

ANALIZA NATANČNOSTI DOLOČITVE KOORDINAT TOČK V RAVNINSKI MREŽI Z METODO MONTE CARLO

mag. Tomaž Ambrožič*

doc. dr. Goran Turk**

Izveček

Obravnavana je analiza natančnosti določitve koordinat točk v ravninski geodetski mreži, ko so opazovanja simulirana in nato izravnana z metodo Monte Carlo. Na tak način dobljeni rezultati so primerljivi z rezultati iz kovariančne matrike. Čeprav je opisana metoda računsko mnogo zahtevnejša, nudi očitno prednost: pogreški opazovanj so lahko poljubno porazdeljene in medsebojno odvisne slučajne spremenljivke. Pri klasični metodi se predpostavlja, da so pogreški neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

KLJUČNE BESEDE:
*simulacija Monte Carlo,
izravnava geodetskih
mrež*

Abstract

In this article the analysis of the accuracy of the coordinate estimation in a plane geodetic network is performed employing the Monte Carlo simulation method. Results obtained by this method are comparable with the conventional method of covariance matrix. Although the proposed method is numerically less efficient, it offers one important advantage: measurement errors may be arbitrarily distributed and mutually dependent random variables, whereas in conventional methods they are assumed to be independent normally distributed random variables.

KEYWORDS:
*Monte Carlo
simulation, geodetic
network adjustment*

1. UVOD

V članku bomo obravnavali horizontalne - ravninske geodetske mreže. Navajeni smo, da vse mere natančnosti določitve izravnanih koordinat točk v mreži izračunamo iz kovariančne matrike ocenjenih neznank $\Sigma_{\hat{x}}$. Najpogostejše uporabljene lokalne mere natančnosti so elipsa pogreškov (podana z velikostjo velike in male polosi ter smernim kotom velike polosi) in standardni deviaciji koordinat točke. Navedene mere natančnosti lahko uporabimo tudi pri projektiranju mrež, saj so odvisne samo od oblike mreže in vrste opazovanj ter njihove natančnosti.

* FGG - Oddelek za geodezijo, Ljubljana

** FGG - Oddelek za gradbeništvo, Ljubljana

V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko pri projektiranju mrež natančnost določitve izravnanih koordinat točk v mreži ocenimo na drugačen način. Opazovanja simuliramo z metodo *Monte Carlo* in jih izravnamo. Postopek mnogokrat ponovimo. Kot rezultat dobimo oblak točk okoli predpostavljene pričakovane lege točke. Če čez oblak točk položimo elipso pogreškov, ki zajame izbran odstotek točk, dobimo vsem znano lokalno mero natančnosti - elipso pogreškov.

2. METODA MONTE CARLO

Simulacije so numerično orodje, s katerim opravimo preizkuse na računalniku. Preizkus vključuje nek matematični ali logični model, ki opisuje problem, ki ga rešujemo. S simulacijami inženirji in drugi strokovnjaki rešujejo najrazličnejše probleme: obnašanje letala, delovanje telekomunikacijskega sistema, delovanje trga, vojskovanje in drugo. Poglavitna prednost simulacij je, da lahko z njimi rešujemo najrazličnejše probleme, ki jih drugače ne bi mogli rešiti. Pomanjkljivost te metode je, da ni zelo natančna, saj je njen rezultat le statistična ocena neznanega parametra neke slučajne spremenljivke. Druga pomanjkljivost simulacij je v tem, da so relativno počasen postopek.

Če simulacije izvajamo tako, da generiramo slučajne spremenljivke z določeno porazdelitveno funkcijo, jim pravimo metoda Monte Carlo. To ime se je prvič pojavilo med drugo svetovno vojno, ko so znanstveniki von Neuman, Ulam, Fermi in drugi v laboratorijih v Los Alamosu tudi s pomočjo simulacij žal uspešno skonstruirali prvo atomsko bombo. Sicer pa je ideja o generiranju slučajnih spremenljivk in njihova uporaba pri reševanju problemov bistveno starejša. Prvi dobro dokumentiran primer je opravil Comte de Buffon leta 1777, ko je v problemu, znanem kot Buffonova igla, s simulacijami določil vrednost števila π . Pozneje so generiranje slučajnih števil uporabili tudi Lord Kelvin (1901), W.S. Gosset (Student) (1908), Fermi (1930) in drugi (Kalos et al., 1986, Rubinstein, 1981). Z razvojem boljših, hitrejših računalnikov postaja metoda Monte Carlo uporabna za vse širši krog ljudi.

Omenili smo že, da metoda Monte Carlo vključuje generiranje vzorca poljubno porazdeljene slučajne spremenljivke X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$. Generiranje vzorca slučajne spremenljivke X temelji na vzorcu enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke U s porazdelitveno funkcijo $F_U(u) = u$ (za $0 \leq u \leq 1$). Vzorca povsem slučajne spremenljivke ni lahko generirati, poleg tega ima tak vzorec pomanjkljivost, da je enkrat in izračuna ne moremo ponoviti s povsem enakimi vrednostmi. Zato z računalniki običajno generiramo vzorce tako imenovanih psevdoslučajnih

števil, ki so pravzaprav zaporedja determinističnih števil z zelo veliko periodo ponovitve. Ta zaporedja imajo enake lastnosti kot zaporedja povsem slučajnih števil. Skoraj vsi računalniški programi, namenjeni računanju (na primer prevajalniki: Fortran, C, Pascal, Basic... in drugi programi: Matlab, Mathematica, Excel), vključujejo tudi "generatorje slučajnih števil", s katerimi generiramo zaporedja psevdoslučajnih števil, ki ustrezajo vzorcu slučajne spremenljivke U , ki je porazdeljena enakomerno od 0 do 1.

Vzorec poljubno porazdeljene slučajne spremenljivke oziroma vektorja lahko generiramo z različnimi metodami, ki so obširno opisane v literaturi (glej npr. Devroy, 1986). Te metode so: inverzna metoda, metoda sprejema in zavrnitve, polarna metoda, metoda trakov, mrežna metoda in druge. Najpogosteje uporabljamo inverzno metodo, ki je najprimernejša za generiranje neodvisnih slučajnih spremenljivk.

3. INVERZNA METODA GENERIRANJA VZORCA SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Vzemimo, da imamo enako velika vzorca dveh slučajnih spremenljivk. Prva, X , je porazdeljena po porazdelitvi $F_X(x)$, druga, U , pa je enakomerno porazdeljena od 0 do 1: $F_U(u) = u$ (za $0 \leq u \leq 1$). Elemente v obeh vzorcih razvrstimo po velikosti in predpostavimo, da je verjetnost, da sta slučajni spremenljivki X in U manjši od i -tega elementa ustreznega vzorca, enaka, ne glede na porazdelitev. To predpostavko v enačbi zapišemo takole:

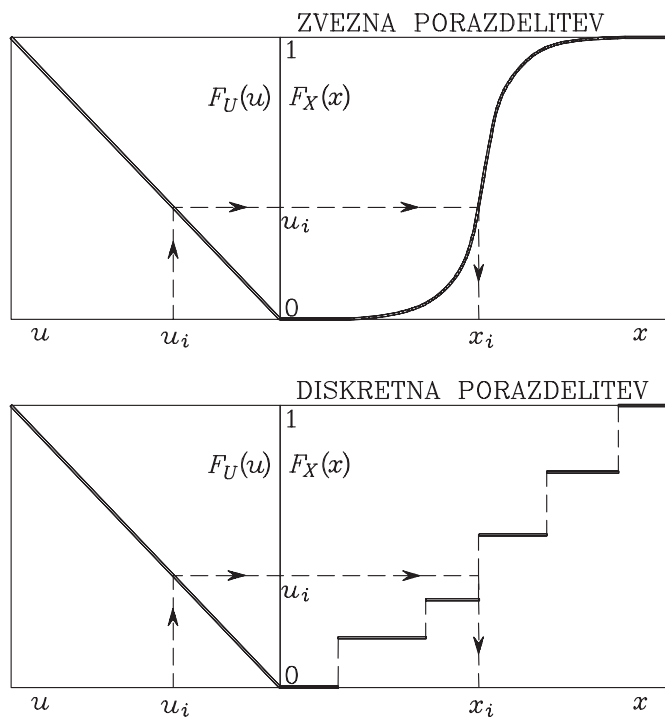
$$P[X < x_i] = F_X(x_i) = P[U < u_i] = F_U(u_i) = u_i. \quad (1)$$

Iz zadnje enačbe lahko izpeljemo izraz za določitev elementa vzorca slučajne spremenljivke :

$$F_X(x_i) = u_i \rightarrow x_i = F_X^{-1}(u_i). \quad (2)$$

Če torej poznamo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X oziroma njeno inverzno funkcijo in imamo vzorec $(u_i, i = 1, \dots, n)$ enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke U , lahko po zadnji enačbi določimo vzorec slučajne spremenljivke. Inverzno metodo nazorno prikažemo tudi grafično na sliki 1.

Slika 1: Inverzna metoda generiranja poljubno porazdeljenih slučajnih spremenljivk



4. GENERIRANJE VZORCA NORMALNO PORAZDELJENIH SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Porazdelitvene funkcije normalne porazdelitve v zaključeni obliki ne poznamo, prav tako ne poznamo njene inverzne funkcije. Zato za generiranje vzorca normalno porazdeljene slučajne spremenljivke ne moremo uporabiti analitične inverzne metode. Če računalniški program omogoča numerični izračun inverzne porazdelitvene funkcije normalne porazdelitve, lahko uporabimo inverzno metodo, četudi funkcije $F_X^{-1}(u_i)$ ne poznamo v eksplisitni obliki. Na primer: v programu Excel je funkcija $F_X^{-1}(u_i)$ vgrajena kot `norminv`, v programu Mathematica lahko problem rešimo z ukazom `FindRoot` in funkcijo `Erf`, v programu Matlab pa lahko uporabimo funkcijo `erfinv`. Tudi nekatere knjižnice podprogramov, ki jih lahko uporabimo v okviru prevajalnikov (Fortran, C in drugi), kot je na primer IMSL (IMSL Math/Library Users Manual, IMSL Inc, 2500 CityWest Boulevard, Houston, Texas 77042), vsebujejo funkcijo $F_X^{-1}(u_i)$. Če nam programska oprema ne omogoča uporabe funkcije $F_X^{-1}(u_i)$, moramo vzorec normalno porazdeljene slučajne spremenljivke generirati s kakšno drugo metodo. Za generiranje vzorca normalno porazdeljenih slučajnih

spremenljivk je zelo uporabna metoda Box in Müller (Box et al., 1958), ki spada med polarne metode generiranja slučajnih spremenljivk. To metodo pogosto predlagajo tudi v literaturi (glej na primer Press et al., 1992). Vzorec standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X izračunamo iz dveh vzorcev (u_{1i} , $i = 1, \dots, n$) in (u_{2i} , $i = 1, \dots, n$) slučajnih spremenljivk U_1 in U_2 , ki sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno od 0 do 1, po naslednji enačbi

$$x_i = \sqrt{-2 \ln u_{1i}} \sin(2\pi u_{2i}). \quad (3)$$

Opazovanja, ki jih izravnamo, ne smejo vsebovati grobih in sistematičnih pogreškov, vedno pa vsebujejo slučajne pogreške, saj so ti neizogibni. Predpostavimo, da so opazovanja porazdeljena normalno okoli srednje vrednosti $\bar{y}$ s standardno deviacijo σ . Če torej želimo simulirati opazovanja, moramo praviim vrednostim prišteti slučajni pogrešek

$$y_i = \bar{y} + x_i \sigma. \quad (4)$$

V tem izračunu lahko določimo prave vrednosti opazovanj, saj predpostavimo, da poznamo koordinate vseh točk. Iz teh koordinat lahko enolično izračunamo prave vrednosti opazovanj.

15

5. IZRAVNAVA SIMULIRANIH OPAZOVANJ

Simulirana opazovanja izravnamo, kot bi izravnali dejansko opravljena opazovanja po metodi najmanjših kvadratov $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$. kot vpeto ali kot prosto mrežo. Rezultat izravnave so izravnane koordinate novih točk v mreži. Nato ponovno simuliramo opazovanja in jih, enako kot v prejšnji simulaciji, izravnamo. Izbrano število ponovitev simulacij je odvisno od zahtevane natančnosti, s katero želimo opraviti analizo natančnosti. Večje število simulacij nam da boljšo analizo natančnosti.

Rezultate izravnave za vse simulacije lahko prikažemo tako, da narišemo izravnane koordinate točk za vse simulacije. Tako dobimo oblak točk okoli aritmetične sredine posamezne nove točke. Na osnovi tega oblaka lahko ocenimo natančnost izravnave.

6. ELIPSA POGREŠKOV ČEZ OBLAK TOČK

Elipso pogreškov položimo čez oblak točk okoli posamezne nove točke v dveh korakih. Najprej čez oblak točk položimo zaključen poligon, nato pa po metodi najmanjših kvadratov izračunamo vrednost velike in male polosi ter

smerni kot velike polosi elipse pogreškov. Na koncu iz elementov elipse pogreškov izračunamo še standardni deviaciji ocenjenih koordinat točk.

Vhodni podatek pri konstrukciji elipse pogreškov je verjetnost nahajanja izravnane točke znotraj elipse pogreškov P . Navadno uporabljamo standardno elipso pogreškov, kjer je verjetnost nahajanja izravnane točke znotraj elipse enaka 39,4% in 95-odstotno elipso pogreškov, kjer je verjetnost nahajanja izravnane točke znotraj elipse enaka 95%.

6.1 Konstrukcija zaključenega poligona čez oblak točk

Sredina oblaka točk okoli posamezne nove točke ustreza pričakovani oziroma srednji vrednosti izravnanih koordinat. Oceno za to vrednost lahko določimo z aritmetično sredino koordinat oblaka točk. Navadno aritmetično sredino lahko uporabimo, saj dobimo izravnane koordinate točk pod enakimi pogoji in tako predpostavimo, da so uteži koordinat po posameznih izravninah enake.

Območje okoli pričakovane lege točke razdelimo na enako velika območja v obliki krožnega izseka z vrhom v pričakovani legi točke, ki je približno v sredini oblaka. V našem primeru smo izbrali 36 območij, tako da vsako obsega 10° . Nato preštejemo število točk znotraj posameznega območja. Potem v posameznem območju izločimo točke, najbolj oddaljene od središča oblaka. Izločimo toliko točk, da število točk, ki ostanejo znotraj posameznega območja, ustreza privzeti verjetnosti P . Oddaljenost r_i najbolj oddaljene točke, ki ostane znotraj posameznega območja, je podatek, ki ga uporabimo pri konstrukciji zaključenega poligona in v nadaljevanju za izračun elementov elipse pogreškov. Na koncu izrišemo zaključen poligon čez oblak točk.

6.2 Izračun elementov elipse pogreškov

Vrednost velike in male polosi ter smerni kot velike polosi elipse pogreškov, položene čez zaključen poligon, lahko za posamezno novo točko izračunamo po metodi najmanjših kvadratov. To matematično zapišemo kot

$$S = \sum_{i=1}^n (r_i - r(\varphi_i))^2 = \min. \quad (5)$$

kjer je

n ... število območij oziroma krožnih izsekov (v našem primeru je $n = 36$),

r_i ... oddaljenost med središčem oblaka in poligonom v posameznem območju in

$r(\varphi)$... oddaljenost med središčem oblaka in elipso v posameznem območju.

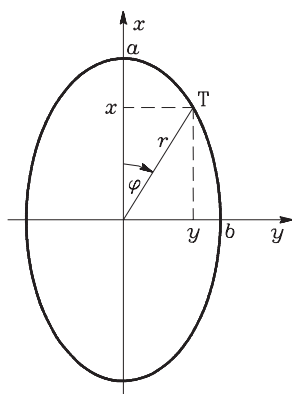
Določitev oddaljenosti med središčem oblaka in poligonom v posameznem območju smo opisali v prejšnjem poglavju. Funkcijo oddaljenosti med središčem oblaka in elipso v posameznem območju pa bomo izpeljali v nadaljevanju.

Zapišimo enačbo elipse v parametrični obliki (slika 2a):

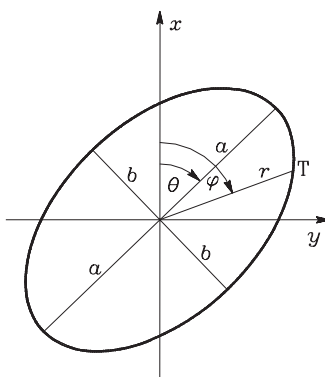
$$S = \sum_{i=1}^n (r_i - r(\varphi_i))^2 = \min. \quad (6)$$

kjer je parameter funkcija kota φ ; $t = t(\varphi)$ (slika 2a). Razdaljo od središča elipse do točke T enostavno izračunamo z

$$r(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}. \quad (7)$$



a) elipsa z navpično veliko osjo



b) nagnjena elipsa

Slika 2: Elipsa pogreškov

Iz prvega dela enačbe (6) izrazimo $\cos \varphi$ in upoštevamo enačbo (7)

$$\cos \varphi = \frac{x}{r(\varphi)} = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}. \quad (8)$$

Enačbo (8) kvadriramo, upoštevamo, da je $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ in jo uredimo

$$\begin{aligned} (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) \cos^2 \varphi - a^2 \cos^2 t &= 0 \rightarrow \\ a^2 \cos^2 t \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 t \cos^2 \varphi - a^2 \cos^2 t &= 0 \rightarrow \\ -a^2 \cos^2 t (1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \sin^2 t \cos^2 \varphi &= 0 \rightarrow \\ -a^2 \cos^2 t \sin^2 \varphi + b^2 (1 - \cos^2 t) \cos^2 \varphi &= 0 \rightarrow \\ -\cos^2 t (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Iz enačbe (9) lahko določimo funkcijo $t(\varphi)$:

$$\cos^2 t = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{ozioroma} \quad (10)$$

$$t(\varphi) = \begin{cases} \arccos \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}: & 0 < \varphi < \pi \\ 2\pi - \arccos \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}: & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (11)$$

Po enakem postopku iz drugega dela enačbe (6) izračunamo tudi

$$\sin^2 t = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (12)$$

Če enačbi (10) in (12) vstavimo v enačbo (7), dobimo

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{a^2 b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \frac{b^2 a^2 \sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (13)$$

ki jo lahko preuredimo v

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (14)$$

Ker so v splošnem elipse pogreškov okoli novih točk nagnjene za kot θ (slika 2b), dobimo iz enačbe (14) končno obliko funkcije, s katero izračunamo oddaljenost med pričakovano lego točke (sredino oblaka) in elipso:

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 (\varphi - \theta) + b^2 \cos^2 (\varphi - \theta)}}. \quad (15)$$

Če enačbo (15) vstavimo v (5), dobimo

$$S(a, b, \theta) = \sum_{i=1}^n \left(r_i - \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(\varphi_i - \theta) + b^2 \cos^2(\varphi_i - \theta)}} \right)^2 = \min. \quad (16)$$

Vrednosti a , b in θ , ki ustrezajo minimumu izraza (16), lahko določimo na več načinov. Enačbo (16) lahko lineariziramo in poiščemo minimum linearizirane enačbe na podoben način, kot to delamo pri običajni izravnavi geodetskih mrež. Pri drugem načinu poiščemo minimum funkcije iz pogojev za stacionarno točko funkcije več spremenljivk

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0. \quad (17)$$

Enačba (17) predstavlja sistem nelinearnih enačb, katerih rešitev lahko dobimo z Newtonovim postopkom. Pri našem delu smo poiskali minimum funkcije s podprogramom `Powell` iz knjižnice podprogramov `Numerical recipes` (Press et al., 1992).

Iz ocen vrednosti velike in male polosi (a in b) ter smernega kota θ velike polosi elipse pogreškov izračunamo standardni deviaciji ocen koordinat σ_y in σ_x ter kovarianco σ_{xy} . Enačbe, ki povezujejo navedene količine (Caspar, 1988), so

$$\sigma_y^2 + \sigma_x^2 = a^2 + b^2 \quad (18)$$

$$a^2 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2}, \quad (19)$$

$$b^2 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \quad \text{in} \quad (20)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}. \quad (21)$$

Tudi obratna zveza predstavlja znano transformacijo tenzorja drugega reda pri zasuku koordinatnega sistema (glej Stanek et al., 1998), ki jo lahko izpeljemo tudi iz zakona o prenosu varianc in kovarianc.

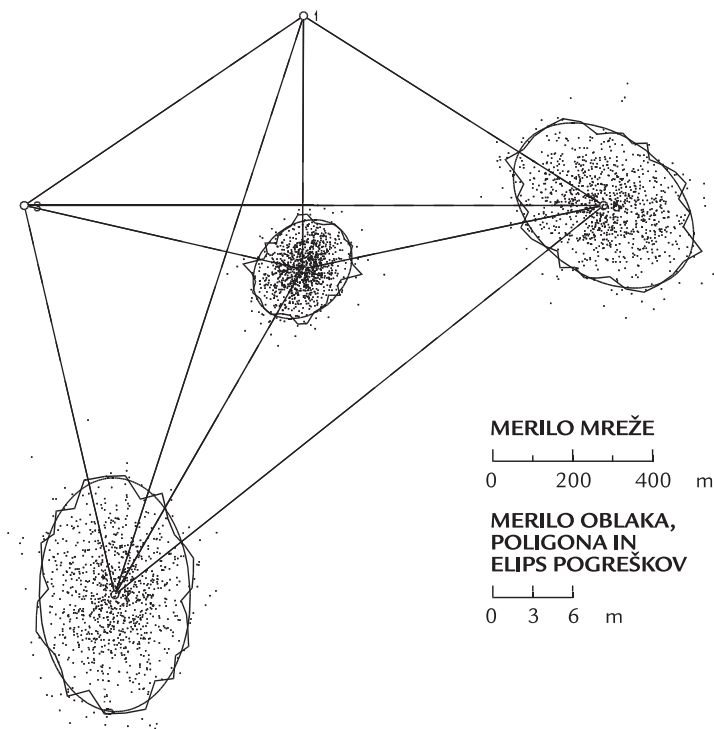
7. PRIMER UPORABE

Na izbranem primeru prikazujemo uporabo izpeljanih enačb. Tak primer smo izbrali zato, ker so velikosti in usmerjenosti elips pogreškov različne. Pripravili smo tri računalniške programe. S programom `SomGem` simuliramo

opazovanja po metodi Monte Carlo, jih izravnamo in pripravimo datoteke, ki jih uporabimo v naslednjih dveh programih. S programom *EOT* izračunamo za posamezno novo točko elemente elipse pogreškov in pripravimo datoteko, ki jo uporabimo v naslednjem programu. S programom *Oblak* pa izrišemo oblak točk, zaključen poligon in elipso pogreškov (slika 3).

V preglednicah 1 in 2 podajamo vrednosti velike in male polosi ter smernega kota velike polosi standardne in 95-odstotne elipse pogreškov za vse točke. Vidimo, da se vrednosti elementov elips pogreškov, izračunanih iz oblaka točk, z naraščanjem števila ponovitev izravnav približujejo vrednostim, izračunanim iz kovariančne matrike ocenjenih neznank Σ_{xx} . Iz obeh preglednic je tudi razvidno, da se simulirani rezultati in iz kovariančne matrike ocenjenih neznank izračunani rezultati pri 39,4-odstotni verjetnosti nahajanja točk znotraj elipse pogreškov bolj ujemajo kot pri 95,0-odstotni verjetnosti. To je posledica simulacije po metodi Monte Carlo, saj bi potrebovali veliko več ponovitev izravnave, če bi želeli večje ujemanje pri veliki verjetnosti.

Slika 3: Skica mreže z oblakom točk, zaključenim poligonom in elipso pogreškov



Standardna elipsa: 39,4% verjetnost									
Nove točke	Parameter	Σ_{xx}	Število ponovitev simulacij						
			1000	2000	5000	10000	15000	20000	30000
točka 2	a [mm]	17.8	17.5	17.9	17.8	17.8	17.7	17.6	17.7
	b [mm]	13.6	13.2	13.1	13.3	13.6	13.6	13.6	13.7
	θ [°]	39	34	35	44	40	41	40	40
	σ_x [mm]	16.3	16.3	16.5	15.8	16.2	16.1	16.1	16.2
	σ_y [mm]	15.4	14.7	14.9	15.6	15.5	15.5	15.4	15.5
točka 6	a [mm]	33	33.7	33.9	33.8	33.4	32.8	32.8	33.1
	b [mm]	23.4	21.8	22.5	23	23.3	23.4	23.6	23.5
	θ [°]	119	119	118	118	120	120	120	120
	σ_x [mm]	26.0	25.1	25.5	25.8	26.2	26.1	26.2	26.2
	σ_y [mm]	31.0	31.3	31.7	31.7	31.2	30.7	30.8	31.0
točka 7	a [mm]	35.8	34.8	35.1	34.8	35.4	35.3	35.5	35.7
	b [mm]	25.9	25.3	24.9	25.9	25.9	25.9	25.7	25.6
	θ [°]	179	179	175	179	180	180	180	178
	σ_x [mm]	35.8	34.8	35.0	34.8	35.4	35.3	35.5	35.7
	σ_y [mm]	25.9	25.3	25.0	25.9	25.9	25.9	25.7	25.6

Preglednica 1: Elementi standardne elipse pogreškov za vse nove točke

95% verjetnost									
Nove točke	Parameter	Σ_{xx}	Število ponovitev simulacij						
			1000	2000	5000	10000	15000	20000	30000
točka 2	a [mm]	43.6	41.3	42.1	44.1	44.3	44.2	44.4	44
	b [mm]	33.3	32.4	32.4	31.7	32.8	32.6	32.6	33
	θ [°]	39	45	39	37	36	37	39	39
	σ_x [mm]	39.8	37.1	38.6	40.1	40.7	40.4	40.1	40.0
	σ_y [mm]	37.7	37.1	36.6	36.7	37.2	37.2	37.7	37.7
točka 6	a [mm]	80.8	75.4	79.3	80.5	80.9	80.7	80.8	80.9
	b [mm]	57.2	52.3	54.2	56.2	58	57.8	57.9	57.7
	θ [°]	119	128	122	117	120	119	120	119
	σ_x [mm]	63.5	62.1	62.3	62.0	64.5	63.9	64.4	63.9
	σ_y [mm]	75.9	67.6	73.1	76.1	75.8	75.9	75.7	76.1
točka 7	a [mm]	87.5	87.8	84.1	86	86.8	86.6	86.3	86.7
	b [mm]	63.4	56.7	60.8	62.5	63.3	63.2	63.7	63
	θ [°]	179	179	178	177	179	178	177	177
	σ_x [mm]	87.5	87.8	84.1	85.9	86.8	86.6	86.2	86.6
	σ_y [mm]	63.4	56.7	60.8	62.6	63.3	63.2	63.8	63.1

Preglednica 2: Elementi 95-odstotne elipse pogreškov za vse nove točke

8. ZAKLJUČEK

Najpomembnejši podatek, ki ga zahteva naročnik od projektanta geodetskih storitev, je natančnost določitve izravnanih koordinat. V fazi projektiranja jo lahko izračunamo na dva načina. Na podlagi vrste in predpostavljene natančnosti opazovanj ter geometrije geodetske mreže jo lahko izračunamo iz kovariančne matrike ocenjenih neznank. Lahko pa jo izračunamo tudi iz oblaka točk izravnanih opazovanj, katere simuliramo z metodo Monte Carlo. Na predstavljenem primeru vidimo, da oba načina izračuna ocene natančnosti določitve izravnanih koordinat vodita do podobnih rezultatov.

Metoda Monte Carlo zahteva več računskih operacij, a ima prednost v tem, da lahko predpostavimo poljubno verjetnostno porazdelitev in odvisnost opazovanih količin, medtem ko je pri izravnavi opazovanj običajno predpostavljeno, da so opazovanja (neodvisne) normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Članek ima po najinem mnenju tudi pedagoški pomen, saj lahko na ta najpreprostejši način pokažemo, kaj lahko s posamezno meritvijo oziroma opazovanjem in ustrezno izravnavo določimo: *le eno točko v oblaku izravnanih koordinat točk*.

Literatura:

- Box, G. E. P., Müller, M. E.**, A note on the generation of random normal deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, 1958, letnik 29, str. 610-611
- Caspary, W. F.**, *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Kensington, School of Surveying, The University of New South Wales, 1988
- Devroy, L.**, *Non-Uniform Random Variate Generation*. New York, Springer-Verlag, 1986
- Kalos, M. H.**, Whitlock, P.A., *Monte Carlo Methods. Vol. I: Basics*, New York, John Wiley & Sons, 1986
- Press, W. H.**, Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical recipes in Fortran: the art of scientific computing*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992
- Rubinstein, R.Y.**, *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York, John Wiley & Sons, 1981
- Stanek, M., Turk, G.**, *Osnove mehanike trdnih teles*. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1998

Recenzija: mag. Tomaž Podobnikar
Stane Cerar

Prispelo v objavo: 2000-02-18