

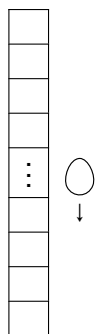
Problem dveh jajc

↓↓↓

JURE SLAK

→ Problem dveh jajc je zanimiv miselni problem, ki po urbani legendi slovi kot eno izmed vprašanj iz intervjuja za službo pri velikih računalniških podjetjih, kot sta npr. Microsoft ali Google. To vprašanje se na intervjujih najverjetneje ne pojavlja več, saj je zaradi svoje rešitve pritegnilo preveč pozornosti in s spraševanjem ne bi dosegli tega, čemur je bilo prvotno namenjeno. Oglejmo si ta problem поблиže tudi mi.

Imamo stavbo s 100 nadstropji in dve jajci. Jajci sta enaki. Če ju spustimo iz nadstropja h ali kateregakoli nižjega nadstropja, se jajci ne razbijeta, če pa ju spustimo iz nadstropja $h + 1$ ali višjega, pa se razbijeta. Z najmanj koliko spusti jajc lahko z gotovostjo najdemo nadstropje h ?



SLIKA 1.

Ilustracija problema dveh jajc.

Ilustracija problema je prikazana na sliki 1. Možne vrednosti za h so cela števila od 0 do 100. Vrednost 0 pomeni, da se jajce razbije že pri spustu iz prvega nadstropja, vrednost 100 pa, da tudi pri spustu iz stotega nadstropja še vedno ne bomo imeli izgovora za omleto.

Velikokrat pri reševanju problemov pomaga, če rešimo enostavnejšo različico problema. V našem primeru poenostavimo problem dveh jajc v problem enega jajca: zopet moramo najti tisto kritično nadstropje, pri katerem se jajce ravno še ne razbije.

Najenostavneje je, da testiramo nadstropja po vrsti: jajce spustimo iz prvega nadstropja; če se ne razbije, ga spustimo iz drugega in tako nadaljujemo, dokler se jajce ne razbije. Tako vemo, da je ravno nadstropje pod slednjim tisto, ki ga iščemo.

Toda, ali je to najboljši postopek? V najslabšem primeru bomo naleteli na zelo trdo jajce in bomo potrebovali kar 100 korakov, da lahko z gotovostjo trdimo, da se jajce nikoli ne razbije.

Poskusimo utemeljiti, da je predstavljeni postopek res najboljši. Ker imamo na voljo samo eno jajce, je našega poskušanja konec, čim se razbije. Če se naš postopek iskanja nadstropja h začne tako, da jajce spustimo iz drugega ali višjega nadstropja in se jajce razbije, ne moremo več ugotoviti, na katerem izmed nižjih nadstropij bi se jajce prvič razbilo. Sledi torej, da moramo spuščanje začeti v prvem nadstropju. Ko smo zagotovili, da je prvo nadstropje varno, pa imamo zopet enak problem, le da nam preostane še 99 nadstropij. Z enakim argumentom se prepričamo, da moramo nujno testirati drugo nadstropje in tako do vrha.

Problem enega jajca smo v celoti rešili: odgovor je 100, v najslabšem primeru moramo preveriti vsa nadstropja. To je bila ena skrajnost, druga pa je, da imamo na voljo neomejeno število jajc. V tem pri-





meru je najboljša rešitev klasična in znana: poskusimo najprej vreči jajce iz petdesetega nadstropja; če se razbije, vemo, da je iskano nadstropje med prvimi petdesetimi, če pa ne, pa med zgornjimi petdesetimi. Preostanek nadstropij zopet razpolovimo, izberemo ugodnejšo polovico in ponavljamo. Razpolavljanje nadaljujemo, dokler z gotovostjo ne poznamo h . Ta postopek imenujemo *dvojiško iskanje* ali *bisekcija*.

Koliko spustov bomo potrebovali v najslabšem primeru? Oglejmo si primer za $h = 49$. Zaporedje testiranj bi bilo naslednje:

- 50, 25, 37, 43, 46, 48, 49.

Ko se jajce tudi v 49. nadstropju ne bi razbilo, bi vedeli, da je to iskano nadstropje. Izkaže se, da je sedem testiranj tudi največ, kar jih lahko potrebujemo pri takem postopku. Če se odločamo med n možnostmi in število vsakič razpolovimo, nas torej zanima, kolikokrat moramo n možnosti razpoloviti, da bomo imeli manj kot eno preostalo možnost. Drugače povedano, iščemo najmanjši $k \in \mathbb{N}$, da velja

- $\frac{n}{2^k} \leq 1$.

Če enačbo preuredimo in logaritmiramo, dobimo

- $n \leq 2^k,$
 $\log_2 n \leq k.$

Najmanjši naravni k , da zgornja neenačba velja, je $\lceil \log_2 n \rceil$. Oznaka $\lceil x \rceil$ označuje zaokroževanje navzgor.

V našem primeru imamo 101 možnost in potrebujemo največ

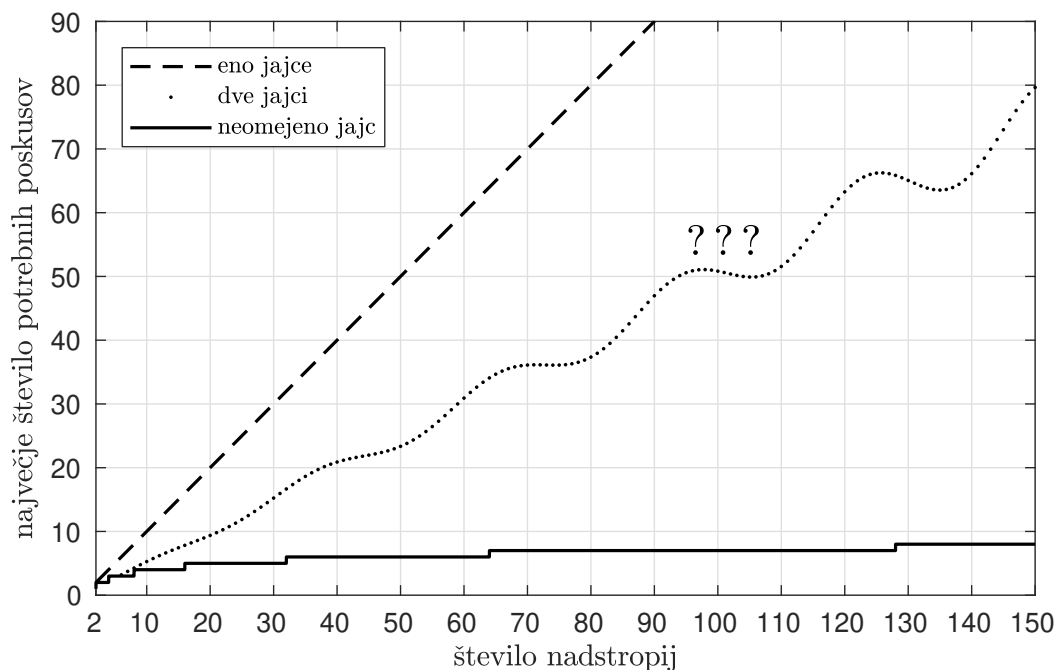
- $\lceil \log_2(7) \rceil = \lceil 6,6582 \dots \rceil = 7$

korakov.

Vprašajmo se še, koliko jajc potrebujemo v najslabšem primeru. Odgovor je podoben kot zgoraj: če se nam jajce vsakič razbije, se premaknemo nižje in vsakič potrebujemo novo jajce. Ne potrebujemo neomejenega števila jajc, temveč le sedem.

Pri reševanju problema dveh jajc smo rešili problem enega jajca in problem sedmih, osmih, devetih, ... jajc. Vemo le, da bo odgovor za problem dveh jajc nekje med 100 in sedem poskusov.

Kaj pa če imamo več ali manj kot 100 nadstropij? Slika 2 prikazuje, koliko poskusov potrebujemo za problem enega ali neomejeno število jajc.



SLIKA 2.

Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru za problem enega in neomejeno mnogo jajc pri različnem številu nadstropij. Rešitev za problem dveh jajc leži nekje vmes.

Glede problema dveh jajc vemo, da bomo gotovo potrebovali več ali enako poskusov kot z enim jajcem (drugo jajce lahko namreč ignoriramo in uporabimo enako rešitev kot pri enem jajcu) ter več ali enako poskusov kot pri neomejenem številu jajc. To ugibanje je predstavljeno na grafu s pikčasto krivuljo. Rešitev seveda ne bo taka; za 110 nadstropij seveda potrebujemo kvečjemu več poskusov kot za 100, torej mora biti rešitev naraščajoča funkcija števila nadstropij. Vijuge ponazarjajo, da nič ne vemo o *redu naraščanja* rešitve: ali bo linearen, kot pri enem jajcu (le morda z manjšim naklonom) ali pa bo logaritemski, kot rešitev za neomejeno jajc, ali pa neke vmes?

Lotimo se sedaj problema dveh jajc. Najprej poskusimo različico dvojiškega iskanja. Prvo jajce vržemo s 50. nadstropja, podobno kot pri bisekciji. Če se ne razbije, nadaljujemo s 75. nadstropjem in tako naprej. Toda če se jajce pri 50. nadstropju razbije, imamo le še eno jajce, česar ni mogoče narediti bolje kot s 49 poskusi. Ali je to res najbolje, kar lahko naredimo?

Na tem mestu naj povemo, da je mogoče problem rešiti precej bolje. Kaj če bi namesto tega, da s prvim jajcem razpolovimo prostor iskanja in ga pri tem morda žrtvujemo, prostor razdelili drugače? S prvim jajcem lahko testiramo vsako drugo nadstropje, npr. soda nadstropja. Ko se pri nekem nadstropju za-

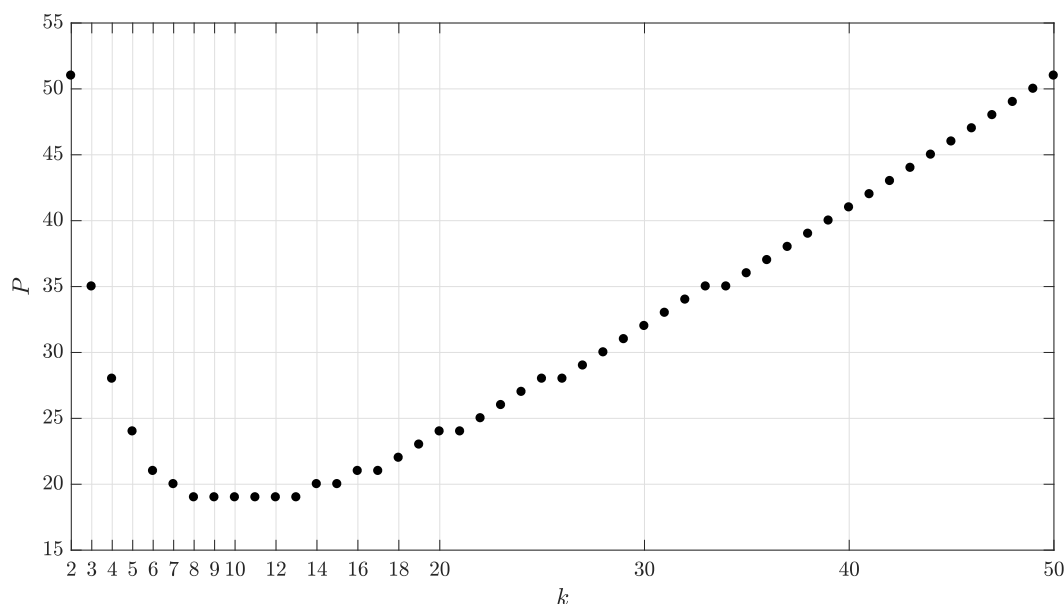
lomi, z drugim jajcem ugotovimo, ali je iskano nadstropje trenutno ali spodnje. Kaj pa če namesto po dve nadstropji, skačemo po tri nadstropja? Potem bi s prvim jajcem na tri nadstropja natančno ugotovili, kje se nahaja nadstropje h . S preostalim jajcem nato ugotovimo, katero izmed teh treh nadstropij je h , tako da zopet poskušamo od spodaj navzgor. V tem primeru potrebujemo v najslabšem primeru $33 + 2 = 35$ poskusov. To je najboljši rezultat doslej, a pot naprej že vidimo. Kaj če s prvim jajcem skačemo po štiri, po pet, po šest nadstropij? Kaj je najbolje?

Namesto da preizkušamo različne možnosti, izračunajmo optimalno rešitev. Če imamo n nadstropij in s prvim jajcem skačemo po k , bomo uporabili največ $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ poskusov s prvim jajcem in največ $k - 1$ poskusov z drugim jajcem. Najslabše možno skupno število poskusov označimo s P in torej enako

$$P = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + k.$$

Izbrati želimo tak k , da bo P čim manjši. Izračunajmo kar za vse možne k , rezultati tega izračuna so prikazani na sliki 3.

Razberemo lahko, da je optimalno število metov 19, dosežemo jih pri $k = 8, 9, 10, 11, 12$ in 13. Rezultat je pričakovan, želimo namreč čim manjšo vsoto dveh števil $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ in k , pri čemer je njun produkt kon-



SLIKA 3.

Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru v odvisnosti od velikosti skoka po nadstropjih k .



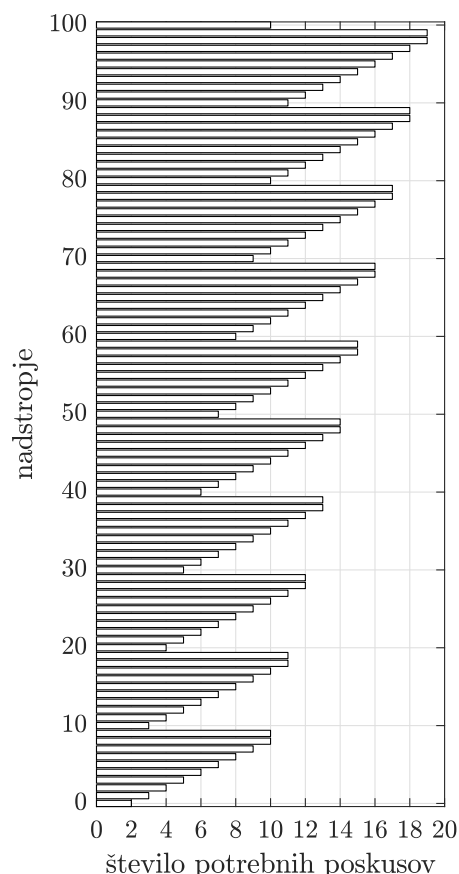
stanten. To je enako znanemu geometrijskemu problemu, kjer želimo čim manjši obseg pravokotnika z dano ploščino a – odgovor je seveda kvadrat s stranico $\sqrt{a}$.

Uporabljeno strategijo imenujemo tudi »strategija velik korak, majhen korak«. Pogosto jo uporabljamo pri reševanju problemov (problem diskretnega logaritma).

Toda 19 metov ni najboljše rešitev. Za n nadstropij potrebujemo približno $2\sqrt{n}$ metov, kar sicer izboljša tudi red rešitve, ampak rešitev ni optimalna. Če s prvim jajcem delamo različno velike korake, lahko pridemo do boljšega rezultata. To lahko vidimo, če razmislimo, koliko metov potrebujemo za vse možne vrednosti h . Če bi se jajce razbilo npr. v devetem nadstropju, bi to odkrili po desetih metih: najprej bi prvo jajce spustili iz desetega nadstropja, nato pa bi z preostalim jajcem preizkusili ostalih devet spodnjih nadstropij. Če pa bi bili jajci taki, da bi se razbili v 99. nadstropju, bi porabili deset metov s prvim jajcem in devet z drugim jajcem. Pri prvem primeru smo po enem metu morali rešiti še manjši problem velikosti devet, pri drugem primeru pa smo po desetih korakih prav tako morali rešiti problem velikosti devet. Število poskusov za vsako nadstropje je prikazano na sliki 4.

Glede na število poskusov so nadstropja jasno razdeljena v skupine po deset. Znotraj vsake skupine je najslabše, če moramo preverjati do devetega nadstropja znotraj skupine, glede na to, ali se v devetem nadstropju razbije ali ne. Vemo, ali je iskano nadstropje to ali pa eno višje (ki smo ga že preverili). Vendar, če gledamo skupine kot celote, opazimo: za spodnje skupine porabimo manj poskusov, kot za zgornje. Gotovo bi bilo bolje, če bi v vsaki skupini za najslabši primer porabili približno enako poskusov. Učeno rečemo, da uporabimo princip *minimiziranja maksimalnega obžalovanja*, kar je znan princip v teoriji odločitev in teoriji iger. Pogosto mu rečemo kar *minimaks*. Pravi, da se moramo odločiti tako, da bo naj najslabši primer čim manj slab. Uporabljamo ga tudi pri pisanju umetnih inteligenc za igranje iger, tudi v znanem alfa-beta algoritmu, s katerim lahko napišemo umetno inteligenco za igre tri v vrsto, šah ali go.

Najdimo rešitev problema dveh jajc, s tem da težimo k temu, da bo najslabši primer čim manjši. Zmanjšati želimo najslabši primer v zgornji skupini,



SLIKA 4.

Število potrebnih poskusov pri problemu dveh jajc pri strategiji, ko s prvim jajcem skačemo po deset nadstropij naenkrat.

na ta račun pa se bo povečal tisti v spodnji. Recimo, da s prvim jajcem začnemo testiranje v nadstropju ℓ . Če se jajce razbije, moramo preveriti še $\ell - 1$ nadstropij, skupaj smo porabili torej ℓ poskusov. Če se jajce ne razbije, se s prvim jajcem premaknemo v višje nadstropje. Toda katero? Premakniti se je smiselno v tisto nadstropje, če se jajce razbije, bomo v najslabšem primeru zopet imeli ℓ poskusov. Ker smo sedaj en met že porabili, se pomaknemo za $\ell - 1$ nadstropij navzgor. V najslabšem primeru za testiranje vsakega nadstropja do sedaj zopet porabimo ℓ korakov. Res, če se pri prvem metu jajce ne razbije, ga vržemo iz nadstropja $\ell + (\ell - 1)$. Če se sedaj razbije, vemo, da je kritično nadstropje h nekje med $\ell + 1$ in $2\ell - 1$. Preizkusiti moramo v najslabšem

primeru $\ell - 2$ nadstropij, torej imamo skupaj ℓ poskusov, enako kot v prvi skupini. Če pa se prvo jajce tudi v drugem poskusu ne razbije, se premaknemo še višje. Ker smo sedaj porabili že dva poskusa, se premaknemo za toliko nadstropij, da bomo v najslabšem primeru zopet potrebovali ℓ poskusov, torej za $\ell - 2$ nadstropij. S strategijo nadaljujemo in se premikamo za $\ell - 3, \ell - 4, \dots$ nadstropij, dokler se ne premaknemo le za eno. Edino preostalo vprašanje je, pri katerem ℓ začeti. Če bi začeli na $\ell = 10$ kot prej, ne bi niti prišli do 100. nadstropja. Pa zopet izračunajmo rešitev: zanima nas najmanjši ℓ , da bomo prišli do vrha stolpnice, torej, da bo veljalo

$$\ell + (\ell - 1) + (\ell - 2) + (\ell - 3) + \dots + 3 + 2 + 1 \geq 100.$$

Vsota na levi strani neenačbe predstavlja vsoto prvih ℓ naravnih števil, za katero poznamo direktno formulo, sešteje se v $\frac{\ell(\ell+1)}{2}$. Če preklapimo še na splošno število nadstropij n , dobimo neenačbo

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2} \geq n.$$

To je kvadratna neenačba, ki jo enostavno rešimo in dobimo

$$\ell \geq \frac{1}{2} (\sqrt{8n+1} - 1).$$

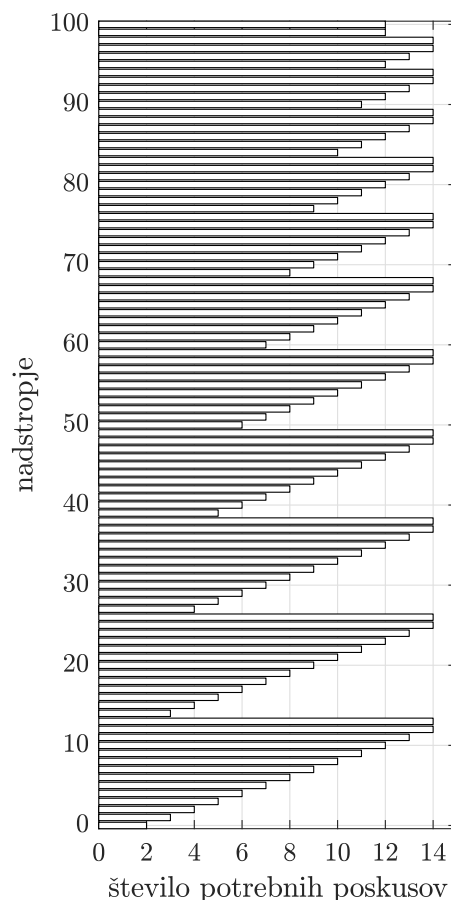
Ker je ℓ naravno število, moramo rezultat zaokrožiti navzgor, v primeru $n = 100$ dobimo

$$\ell = \left\lceil \frac{1}{2} (\sqrt{801} - 1) \right\rceil = \left\lceil \frac{28,302 - 1}{2} \right\rceil = \lceil 13,651 \rceil = 14.$$

V tem primeru so nadstropja, s katerih mečemo prvo jajce, enaka:

$$14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100.$$

Ko se pri nekem nadstropju prvo jajce razbije, drugo jajce mečemo od prejšnjega testiranega nadstropja navzgor, dokler se ne razbije. Zadnje testirano nadstropje v zgornjem zaporedju je 100, kar je zato, ker ima stolpnica le 100 nadstropij; če bi jih imela več, bi bilo naslednje nadstropje 102. Bolj enakomerno razporejenost najslabših primerov lahko vidimo tudi na grafu na sliki 5, ki je podoben tistemu na sliki 4, le da so skupine bolj enakomerne.



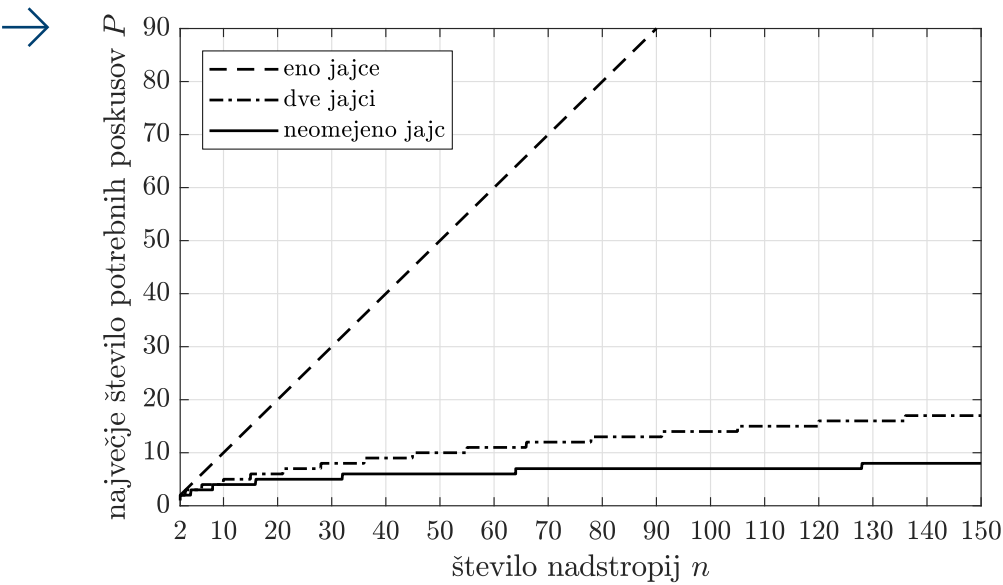
SLIKA 5.

Število potrebnih poskusov pri problemu dveh jajc pri strategiji, ko s prvim jajcem skačemo po deset nadstropij naenkrat.

Je mogoče le s 13-imi meti? Odgovor je ne. Če bi ciljali na 13 metov, bi morali prvo jajce spustiti s 13. nadstropja, sicer bi lahko za spodnja nadstropja porabili več kot 13 metov v najslabšem primeru. Zato moramo naslednjega spustiti iz $13 + 12 = 25$. nadstropja in tako naprej, s čimer ne pridemo do vrha stolpnice. Odgovor na problem dveh jajc je torej, da potrebujemo 14 metov. Poglejmo si še, koliko metov potrebujemo za stolpnico z n nadstropji. Slika 6 zamenja našo krivuljo s pravilno formulo, da je število metov P enako

$$P = \left\lceil \frac{1}{2} (\sqrt{8n+1} - 1) \right\rceil.$$





SLIKA 6.
Število potrebnih poskusov v najslabšem primeru za problem enega, dveh in neomejeno mnogo jajc pri različnem številu nadstropij.

Po pričakovanjih leži krivulja za dve jajci med problemom z enim in neomejenim številom jajc. Vidimo tudi, da si z dvema jajcema lahko pomagamo precej bolj kot z enim samim. Problem ima namreč korensko rast z n , kar je precej bolj od linearne.

Smo s tem zaključili nalogo in rešili problem? Matematično gledano ja, odgovor je 14. Pa vendar, je mogoče še bolje? Izkaže se, da je mogoče še bolje. Če uporabimo metanje prvega jajca z nadstropij

- 13, 25, 36, 46, 55, 64, 72, 79, 85, 90, 94, 97, 99, 100

bomo še vedno imeli v najslabšem primeru 14 metov, v povprečnem pa 10,31, z razliko od povprečja 10,35 pri naši strategiji. Bralcu je prepuščena pot do te strategije.

Kaj če imamo tri jajca ali pa štiri in 1000 nadstropij? Denimo, da imamo e jajc in n nadstropij, trenutno pa jajce spuščamo iz nadstropja ℓ . Zgodi se lahko eno izmed dvojega: jajce se razbije in ostane nam $e - 1$ jajc in $\ell - 1$ spodnjih nadstropij. Če pa se ne razbije, nam ostane $n - \ell$ nadstropij in e jajc. Oba problema sta manjša in ju lahko rešimo rekurzivno. Sedaj to preizkusimo za vse ℓ in vzamemo tistega, ki ima najmanjši maksimum obeh opcij, saj iščemo čim manj slab primer. Implementacija tega problema je zopet prepuščena v zabavo in izziv bralcu, spodaj pa je podana tabela pravih vrednosti za različne n in e .

n	e									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	6	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	7	4	3	3	3	3	3	3	3	3
8	8	4	4	4	4	4	4	4	4	4
9	9	4	4	4	4	4	4	4	4	4
10	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4
15	15	5	5	4	4	4	4	4	4	4
20	20	6	5	5	5	5	5	5	5	5
25	25	7	5	5	5	5	5	5	5	5
30	30	8	6	5	5	5	5	5	5	5
35	35	8	6	6	6	6	6	6	6	6
40	40	9	6	6	6	6	6	6	6	6
45	45	9	7	6	6	6	6	6	6	6
50	50	10	7	6	6	6	6	6	6	6
100	100	14	9	8	7	7	7	7	7	7
200	200	20	11	9	8	8	8	8	8	8
300	300	24	13	10	9	9	9	9	9	9
400	400	28	14	11	10	9	9	9	9	9
500	500	32	15	11	10	10	9	9	9	9
1000	1000	45	19	13	11	11	11	10	10	10

SLIKA 7.
Rezultat problema e jajc za n nadstropij

× × ×