in $s \neq 0$ da Brélazov postopek; pri $r \neq 0$ in $s = 0$ pa SW-postopek; zanimive pa so tudi njune kombinacije pri neničelnih r in s .

Postopek učinkovito sprogramiramo tako, da organiziramo d in d^* v kopico (lahko celo isto).

Na računalniku DEC-10, Univerze v Ljubljani je postopek vgrajen v program COLORS programskega paketa za delo z grafi GRAPH. Program COLORS v zmernem času določi dobra barvanja grafov na do tisoč točkah in nekaj tisoč povezavami.

LITERATURA

[1] Aho A.V., Hopcroft J.E., Ullman J.D.: The design and analysis of computer algorithms. Addison Wesley, Reading, Mass. 1974

[2] Batagelj V.: Barvanja točk grafov. Seminar za numerično in računalniško matematiko IMFM-201, Ljubljana, november 1980

[3] Berge C.: Graphes et Hypergraphes (2. ed.). Dunod, Paris 1973

[4] Brélaz D.: New methods to color the vertices of a graph. CACM, *22*(1979)4, 251-256.

[5] Carré B.: Graphs and networks. Clarendon Press, Oxford 1979.

[6] Catlin R.A.: Brooks' graph-coloring theorem and the independence number. J. of comb. Theory, series B, *27*(1979), 42-48.

[7] Christofides N.: An algorithm for the chromatic number of a graph. *The Computer Journal*, *14*(1971), 38-39.

[8] Cole A.J.: The preparation of examination time-tables using a small-store computer. The Computer Journal, *7*(1964), 117-121.

[9] Corneil D.G., Graham B.: An algorithm for determining the chromatic number of a graph. SIAM J. Comput., *2*(1973), 311-318.

[10] Cvetković D., Milić M.: Teorija grafova i njene primene. Naučna knjiga, Beograd 1977.

[11] Deming R.W.: Acyclic orientations of a graph and chromatic and independence numbers. J. of Comb. Theory, series B, *26*(1979), 101-110.

[12] Garey M.R., Johnson D.S.: The complexity of near-optimal graph coloring. JACM, *23*(1976), 43-49.

[13] *GRAPH - programi. Priročnik za DEC-10*, Ljubljana, 1982.

[14] Graver J.E., Watkins M.E.: Combinatorics with emphasis on the theory of graphs. Springer-Verlag, New York 1977.

[15] Godec H.: Algoritmi za barvanje grafov. FNT, matematika, diplomsko delo 279, Ljubljana 1983.

[16] Grimmett G.R., McDiarmid C.J.H.: On colouring random graphs. Math.Proc. Camb. Phil. Soc., *77*(1975), 313-324.

[17] Harary F.: Graph theory. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

[18] *Hedetniemi S.T.: Review no. 22063. Comput. Rev.* 12(1971), 446-447.

[19] Karp R.M.: Reducibility among combinatorial problems (Complexity of Computer Computations, Miller R.E., Thatcher J.W., Ed.). Plenum Press, New York 1972, 85-103.

[20] Karp R.M.: The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms (Algorithms and Complexity, Traub J.F., Ed.). Academic Press, New York 1976, 1-19.

[21] Matula D., Marble G., Isaacson J.: Graph coloring algorithms (Graph Theory and Computing, Read R.C., Ed.). Academic Press, New York 1972, 109-122.

[22] McDiarmid C.J.H.: Colouring random graphs badly. (fotokopija iz neznanega zbornika).

[23] Melnikov L.S., Vizing V.G.: New proof of Brooks' theorem. J. of Comb. Theory, *7*(1969), 289-290.

[24] Nijenhuis A., Wilf H.S.: Combinatorial algorithms (2. ed.). Academic Press, New York 1978.

[25] Ore O.: The four color problem. Academic Press, New York 1967.

[26] Peršin O.Ju.: Algoritm opredelenija minimalnoj raskraski konečnogo grafa. Izvestija akademii nauk SSSR, Tehničeskaja kibernetika, (1973)6, 114-119.

[27] Szekeres G., Wilf H.S.: An inequality for the chromatic number of a graph. J. of Comb. Theory, *4*(1968), 1-3.

[28] Welsh D.J.A., Powell M.B.: An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. The Computer Journal, *10*(1967), 85-86.