

Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

112373

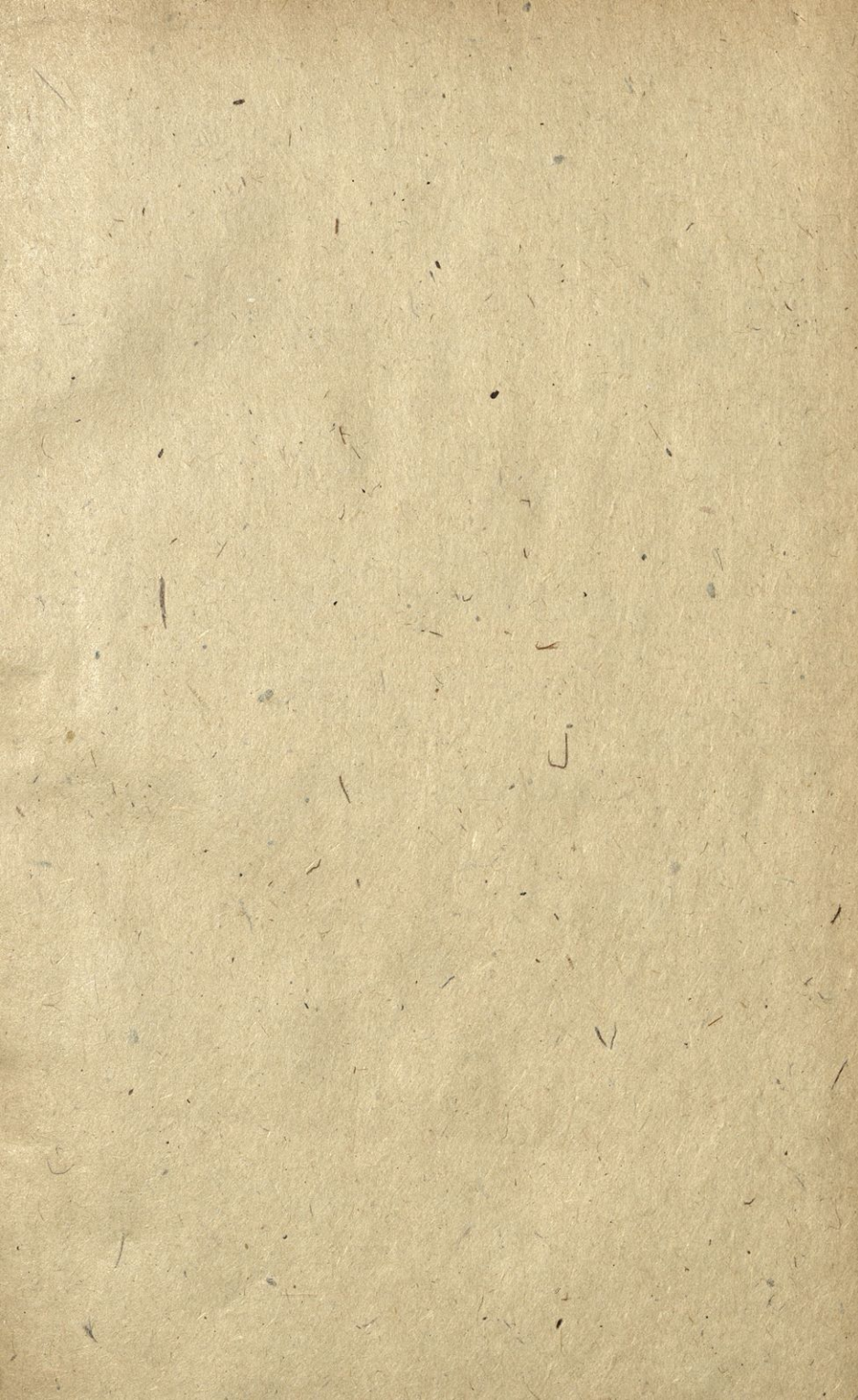
NIK

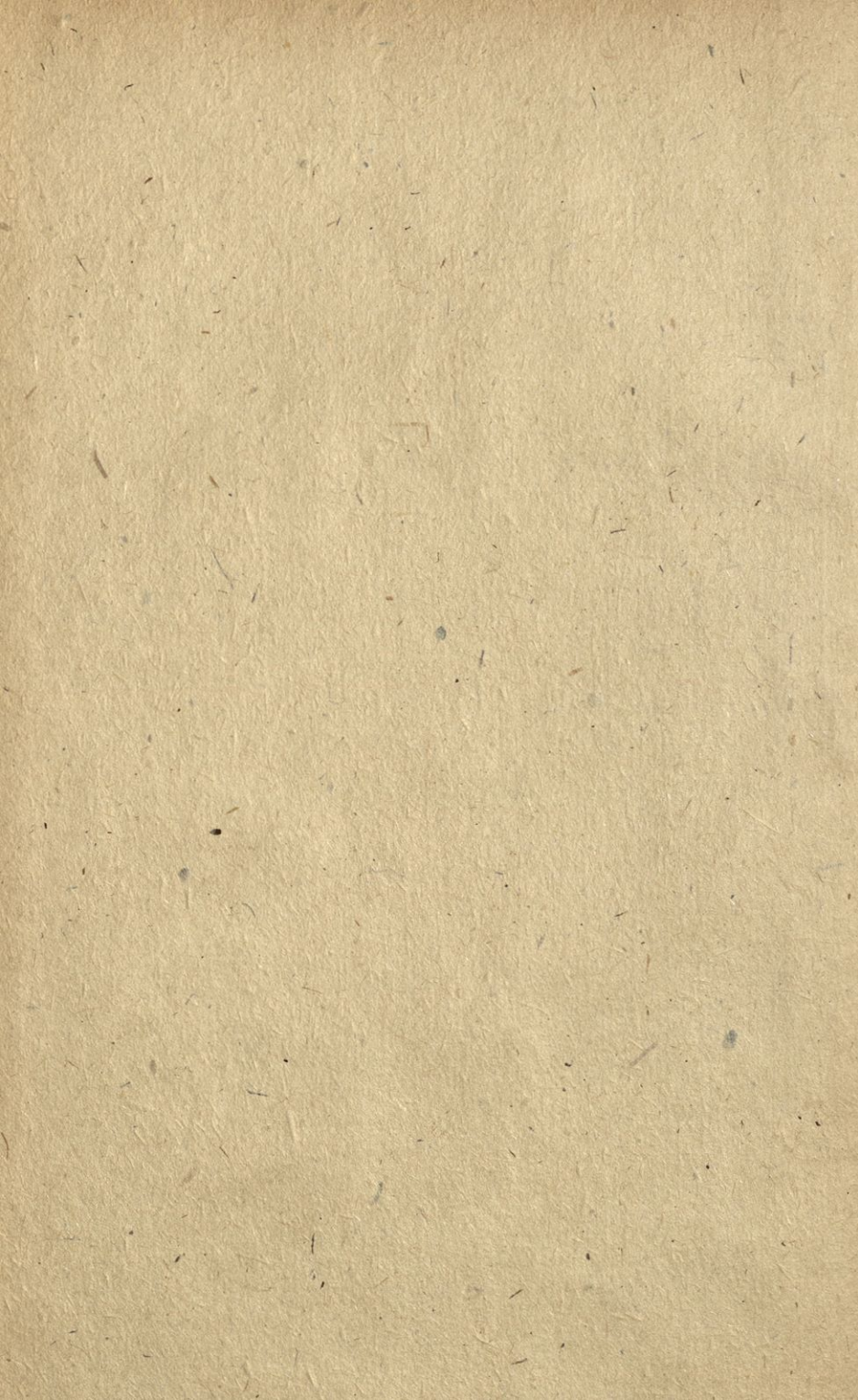
ICH

EN

EN

ETIK





Lehrbuch

der

besonderen und allgemeinen

Arithmetik

für

Lehrer-Bildungsanstalten.

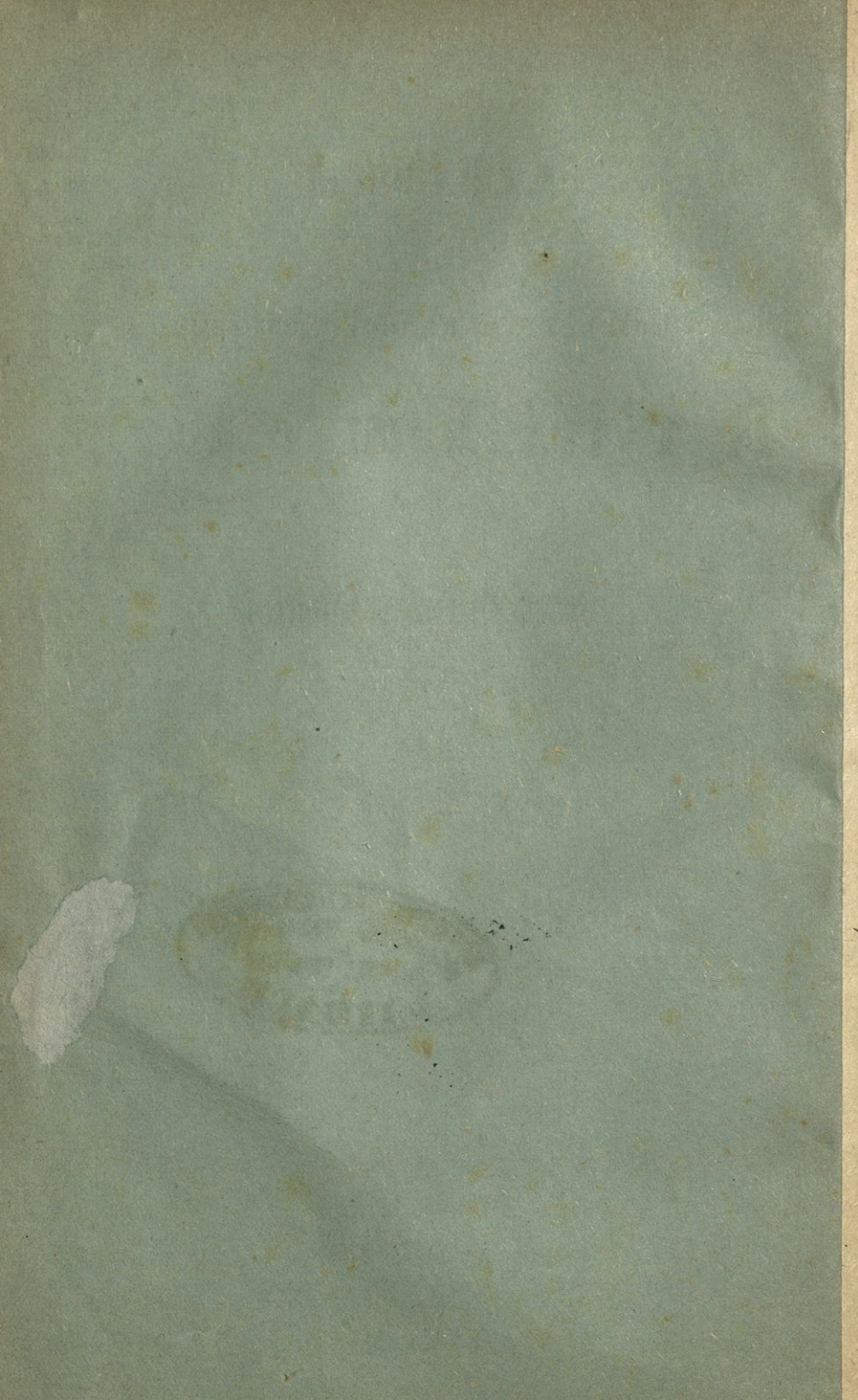
Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.



Prag, 1879.

Verlag von F. Tempsky.



Lehrbuch

der

besonderen und allgemeinen

Arithmetik

für

Lehrerbildungsanstalten.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.



Prag, 1878.

Verlag von F. Tempsky.

112373

112373



F2C 278/
1952

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist zum Unterrichtsgebrauche an Lehrerbildungsanstalten bestimmt. Für den Inhalt und die Anordnung desselben war das Organisationsstatut dieser Anstalten maßgebend.

Insofern das Statut die Bestimmung enthält, daß bei den Lehramtszöglingen in der Arithmetik hauptsächlich das Verständniß der Operationen mit besonderen Zahlen anzustreben, das Rechnen mit allgemeinen Zahlen aber mit Rücksicht auf diesen Zweck zu pflegen ist, mußte hier auf die besondere Arithmetik das Hauptgewicht gelegt und darum die allgemeine Arithmetik in beschränkterem Umfange behandelt werden, als dies in anderen Lehrbüchern über diesen Gegenstand der Fall ist. Auch erschien es dort, wo das Verfahren beim Rechnen mit besonderen Zahlen durch die Sätze der allgemeinen Arithmetik nicht schon unmittelbar gegeben ist, sondern aus denselben erst durch weitere Schlüsse abgeleitet werden soll, geboten, das Rechnen mit allgemeinen Zahlen dem mit besonderen voranzuschicken.

Die Anordnung des Lehrstoffes ist mit der durch den Lehrplan vorgezeichneten übereinstimmend; nur die wichtigsten bürgerlichen und kaufmännischen Rechnungen, welche eigentlich angewandte Verhältnissrechnungen sind, erhielten wegen des wissenschaftlichen Zusammenhanges im Lehrbuche unmittelbar nach den Verhältnissen und Proportionen ihre Stelle, während sie nach dem Lehrplane erst nach den Potenzen und Wurzeln vorzunehmen sind. Die Verschiebung dieses Theiles beim Unterrichte unterliegt jedoch keinem Anstande.

Was die Darstellung betrifft, so kann dieselbe, da das Buch für Lehramtszöglinge mehrerer Jahrgänge und verschiedener Bildungsgrade bestimmt ist, nicht durchaus gleichmäßig sein. Während anfänglich durch ausführlicheres Eingehen und genauere Angabe der Einzelheiten das Verständniß erleichtert werden muß, kann auf den späteren Stufen mehr und mehr der Selbstthätigkeit der Zöglinge Rechnung getragen werden. In größerer Ausführlichkeit behandelt das Lehrbuch solche Theile der Arithmetik, welche für das praktische Leben und für das angewandte Rechnen von Bedeutung sind. Das Materiell-Praktische hat an sich seinen Wert; zudem wird auch die formale Bildung dadurch gefördert.

Die Beweise sind möglichst einfach und übersichtlich gegeben. Sie werden nur hie und da mit Rücksicht auf die Natur der Sache in allgemeinen Zahlen, meistens aber wegen der leichteren Auffassung bloß an bestimmten Zahlenbeispielen durchgeführt. Gegen den Einwand,

dass Beweise der letzteren Art nicht die volle Einsicht in die Wahrheit der bewiesenen Sätze gewähren, bemerke ich, dass die Euklidische Geometrie, welcher doch allgemeine Evidenz und Schärfe der Beweise nachgerühmt wird, auch nicht anders als an Figurenbeispielen bewiesen. Nicht in der Allgemeinheit der dabei gebrauchten Zeichen, sondern in der Allgemeingiltigkeit der Gründe liegt die überzeugende Kraft der Beweise. Es muss übrigens als besonders zweckförderlich empfohlen werden, dass die Zöglinge, nachdem sie die im Buche mit besonderen Zahlen durchgeführten Beweise richtig erfasst haben, dieselben jedesmal auch mit allgemeinen Zahlen darstellen, und umgekehrt die allgemein geführten Beweise auch durch besondere Zahlen beleuchten.

Einen guten Theil des Unterrichtes, den dieses Buch den Lehramtszöglingen vermitteln soll, habe ich in die Übungsaufgaben gelegt. Die Erkenntnis muss nicht weniger in die Hand als in den Kopf; ein bloßes Wissen ohne Können würde den Unterricht, wie in jedem andern Lehrgegenstande, auch in der Arithmetik fruchtlos machen. Ich habe darum den theoretischen Lehren auf allen Stufen zahlreiche Aufgaben zur Übung und Anwendung folgen lassen und überdies jedem Abschnitte eine Reihe von Wiederholungsaufgaben angefügt, welche sich nicht nur auf den eben behandelten sondern auch auf alle früheren Abschnitte beziehen. Soll das Gelernte sicheres und bleibendes Eigenthum der Zöglinge werden, so muss der Unterricht zu jedem einzelnen Theile des Buches mehr als einmal zurückkehren; dazu aber sind Wiederholungsaufgaben erforderlich, an denen die Zöglinge zugleich die Ausführung der Operationen bis zur vollsten Geläufigkeit durchüben sollen.

Da nach dem Organisationsstatute durch den arithmetischen Unterricht insbesondere auch die Fertigkeit im Kopfrechnen erzielt werden soll, habe ich in allen Theilen auch auf dieses gebührende Rücksicht genommen und dem Übungsstoffe überall zahlreiche Aufgaben über das Kopfrechnen eingeflochten. Diese Aufgaben sind zur Unterscheidung durch Beifügung eines Sternchens (*) hervorgehoben worden.

Dass ich der Arithmetik einen Anhang folgen ließ, in welchem die Grundzüge der einfachen Buchführung kurz auseinandergesetzt werden, dürfte hoffentlich als eine willkommene Beigabe des Buches angesehen werden, indem dadurch für die Zöglinge die Nothwendigkeit entfällt, die bezüglichen Kenntnisse aus einem besondern Lehrbuche über Buchhaltung herzuholen.

Schließlich fühle ich mich noch angenehm verpflichtet, meinem verehrten Collegen, dem Herrn Landes Schulinspector Dr. G. Ulrich für die schätzbaren Winke, durch die er mich bei Bearbeitung dieses Buches freundlichst unterstützte, hiemit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Graz im Juli 1878.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1. Jedes Object, das aus Theilen derselben Art besteht oder aus solchen Theilen bestehend gedacht werden kann, heißt eine Größe. Eine Größe kann vermehrt werden, indem man zu den vorhandenen Theilen noch andere solche Theile hinzugibt; eine Größe kann vermindert werden, indem man von den vorhandenen Theilen einen oder mehrere derselben wegnimmt.

Die Wissenschaft von den Größen wird Mathematik genannt.

Stellt man sich eine Größe als ein aus gleichartigen Theilen zusammengesetztes Ganzes vor, so nennt man jeden dieser Theile eine Einheit, und die Größe selbst als die wiederholt gesetzte Einheit eine Vielheit. Der Ausdruck für eine solche Vielheit heißt Zahl.

Jener Theil der Mathematik, welcher sich mit der Untersuchung der Zahlen beschäftigt, heißt Arithmetik.

§. 2. Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit. Indem man zu der Einheit noch eine Einheit, zu der dadurch gebildeten Zahl wieder eine Einheit, und sofort hinzusetzt, erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen.

Die Einheit selbst, sowie jede durch das wiederholte Setzen derselben gebildete Zahl wird eine ganze Zahl genannt. Um anzugeben, daß noch keine Einheit gesetzt sei, bedient man sich des Ausdruckes Null (0). Da erst durch das Setzen der Einheit eine Zahl entsteht, so ist die Null als der Ausgangspunkt jeder Zahlenbildung zu betrachten.

In der natürlichen Zahlenreihe entsteht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer Einheit, und aus der folgenden durch Wegnehmen einer Einheit. Durch das Hinzufügen, bezüglich Wegnehmen einer Einheit von einer Zahl zur andern fortschreiten, heißt zählen; das erstere vorwärtszählen, das letztere rückwärtszählen.

Von gegebenen Zahlen durch vorgeschriebene Verbindung derselben zu einer andern gesuchten Zahl übergehen und letztere dadurch bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, zu welcher man durch das Rechnen gelangt, heißt das Resultat der Rechnung.

§. 3. Wird beim Zählen die Art der Einheit ganz unberücksichtigt gelassen, so heißen die dadurch gebildeten Zahlen unbenannte Zahlen;

wird aber beim Zählen auch die Art der Einheit ausgedrückt, so entstehen benannte Zahlen. Z. B. 5 ist eine unbenannte, 5 Gulden eine benannte Zahl; Gulden heißt die Benennung der letzteren.

§. 4. Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen; sie werden durch Ziffern bezeichnet. Z. B. 5 ist eine besondere Zahl; sie drückt eine genau bestimmte Menge von Einheiten aus, indem man sich darunter nicht mehr und nicht weniger als 5 Einheiten vorstellen kann. Rechnungen, die man mit besonderen Zahlen ausführt, können darum auch nur für einzelne besondere Fälle gelten, und müssen so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch allgemeine Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besonderen Werten der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen zu können, hat man Zahlen eingeführt, welche jede beliebige Menge von Einheiten bedeuten können, und darum allgemeine Zahlen genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellen sich die Buchstaben dar. So ist z. B. a eine allgemeine Zahl, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten vorstellen kann; a kann 1, 5, 20 oder jede andere Zahl anzeigen. Nur ist zu bemerken, daß jeder Buchstabe den Wert, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muß; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Wert, z. B. 5 an, so muß man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Wert 5 beibehalten.

In eine Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlwerte setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt substituieren.

Werden in der Arithmetik nur besondere Zahlen in Betrachtung gezogen, so heißt sie besondere Arithmetik oder Zifferrechnen; werden aber in derselben nebst besonderen auch allgemeine Zahlen betrachtet, so heißt sie allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnen.

§. 5. Zwei Zahlen, welche denselben Wert haben, so daß die eine für die andere gesetzt werden kann, heißen einander gleich. Um anzuzeigen, daß a und b gleich sind, schreibt man $a = b$; in diesem Falle ist immer auch $b = a$. Ein Ausdruck von der Form $a = b$ heißt eine Gleichung; $b = a$ ist die Umkehrung der Gleichung $a = b$.

Zwei Zahlen, welche nicht denselben Wert haben, heißen ungleich, und zwar heißt diejenige, zu der noch etwas hinzugesetzt werden muß, um die andere hervorzubringen, die kleinere, die andere die größere. Daß a größer als b ist, drückt man durch $a > b$ aus; in diesem Falle ist auch b kleiner als a , was durch $b < a$ bezeichnet wird. Ausdrücke von der Form $a > b$ oder $b < a$ nennt man Ungleichungen.

§. 6. Die Mathematik stützt ihre Lehren auf gewisse Grundwahrheiten, welche an sich klar sind und deshalb nicht weiter begründet zu

werden brauchen. Solche Grundwahrheiten werden **Grundsätze** (Axiome) genannt.

Sätze, die nicht an und für sich einleuchtend sind, deren Richtigkeit erst aus anderen, bereits als wahr anerkannten Sätzen hergeleitet werden muß, heißen **Lehrsätze**; diese müssen bewiesen werden.

Ein Satz, dessen Wahrheit sich aus der Erklärung eines Begriffes oder aus einem erwiesenen Satz unmittelbar ergibt, heißt ein **Folgsatz**.

§. 7. Allgemeine mathematische Grundsätze.

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a, \quad 3 = 3.$$

2. Das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen.

3. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben.

4. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

5. Gleiche Größen auf gleiche Weise verändert geben Gleiches.

Erster Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten mit besonderen und allgemeinen ganzen Zahlen.

I. Dekadisches Zahlensystem.

§. 8. Alle ganzen Zahlen, wie groß sie auch sein mögen, lassen sich mit einigen wenigen Wörtern genau und bestimmt benennen, und mit noch weniger Zeichen schriftlich ausdrücken. Man geht dabei allgemein von dem Grundsatz aus, daß eine bestimmte Zahl niedrigerer Einheiten stets wieder als eine neue höhere Einheit, als Einheit des nächst höheren Ranges, betrachtet wird und als solche auch einen besonderen Namen erhält. Eine auf diesem Grundsatz beruhende Darstellung aller besonderen Zahlen heißt ein Zahlensystem, und die Zahl, welche angibt, wie viele niedrigere Einheiten stets als eine höhere Einheit betrachtet werden, die Grundzahl des Zahlensystems.

Das gegenwärtig allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Grundzahl zehn (griechisch deka) ist. In diesem Systeme bilden je zehn Einheiten eines Ranges eine Einheit des nächst höheren Ranges. Man zählt, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlenamen: eins, zwei, . . . bis zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten, auch Einer genannt, bilden eine neue höhere Einheit, welche ein Zehner heißt; zehn Zehner bilden ein Hundert, zehn Hunderte sind ein Tausend, zehn Tausende ein Zehntausend, zehn Zehntausende ein Hunderttausend, zehn Hunderttausende eine Million, u. s. w. Jede Zahl ist aus Einern, Zehnern, Hunderten, . . . zusammengesetzt, und wird vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einer, Zehner, Hunderte, . . . sie enthält.

Mit dem mündlichen Ausdruck der Zahlen stimmt auch deren schriftliche Darstellung überein. Wir brauchen dazu nur die Ziffern für die ersten neun Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und das Zeichen 0, welches anzeigt, daß von einem bestimmten Range keine Einheiten vorhanden sind. Um nun durch die Zusammenstellung dieser zehn Ziffern alle möglichen ganzen Zahlen auszudrücken, nimmt man an, daß jede Ziffer an der ersten Stelle, von der Rechten an gezählt, Einer, und an jeder folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel bedeutet, als

sie an der nächstvorhergehenden Stelle gilt. Hiernach bedeutet jede Ziffer an der zweiten Stelle von der Rechten an gezählt so viele Zehner, an der dritten so viele Hunderte, an der vierten so viele Tausende u. s. w., als sie an der ersten Einer ausdrückt.

Jede Ziffer in einer geschriebenen Zahl hat einen doppelten Wert, den Wert der Figur, welcher ihr vermöge des Zeichens zukommt und daher unveränderlich ist, und den Wert der Stelle, welcher ihr vermöge der Stelle zukommt und veränderlich ist. So bedeutet z. B. in der Zahl 4404 jede vorkommende geltende Ziffer die Zahl vier, jedoch gilt dieselbe an der ersten Stelle vier Einer, an der dritten vier Hunderte, an der vierten vier Tausende. In Hinsicht des Wertes der Figur einer Ziffer pflegt man zu sagen, daß z. B. die Ziffer 7 größer ist als 4, worunter eigentlich zu verstehen ist: die Zahl, welche durch die Ziffer 7 bezeichnet wird, ist größer als die Zahl, welche man durch die Ziffer 4 ausdrückt. In Beziehung auf die Stelle der Ziffer nennt man, ebenfalls uneigentlich, diejenige Ziffer die höhere, welche eine höhere Art von Einheiten vorstellt und daher an einer weiteren Stelle gegen die Linke vorkommt.

§. 9. Zahlen richtig anschreiben und die geschriebenen richtig lesen, heißt numerieren.

Die Zahlenordnungen, welche nach dem dekadischen Zahlensysteme in den einzelnen auf einander folgenden Stellen vorkommen, lassen sich sehr bequem in Classen zu drei Stellen eintheilen, welche nach der Reihe Einer, Zehner und Hunderte enthalten. Die drei niedrigsten Stellen sind geradezu Einer, Zehner, Hunderte; in der nächstfolgenden Classe kommen Einer, Zehner, Hunderte von Tausenden vor; in der noch weiter folgenden Classe stehen Einer, Zehner, Hunderte von Millionen u. s. w. Durch diese Eintheilung der Zahlen wird die Auffassung und schriftliche Darstellung derselben wesentlich erleichtert.

Aufgaben.

Lies folgende Zahlen:

1. 2000, 7000, 5600, 2750, 5904, 1039, 5138, 2718, 38090, 27026, 80912, 12345.

2. 630427, 938824, 732084, 493220, 815500, 408010, 276939, 356805, 1246829, 538191378.

3. Der höchste Berg in Österreich ist die Ortlesspitze in Tirol, welche sich 3917 Meter hoch über der Meeresfläche erhebt.

4. Die Sonne ist 1413879mal so groß als unsere Erde.

5. Wenn der Puls bei einem gesunden Menschen in einer Minute 75mal schlägt, so macht er in einem Tage 108000, und in einem Jahre 39420000 Schläge.

6. Wenn der Durchmesser eines Kreises 1000000000 Meter lang ist, so enthält der Umfang desselben 3141592654 Meter.

Schreibe mit Ziffern folgende mit Worten ausgedrückte Zahlen:

7. Zweitausend und vierzig, fünftausend siebenhundert vier und neunzig, achttausend und drei, eintausend dreihundert und zehn, zwölftausend fünf und zwanzig.

8. Ein erwachsener Mensch athmet in einer Minute sechs-
zehnmal, in einer Stunde neunhundertsechszigmal, und in einem Tage drei und zwanzigtausend vierzigmal.

9. Das Licht legt den Weg von der Sonne bis zur Erde, der zwanzig Millionen sechshundert drei und achtzigtausend dreihundert und zehn Meilen beträgt, in acht Minuten und dreizehn Secunden zurück.

10. Wenn Jemand in einer Secunde eins zählen würde, so brauchte er, um eine Million zu zählen, elf Tage, dreizehn Stunden, sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden; um eine Billion zu zählen, braucht er ein und dreißigtausend siebenhundert und neun Jahre, zweihundert neun und achtzig Tage, eine Stunde, sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden.

II. Addition.

§. 10. 1. Zu einer Zahl a eine Zahl b addieren heißt, eine Zahl c suchen, welche so viele Einheiten enthält, als a und b zusammen. Das Zeichen der Addition ist $+$ (mehr oder plus); man schreibt demnach $a + b = c$. Die Zahlen a und b heißen Summanden, $a + b$ heißt die Summe; c nennt man den Wert der Summe.

Um die Addition zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe, von a ausgehend, um so viele Einheiten vorwärts, als ihrer b enthält; die Zahl, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe. Soll z. B. zu der Zahl 5 die Zahl 3 addiert werden, so schreitet man in der Zahlenreihe von 5 angefangen um 3 Einheiten vorwärts, wodurch man zu der Zahl 8 gelangt; es ist also $5 + 3 = 8$.

Aus der Erklärung der Addition folgt:

Ist ein Summand 0, so ist die Summe dem anderen Summanden gleich.

$$0 + a = a, \quad a + 0 = a, \quad 0 + 0 = 0.$$

Wenn mit einer bloß angezeigten Summe $a + b$, oder überhaupt mit einer Zahlenverbindung eine weitere Rechnung vorzunehmen ist, schließt man dieselbe in Klammern ein. Z. B.

$(6 + 5) + 7$ bedeutet, daß zu der Summe aus den Zahlen 6 und 5 die Zahl 7 addiert werden soll.

$6 + (5 + 7)$ bedeutet, daß zu 6 die Summe aus den Zahlen 5 und 7 zu addieren ist.

2. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, welche erhalten wird, indem man zu der Summe der ersten zwei Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert. Es ist demnach

$$a + b + c = (a + b) + c,$$

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ u. s. f.}$$

Benannte Zahlen lassen sich nur dann addieren, wenn sie gleiche Benennung haben; dieselbe Benennung hat dann auch die Summe.

Sätze über die Summen.

§. 11. Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht.

$$a + b = b + a, \quad 4 + 3 = 3 + 4;$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \dots$$

Beweis. Die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, in welcher Reihenfolge sie auch vorkommen mögen; es muß daher auch der Wert der Summe derselbe bleiben.

§. 12. 1. Wird in einer Summe einer der Summanden um eine Zahl vermehrt, so wird auch die Summe um dieselbe Zahl vermehrt.

Zu einer Summe wird also eine Zahl addiert, indem man sie zu einem der Summanden addiert.

$$(50 + 4) + 30 = (50 + 30) + 4,$$

$$(50 + 4) + 3 = 50 + (4 + 3).$$

Allgemein

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

2. Durch Umkehrung der letzten Gleichung erhält man

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b;$$

d. h. Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man die Summanden einzeln dazu addiert.

Hiernach kann auch zu einer Summe eine Summe addiert werden. 3. B.

$$(60 + 5) + (20 + 4) = (60 + 20) + (5 + 4).$$

Addition gleichnamiger Ausdrücke.

§. 13. Eine Summe, welche entsteht, indem man dieselbe allgemeine Zahl öfters als Summand setzt, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man die allgemeine Zahl nur einmal anschreibt und ihr die Zahl vorsetzt, welche anzeigt, wie vielmal die allgemeine Zahl als Summand vorkommt; 3. B.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

In dem Ausdrucke $5a$ heißt dann a die Hauptgröße und 5 der Coefficient.

Der Coefficient kann auch eine allgemeine Zahl sein; 3. B.

$$ma = a + a + a + a + \dots (m \text{ mal}).$$

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. $5a$ und $6a$, $3x$ und x . Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. $3a$ und $7b$, $5x$ und $5y$.

§. 14. Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man ihre Coefficienten addiert und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$\begin{array}{r} 3a = a + a + a \\ 4a = a + a + a + a \\ \hline 3a + 4a = a + a + a + a + a + a + a = 7a. \end{array}$$

Addition dekadischer Zahlen.

§. 15. Jede dekadische Zahl kann als eine Summe, deren Summanden beziehungsweise Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. darstellen, angesehen werden. Das Verfahren beim Addieren dekadischer Zahlen beruht daher auf den in §. 12 angeführten Sätzen, wobei übrigens zu bemerken ist, daß nur Einheiten von gleicher Rangstelle zu einander addiert werden können.

Man schreibt die Summanden so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, . . . zu stehen kommen, und addiert zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderte u. s. w. Die jedesmalige Summe setzt man, wenn sie einziffrig ist, unter die addierten Einheiten; ist aber die Summe einer Rangstelle zweiziffrig, so werden davon nur die Einer unter die eben addierten Einheiten geschrieben, die Zehner dagegen zu den Einheiten der nächst höheren Rangstelle weiter gezählt. Z. B.

$$\begin{array}{r} 1) \quad 324 = 300 + 20 + 4 \\ \quad 571 = 500 + 70 + 1 \\ \quad 895 = 800 + 90 + 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 6719 = 6 \text{ Tauf. } 7 \text{ Hund. } 1 \text{ Zehn. } 9 \text{ Ein.} \\ \quad 5348 = 5 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad \\ \quad 2864 = 2 \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14931 \quad 13 \text{ Tauf. } 18 \text{ Hund. } 11 \text{ Zehn. } 21 \text{ Ein.} \\ \quad \quad \quad 14 \text{ Tauf. } 9 \text{ Hund. } 3 \text{ Zehn. } 1 \text{ Ein.} = 14931. \end{array}$$

Beim Kopfrechnen werden zuerst die höheren und dann die niedrigeren Einheiten gezählt. Z. B.

Wie viel ist 345 und 136 ? 345 und 100 ist 445 , und 30 ist 475 , und 6 ist 481 .

Aufgaben.

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1. $a + a$. | 2. $x + x + x$. |
| 3. $2b + b$. | 4. $3m + 2m$. |
| 5. $6y + y + 4y$. | 6. $4c + 7c + 9c$. |
| 7. $3a + 5a + 7a + 9a$. | 8. $2x + 4x + 6x + 12x$. |
| 9. $(x + 3) + 5$. | 10. $(4a + 6) + 2a$. |

11. $(b + 5x) + 7x$.
 13. $(2m + 5n + 3p) + 4p$.
 15. $[(3x + 14y) + y] + 2x$.
 17. $5 + (2a + 1)$.
 19. $9m + (3m + 5n)$.
 21. $4a + [3a + (2a + 7)]$.
 23. $(a + 7) + (2a + 1)$.
 25. $5x + 2y + 8z$
 $4x + 7y + 3z$
 $8x + 5y + 6z$
12. $(5y + 2a) + 4y$.
 14. $(a + 6b + 10c) + 7a$.
 16. $[(5m + 2n) + 3m] + 6n$.
 18. $7x + (12x + 9)$.
 20. $12y + (23x + 11y)$.
 22. $x + [3x + (8x + 9y)]$.
 24. $(8b + 5c) + (3b + 4c)$.
 26. $m + 2n + 3p + 4q$
 $2m + 4n + 6p + 8q$
 $4m + 8n + 12p + 16q$

Berechne die Werte folgender Summen für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

27. $5a + 6(b + c)$.
 29. $5c + 6(a + b)$.
28. $5b + 6(a + c)$.
 30. $5(a + b) + 6c$.

Die mit einem Sternchen * bezeichneten Aufgaben sind hier und weiterhin im Kopfe zu lösen.

- 31.* a) $40 + 20$, b) $50 + 60$, c) $43 + 10$, d) $38 + 20$, e) $47 + 50$;
 32.* a) $45 + 13$, b) $67 + 21$, c) $38 + 42$, d) $57 + 45$, e) $63 + 57$;
 33.* a) $520 + 100$, b) $370 + 200$, c) $761 + 300$, d) $254 + 500$;
 34.* a) $317 + 450$, b) $436 + 324$, c) $321 + 654$, d) $827 + 173$.

- | | | | |
|---------|----------|-----------|------------|
| 35. 785 | 36. 2637 | 37. 45630 | 38. 924492 |
| 364 | 6071 | 39987 | 827726 |
| 130 | 958 | 41865 | 776462 |
| 819 | 8705 | 7986 | 61678 |

39. $73308 + 905476 + 217663 + 8978 + 544879$.

40. $369258 + 741852 + 15307 + 847941 + 403507$.

41. Addiere die folgenden Zahlen, und zwar zuerst jene der lothrechten, dann jene der wagrechten Reihen; addiere ferner die bei den lothrechten Reihen, und dann die bei den wagrechten Reihen erhaltenen Summen:

234	+	5793	+	89075	+	345206	+	298876
7896	+	10248	+	367853	+	789640	+	75665
62785	+	837034	+	956788	+	68032	+	9978
509539	+	963690	+	37932	+	4879	+	524358
791864	+	837	+	426079	+	29585	+	82057

42. Addiere die Zahlen: 8337091, 2578903, 9107053, 7905438, 9834157, 19805, 842739, 6590365.

43. Bei dem Baue eines Hauses hat man folgende Auslagen: für den Bauplatz 856 fl., für die Baumaterialien 6308 fl., für die Meisterschaften 9745 fl. und für verschiedene Arbeiten 2082 fl.; wie hoch kommt der Bau zu stehen?

44. Ein Weinland erzeugt in 5 auf einander folgenden Jahren 78506, 80253, 38975, 63428, 74070 Hektoliter Wein; wie viel in allen 5 Jahren zusammen?

45. Die Einnahmen einer Eisenbahn betrugen: im ersten Quartal 1270584 fl., im zweiten 1583614 fl., im dritten 1609375 fl., im vierten 1364227 fl.; wie viel im ganzen Jahre?

46. In einem Vierecke betragen die Winkel einzeln $73^{\circ} 12' 47''$, $88^{\circ} 40' 42''$, $67^{\circ} 39' 58''$ und $130^{\circ} 26' 33''$; wie groß ist ihre Summe?

47. Kaiser Ferdinand I. trat am 2. März 1835 die Regierung von Oesterreich an und verzichtete nach einer 13 Jahre 9 Monate langen Regierungszeit auf den Thron; wann geschah dies?

48. Schiller war am 11. November 1759 geboren und erreichte ein Alter von 45 Jahren 5 Monaten 29 Tagen; wann starb er?

49. Die Zeit von einem Vollmonde bis zum andern (synodischer Monat) beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden; wenn nun am 16. April um 8 Uhr 45 Minuten 35 Secunden Abends Vollmond ist, wann tritt der nächste Vollmond ein?

III. Subtraction.

§. 16. Die Umkehrung der Addition führt auf die Subtraction. Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahieren heißt, aus a als der Summe zweier Zahlen und b als dem einen Summanden den andern Summanden c suchen. Die Subtraction wird durch das Zeichen — (weniger oder minus) angezeigt. Man schreibt $a - b = c$ und nennt a den Minuend, b den Subtrahend und $a - b$ ihre Differenz (Rest); c heißt der Wert der Differenz.

Da im Gebiete der natürlichen Zahlen die Summe zweier Zahlen nicht kleiner sein kann als einer der Summanden, so wird auch hier vorausgesetzt, daß der Minuend nicht kleiner ist als der Subtrahend.

Aus jeder Addition zweier Zahlen, z. B. $7 + 6 = 13$, ergeben sich durch Umkehrung zwei Aufgaben der Subtraction, je nachdem außer der jedesmal gegebenen Summe 13, dem Minuend, entweder der erste Summand 7 oder der zweite 6 als Subtrahend gegeben ist. Ist als Subtrahend der erste Summand 7 gegeben, so ist zu untersuchen, wie viel man zu 7 noch addieren müsse, um 13 zu erhalten; man muß von 8 in der Zahlenreihe vorwärts zählen, bis man auf 13 kommt; die so durch Addition gefundene Zahl 6 ist der gesuchte zweite Summand, die Differenz. Ist dagegen der zweite Summand 6 als Subtrahend gegeben, so ist zu untersuchen, zu welcher Zahl man 6 addieren müsse, um 13 zu erhalten, d. i. wie viel von 13 noch übrig bleibt, wenn die hinzugezählten 6 wieder weggezählt werden; die so übrig bleibende Zahl 7 ist der gesuchte erste Summand, der Rest.

Da es aber für die Summe einerlei ist, welcher von zwei Summanden der erste oder der zweite ist, so ist es auch für die Differenz gleichgültig, ob man beim Subtrahieren die erste oder die zweite der oben angegebenen Auflösungen anwendet. Man erhält bei der ersten Aufgabe die Differenz 6 auch dadurch, daß man von 13 7 wegzählt, und bei der zweiten Aufgabe die Differenz 7 auch dadurch, daß man zu 6 so viel dazu zählt, bis man auf 13 kommt.

Hiernach kann die Subtraction zweier Zahlen a und b auf zweifache Art ausgeführt werden. Man kann in der Zahlenreihe vom Minuend a aus um so viele Einheiten zurückschreiten, als der Subtrahend b anzeigt; die Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die Differenz. Man kann aber auch in der Zahlenreihe vom Subtrahend b aus um so viele Einheiten vorwärts zählen, bis man zum Minuend a gelangt; die Zahl der dazu gezählten Einheiten ist die Differenz.

Bei benannten Zahlen müssen der Minuend und der Subtrahend gleiche Benennung haben, welche dann auch die Differenz erhält.

§. 17. Aus der Erklärung der Subtraction folgt:

1. Addiert man die Differenz zweier Zahlen und den Subtrahend, so erhält man den Minuend.

$$(a - b) + b = a, \quad b + (a - b) = a.$$

2. Subtrahiert man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden, so erhält man den zweiten Summanden.

$$(a + b) - a = b, \quad (a + b) - b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man dieselbe Zahl zu ihr addiert und von ihr subtrahiert.

$$a = (a + b) - b, \quad a = (a - b) + b.$$

4. Ist der Subtrahend dem Minuend gleich, so ist die Differenz gleich Null.

$$a - a = 0.$$

5. Ist der Subtrahend 0, so ist die Differenz dem Minuend gleich.

$$a - 0 = a, \quad 0 - 0 = 0.$$

Sätze über die Differenzen.

§. 18. Wird in einer Summe einer der Summanden um eine Zahl vermindert, so wird auch die Summe um dieselbe Zahl vermindert.

Von einer Summe wird also eine Zahl subtrahiert, indem man sie von einem der Summanden subtrahiert.

$$(70 + 8) - 20 = (70 - 20) + 8,$$

$$(70 + 8) - 5 = 70 + (8 - 5).$$

Allgemein

$$1) (a + b) - c = (a - c) + b,$$

$$2) (a + b) - c = a + (b - c).$$

§. 19. Durch Umkehrung der Gleichung 2) im §. 18 erhält man

$$a + (b - c) = (a + b) - c;$$

d. h. Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, indem man den Minuend addiert und den Subtrahend subtrahiert.

Von diesem Satze macht man beim Kopfrechnen Anwendung. Z. B.
 $357 + 96 = 357 + (100 - 4) = (357 + 100) - 4 = 457 - 4 = 453$.

§. 20. Wird der Minuend um eine Zahl vermehrt, so wird auch die Differenz um dieselbe Zahl vermehrt. Wird der Subtrahend um eine Zahl vermindert, so wird dadurch die Differenz um dieselbe Zahl vermehrt.

Zu einer Differenz wird also eine Zahl addiert, indem man sie zu dem Minuend addiert, oder von dem Subtrahend subtrahiert.

$$1) (a - b) + c = (a + c) - b,$$

$$2) (a - b) + c = a - (b - c).$$

Auch dieser Satz wird beim Kopfrechnen angewendet. Z. B.
 $97 + 85 = (100 - 3) + 85 = (100 + 85) - 3 = 185 - 3 = 182$.

§. 21. Aus der Gleichung 2) im §. 20 erhält man durch Umkehrung

$$a - (b - c) = (a - b) + c;$$

d. h. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man den Minuend subtrahiert und den Subtrahend addiert.

Anwendung beim Kopfrechnen. Z. B.

$$543 - 194 = 543 - (200 - 6) = (543 - 200) + 6 = 343 + 6 = 349.$$

§. 22. Wird der Minuend um eine Zahl vermindert, so wird auch die Differenz um dieselbe Zahl vermindert. Wird der Subtrahend um eine Zahl vermehrt, so wird dadurch die Differenz um dieselbe Zahl vermindert.

Von einer Differenz wird also eine Zahl subtrahiert, indem man sie von dem Minuend subtrahiert, oder zu dem Subtrahend addiert.

$$1) (a - b) - c = (a - c) - b,$$

$$2) (a - b) - c = a - (b + c).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt auch:

Anstatt zwei Zahlen nach einander zu subtrahieren, kann man sogleich ihre Summe subtrahieren. Z. B.

$$(628 - 48) - 52 = 628 - (48 + 52) = 628 - 100 = 528.$$

§. 23. Durch Umkehrung der zweiten Gleichung im §. 22 erhält man
 $a - (b + c) = (a - b) - c,$ $13 - (4 + 5) = (13 - 4) - 5;$

d. h. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man die Summanden einzeln subtrahiert.

Hiernach kann auch von einer Summe eine Summe subtrahiert werden. Z. B.

$$(90 + 7) - (20 + 5) = (90 - 20) + (7 - 5)$$

$$(700 + 40 + 8) - (200 + 30 + 5) = (700 - 200) + (40 - 30) + (8 - 5)$$

§. 24. Wird der eine Summand um 1, 2, 3, . . . vermehrt, so wird auch die Summe um eben so viel vermehrt. Wird der andere

Summand um 1, 2, 3, . . . vermindert, so wird auch die Summe um eben so viel vermindert. Vollzieht man daher beide Änderungen nach einander, so erhält man wieder den ursprünglichen Wert der Summe.

Daraus folgt:

Eine Summe bleibt unverändert, wenn man zu dem einen Summanden eine Zahl addiert und von dem andern Summanden dieselbe Zahl subtrahiert.

Allgemein

$$a + b = (a + m) + (b - m),$$

$$a + b = (a - m) + (b + m).$$

Anwendung beim Kopfrechnen. 3. B.

$$37 + 45 = 40 + 42 = 82,$$

$$36 + 49 = 35 + 50 = 85.$$

§. 25. Wird sowohl der Minuend als der Subtrahend um 1, 2, 3, . . . vermehrt, so wird die Differenz wegen des neuen Minuends um 1, 2, 3, . . . vermehrt, zugleich aber wegen des größeren Subtrahends um eben so viel vermindert; sie behält also ihren ursprünglichen Wert. Vermindert man Minuend und Subtrahend um 1, 2, 3, . . ., so wird die Differenz wegen des neuen Minuends um 1, 2, 3, . . . vermindert, zugleich aber wegen des kleineren Subtrahends um eben so viel vermehrt; ihr Wert bleibt demnach unverändert. Daraus folgt:

Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

Allgemein

$$a - b = (a + m) - (b + m),$$

$$a - b = (a - m) - (b - m).$$

Anwendung beim Kopfrechnen. 3. B.

$$76 - 28 = 78 - 30 = 48,$$

$$95 - 32 = 93 - 30 = 63.$$

§. 26. Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Coefficienten subtrahiert und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$5a = a + a + a + a + a$$

$$2a = a + a$$

$$\hline 5a - 2a = a + a + a = 3a.$$

Addition und Subtraction mehrgliedriger Ausdrücke.

§. 27. Sollen in einer durch die Zeichen + und — vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden, so kann man, ohne der Bestimmtheit dadurch Abbruch zu thun, die Klammern weglassen. Hiernach kann man

$$\begin{aligned} [(a + b) + c] + d &= a + b + c + d, \\ [(a - b) + c] - d &= a - b + c - d, \\ [(a - b) - c] - d &= a - b - c - d \text{ setzen.} \end{aligned}$$

Ein Ausdruck, welcher auf einander folgende Additionen und Subtractionen von Zahlen enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom. Die zu addierenden Zahlen sind die additiven, die zu subtrahierenden Zahlen die subtractiven Glieder des Ausdruckes. Ein Glied, das kein Zeichen vor sich hat, gilt als additiv.

Ein zweigliedriger Ausdruck wird insbesondere ein Binom, ein dreigliedriger ein Trinom genannt. Ein Ausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom.

§. 28. Aus den oben nachgewiesenen Sätzen über das Addieren und Subtrahieren von Summen und Differenzen und der in §. 27 festgestellten Anschreibweise mehrgliedriger Ausdrücke folgt:

1. Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addiert, indem man die Glieder desselben mit unveränderten Zeichen zu der Zahl hinzufügt. Z. B.

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \text{ (§. 12, 2)} = a + b + c \text{ (§. 27),} \\ a + (b - c) &= (a + b) - c \text{ (§. 19)} = a + b - c \text{ (§. 27).} \end{aligned}$$

2. Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahiert, indem man die Glieder desselben mit entgegengesetzten Zeichen zu der Zahl hinzufügt. Z. B.

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= (a - b) - c \text{ (§. 23)} = a - b - c \text{ (§. 27),} \\ a - (b - c) &= (a - b) + c \text{ (§. 21)} = a - b + c \text{ (§. 27).} \end{aligned}$$

§. 29. Folgesätze. 1. Jeder mit Klammern eingeschlossene Ausdruck kann ohne Klammern dargestellt werden, indem man, wenn vor der Klammer das Zeichen + steht, die Klammern ohne alle weitere Veränderung wegläßt, dagegen, wenn vor der Klammer das Zeichen - steht, allen Gliedern, die umschlossen waren, die entgegengesetzten Zeichen gibt.

Man nennt diese Umformung das Auflösen der Klammern. Z. B.

$$\begin{aligned} a - \{5b - \{3a + 2c\} - 2b\} + 2a - 4c & \\ = a - 5b + \{3a + 2c\} - 2b - (2a - 4c) & \\ = a - 5b + (3a + 2c) - 2b - 2a + 4c & \\ = a - 5b + 3a + 2c - 2b - 2a + 4c. & \end{aligned}$$

2. Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen + beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen läßt, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen - beginnt, jedem der umschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen gibt. Z. B.

$$\begin{aligned} x + 2a - 3b + 4c &= x + (2a - 3b + 4c); \\ x - 2a + 3b - 4c &= x - (2a - 3b + 4c) \end{aligned}$$

13. $(9m - 4) - 5$.
 14. $(12a - 7b) - 7a$.
 15. $\frac{1}{2}(4z - 1) - 7\frac{1}{2} - z$.
 16. $7n + 3n - 5n - 2n$.
 17. $7 + (x - 3)$.
 18. $2y + (5y - 6m)$.
 19. $6x - (2x + 5)$.
 20. $9a - (4a + 5b)$.
 21. $9a - (7a - 4b)$.
 22. $3x - (9 - x)$.
 23. $(3x + 5y) - (2x + y)$.
 24. $(9m + 13n) - (3m - 5n)$.
 25. $\begin{array}{r} 12a - 7b \\ 5a - 3b \\ \hline - + \end{array}$
 26. $\begin{array}{r} 8x - 9y \\ 4x - 8y \\ \hline \end{array}$

27. $\begin{array}{r} 17m - 15n + 13p \\ 12m - 14n + 10p \\ \hline \end{array}$
 28. $\begin{array}{r} 9a + 8b - 7c \\ 2a + 8b - 6c \\ \hline \end{array}$
 29. $\begin{array}{r} 23a - 26b + 19c - 7d \\ 18a + 14b - c + 8d \\ \hline \end{array}$
 30. $\begin{array}{r} 15u + 38x - 9y - 21z \\ 8u + 42x + 9y - 11z \\ \hline \end{array}$

31. $(6x - 17y) + (9x - 11y - (7x - 20y))$.
 32. $(27a - 18b + 15c) - (20a + 2b - 15c) + (8a - 5b + 30c)$
 33. $(a + b) - [a - \frac{1}{2}x - (b - a)\frac{1}{2}]$.
 34. $2x - \frac{1}{2}(3a + 4x) - (4x - 1)\frac{1}{2} - (x - 2a - 2)$.
 Bestimme die Werte folgender Ausdrücke für $a = 4$, $b = 3$:
 35. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
 36. $8a + (7b - 5a) - \frac{1}{2}(4b - 2a) - b\frac{1}{2}$;
 37. $8a + (7b - 5a) - \frac{1}{2}4b - (2a - b)\frac{1}{2}$;
 38. $(8a + 7b) - \frac{1}{2}5a - (4b - 2a) - b\frac{1}{2}$.

- 39.* a) 70 - 20, b) 140 - 50, c) 54 - 20, d) 81 - 40, e) 187 - 50;
 40.* a) 59 - 47, b) 65 - 24, c) 167 - 53, d) 73 - 44, e) 715 - 69;
 41.* a) 340 - 200, b) 770 - 400, c) 843 - 500, d) 667 - 300;
 42.* a) 865 - 340, b) 598 - 324, c) 528 - 461, d) 952 - 507;

Berechne mit Anwendung des Satzes im §. 25:

- 43.* a) 314 - 95, b) 248 - 73, c) 477 - 197, d) 632 - 303.

Berechne mit Anwendung des Satzes in §. 24:

44. a) 137 + 29, b) 225 + 198, c) 367 + 402, d) 543 + 290.
 45. $\begin{array}{r} 785 \\ 261 \\ \hline \end{array}$ 46. $\begin{array}{r} 6318 \\ 4165 \\ \hline \end{array}$ 47. $\begin{array}{r} 5043 \\ 1827 \\ \hline \end{array}$ 48. $\begin{array}{r} 91737 \\ 8264 \\ \hline \end{array}$
 49. $\begin{array}{r} 78118 \\ 43489 \\ \hline \end{array}$ 50. $\begin{array}{r} 43070 \\ 36548 \\ \hline \end{array}$ 51. $\begin{array}{r} 123456 \\ 78907 \\ \hline \end{array}$ 52. $\begin{array}{r} 302858 \\ 190579 \\ \hline \end{array}$

53. 471708 - 345725. 54. 870194 - 401896.
 55. 3660791 - 877553. 56. 6092743 - 5694146.
 57. (837145 + 24093) - 618814.
 58. (732801 - 93786) - 48079.

59. Addiere die Zahlen 650890, 126604, 531899, 863925, und subtrahiere von der Summe nach und nach die ersten drei Summanden; wie groß ist der Rest?

60. Subtrahiere von 4736256 die Zahl 789376, von der Differenz wieder 789376, und sofort 6 mal.

61.	Von der Zahl	731542
	sind zu sub-	82591
	trahieren die	72859
	Zahlen	127986
		231578
	Rest	215528

Wenn von einer gegebenen Zahl zwei oder mehrere Zahlen zu subtrahieren sind, so addirt man diese Zahlen und subtrahirt ihre Summe von der gegebenen Zahl. Man kann übrigens sehr leicht mit der Addition der zu subtrahierenden Zahlen zugleich die Subtraction von dem gegebenen Minuend verbinden. Man addirt nämlich zuerst die Einer aller zu subtrahierenden Zahlen und sucht, wie viel man zu ihrer Summe 24 noch addieren müsse, um die nächste höhere Zahl zu bekommen, welche an der Stelle der Einer 2 hat, d. i. um 32 zu erhalten; dann verfährt man ebenso mit den Zehnern, Hunderten u. s. w. Dabei spricht man: 8, 14, 23, 24 und 8 ist 32, bleibt 3; 3, 10, 18, 23, 32 und 2 ist 34, bleibt 3; u. s. f.

62. $401894 - (139214 + 91078 + 35709 + 102775).$

63. $5404791 - (879356 + 937885 + 704799 + 689557).$

64. $3924623 - (1572809 + 379886 + 1027795)$

$- (236976 + 187595 + 229868).$

65. Im Jahre 1875 zählte man seit der Erfindung der Dampfmaschinen 176 Jahre, seit der Erfindung der Buchdruckerkunst 435 Jahre und seit der Erfindung des Papiers 624 Jahre; in welchem Jahre geschah jede dieser Erfindungen?

66. Der Mont Blanc in Savoyen ist 4632^m, die Ortlesspitze in Tirol 3917^m hoch; wie viel ist der erste höher als der zweite?

67. Ein Vater hinterläßt dem älteren seiner beiden Söhne 6840 fl., dem jüngern um 1580 fl. weniger; wie viel bekommen beide Söhne zusammen?

68. Der Mond ist der Erde nicht immer gleich nahe; seine kleinste Entfernung von derselben ist 48020 Meilen, die größte 54680 Meilen; wie viel ist er im ersten Falle der Erde näher als im zweiten?

69. Das Flußgebiet der Donau beträgt 14423 □ Meilen, jenes des Rheins 3598, der Elbe 2800, der Oder 2072 □ Meilen; um wie viel ist das Gebiet der Donau größer als das der drei übrigen Flüsse zusammen?

70. Wenn man die Oberfläche unserer Erde mit 9261238 geogr. □ Meil. annimmt, und wenn davon auf die heiße Zone 3692978 □ Meil., auf jede der beiden kalten Zonen 384084 □ Meilen entfallen; welchen Flächenraum nimmt jede der beiden gemäßigten Zonen ein?

71. Die geographische Breite von Prag ist 50° 5' 20'', von Wien 48° 12' 35'', von Graz 47° 4' 2'', von Triest 45° 38' 8''; wie viel Breitengrade liegt Prag nördlicher als jede der drei anderen Städte?

72. Goethe starb am 28. März 1832 in einem Alter von 82 Jahren 7 Monaten; wann war er geboren?

73. Kaiser Franz Josef I. wurde am 18. August 1830 geboren und bestieg am 2. December 1848 den österreichischen Thron; a) wie alt war er damals? b) wie alt ist er heute? c) wie lange regiert er?

IV. Multiplication.

§. 31. Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplicieren heißt, a so oft als Summand setzen, als b Einheiten enthält. Man nennt a den Multiplicand, b den Multiplikator und beide Factoren; die Zahl aber, welche man durch das Multiplicieren erhält, das Product. Das Product ist demnach eine Summe gleicher Summanden; der Multiplicand ist einer dieser gleichen Summanden; der Multiplikator zeigt an, wie viele solche Summanden gesetzt werden sollen. Das Product aus dem Multiplicand a und dem Multiplikator b bezeichnet man durch $a \times b$, oder $a \cdot b$ (d. i. a b mal), oder, wenn beide Factoren allgemeine Zahlen sind, auch bloß durch $a \cdot b$.

Das Product zweier ganzer Zahlen wird auch ein Vielfaches des Multiplicands genannt. Z. B. $12 = 4 \cdot 3$; 12 ist das 3fache von 4.

Aus der Erklärung der Multiplication folgt:

a) Ist der Multiplicand 1, so ist das Product dem Multiplikator gleich.

$$1 \cdot a = a.$$

b) Ist der Multiplicand 0, so ist auch das Product 0.

$$0 \cdot a = 0.$$

c) Der Multiplikator ist immer eine unbenannte Zahl. Der Multiplicand kann unbenannt oder benannt sein; im letzteren Falle hat das Product mit dem Multiplicand gleiche Benennung.

d) Nach der obigen Erklärung hat das Multiplicieren nur dann einen Sinn, wenn der Multiplikator eine ganze Zahl und größer als 1 ist.

2. Unter dem Producte mehrerer Zahlen versteht man das Product, welches erhalten wird, indem man das Product der ersten zwei Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl u. s. w. multipliciert. Hiernach ist

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= (ab) \cdot c, \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d, \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Sätze über die Producte.

§. 32. Ein Product bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht.

Es seien z. B. 5 und 3 die beiden Factoren; zerlegt man 5 in fünf Einheiten, die in einer wagrechten Reihe anschaulich gemacht werden, und bringt 3 solche Reihen unter einander an,

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

so erhält man offenbar gleichviel, ob man die Einheiten aller wagrechten oder jene aller lothrechten Reihen zusammenzählt. Zählt man die Einheiten der wagrechten Reihen, so erhält man 5 Einheiten 3 mal, oder $5 \cdot 3$; zählt man die Einheiten der lothrechten Reihen, so bekommt man 3 Einheiten 5 mal, oder $3 \cdot 5$. Es ist daher $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

Allgemein ist

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Der Satz gilt auch für jede beliebige Zahl von Factoren. Da nämlich in dem Producte mehrerer Factoren je zwei auf einander folgende Factoren bei ungeänderter Stellung der übrigen vertauscht werden dürfen, so kann durch wiederholtes Vertauschen zweier solcher Factoren jeder Factor an jede vorgeschriebene Stelle gebracht werden. So ist z. B. für drei Factoren

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a = b \cdot c \cdot a = b \cdot a \cdot c.$$

Es ist demnach auch bei mehreren Factoren für das Product gleichgültig, in welcher Ordnung dieselben multipliciert werden.

Zusätze. a) Damit dem obigen Satze über die Vertauschbarkeit der Factoren allgemeine Gültigkeit gewahrt bleibe, muß man auch $1 \cdot a = a \cdot 1$ und $0 \cdot a = a \cdot 0$ annehmen dürfen. Dadurch erhalten dann auch die Ausdrücke $a \cdot 1$ und $a \cdot 0$, welche nach der im §. 31 gegebenen Erklärung der Multiplication keinen Sinn haben, ihre ganz bestimmte Bedeutung. Es ist nämlich

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ und } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ d. h.}$$

1. Eine Zahl mit 1 multipliciert gibt sich selbst zum Producte.

2. Eine Zahl mit 0 multipliciert gibt 0 zum Producte.

b) Der Coefficient kann als Factor der Hauptgröße, vor welcher er steht, betrachtet werden.

$$3a = a + a + a = a \cdot 3 = 3 \cdot a.$$

§. 33. Aus dem vorhergehenden Satze folgt:

1. Ein Product wird mit einer Zahl multipliciert, indem man einen Factor damit multipliciert.

$$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc).$$

3. B. $(20 \cdot 4) \cdot 5 = (20 \cdot 5) \cdot 4 = 20 \cdot (4 \cdot 5).$

Folgesatz. Soll eine Zahl mit zwei Zahlen multipliciert werden, so darf man sie entweder mit denselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich mit ihrem Producte multiplicieren.

2. Eine Zahl wird mit einem Producte multipliciert, indem man sie mit dem einen Factor und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c = (ac) \cdot b.$$

3. B. $8 \cdot (10 \cdot 3) = (8 \cdot 10) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot 10.$

§. 34. 1. Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden damit multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= (a + b) + (a + b) + (a + b) + \dots \text{(c mal)} \\ &= a + a + a + \dots \text{(c mal)} + b + b + b + \dots \text{(c mal)} \\ &= ac + bc. \end{aligned}$$

3. B. $(30 + 6) \cdot 7 = 30 \cdot 7 + 6 \cdot 7,$
 $(200 + 80 + 3) \cdot 5 = 200 \cdot 5 + 80 \cdot 5 + 3 \cdot 5.$

2. Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Minuend und den Subtrahend damit multipliciert und das zweite Product vom ersten subtrahiert.

$$(a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (a - b) \cdot c &= (a - b) + (a - b) + (a - b) + \dots \text{(c mal)} \\ &= [a + a + a + \dots \text{(c mal)}] - [b + b + b + \dots \text{(c mal)}] \\ &= ac - bc. \end{aligned}$$

Anwendung beim Kopfrechnen. 3. B.

$$87 \cdot 2 = (90 - 3) \cdot 2 = 90 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 180 - 6 = 174.$$

§. 35. Aus der Umkehrung der Gleichungen des §. 34 folgt

$$\begin{aligned} ac + bc &= (a + b) \cdot c, \\ ac - bc &= (a - b) \cdot c, \end{aligned}$$

d. h. Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden addiert oder subtrahiert, indem man bezüglich die Summe oder Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciert.

Diese Operation nennt man das Herausheben des gemeinschaftlichen Factors.

§. 36. 1. Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man sie mit jedem Summanden multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Beweis. $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a$ (§. 32) $= ba + ca$ (§. 34, 1)
 $= ab + ac$ (§. 32).

3. B. $68 \cdot (50 + 3) = 68 \cdot 50 + 68 \cdot 3.$

2. Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliciert, indem man sie mit dem Minuend und dem Subtrahend multipliciert und von dem ersten Producte das zweite subtrahiert.

$$a \cdot (b - c) = ab - ac.$$

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Von diesem Satze wird manchmal beim Zifferrechnen vortheilhafter Gebrauch gemacht. Z. B.

$$346 \cdot 299 = 346 \cdot (300 - 1) = 346 \cdot 300 - 346 \cdot 1,$$

$$758 \cdot 994 = 758 \cdot (1000 - 6) = 758 \cdot 1000 - 758 \cdot 6.$$

Producte gleicher Factoren.

§. 37. Ein Product, dessen Factoren einander gleich sind, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man nur einen Factor anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie vielmal derselbe vorkommt; z. B.:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5.$$

Ein Product gleicher Factoren heißt eine Potenz; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, auch bloß Exponent, und der Factor, der so oft vorkommt, als der Exponent anzeigt, die Basis oder Grundzahl. In der Potenz a^m , welche gelesen wird: „a zur m ten“ (Potenz erhoben) oder „a mit m potenziert“, ist a die Basis, m der Exponent. Die zweite Potenz a^2 nennt man insbesondere auch das Quadrat, die dritte a^3 den Cubus von a.

Z. B.

$$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000, \text{ u. s. w.}$$

Jede Zahl a wird als die erste Potenz von a angesehen; also $a = a^1$, $10 = 10^1$.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Übersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Basis enthält und dann zu immer höheren Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt der Ausdruck fallend, im zweiten steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet die Form:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

§. 38. Potenzen derselben Basis werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^5 \cdot a^3 = aaaaa \cdot aaa = aaaaaaaaa = a^8.$$

Allgemein

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Multiplication mehrgliedriger Ausdrücke.

§. 39. 1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl

multipliziert und den einzelnen Producten die Zeichen der Glieder des Multiplicands gibt.

$$(a - b - c + d - e) \cdot f = af - bf - cf + df - ef.$$

2. Eine Zahl wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliziert, indem man sie mit jedem Gliede desselben multipliziert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem sie aus der Multiplication mit additiven oder subtractiven Gliedern hervorgehen.

$$a(b - c - d + e - f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliziert, indem man den ganzen Multiplicand, d. i. jedes Glied desselben, mit jedem Gliede des Multiplikators multipliziert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichlichen Factoren gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

$$(a - b + c)(d - e - f) = ad - bd + cd - ae + be - ce - af + bf - cf.$$

Die Richtigkeit dieser drei Lehrsätze ergibt sich aus §§. 34 und 36.

Folgesatz. Insbesondere erhält man

$$1) (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2;$$

d. h. Das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen, bezüglich vermehrt oder vermindert um das doppelte Product derselben.

$$2) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

d. h. Das Product aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

§. 40. Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplikators Theilproducte, welche eben so geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, daß ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 3a - 4 \text{ Multiplicand} \\ 3a^2 - 7a - 5 \text{ Multiplikator} \\ \hline 12a^4 - 9a^3 - 12a^2 \\ \quad - 28a^3 + 21a^2 + 28a \\ \quad \quad + 20a^2 - 15a - 20 \\ \hline 12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20 \text{ Product.} \end{array}$$

§. 41. Aus den Sätzen der vorhergehenden §§. lassen sich für die Bestimmung des Productes von irgend zwei Gliedern beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenfassen:

1. Rücksichtlich des Zeichens ist das Product zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem diese Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

2. Der Coefficient des Productes zweier Glieder ist das Product aus den Coefficienten dieser Glieder; denn

$$3a \cdot 4b = 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab.$$

3. Die Hauptgröße des Productes zweier Glieder erhält man, indem man die Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, (in alphabetischer Ordnung) neben einander stellt, und bei Potenzen derselben Basis die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Multiplication dekadischer Zahlen.

§. 42. Eine dekadische Zahl wird mit 10, 100, 1000, . . multipliziert, indem man ihr rechts bezüglich 1, 2, 3, . . Nullen anhängt.

Denn durch das Anhängen von 1, 2, 3, . . Nullen kommt jede Ziffer bezüglich um 1, 2, 3, . . Stellen weiter gegen die Linke zu stehen, und erhält dadurch einen 10mal, 100mal, 1000mal, . . so hohen Wert (§. 8); somit wird auch die ganze Zahl (§. 34, 1) 10mal, 100mal, 1000mal, . . so groß. Z. B.

$$376 \cdot 10 = 3760,$$

$$583 \cdot 1000 = 583000.$$

Allgemein bedeutet $A \cdot 10^m$ eine dekadische Zahl, deren Ziffernreihe A rechts m Nullen hat.

Zusatz. Jede dekadische Zahl kann als ein nach den fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom dargestellt werden. Z. B.

$$6547 = 6000 + 500 + 40 + 7$$

$$= 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7.$$

Der Rang jeder einzelnen Ziffer wird durch den Exponenten derjenigen Potenz von 10 bestimmt, als deren Coefficienten man sich die Ziffer vorstellen muß; man kann daher diesen Exponenten von 10 den Rangexponenten der Ziffer nennen. Z. B. in 6547 hat die Ziffer 4 den Rangexponenten 1, die höchste Ziffer 6 den Rangexponenten 3.

In jeder dekadischen Zahl ist der Rangexponent der höchsten Stelle um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern.

Hiernach ist

$$r \cdot 10^{m-1} + q \cdot 10^{m-2} + \dots + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$$

die allgemeine Form einer mziffrigen dekadischen ganzen Zahl, welche a Einer, b Zehner, . . . r Einheiten des $(m - 1)$ ten Ranges enthält.

§. 43. Wenn $M = e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$, so ist $M \cdot p = ep \cdot 10^4 + dp \cdot 10^3 + cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10 + ap$.

Eine mehrziffrige Zahl wird daher mit einer einziffrigen multipliziert, indem man die Einer, Zehner, Hunderte, . . des Multiplicands mit dem Multiplikator multipliziert und die einzelnen Producte unter die multiplizierten Ziffern setzt.

Ist eines dieser Producte zweiziffrig, z. B. $cp = r \cdot 10 + s$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer s , und zähle die höhere r zu dem Producte in dieser höheren Rangstelle. Z. B.

$$\begin{array}{r} 752 \cdot 4 \\ 8 \text{ Einer} \\ 20 \cdot \text{Zehner} \\ 28 \cdot \cdot \text{Hunderte} \\ \hline 3008 \end{array} \quad \text{oder kürzer:} \quad \begin{array}{r} 752 \cdot 4 \\ \hline 3008 \end{array}$$

Beim Kopfrechnen vervielfacht man mit dem einziffrigen Multiplikator zuerst die höheren, und dann die niedrigeren Einheiten. Z. B.

Wie viel ist 6mal 78? 6mal 70 ist 420, 6mal 8 ist 48; 420 und 48 ist 468.

Wird die Multiplication auf Preisberechnungen angewendet, so ist es häufig vortheilhaft, den Preis der Einheit in Zehner und Kreuzer zu zerlegen. Z. B.

1 Kg. kostet 64 fr.; wie viel kosten 9 Kg.?

9 Kg. à 64 fr.

9 Kg. à 6 Zehner kosten 9mal 6 Z. = 54 Z. = 5 fl. 40 fr.

9 " à 4 fr. " 9mal 4 fr. 36 "

zusammen 5 fl. 76 fr.

§. 44. Ist M irgend eine mehrziffrige Zahl und

$N = p \cdot 10^3 + q \cdot 10^2 + r \cdot 10 + s$, so ist

$M \cdot N = Mp \cdot 10^3 + Mq \cdot 10^2 + Mr \cdot 10 + Ms$.

Um daher zwei mehrziffrige Zahlen mit einander zu multiplicieren, multipliciert man den Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplikators, von den Einern angefangen, multipliciert dann die erhaltenen Theilproducte der Ordnung nach mit den steigenden Potenzen von 10, was dadurch geschieht, daß man jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Linke rückt, und addiert die unter einander stehenden Ziffern der Theilproducte. Z. B.

$$\begin{array}{r} 6237 \\ 954 \\ \hline 24948 \\ 311850 \\ 5613300 \\ \hline 5950098 \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{r} 6237 \\ 954 \\ \hline 24948 \\ 31185 \\ 56133 \\ \hline 5950098 \end{array}$$

Fängt man mit der höchsten Ziffer des Multiplikators zu multiplicieren an, so wird jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt.

Aufgaben.

1. $4a \cdot b$.

4. $m \cdot 3n$.

7. $a^2 \cdot a$.

2. $3xy \cdot 2$.

5. $a \cdot 6bc$.

8. $x^5 \cdot x^3$.

3. $5a \cdot b \cdot 3$.

6. $2x \cdot 3y \cdot 4z$.

9. $m^3 \cdot m^2 \cdot m$.

10. $ay^2 \cdot a^2y$. 11. $3m^4 \cdot 2m^3$. 12. $5a^2x^3 \cdot 3a$.
 13. $z^2 \cdot 3z \cdot 5z^4$. 14. $8x^3 \cdot 3b^2 \cdot a$. 15. $a^3b^4c^5 \cdot a^3b^2c$.
 16. $7x^4y^3 \cdot 5x^2z^5 \cdot 3y^5z$. 17. $2ab^2c^3d^4 \cdot 3a^2c^2d^2 \cdot 4b^3c^2d^3$.
 18. $(x + 2) \cdot 3$. 19. $(a + 5) \cdot x$.
 20. $(3a + 4b) \cdot 5x$. 21. $(x^2y + xy^2) \cdot xy$.
 22. $(a - b) \cdot x$. 23. $(2a^2 - 3a) \cdot 4a$.
 24. $(2x^2 - 5) \cdot 4 + 2x^2$. 25. $(x^3 - 2x^2) \cdot 3x - 2x^4$.
 26. $(m + n) \cdot x + (m - n) \cdot x$. 27. $(m + n)x - (m - n) \cdot x$.
 28. $7 \cdot (a + 2)$. 29. $m \cdot (a^2 + x^2)$.
 30. $8(3 - y)$. 31. $5a(mx^3 - ny^3)$.
 32. $n^2 \cdot (x^2 - 2m^2) + m^2n^2$. 33. $2a^2b^2(a^2b - ab^2) - a^4b^3$.

Gebe in folgenden Ausdrücken den gemeinschaftlichen Factor heraus:

34. $5a + 5b$. 35. $ax^2 + bx^2$. 36. $(a + m)x - mx$.
 37. $a \cdot 10^3 - b \cdot 10^3$. 38. $9ay^2 - 6y^3$. 39. $ax + ay + a$.
 40. $a(2x - 3) - 2b(2x - 3) + (a - b)(2x - 3)$.

Addiere:

$$\begin{array}{r} 41. \quad 3ax - 5by \\ \quad 4ax + 2by \\ \quad \quad ax - 3by \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42. \quad 12x^4 + 20x^3 - 8x^2 \\ \quad \quad - 9x^3 - 15x^2 + 6x \\ \quad \quad \quad + 3x^2 + 5x - 2 \\ \hline \end{array}$$

Subtrahiere:

$$\begin{array}{r} 43. \quad 9mx + 6ny - 3pz \\ \quad \quad mx - 3ny + 8pz \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 44. \quad 20a^3 - 31a^2 + 22a - 8 \\ \quad \quad 20a^3 - 15a^2 + 10a \\ \hline \end{array}$$

45. Bestimme den Wert des Ausdrucks:

$$4a(3x^2 - 5xy) - 5b(2x^2 - 6y^2)$$

für $a = 5, b = 3, x = 7, y = 4$.

46. $(x + 3)(y + 2)$. 47. $(x + 3)(y - 2)$.
 48. $(x - 3)(y + 2)$. 49. $(x - 3)(y - 2)$.
 50. $(3x + 2y)(2x - 3y)$. 51. $(5a^2 - 3b^2)(3a^2 - 4b^2)$.
 52. $(2x^2 + 3a^2)(5x^2 - 4a^2) - (10x^4 - 12a^4)$.
 53. $(5 - x^2)(7 + y^2) + (7 - x^2)(6 + y^2)$.
 54. $(a + 2)^2$. 55. $(2a + 5b)^2$. 56. $(3x^2 + 4y^2)^2$.
 57. $(3 - x)^2$. 58. $(10m - n)^2$. 59. $(5a^2 - 3b^2)^2$.
 60. $(a + 5)^2 - 10a$. 61. $(x - 4)^2 + 8x$.
 62. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. 63. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
 64. $(x + 3)(x - 3)$. 65. $(a + 5)(a - 5)$.
 66. $(a + 7)(a - 7) + 49$. 67. $x^2 - (x + 4)(x - 4)$.
 68. $(5a - 6b)(5a + 6b)$. 69. $(3y^2 + 2b^2)(3y^2 - 2b^2)$.
 70. $(3x^2 + 5y^2)(3x^2 - 5y^2) - (2x^2 - 4y^2)(2x^2 + 4y^2)$.
 71. $(3a - 4b + 5) \cdot 8$. 72. $(7 + 5a - 3a^2) \cdot 4a^2$.
 73. $5x^2 \cdot (6a^2 - 9ab + 4b^2)$. 74. $3ax \cdot (2a^2 + 7ax + 5x^2)$.
 75. $(8x + 6y + 5)(3a + 4)$. 76. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
 77. $(y^2 - 2y + 1)(6y - 3)$. 78. $(5x^2 + 6x - 7)(4x - 5)$.

79. $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$.
 80. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$.
 81. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.
 82. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.
 83. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2)$.
 84. $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$.
 85. $(5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4)$.
 86. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. 87. $(x + 3)(x - 2)(x - 1)$.
 88. $(x + a)(x + b)(x + c)$. 89. $(x - a)(x - b)(x - c)$.
 90. $(3a - 2b + c)^2$. 91. $(ax^2 + by^2 - cz^2)^2$.
 92. $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6)$.
 93. $(4a^2 + 3b^2 - 2c^2)(4a^2 - 3b^2 + 2c^2)$.
 94. $(10x^4y + 4x^3y^2 - 5x^2y^3)(9x^2y - 5xy^2 + 7y^3)$.
 95. $(x^4 + x^3y + xy^3 + y^4)(x^2 - xy + y^2)$.
 96. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2)$.
 97. $(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$.
 98. $(a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 3a + 1)(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$.
 99. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(3a^2 + ab - 2b^2)(2a^3 - 3b^3)$.
 100. $(4x^2 - 4xy - y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + 2xy + 3y^2)$.

101. Multipliziere a) 358, b) 509, c) 2977, d) 8070 mit 10, 100, 1000, 10000.

102.* Wie viel ist 3mal 21? 2mal 36? 4mal 41? 7mal 69?

103.* Wie viel ist 2mal 180? 4mal 213? 3mal 236? 6mal 149?

104. Multipliziere a) 875, b) 2168, c) 15786, d) 357986 mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

105. 51709 . 3 . 5 . 6 . 6 . 8 . 8 . 9.

106. 286712 . 7 . 4 . 8 . 3 . 7 . 2 . 9 . 5 . 6.

107.* Wie viel ist 15mal 40? 12mal 27? 21mal 43? 13mal 34?

108. 739 . 57. 109. 1098 . 68. 110. 7664 . 94.

111. 3467 . 238. 112. 52029 . 475. 113. 12378 . 968.

114. 57964 . 9876. 115. 74509 . 3049.

116. 91234 . 7800. 117. 893600 . 3718.

118. 65800 . 978000. 119. 665070 . 83850.

120. Multipliziere 928386 a) mit 386, b) mit 7405, c) mit 91034.

121. Berechne $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$, $F = cd$ für $a = 325694$, $b = 547816$, $c = 769039$, $d = 981256$.

122. 56789 . 12345 . 45678 . 67890.

123. 86325 . 11

124. 709458 . 11.

86325

125. 288797 . 11.

949575

126. 3705866 . 110.

$$\begin{array}{r} 127. \quad 64538 \cdot 41 \\ \quad 258152 \\ \hline \quad 2646058 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128. \quad 357946 \cdot 128 \\ \quad 715892 \\ \quad 2863568 \\ \hline \quad 45817088 \end{array}$$

$$129. \quad 905643 \cdot 31.$$

$$130. \quad 447653 \cdot 17.$$

$$131. \quad 582076 \cdot 271.$$

$$132. \quad 290884 \cdot 185.$$

133.* Berechne unter Anwendung des Satzes in §. 33, 2: a) 37 . 24, b) 17 . 18, c) 23 . 32, d) 19 . 42, e) 29 . 35.

$$\begin{array}{r} 134. \quad 83452 \cdot 45 \\ \quad \quad \times 5 \\ \hline \quad 417260 \\ \quad \quad \times 9 \\ \hline \quad 3755340 \end{array}$$

$$135. \quad 149335 \cdot 72.$$

$$136. \quad 265824 \cdot 64.$$

$$137. \quad 703796 \cdot 320.$$

$$\begin{array}{r} 138. \quad 753467_{00} \cdot 98 \\ \quad 1506934 \quad \overline{100 - 2} \\ \hline \quad 73839766 \end{array}$$

$$139. \quad 357908 \cdot 997.$$

$$140. \quad 662452 \cdot 9996.$$

$$141. \quad 313678 \cdot 9930.$$

$$\begin{array}{r} 142. \quad 69374 \cdot 399 \\ \quad 27749600 \quad \overline{400 - 1} \\ \hline \quad 27680226 \end{array}$$

$$143. \quad 480267 \cdot 599.$$

$$144. \quad 917304 \cdot 2999.$$

$$145. \quad 534426 \cdot 99990.$$

146.* Wie viel kosten a) 8 Liter à 72 fr., b) 18 Kg. à 46 fr.?

147.* Wie viel kosten a) 9 Meter à 1 fl. 82 fr., b) 12 Hektol. à 20 fl. 38 fr.?

148. Österreich-Ungarn erzeugt im Durchschnitte jährlich 37180 Kg. feines Silber; wie viele Einguldenstücke, zu 90 auf 1 Kg., können daraus geprägt werden?

149. Die Luft übt auf eine Fläche, die 1m^2 groß ist, einen Druck von 103 Kg. 320 Gramm aus; wie viel beträgt der Druck auf eine Fläche von 1m^2 ?

150. Jemand legt in jeder Minute durchschnittlich einen Weg von 83 Meter Länge zurück; wenn er nun im Ganzen 15 Kilometer 310 Meter zurücklegen soll, welche Strecke hat er noch zurückzulegen, wenn er bereits 2 Stunden gegangen ist?

151. Ein um 1 Grad östlicher liegender Ort hat 4 Zeitminuten früher Mittag; wie viel Uhr ist es in Paris, das 34 Grad westlich von Wien liegt, wenn es in Wien 10 Uhr 28 Min. Vormittags ist?

152. Die österreichisch-ungarische Monarchie hat 6225Mm^2 ; wie groß ist die Bevölkerung, wenn man auf 1Mm^2 im Durchschnitte 5795 Einwohner rechnet?

V. Division.

§. 45. Die umgekehrte Aufgabe der Multiplication ist die Division. Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heißt, aus a als dem Producte zweier Zahlen und b als dem einen der Factoren den andern Factor suchen. Man nennt das gegebene Product a den Dividend, den gegebenen Factor b den Divisor, den gesuchten Factor den Quotienten, und bezeichnet den letzteren mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$.

Jede Multiplication zweier Zahlen, z. B. $5 \cdot 3 = 15$, bietet in ihrer Umkehrung zwei dem Begriffe nach verschiedene Aufgaben der Division, je nachdem außer dem jedesmal gegebenen Producte 15, dem Dividend, entweder der Multiplicand 5 oder der Multiplikator 3 als Divisor gegeben ist.

Ist als Divisor der Multiplicand 5 gegeben, so ist diejenige Zahl zu suchen, welche anzeigt, wie vielmal 5 als Summand gesetzt werden müsse, um den Dividend 15 als Summe zu erhalten. Diese Zahl 3 erhält man, indem man untersucht, wie vielmal sich der Divisor 5 von dem Dividend 15 subtrahieren läßt, oder wie vielmal der Divisor 5 in dem Dividend 15 enthalten ist. Die Division ist hier ein Messen.

Ist dagegen der Multiplikator 3 als Divisor gegeben, so hat man diejenige Zahl zu suchen, welche 3mal als Summand gesetzt den Dividend 15 zur Summe gibt; diese Zahl 5 findet man, indem man den Dividend in 3 gleiche Theile theilt. Die Division ist hier ein Theilen.

Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Divisionsarten an benannten Zahlen hervor. Z. B.

Multiplicationsaufgabe: 1 Meter kostet 5 fl., wie viel kosten 3 Meter?
Antwort: $5 \text{ fl.} \times 3 = 15 \text{ fl.}$

Die beiden daraus zu bildenden Divisionsaufgaben sind:

a) 1 Meter kostet 5 fl.; wie viel Meter erhält man für 15 fl.? Hier sind das Product und der Multiplicand gegeben und der Multiplikator zu suchen. Es wird gefolgert: Für 5 fl. erhält man 1 Meter, für 15 fl. wird man so vielmal 1 Meter erhalten, wie vielmal 5 fl. in 15 fl. enthalten sind, also 3mal 1 Meter d. i. 3 Meter. Hier werden 15 fl. durch 5 fl. gemessen, und man hat $15 \text{ fl.} : 5 \text{ fl.} = 3$. Wird die Division benannter Zahlen zur Lösung einer Aufgabe des Messens angewendet, so müssen Dividend und Divisor als Product und Multiplicand gleichnamig sein; der Quotient aber als Multiplikator ist immer unbenannt; erst durch anderweitige Schlüsse kann er einen Namen erhalten, wie im angeführten Beispiele „Meter“.

b) 3 Meter kosten 15 fl.; wie viel kostet 1 Meter? Hier sind das Product und der Multiplikator gegeben und der Multiplicand zu suchen. Es wird geschlossen: 1 Meter ist der 3te Theil von 3 Meter, 1 Meter kostet daher den 3ten Theil von 15 fl. Es werden also 15 fl. in 3

gleiche Theile getheilt, und so viele fl. ein solcher Theil enthält, so viele fl. kostet 1 Meter; man erhält $15 \text{ fl.} : 3 = 5 \text{ fl.}$ Wird die Division benannter Zahlen als Theilen angewendet, so muß der Divisor als Multiplikator immer unbenannt sein; der Quotient als Multiplicand ist gleichnamig mit dem Dividend als Product.

Wie die Multiplication eine wiederholte Addition derselben Zahl ist, so ist auch die Division nichts anderes als eine wiederholte Subtraction von einer gegebenen Summe. Bei dem Messen wird gefragt, wie vielmal sich der Divisor vom Dividend subtrahieren lasse; z. B. 5 ist in 15 3mal enthalten, heißt: 5 läßt sich von 15 3mal subtrahieren. Bei dem Theilen wird gefragt, welche Zahl sich vom Dividend so vielmal subtrahieren lasse, wie der Divisor anzeigt; z. B. der 5te Theil von 15 ist 3, heißt: die Zahl, welche sich von 15 5mal subtrahieren läßt, ist 3.

Das Theilen läßt sich immer auf das Messen zurückführen. Ist z. B. 15 durch 5 zu theilen, so hat man den 5ten Theil von 15 zu suchen; diesen findet man, indem man von je 5, welche in 15 vorkommen, immer nur 1 nimmt; man erhält dadurch so vielmal 1, wie vielmal 5 in 15 vorkommt, d. i. der 5te Theil von 15 ist so viel, wie vielmal 5 in 15 enthalten ist. So sehr daher die beiden Divisionsarten des Messens und des Theilens dem Begriffe nach verschieden sind, so geben doch beide für denselben Dividend und denselben Divisor, wenn man von den Benennungen absieht, dieselbe Zahl als Quotienten, und fallen demnach in der Ausführung in eine einzige Rechnungsart zusammen.

Um daher die Division auszuführen, sucht man in der Zahlenreihe diejenige Zahl auf, welche so oft gesetzt, wie der Divisor anzeigt, den Dividend gibt. Die Division zweier Zahlen kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors (§. 27, 1) ist.

§. 46. Aus der Erklärung der Division folgt:

1. Der Quotient muß so beschaffen sein, daß er mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt.

$$(a : b) \cdot b = a.$$

2. Dividirt man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor.

$$ab : a = b; \quad ab : b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl multipliciert und durch dieselbe Zahl dividirt.

$$a = (ab) : b; \quad a = (a : b) \cdot b.$$

4. Jede Zahl durch sich selbst dividirt gibt 1 zum Quotienten.

$$a : a = 1; \text{ denn } 1 \cdot a = a.$$

5. Jede Zahl durch 1 dividirt gibt sich selbst zum Quotienten.

$$a : 1 = a; \quad 1 : 1 = 1.$$

6. Null durch eine von Null verschiedene Zahl dividiert gibt Null zum Quotienten.

$$0 : a = 0; \text{ denn } 0 \cdot a = 0.$$

7. Null durch Null dividiert kann jede beliebige Zahl zum Quotienten geben.

$$0 : 0 = a, \text{ wo } a \text{ eine beliebige Zahl bedeutet; denn } a \cdot 0 = 0.$$

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist daher ein Symbol der Unbestimmtheit.

Sätze über die Quotienten.

§. 47. Ein Product wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Factoren dadurch dividiert.

$$1) (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b, \quad (12 \cdot 9) : 3 = (12 : 3) \cdot 9;$$

$$2) (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c), \quad (12 \cdot 9) : 3 = 12 \cdot (9 : 3).$$

Beweis. 1) Soll $(12 : 3) \cdot 9$ der richtige Quotient der Zahlen $12 \cdot 9$ und 3 sein, so muß das Product aus $(12 : 3) \cdot 9$ und dem Divisor 3 gleich sein dem Dividend $12 \cdot 9$ (§. 46, 1). Nun ist $\{(12 : 3) \cdot 9\} \cdot 3 = \{(12 : 3) \cdot 3\} \cdot 9$ (§. 33) $= 12 \cdot 9$ (§. 46, 1), also $(12 : 3) \cdot 9$ eine richtige Lösung der Aufgabe.

2) Ebenso ist

$\{12 \cdot (9 : 3)\} \cdot 3 = 12 \cdot \{(9 : 3) \cdot 3\}$ (§. 33) $= 12 \cdot 9$ (§. 46, 1), also ist auch die zweite Form $12 \cdot (9 : 3)$ des Quotienten richtig.

Folgesatz. Soll eine Zahl mit einer zweiten multipliciert und durch eine dritte dividiert werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man multipliciert und dividiert. Z. B.

$$(8 \cdot 100) : 4 = (8 : 4) \cdot 100.$$

§. 48. Eine Zahl wird durch ein Product dividiert, indem man sie durch den einen Factor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividiert.

$$1) a : (b \cdot c) = (a : b) : c, \quad 24 : (2 \cdot 3) = (24 : 2) : 3;$$

$$2) a : (b \cdot c) = (a : c) : b, \quad 24 : (2 \cdot 3) = (24 : 3) : 2.$$

Beweis. Sowohl $(24 : 2) : 3$ als auch $(24 : 3) : 2$ entspricht der in §. 46, 1 gestellten Bedingung. Denn es ist

$$\{(24 : 2) : 3\} \cdot (2 \cdot 3) = [\{(24 : 2) : 3\} \cdot 3] \cdot 2 \quad (\S. 29 \cdot 2) =$$

$$(24 : 2) \cdot 2 \quad (\S. 40, 1) = 24,$$

und auch

$$\{(24 : 3) : 2\} \cdot (2 \cdot 3) = [\{(24 : 3) : 2\} \cdot 2] \cdot 3 \quad (\S. 29, 2) =$$

$$(24 : 3) \cdot 3 \quad (\S. 40, 1) = 24.$$

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen dividiert werden, so darf man entweder durch dieselben einzeln in

beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich durch ihr Product dividieren.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B.} \quad (70 : 2) : 5 = (70 : 5) : 2 = 70 : (2 \cdot 5) \\ \quad \quad \quad 35 : 5 = \quad \quad 14 : 2 = 70 : 10 = 7. \end{array}$$

§. 49. Jedes Product ist eine Summe mehrerer gleicher Summanden; der eine Factor stellt die Größe eines solchen Summanden, der andere Factor die Anzahl der gleichen Summanden vor. Wenn man nun jeden Summanden 2, 3, 4mal so groß, dagegen aber von diesen größeren Summanden 2, 3, 4mal weniger nimmt, so bleibt die Summe dieselbe. Daraus folgt:

Ein Product bleibt unverändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multipliciert und den andern durch dieselbe Zahl dividirt.

Allgemein

$$\begin{array}{l} a \cdot b = am \cdot (b : m), \\ a \cdot b = (a : m) \cdot bm. \end{array}$$

Von diesem Satze macht man beim Zifferrechnen vortheilhaften Gebrauch. Z. B.

$$\begin{array}{l} 64 \cdot 25 = (64 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = (64 : 4) \cdot 100 = (64 : 100) : 4, \\ 64 \cdot 125 = (64 : 8) \cdot (125 \cdot 8) = (64 : 8) \cdot 1000 = (64 : 1000) : 8. \end{array}$$

§. 50. Der Quotient zeigt an, wie vielmal der Divisor als Summand in dem Dividend als der Summe gleicher Summanden enthalten ist. Nimmt man nun die Summe 2, 3, 4mal so groß und zugleich jeden der gleichen Summanden 2, 3, 4mal so groß an, so ist ein solcher größerer Summand in der so vergrößerten Summe eben so vielmal enthalten, als der ungeänderte Summand in der ungeänderten Summe. Nimmt man ferner sowohl von der Summe als von jedem der gleichen Summanden nur die Hälfte, den dritten, vierten Theil, so ist ebenfalls ein solcher kleinerer Summand in der verkleinerten Summe gerade so vielmal enthalten, als der ursprüngliche Summand in der ursprünglichen Summe. Daraus folgt:

Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Allgemein

$$\begin{array}{l} a : b = am : bm, \\ a : b = (a : m) : (b : m). \end{array}$$

Auch dieser Satz lässt sich vortheilhaft anwenden. Z. B.

$$\begin{array}{l} 325 : 25 = (325 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = (325 \cdot 4) : 100, \\ 7125 : 125 = (7125 \cdot 8) : (125 \cdot 8) = (7125 \cdot 8) : 1000. \end{array}$$

§. 51. Potenzen derselben Basis werden dividirt, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahirt und die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^8 : a^3 = a^5.$$

Denn

$$a^5 \cdot a^3 = a^8.$$

Allgemein

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

wenn $m > n$ ist.

Zusatz. Ist $m = n$, so erhält man nach diesem Satze $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$; da aber eine Potenz mit dem Exponenten 0 nach der in §. 37 gegebenen Erklärung einer Potenz keinen Sinn hat, so muß für diese neue Potenzform erst die Bedeutung festgestellt werden. Aus §. 46, 4 ergibt sich $a^m : a^m = 1$; folglich ist a^0 gleichbedeutend mit 1.

Die nullte Potenz einer Zahl ist also gleich 1.

§. 52. 1. Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden dadurch dividiert und die so erhaltenen Theilquotienten addiert.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c$ (§. 34, 2)
 $= a + b$ (§. 46, 1).

3. B. $(90 + 6) : 3 = (90 : 3) + (6 : 3)$.

2. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Minuend und den Subtrahend dadurch dividiert und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahiert.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c - \frac{b}{c} \cdot c$ (§. 34, 2)
 $= a - b$ (§. 46, 1).

3. B. $(100 - 8) : 4 = (100 : 4) - (8 : 4)$.

Division mehrgliedriger Ausdrücke.

§. 53. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividiert und den einzelnen Quotienten die Rechnungszeichen der Glieder des Dividends gibt.

$$\frac{a-b-c+d-e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der wiederholten Anwendung des §. 52, 1 und 2.

§. 54. Sind Dividend und Divisor mehrgliedrige Ausdrücke, so läßt sich das Divisionsverfahren am einfachsten aus der Art und Weise ableiten,

wie der Dividend durch die Multiplication aus dem Divisor und Quotienten entsteht, wie dabei die Theile des Divisors und Quotienten in ihrem Producte, dem Dividende, zu einander gestellt erscheinen. Ist der Divisor $a + b + c$, der Quotient $m + n + p$, so erhält man durch die Multiplication, wenn die Theilproducte unter einander geschrieben werden,

$$\begin{array}{r}
 \text{Divisor} \quad a + b + c \\
 \text{Quotient} \quad m + n + p \\
 \hline
 \text{Dividend} \left\{ \begin{array}{l} am + bm + cm \\ + an + bn + cn \\ + ap + bp + cp. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Der erste Theil am des Dividends ist das Product aus dem ersten Theile a des Divisors und dem ersten Theile m des Quotienten; man erhält daher den ersten Theil des Quotienten, wenn man den ersten Theil des Dividends durch den ersten Theil des Divisors dividirt. — Bildet man nun die Bestandtheile, welche m im Producte hervorgebracht hat, indem man den ganzen Divisor mit m multipliciert, und subtrahiert dieses Product vom Dividende, so ist der erste Theil an des Restes das Product aus dem ersten Theile a des Divisors und dem zweiten Theile n des Quotienten. Wird daher dieser erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, so erhält man den zweiten Theil des Quotienten. — Wenn man das Theilproduct, welches n im Dividende hervorbrachte, nämlich das Product aus dem ganzen Divisor und aus n , von dem früheren Reste subtrahiert, so ist der erste Theil des Restes ap , welches das Product aus dem ersten Theile a des Divisors und dem dritten Theile p des Quotienten vorstellt. Man findet daher den dritten Theil des Quotienten, wenn man den ersten Theil des letzten Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt u. s. w.

Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren für das Dividieren z weiter mehrgliedriger Ausdrücke:

Man dividire, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfare man dann eben so, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das zweite Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f. 3. B.

$$\begin{array}{r}
 (3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b \\
 3a^3 + 2ab \\
 \hline
 -6ab - 4b^2 \\
 -6ab - 4b^2 \\
 \hline
 + \quad + \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Insbefondere ist:

$$1) \frac{(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \quad 2) \frac{(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b;}{a^2 + ab}$$

$$\begin{array}{r} - \\ - \\ - ab - b^2 \\ - ab - b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - + \\ + ab - b^2 \\ + ab - b^2 \\ - \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier Zahlen dividirt durch die Summe oder die Differenz dieser Zahlen gibt bezüglich die Differenz oder die Summe derselben Zahlen.

§. 55. Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Sätze lassen sich zur Bestimmung des Quotienten zweier Glieder beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenstellen:

1. Bezüglich des Zeichens ist der Quotient zweier Glieder additiv oder subtraktiv zu setzen, je nachdem die beiden Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben. (Folgt aus §. 39 und §. 46, 2.)

2. Der Coefficient des Quotienten zweier Glieder ist der Quotient der Coefficienten dieser Glieder.

3. Die Hauptgröße des Quotienten zweier Glieder erhält man, wenn man von den Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, diejenigen, welche beiden gemeinschaftlich sind, in gleicher Anzahl weglässt, folglich bei Potenzen derselben Basis den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends subtrahiert und die gemeinschaftliche Basis mit dieser Differenz potenziert.

Division dekadischer Zahlen.

§. 56. Aus den Sätzen in §§. 53 und 54 ergibt sich, wenn die mehrgliedrigen Ausdrücke dekadische Zahlen, d. i. nach den fallenden Potenzen von 10 geordnete Polynome sind, für das Dividieren zweier dekadischer Zahlen folgendes Verfahren.

Man nimmt so viele höchste Ziffern des Dividends, als der Divisor hat, oder wenn diese kleiner wären als der Divisor, um eine mehr als ersten Theildividend an, multipliciert mit der dadurch gefundenen höchsten Ziffer des Quotienten den Divisor und subtrahiert das Product von dem ersten Theildividend. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Ziffer des Dividends, bestimmt aus diesem neuen Theildividend die zweite Ziffer des Quotienten und setzt dieses Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen wurden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Rest, der aus der Subtraction der Theilproducte entsteht, immer kleiner sein muß als der Divisor, weil man sonst im Quotienten eine zweite Ziffer von derselben Rangstelle erhalten würde.

$$3. \text{ B. } 132886 : 538 = 247, \text{ kürzer } 132886 : 538 = 247$$

$$\begin{array}{r} 1076 \\ 2528 \\ \hline 2152 \\ 3766 \\ \hline 3766 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bei der zweiten Form wurden die Theilproducte sogleich während der Multiplication subtrahiert und nur die Reste angeschrieben.

Aufgaben.

1. $15a : 5$.
2. $6a : a$.
3. $5xy : y$.
4. $12ab : 2a$.
5. $8mxy : 2x$.
6. $abxy : by$.
7. $a^5 : a^2$.
8. $a^4 : a$.
9. $a^{m+n} : a^m$.
10. $8x^3 : 2x^2$.
11. $6y^2z : 3y$.
12. $7a^3x^5 : ax^2$.
13. $16a^4b^4 : 4ab^2$.
14. $9a^2x^3y : 3xy$.
15. $2a^6m^3x^2 : a^3mx^2$.
16. $(6ab \cdot 2x) : 3ax$.
17. $(4a^2x \cdot 5ax^2) : 2a^2x^2$.
18. $(12a^2x^3 : 2a) : 6x^2$.
19. $(18a^2b^3c^4 : 3ab^2c) : 2ac^2$.
20. $(ax + ay) : a$.
21. $(ax - bx) : x$.
22. $(a^2x + ax^2) : ax$.
23. $(6a^2y - 3ay^2) : 3ay$.
24. $(8x^3y^3 - 12x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$.
25. $(12a^3x^2 + 9ax^4) : 3ax^2$.
26. $(36ax - 12bx + 24cx) : 6x$.
27. $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2$.
28. $(5a^3 - 25a^4 - 10a^5 + 15a^6) : 5a^2$.
29. $(10x^4y^2z^8 - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z$.
30. $(16a^3b^2c^8 + 8a^4b^3c^6 - 12a^5b^4c^4 - 20a^6b^5c^2) : 4a^2b^2c^2$.
31. $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$.
32. $(x^2 - 2xy + y^2) : (x - y)$.
33. $(9a^2 - 4b^2) : (3a + 2b)$.
34. $(16x^2 - y^2) : (4x - y)$.
35. $(x^4 - 1) : (x + 1)$.
36. $(x^4 - 1) : (x - 1)$.
37. $(a^5 + b^5) : (a + b)$.
38. $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2)$.
39. $(28a^2 - 67ab + 40) : (7a - 8b)$.
40. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
41. $(a^3 + a^2 - 2a - 8) : (a - 2)$.
42. $(15x^3 + 4x^2y - 29xy^2 + 10y^3) : (3x + 5y)$.
43. $(15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4) : (3 + 4x - 5x^2)$.
44. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2)$.
45. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) : (a^2 - 2ab + b^2)$.
46. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2)$.
47. $(4x^6 + 15a^2x^4 + 10a^4x^2 - 9a^6) : (2x^3 + ax^2 + 4a^2x + 3a^3)$.
48. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.

49. Dividiere 2735000 durch 10, 100, 1000.

50.* Wie oft ist enthalten: 3 in 240? 4 in 84? 6 in 186?

51.* Wie oft ist enthalten: 3 in 54? 6 in 72? 7 in 301?

52. Dividiere a) 4240, b) 29680, c) 72080, d) 769560 durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$$53. 140261 : 41.$$

$$55. 134676 : 29.$$

$$57. 13052325 : 65.$$

$$59. 530376 : 123.$$

$$61. 3552264 : 309.$$

$$63. 47100001 : 541.$$

$$54. 373666 : 83.$$

$$56. 5791338 : 63.$$

$$58. 28736235 : 37.$$

$$60. 309644 : 778.$$

$$62. 5606912 : 752.$$

$$64. 2267118 : 399.$$

65. Dividiere jede der Zahlen a) 24655445, b) 123327225, c) 172658115 durch 607, 315, 129.

$$66. 1472692768 : 14734$$

$$67. 36363918357 : 62883.$$

$$68. 66688 : 32$$

$$69. 56538 : 81.$$

$$\quad \quad \quad : 8$$

$$70. 125860 : 35.$$

$$\quad \quad \quad 8336 : 4$$

$$71. 321111 : 63.$$

$$\quad \quad \quad 2084$$

$$72. 278725 : 25$$

$$73. 92378_{00} \times 25$$

$$\quad \quad \quad \times 4$$

$$\quad \quad \quad : 4$$

$$74. 764625 : 25.$$

$$75. 7753675 : 25.$$

$$76. 345673 \times 25.$$

$$77. 814041 \times 250.$$

$$78. 572375 : 125$$

$$79. 39271_{000} \times 125$$

$$\quad \quad \quad \times 8$$

$$\quad \quad \quad : 8$$

$$80. 634750 : 125.$$

$$81. 8598125 : 125.$$

$$82. 53028 \times 125.$$

$$83. 907746 \times 125.$$

84.* Wie viel kostet 1 Meter, wenn man für 15 fl. 12 kr. a) 6 Meter, b) 7 Meter erhält?

85.* Wie hoch kommt 1 Liter, wenn man für 7 fl. 56 kr. a) 9 Liter, b) 12 Liter erhält?

86. Der Umfang des Erdäquators beträgt 5400 geogr. Meilen; welche Länge hat 1 Grad des Äquators?

87. In einer Baumpflanzung befinden sich in regelmäßigen Reihen 31928 Pflanzen und zwar in jeder Reihe 104 Pflanzen; wie viel Reihen sind da?

88. Oberösterreich hat auf einem Flächenraum von $120 \square^{\text{Mm}}$ eine Bevölkerung von 734560 Einwohnern; wie viele Einwohner entfallen durchschnittlich auf ein $\square^{\text{Mm}}$?

89. Böhmen hat 5144880 Einwohner, von denen 9894 auf 1 $\square^{\text{Mm}}$ kommen; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Landes?

90. Ein Kaufmann zahlt für 3200 Kg. Zucker 1784 fl. und will an je 100 Kg. 4 fl. 25 kr. gewinnen; wie theuer muß er das Kg. verkaufen?

91. Jemand mischt 12 Hektoliter Wein à 36 fl. mit 4 Hektol. à 28 fl.; wie viel kostet 1 Hektoliter der Mischung?

92. Ein Goldarbeiter schmelzt 7 Kg. 720tausendtheiliges und 2 Kg. 540tausendtheiliges Silber zusammen; wie viel Tausendtheile fein Silber sind in 1 Kg. der Mischung?

93. Ein Vater hinterläßt ein Vermögen von 16800 fl. Dieses soll unter seine Frau, 3 Söhne und 3 Töchter so vertheilt werden, daß die Mutter 4 Theile, jeder Sohn 3 eben so große Theile und jede Tochter 2 solche Theile erhalte. Wie viel bekommt die Mutter und wie viel jedes Kind?

VI. Wiederholungsaufgaben.

- 1.* a) $57 + 12$, b) $39 + 63$, c) $25 + 47$, d) $86 + 35$, e) $94 + 96$.
 2.* a) $371 + 128$, b) $607 + 134$, c) $593 + 238$, d) $399 + 158$.
 3. $132475 \cdot 37160 + 7908 \cdot 4296$.
 4. $83716 \cdot 5809 - 63077 \cdot 7089$.
 5. Addiere
 a)
$$\begin{array}{r} 6x + 5y \\ x + 7y \\ 8x - y \end{array}$$

 b)
$$\begin{array}{r} 8a + 7b - 6c + 5d \\ 9a - 6b + 7c - 4d \\ 7a - 5b - 8c + 6d \end{array}$$

 6. $(4a^4 + 5a^2b^2 + 6b^4)(7a^2 - 8b^2)$.
 7. $(2a^2 + 3b^2)(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.
 8.* Wie viel kosten a) 24 Liter à 26 fr., b) 17 Meter à 2 fl. 34 fr.?
 9.* 9 Kg. kosten 3 fl. 78 fr., wie viel kostet 1 Kg.?
 10. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)$.
 11. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)$.
 12. $(9a^2 - 16b^2) : (3a + 4b)$.
 13. $(8x^4 - 26x^3 - 43x^2 - 78x - 21) : (2x^2 - 9x - 3)$.
 14.* a) $85 - 24$, b) $74 - 53$, c) $56 - 29$, d) $81 - 47$, e) $98 - 29$.
 15.* a) $466 - 149$, b) $393 - 208$, c) $706 - 658$, d) $832 - 399$.
 16. Wie groß ist die Summe dreier Zahlen, von denen die erste 789021, die zweite um 179248 kleiner als die erste, und die dritte um 98764 kleiner als die zweite ist?
 17. Pestalozzi wurde am 12. Jänner 1746 zu Zürich geboren und starb zu Brugg im Aargau am 17. Februar 1827. Wie alt ist er geworden?
 18. $(9 - 3) - (8 - 7) + (24 - 20) - (18 - 9)$.
 19. $(a - b) - (b - a) + (c - a + b)$.
 20. $7xy - 17yz - (3xz - 2xy) + 3xy - (6yz - 3xz)$.
 21. $(3a + 8b)^2 + (4a + 6b)^2 - (5a - 10b)^2$.
 22. $(x^8 + x^4y^4 + y^8) : (x^4 - x^2y^2 + y^4)$.
 23. a) $86727 \cdot 25$, b) $13076 \cdot 125$, c) $399448 \cdot 11$.
 24. a) $54352 \cdot 41$, b) $56703 \cdot 108$, c) $870294 \cdot 49$.
 25. a) $68304 \cdot 63$, b) $99755 \cdot 48$, c) $513942 \cdot 270$.
 26. a) $17768 \cdot 399$, b) $64159 \cdot 994$, c) $806635 \cdot 999$.
 27. a) $34625 : 25$, b) $57625 : 125$, c) $8872472 : 56$.
 28. $(6x + 7y + 5z) + (4z + 4y) + (10x + z) + (9y + 14z)$.
 29. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2 - (a^4x^2 + b^4y^2)$.
 30. $(16x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 2x - 1) : (2x^2 + 1)$.

Zweiter Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten mit algebraischen ganzen Zahlen.

1. Negative Zahlen.

§. 57. Die Subtraction kann, so lange man auf das Gebiet der natürlichen Zahlen beschränkt ist, nur dann ausgeführt werden, wenn der Minuend größer oder eben so groß ist, als der Subtrahend. Ist z. B. von 6 die Zahl 4 zu subtrahieren, so schreitet man in der Zahlenreihe von 6 aus um 4 Einheiten zurück, wodurch man zur Zahl 2 gelangt; also ist $6 - 4 = 2$. Ist ferner von 6 die gleiche Zahl 6 zu subtrahieren, so schreitet man von 6 um 6 Einheiten zurück, und gelangt zur Null, welche der Ausgangspunkt der natürlichen Zahlen ist; man hat also $6 - 6 = 0$.

Ist dagegen von 6 eine größere Zahl, z. B. 8 zu subtrahieren, so müßte man, nachdem man von 6 zuerst um 6 Einheiten zurückgezählt hat und dadurch zur Null gelangt ist, von 0 aus noch um 2 Einheiten weiter zurückschreiten, was jedoch an der natürlichen Zahlenreihe, da dieselbe mit 0 abbricht, nicht möglich ist.

Um daher die Subtraction auch dann ausführen zu können, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, ist man genöthigt, auch Zahlen anzunehmen, welche durch das Rückwärtszählen von 0 aus erhalten werden. Es kommt dabei nur darauf an, daß die ursprünglich bloß nach vorwärts ohne Ende fortschreitende Zahlenreihe nach dem gleichen Bildungsgesetze von 0 auch nach rückwärts erweitert, und daß der Gegensatz der von 0 nach vorwärts und rückwärts fortschreitenden Zahlen entsprechend ausgedrückt werde. Letzteres geschieht, indem man die ursprünglich vorhandenen Zahlen, welche von 0 aus immer um eine Einheit nach vorwärts schreiten, positiv, die Zahlen aber, zu denen man gelangt, wenn man von 0 nach demselben Bildungsgesetze rückwärts schreitet, negativ nennt, und die ersteren mit dem Vorzeichen + (plus), die letzteren mit dem Vorzeichen — (minus) bezeichnet. Die dadurch entstehende zweiseitige Zahlenreihe ist daher

... — 4, — 3, — 2, — 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, ...

Während hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorstellen, treten die negativen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken. $+4$ bedeutet 4 von 0 aus nach vorwärts gezählte Einheiten, -4 bedeutet 4 von 0 aus nach rückwärts gezählte Einheiten.

Hiernach ist die oben gesuchte Differenz $6 - 8 = -2$, also eine negative Zahl.

Man kann die positiven und negativen Zahlen bildlich darstellen, indem man auf eine gerade Linie von einem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken versinnlichen die auf einander folgenden natürlichen (positiven) Zahlen.



Um dann an dieser Zahlenlinie auch die negativen Zahlen zu veranschaulichen, darf man nur die ursprünglich bloß nach einer Richtung (nach rechts) sich erstreckende gerade Linie über den Anfangspunkt 0 hinaus auch nach der entgegengesetzten Richtung (nach links) verlängern, und auch hier gleich große Strecken auftragen; die Endpunkte der links aufgetragenen Strecken versinnlichen die negativen Zahlen.

§. 58. Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden relative oder algebraische Zahlen genannt, im Gegensatze zu den Zahlen ohne Vorzeichen, welche absolute Zahlen heißen.

Jede algebraische Zahl besteht aus einem Vorzeichen und einem absoluten Werte. Das Vorzeichen zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet; der absolute Wert zeigt an, welche Stelle die algebraische Zahl in der Reihe der positiven oder negativen Zahlen einnimmt.

Es ist nicht nöthig, stets beide Vorzeichen zu gebrauchen; man pflegt das Vorzeichen $+$ als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

Zwei algebraische Zahlen, welche gleichen absoluten Wert, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander entgegengesetzt; z. B. $+4$ und -4 .

Größen, wie Bewegung nach Norden und nach Süden, das Steigen und Sinken, Vermögen und Schulden, Höhe über und unter dem Meerespiegel, Zeiten vor und nach Christi Geburt, und dgl., welche in dem einen und in dem entgegengesetzten Sinne gezählt werden können, so daß gleichviel von beiden Zählungen 0 gibt, heißen entgegengesetzte Größen. In der Mathematik bezeichnet man die eine von zwei entgegengesetzten Größen, gleichviel welche, aber consequent, mit $+$, die andere mit $-$.

Erhält man in irgend einer Rechnung für die gesuchte Größe einen negativen Wert $-n$, so bedeutet ein solches Resultat, daß die Größe gemessen wird durch n Einheiten, aber in einem Sinne, welcher dem ursprünglich in die Rechnung eingeführten entgegengesetzt ist. Z. B.

Ein Ereignis A fand 65 Jahre nach Christo statt, das Ereignis B 128 Jahre später als A, und ein drittes Ereignis C 246 Jahre früher als A; wie viel Jahre nach Christo fand das Ereignis C statt? Man erhält $x = 65 + 128 - 246 = -53$; d. h. das Ereignis C fand 53 Jahre vor Christo statt.

2. Addition und Subtraction algebraischer Zahlen.

§. 59. Nachdem wir durch die Einführung der negativen Zahlen unser Zahlengebiet erweitert haben, müssen auch die ursprünglichen Begriffe der Rechnungsoperationen angemessen erweitert werden, so daß sie auch auf negative Zahlen anwendbar werden. Aus den so erweiterten Erklärungen der Operationen ergibt sich dann von selbst auch das bei der Ausführung derselben anzuwendende Verfahren.

Absolute Zahlen addieren heißt, in der natürlichen Zahlenreihe vom ersten Summand um so viele Einheiten vorwärts schreiten, als der zweite Summand angibt.

Für algebraische Zahlen nimmt die Erklärung, da die absoluten Zahlen dabei als positive Zahlen auftreten, die negativen aber den Gegensatz zu den positiven ausdrücken, folgende allgemeinere Fassung an:

Algebraische Zahlen addieren heißt, in der algebraischen Zahlenreihe vom ersten Summand um die Einheiten des zweiten vorwärts schreiten, wenn der zweite Summand positiv, dagegen rückwärts schreiten, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in derselben Richtung fortschreiten, welche das Vorzeichen des zweiten Summanden angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Aus dieser Erklärung folgt:

Addition einer positiven Zahl ist Addition des absoluten Wertes derselben; Addition einer negativen Zahl ist Subtraction des absoluten Wertes derselben.

$$\begin{array}{l} a + (+b) = a + b, \quad a + (-b) = a - b \\ 7 + (+3) = 7 + 3, \quad 7 + (-3) = 7 - 3. \end{array}$$

§. 60. 1. Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man ihre absoluten Werte addiert und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

$$\begin{array}{l} (+a) + (+b) = + (a + b), \quad (-a) + (-b) = - (a + b). \\ (+5) + (+3) = + (5 + 3), \quad (-5) + (-3) = - (5 + 3). \end{array}$$

Beweis. Ist die Summe $(+ 5) + (+ 3)$ zu suchen, so schreitet man von $+ 5$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl $+ 8$ gelangt; also

$$(+ 5) + (+ 3) = + (5 + 3) = + 8.$$

Um die Summe $(- 5) + (- 3)$ zu erhalten, schreitet man von $- 5$ aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl $- 8$ gelangt; folglich

$$(- 5) + (- 3) = - (5 + 3) = - 8.$$

2. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man den kleineren absoluten Wert von dem größeren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren absoluten Wertes gibt.

$$(+ a) + (- b) = + (a - b), \text{ oder } = - (b - a),$$

$$(- a) + (+ b) = - (a - b), \text{ oder } = + (b - a).$$

$$3. \text{ B. } (+ 5) + (- 3) = + (5 - 3) = + 2,$$

$$(- 5) + (+ 3) = - (5 - 3) = - 2.$$

Beweis wie zu 1.

3. Zwei entgegengesetzte Zahlen geben zur Summe Null (heben sich gegenseitig auf).

$$(+ a) + (- a) = 0, \quad (- a) + (+ a) = 0.$$

$$(+ 5) + (- 5) = 0, \quad (- 5) + (+ 5) = 0.$$

§. 61. Bei der Subtraction absoluter Zahlen schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe vom Minuend aus um so viele Einheiten rückwärts, als der Subtrahend anzeigt.

Algebraische Zahlen subtrahieren heißt demnach, in der algebraischen Zahlenreihe vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahends ebenfalls rückwärts schreiten, wenn dieser positiv, dagegen vorwärts schreiten, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten, als sie das Vorzeichen des Subtrahends angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Art gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Aus dieser Erklärung folgt:

Subtraction einer positiven Zahl ist Subtraction des absoluten Wertes derselben; Subtraction einer negativen Zahl ist Addition des absoluten Wertes derselben.

$$a - (+ b) = a - b, \quad a - (- b) = a + b.$$

$$8 - (+ 5) = 8 - 5, \quad 8 - (- 5) = 8 + 5.$$

§. 62. Zwei algebraische Zahlen werden subtrahiert, indem man zum unveränderten Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

$$(+ a) - (+ b) = (+ a) + (- b), \quad (+ 5) - (+ 3) = (+ 5) + (- 3);$$

$$(+ a) - (- b) = (+ a) + (+ b), \quad (+ 5) - (- 3) = (+ 5) + (+ 3);$$

$$(- a) - (+ b) = (- a) + (- b), \quad (- 5) - (+ 3) = (- 5) + (- 3);$$

$$(- a) - (- b) = (- a) + (+ b), \quad (- 5) - (- 3) = (- 5) + (+ 3).$$

Beweis. Um die Differenz $(+ 5) - (+ 3)$ zu finden, schreite man von $+ 5$ aus um 3 Einheiten in negativer Richtung fort; man gelangt dadurch zu der Zahl $+ 2$. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+ 5$ die Zahl $- 3$ addiert, folglich

$$(+ 5) - (+ 3) = (+ 5) + (- 3) = + 2.$$

Es sei ferner $(+ 5) - (- 3)$ zu bestimmen. Hier muß man von $+ 5$ aus um 3 Einheiten in positiver Richtung fortschreiten, wodurch man zu der Zahl $+ 8$ gelangt. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+ 5$ die Zahl $+ 3$ addiert; also

$$(+ 5) - (- 3) = (+ 5) + (+ 3) = + 8.$$

Ebenso findet man

$$(- 5) - (+ 3) = (- 5) + (- 3) = - 8,$$

$$(- 5) - (- 3) = (- 5) + (+ 3) = - 2.$$

§. 63. Eine Summe, deren Summanden algebraische Zahlen sind, heißt eine algebraische Summe; z. B.

$$(+ a) + (- b) + (- c) + (+ d) + (- f).$$

Die Differenz je zweier algebraischer Zahlen kann als eine algebraische Summe dargestellt werden (§. 62).

Jede algebraische Summe kann in einen mehrgliedrigen Ausdruck verwandelt werden, indem man die Additionszeichen und die Klammern wegläßt und dann die Vorzeichen als Rechnungszeichen ansieht.

$$(+ a) + (- b) + (- c) + (+ d) = a - b - c + d.$$

Ergibt sich unmittelbar aus dem Folgesatze zu §. 59.

Man ist übereingekommen, bei algebraischen Summen die Additionszeichen und die Klammern für die einzelnen Summanden wegzulassen. In dieser Form unterscheidet sich eine algebraische Summe von einem mehrgliedrigen Ausdrucke nur dadurch, daß die Rechnungszeichen $+$ und $-$ des letzteren in der ersteren als Vorzeichen, d. i. die additiven und subtractiven Glieder des letzteren in der ersteren bezüglich als positive und negative Summanden zu betrachten sind. Auf den Wert beider hat diese verschiedene Bedeutung der Zeichen, wie aus dem Folgesatze zu §. 59 erhellt, keinen Einfluß.

Hiernach gelten die Sätze über die Addition und Subtraction mehrgliedriger Ausdrücke (§. 28, 1 und 2) auch für algebraische Summen; nur müssen die additiven und subtractiven Glieder hier als positive und negative Summanden angesehen werden.

Aufgaben.

1. $+ 7 + (- 2).$

2. $- 15 + (- 5).$

3. $- 31 - (+ 14).$

4. $+ 95 - (- 67).$

5. $+ 412 + (- 318) + (+ 104).$

6. $+ 752 - (+ 319) + (- 284).$

7. $+ 378 - (- 129) + (- 245) - (+ 88) - (- 236).$

8. Berechne $x - (x - 2) + (x - 4) - (x - 6) + (x - 8)$
für $x = 3.$

$$\begin{array}{ll}
 9. -8a + (+7a). & 10. +5x + (-5x). \\
 11. +6m - (-4m). & 12. -15y - (-20y). \\
 13. -4x + (-7x) - (-12x). & 14. +8a - (-9a) - (+7a). \\
 15. (6a - 3b - 9c) + (-4a + 5b - c). & \\
 16. \begin{array}{r} 8a - 6b + 4c \\ -5a - 3b + 7c \\ \hline a + 4b - 9c \end{array} & 17. \begin{array}{r} 3 - 4x + 5x^2 \\ -4 - 3x - 2x^2 \\ \hline 2 + 9x - 3x^2 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 18. (x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) - (-x - y + z). & \\
 19. \{(a - b) - b\} - (b - a). & 20. 5a - \{3a - (a - b)\}. \\
 21. x + \{(y - x) - (y - z)\}. & 22. x - \{(x + z) - (y + z)\}.
 \end{array}$$

23. Jemand geht 65 Schritte vorwärts, hierauf 37 Schritte rückwärts, dann wieder 48 Schritte vorwärts; a) wie viel Schritte hat er im ganzen gemacht; b) wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausgieng?

24. Ein Dampfschiff wird durch die Einwirkung des Stromes allein jede Minute 65^m abwärts getrieben, durch die Kraft des Dampfes allein legt es jede Minute 312^m zurück; wie viel Meter legt es in der Minute a) stromabwärts, b) stromaufwärts zurück?

3. Multiplication und Division algebraischer Zahlen.

§. 64. Bei der Multiplication absoluter Zahlen setzt man den Multiplicand so oft als Summand, wie der Multiplicator anzeigt.

Algebraische Zahlen multiplicieren heißt demnach, wenn der Multiplicator positiv ist, den Multiplicand selbst mit unverändertem Vorzeichen, wenn aber der Multiplicator negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplicands, d. i. den Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen, so oft als Summand setzen, wie der Zahlwert des Multiplicators anzeigt.

§. 65. 1. Zwei gleich bezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

$$\begin{array}{ll}
 (+a) \cdot (+b) = +ab, & (+4) \cdot (+3) = +12; \\
 (-a) \cdot (-b) = +ab, & (+4) \cdot (-3) = -12; \\
 (+a) \cdot (-b) = -ab, & (-4) \cdot (+3) = -12; \\
 (-a) \cdot (+b) = -ab, & (-4) \cdot (-3) = +12.
 \end{array}$$

Beweis. Nach der Erklärung der Multiplication algebraischer Zahlen ist

$$\begin{array}{ll}
 (+4) \cdot (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12, \\
 (+4) \cdot (-3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12, \\
 (-4) \cdot (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = -12, \\
 (-4) \cdot (-3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12.
 \end{array}$$

2. Für drei oder mehrere Factoren ergibt sich aus dem vorhergehenden Satze:

a) Sind alle Factoren positiv, so ist auch das Product positiv.

b) Sind alle oder auch nur einige Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die negativen Factoren in gerader oder ungerader Anzahl vorkommen.

§. 66. Der in §. 45 für absolute Zahlen gegebene Begriff der Division gilt unverändert auch für algebraische Zahlen.

Der Quotient zweier algebraischer Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem dieselben gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

$$(+ a) : (+ b) = + q,$$

$$(- a) : (- b) = + q,$$

$$(+ a) : (- b) = - q,$$

$$(- a) : (+ b) = - q,$$

wo q den absoluten Wert des Quotienten vorstellt.

Beweis. Ist der Dividend (das Product) positiv, so müssen, wie aus §. 65, 1 folgt, der Divisor und der Quotient (die beiden Factoren) gleichbezeichnet sein; also ist $(+ a) : (+ b) = + q$ und $(+ a) : (- b) = - q$.

Ist der Dividend negativ, so müssen Divisor und Quotient verschiedene Vorzeichen haben, also ist $(- a) : (+ b) = - q$ und $(- a) : (- b) = + q$.

§. 67. Die Sätze über die Multiplication und Division mehrgliedriger Ausdrücke (§§. 39, 40, 53–55) gelten auch für algebraische Summen; nur müssen die additiven und subtractiven Glieder (mit Rücksicht auf §. 63) hier als positive und negative Summanden betrachtet werden.

Aufgaben.

1. $+ 9 \cdot - 7$.
2. $- 19 \cdot + 8$.
3. $- 128 \cdot + 39$.
4. $- 217 \cdot - 25$.
5. $+ 14 \cdot + 9 \cdot - 8$.
6. $+ 27 \cdot - 6 \cdot - 9$.
7. $- 2 \cdot - 7 \cdot - 11 \cdot - 20$.
8. $+ 9 \cdot - 5 \cdot - 12 \cdot - 15$.
9. $[- 2345 - (+ 730)] \cdot [+ 1357 + (- 1468)]$.
10. $4 \cdot - 3 - 5 \cdot - 6 + 7 \cdot - 5 - 9 \cdot + 8$.
11. Berechne $(x - 1)(x - 4)(x - 7)(x - 10)$ für $x = 3$.
12. Berechne $x^2 - 6x - 16$ für $x = + 8$ und für $x = - 2$.

13. Ein Körper, welcher sich in gerader Linie in jeder Secunde 12^m a) nach vorwärts, b) nach rückwärts bewegt, befindet sich gegenwärtig im Punkte A; auf welcher Seite und in welchem Abstände

von A wird er sich nach 25 Sekunden befinden? Auf welcher Seite und in welchem Abstände von A befand sich derselbe vor 25 Sekunden?

14. $6a \cdot - 3$. 15. $- 7ab \cdot 2ac$.
 16. $- a^2 \cdot - 4a$. 17. $3x \cdot - 5xy$.
 18. $- 12x^4 \cdot 8x^2y^2$. 19. $- 8ay^3 \cdot 15a^3y$.
 20. $- 5x \cdot - 5x \cdot - 5x$. 21. $9ab^2 \cdot 7ac \cdot - 18c^2$.
 22. $- 6ab^2y^3 \cdot 2b^3y^3 \cdot - 8a^2y$. 23. $12x^2y^3z \cdot - 9xy^2z^3 \cdot - 2x^2z$.
 24. $(6a - 5b) \cdot - 8c$. 25. $(7x^2 - 6y^2) \cdot - 2xy$.
 26. $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3) \cdot - 6a^2$.
 27. $- 15a^2x^2 \cdot (2a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2)$.
 28. $(7ax^2 - 10by^2) \cdot 4abx^2 - (8bx^2 + 5ay^2) \cdot - 5aby^2$.
 29. $(5a + 6b) (- 2a + 3b)$. 30. $(1 - m^2) (1 + m^2)$.
 31. $(x^2 + 2xy + y^2) (- x^2 + 2xy - y^2)$.
 32. $(3 - 4x + 6x^2) (2 - 6x - 18x^2)$.
 33. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3) (1 - 3a + 5a^2 - 7a^3)$.
 34. $(a + b - c) (a - b + c) (- a + b + c)$.

35. $+ 63 : - 7$. 36. $- 48 : + 12$.
 37. $+ 264 : - 4$. 38. $- 3840 : - 30$.
 39. $[2760 - (+ 732)] : [- 62 - (- 23)]$.
 40. Berechne $\frac{x - 14}{5 - x} - x + \frac{x - 10}{7 - x} - \frac{5(x - 2)}{3(6 - x)}$ für $x = 8$.

41. Das Thermometer zeigte an einem Tage Morgens $- 8^\circ \text{ R.}$, Mittags $+ 2^\circ \text{ R.}$, Abends $- 5^\circ \text{ R.}$; wie groß war die mittlere Tages-temperatur?

42. $12a^4 : - 3a$. 43. $- 14a^4b^2 : 2a^2b$.
 44. $- 4a^2m^4x^5 : - 2m^2x^3$. 45. $36x^3y^2z^4 : - 9xy^2z^3$.
 46. $(8ab - 12ac) : - 4a$. 47. $- (16a^3 - 24a^2) : - 8a^2$.
 48. $(18am^2y^3 - 27bmy^2 + 36cy) : - 3y$.
 49. $(- 16a^3b^2c^5 + 8a^4b^3c^4 - 12a^5b^4c^3 + 20a^6b^5c^2) : 4a^2b^2c^2$.
 50. $(1 - x^5) : (1 - x)$.
 51. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (- 2x + 5)$.
 52. $(- 30x^4 + 2x^3 + 125x^2 + 51x - 27) : (- 6x^2 - 8x + 3)$.
 53. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (- 2a^2 + 3a - 4)$.
 54. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x)$.

4. Wiederholungsaufgaben.

1.* Berechne:

a) 18 Liter à 36 fr.,

b) 13 Meter à 1 fl. 74 fr.,

c) 21 " à 64 "

d) 12 " à 5 " 28 "

2. $- 1 \cdot 2 \cdot - 3 \cdot 4 \cdot - 5$. 3.* $2 \cdot - 3 \cdot - 4 \cdot - 5 \cdot - 6$.

3. Addiere die folgenden lothrechten und wagrechten Zahlenreihen:

$$41782 + 29714 + 80508 + 26396 + 73614$$

$$71396 + 29592 + 75801 + 34567 + 90123$$

$$95703 + 88466 + 54953 + 63780 + 77367$$

$$18278 + 91705 + 27265 + 53927 + 84806$$

$$89420 + 93364 + 62879 + 27048 + 60973$$

4. $\{x - (m + n)\} + \{x - (m + p)\} + \{x - (n + p)\}.$

5. $(9a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - 5b)(3a - b - 3).$

6. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5).$

7.* a) $728 + 154$, b) $398 + 542$, c) $827 - 452$, d) $643 - 397$.

8.* 15 Liter kosten 6 fl. 60 fr.; wie viel kostet 1 Liter?

9. Jemand wurde am 5. Jänner 1809 geboren und starb in einem Alter von 60 Jahren 6 Monaten und 12 Tagen; an welchem Tage war dies?

10. $(4a^3b^4 + 8a^5b^7 - 12a^7b^9) : -2a^2b^3.$

11. $(8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + \{(3x - 2n) - (4m + 3n)\}.$

12. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3)(1 - 3a + 5a^2 - 7a^3).$

13. $-2906 \cdot 2076 \cdot -249 \cdot 157.$

14. a) $123469037 : -24679$, b) $-462191832 : -79251.$

15. $(24x^3 - 26x^2y + 18xy^2 - 4y^3) : (4x^2 - 3xy + 2y^2).$

Dritter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 68. Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch dieselbe dividirt eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Der Dividend heißt in diesem Falle ein Vielfaches des Divisors, und der Divisor ein Maß oder ein Theiler des Dividends. So ist z. B. 18 durch 6, ab durch a theilbar; ab ist ein Vielfaches von a, und a ein Maß von ab.

Durch 1 und durch sich selbst ist jede Zahl theilbar. Eine Zahl, welche nur durch 1 und durch sich selbst theilbar ist, wird eine Primzahl genannt; z. B. 3, 11, 29. Jede durch einen Buchstaben dargestellte Zahl ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angenommen wird, als eine Primzahl anzusehen. Eine Zahl, welche nicht bloß durch 1 und durch sich selbst, sondern auch noch durch andere Zahlen theilbar ist, heißt eine zusammengesetzte Zahl, z. B. 8, 15, abc.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein gemeinschaftliches Maß dieser letztern Zahlen genannt; z. B. 3 ist ein gemeinschaftliches Maß von 12 und 21; m ein gemeinschaftliches Maß von amx, bmy und cmz.

Zahlen, welche außer 1 kein anderes gemeinschaftliches Maß haben, heißen Primzahlen unter einander, oder relative Primzahlen; z. B. 2, 9, 12; eben so ab, bc, cd, abcd.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen; z. B. 20 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 4, 5, 10; 8abcd von 2abc 4d, 8acd.

Ist eine Zahl a durch eine andere b nicht theilbar, so heißt die Zahl r, welche erhalten wird, wenn man von dem Dividende a das größte Vielfache von b, welches darin vorkommt, z. B. bq, subtrahirt, der Rest der Division. Es ist also $r = a - bq$, und daher $a = bq + r$.

1. Allgemeine Sätze.

§. 69. 1. Haben zwei oder mehrere Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so ist auch ihre Summe dadurch theilbar.

Beweis. Es seien a , b und c durch m theilbar, so läßt sich zeigen, daß auch $a + b + c$ durch m theilbar sein müsse. Setzt man $a : m = p$, $b : m = q$, $c : m = r$, wo p , q , r ganze Zahlen vorstellen, so folgt $a = mp$, $b = mq$, $c = mr$. Da gleiche Größen zu gleichen addiert auch gleiche Summen geben, so hat man $a + b + c = mp + mq + mr$; und wenn man die beiden gleichen Ausdrücke durch m dividiert, $(a + b + c) : m = p + q + r$; die Summe $a + b + c$ gibt also durch m dividiert eine ganze Zahl $p + q + r$ zum Quotienten, oder was gleichviel ist, $a + b + c$ ist wirklich durch m theilbar.

2. Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so ist auch ihre Differenz dadurch theilbar.

Beweis. Es sei m ein gemeinschaftliches Maß von a und b , und zwar $a : m = p$, $b : m = q$; dann ist $a = mp$, $b = mq$, und durch Subtraction $a - b = mp - mq$, somit $(a - b) : m = p - q$, woraus folgt, daß die Differenz $a - b$ durch m theilbar ist.

§. 70. 1. Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben dadurch theilbar.

Beweis. Es sei a durch m theilbar, und zwar $a : m = p$, also $a = mp$; dann ist $ar = mpr$, und $ar : m = pr$; das Vielfache ar von a ist also durch m theilbar.

2. Ist eine Zahl durch zwei relative Primzahlen theilbar, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.

Beweis. Es sei a durch die relativen Primzahlen m und n theilbar. Da diese keine gemeinschaftlichen Factoren haben und doch a sämtliche Factoren von m und von n enthalten muß, so muß a alle Factoren des Productes mn enthalten, also a durch mn theilbar sein.

Ist eine Zahl z . B. durch 2 und 3 theilbar, so muß sie auch durch ihr Product 6 theilbar sein.

§. 71. 1. Wenn der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Divisionsrest dadurch theilbar sein.

Beweis. Es seien a und b durch m theilbar, und es gebe a durch b dividiert den Quotienten q mit dem Reste r ; so ist $r = a - bq$. Da a durch m theilbar ist, ferner b , somit auch das Vielfache bq durch m theilbar ist, so muß auch die Differenz $a - bq$, welche gleich r ist, durch m theilbar sein.

Aus diesem Satze folgt:

Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Divisor und Rest.

2. Wenn der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß haben, so muß auch der Dividend dadurch theilbar sein.

Beweis. Es gebe a durch b dividiert den Quotienten q mit dem Reste r , und es sei m ein gemeinschaftliches Maß von b und r ; dann ist $a = bq + r$. Wenn nun b , somit auch das Vielfache bq , und ferner r durch m theilbar sind, so muß auch die Summe $bq + r$, welche gleich a ist, durch m theilbar sein.

Dieser Satz läßt sich auch so ausdrücken:

Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Divisionsrest ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Dividend und Divisor.

3. Da nach den letzten zwei Sätzen Dividend und Divisor dieselben gemeinschaftlichen Maße unter einander haben, wie der Divisor und der Rest, so folgt:

Das größte gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Rest ist auch das größte gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor.

2. Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

§. 72. Eine dekadische Zahl ist durch 2 oder durch 5 theilbar, wenn ihre Einer bezüglich durch 2 oder 5 theilbar sind.

Beweis. Jede dekadische Zahl läßt sich in ein Vielfaches von 10 und in ihre Einer zerlegen; z. B.

$$3576 = 357 \cdot 10 + 6, \quad 4385 = 438 \cdot 10 + 5.$$

Nun ist 10 durch 2 und 5 theilbar, also auch jedes Vielfache von 10; sind dann auch die Einer der Zahl durch 2 oder 5 theilbar, so ist es die Zahl selbst.

Zusätze. 1. Eine dekadische Zahl ist durch 10 theilbar, wenn ihre niedrigste Ziffer 0 ist.

2.jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6, oder 8 haben, welche also durch 2 theilbar sind, werden gerade Zahlen genannt. Eine gerade Zahl wird, da sie ein Vielfaches von 2 ist, allgemein durch $2m$ ausgedrückt, wo m jede beliebige ganze Zahl vorstellen kann.

3. jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 1, 3, 5, 7 oder 9 haben, und daher nicht durch 2 theilbar sind, heißen ungerade Zahlen. Da eine ungerade Zahl um 1 größer oder kleiner ist als eine gerade, so ist $2m + 1$ oder $2m - 1$ die allgemeine Form für die ungeraden Zahlen.

Folgesätze. 1. Die Summe und die Differenz zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

2. Die Summe und die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

3. Das Product zweier gerader Zahlen ist gerade, das Product zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

4. Das Product aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist gerade.

§. 73. Eine dekadische Zahl ist durch 4 oder 25 theilbar, wenn die Zahl aus ihren niedrigsten zwei Ziffern bezüglich durch 4 oder 25 theilbar ist.

Beweis. Jede dekadische Zahl lässt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, der andere die Zehner und Einer der Zahl enthält; z. B.

$$9132 = 91 \cdot 100 + 32, \quad 8475 = 84 \cdot 100 + 75.$$

100 ist durch 4 und 25 theilbar, also auch jedes Vielfache von 100; sind nun die Zehner und Einer der Zahl durch 4 oder 25 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst.

Zusatz. Eine dekadische Zahl ist durch 100 theilbar, wenn ihre niedrigsten zwei Ziffern Nullen sind.

§. 74. Eine dekadische Zahl ist durch 8 oder durch 125 theilbar, wenn die Zahl aus ihren niedrigsten drei Ziffern bezüglich durch 8 oder 125 theilbar ist.

Beweis. Jede dekadische Zahl lässt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 1000, der andere die Hunderte, Zehner und Einer der Zahl enthält; z. B.

$$37912 = 37 \cdot 1000 + 912, \quad 56388 = 56 \cdot 1000 + 388.$$

Jedes Vielfache von 1000 ist durch 8 und 125 theilbar; sind nun auch die Hunderte, Zehner und Einer der Zahl zusammengenommen durch 8 oder 125 theilbar, so ist es die Zahl selbst.

Zusatz. Eine dekadische Zahl ist durch 1000 theilbar, wenn ihre niedrigsten drei Ziffern Nullen sind.

§. 75. Eine dekadische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme bezüglich durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Beweis. Jede Zahl kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine lauter Vielfache von 9, der andere die Summe aller Ziffern der Zahl enthält; z. B.

$$\begin{aligned} 75624 &= 7 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \\ &= 7 \cdot (9999 + 1) + 5 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 4 \\ &= 7 \cdot 9999 + 7 + 5 \cdot 999 + 5 + 6 \cdot 99 + 6 + 2 \cdot 9 + 2 + 4 \\ &= (7 \cdot 9999 + 5 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (7 + 5 + 6 + 2 + 4) \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 9 enthält, ist nun durch 3 und 9 theilbar; ist auch der zweite Bestandtheil, nämlich die Ziffernsumme, durch 3 oder 9 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

Zusatz. Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar (§. 70, 2).

A u f g a b e n.

1. Welche von den Zahlen 3924, 1038, 5016, 8033, 9062, 8752, 16536, 24300, 39235, 74636 sind durch 2, welche zugleich durch 4, welche weder durch 4 noch durch 2 theilbar?

2. Welche von den Zahlen 352, 1630, 2876, 4756, 9492, 12748, 22062, 25864, 30508 sind durch 2, welche auch durch 4, und welche durch 8 theilbar?

3. Welche von den Zahlen 273, 1540, 5926, 8028, 12345, 20475, 38124, 67089, 705426, 791426, 310629 sind durch 3, welche zugleich durch 9, welche weder durch 9 noch durch 3 theilbar?

Durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125, 1000 sind folgende Zahlen theilbar:

4. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656;
 5. f) 720; g) 6472; h) 76450; i) 484572; k) 567000;
 6. l) 534; m) 8625; n) 10692; o) 734520; p) 350496;
 7. r) 418; s) 3735; t) 70875; u) 100848; v) 9429597?

3. Zerlegung in Factoren.

§. 76. Jede endliche zusammengesetzte Zahl lässt sich in lauter Primfactoren zerlegen.

Beweis. Jede zusammengesetzte Zahl muss wenigstens in zwei Factoren zerlegt werden können; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Factoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; wird im letzteren Falle das Zerlegen fortgesetzt, so muss man endlich auf lauter Primfactoren kommen. Wäre dieses nicht der Fall, so müsste die gegebene Zahl aus unendlich vielen Factoren, die alle größer als 1 sind, zusammengesetzt, und also selbst unendlich groß sein, was der Voraussetzung zuwider ist.

§. 77. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividire man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Ist z. B. 630 in Primfactoren zu zerlegen, so hat man:

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 & = & 315 \text{ oder } 630/2 \\ 315 : 3 & = & 105 \quad 315/3 \\ 105 : 3 & = & 35 \quad 105/3 \\ 35 : 5 & = & 7 \quad 35/5 \\ & & 7/7 \end{array}$$

$$\text{also } 630 = 2 \cdot 315 = 2 \cdot 3 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Zusatz. Um alle Factoren einer Zahl zu finden, zerlege man dieselbe in ihre Primfactoren, multipliciere mit dem zweiten Primfactor den ersten, dann mit dem dritten Primfactor die beiden vorhergehenden zwei Primfactoren und den erhaltenen zusammengesetzten Factor, und so fort mit jedem folgenden Primfactor alle vorhergehenden Prim- und zusammengesetzten Factoren. Z. B.

$$2102$$

$$1053, 6$$

$$355, 10, 15, 30$$

$$77, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.$$

§. 78. Einen allgemeinen Zahlenausdruck in Factoren zu zerlegen.

1. Bei eingliedrigen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfactoren vor; sind darin Potenzgrößen enthalten, so wird die Wurzel so oft als Factor gesetzt, als der Exponent anzeigt. Z. B.

$$abc = a \cdot b \cdot c; ab^2m^3 = a \cdot b \cdot b \cdot m \cdot m \cdot m;$$

$$21a^2mx^2 = 3 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot m \cdot x \cdot x.$$

2. Für die Zerlegung der Polynome in Factoren lassen sich keine allgemeinen Regeln geben; es sollen daher hier nur folgende häufiger vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

a) Ein Polynom, dessen alle Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, wird nach §. 35 in zwei Factoren zerlegt, indem man das gemeinschaftliche Maß als den einen Factor heraushebt und als den andern Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Ausdruckes durch jenes gemeinschaftliche Maß hervorgeht; z. B.

$$1. 3ax - 4bx = x(3a - 4b),$$

$$2. 20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3).$$

b) Aus §. 39, Folges. ergibt sich ferner:

$$1. a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b),$$

$$2. a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b),$$

$$3. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Aufgaben.

Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren:

1. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1694; e) 2025;
2. f) 2268; g) 3075; h) 3828; i) 5376; k) 10528;
3. l) $76a^3$; m) $66ab^2$; n) $26x^2y^2$; o) $72a^3b^2$; p) $60ax^2y^4$.

Suche alle Prim- und zusammengesetzten Factoren folgender Zahlen:

4. a) 48; b) 180; c) 210; d) 315; e) 810;
5. f) $18ab$; g) $36x^2$; h) $27my^2$; i) $165xyz$; k) $114an^2x^3$.

Zerlege nach §. 78. 2. a) in zwei Factoren:

$$6. 18ab - 15ac;$$

$$7. 9x^2 - 24xy;$$

$$8. 2a^4 - 4a^3 + 6a^2;$$

$$9. ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4;$$

$$10. a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3; \quad 11. 5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4.$$

Zerlege nach §. 78, 2. b) in Factoren:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 12. $x^2 + 2x + 1$ | 13. $m^2 - 2m + 1$; |
| 14. $4a^2 + 12a + 9$; | 15. $9b^2 - 12b + 4$; |
| 16. $y^2 + 10y + 25$; | 17. $x^2 - 6xy + 9y^2$; |
| 18. $4x^2 - 1$; | 19. $9a^2 - 16b^2$; |
| 20. $25x^2 - 16y^2$; | 21. $6x^2 - 54a^2$; |
| 22. $a^2 - (b + c)^2$; | 23. $(b - c)^2 - a^2$. |

4. Vom größten gemeinschaftlichen Maße.

§. 79. Unter dem größten gemeinschaftlichen Maße mehrerer Zahlen versteht man die größte Zahl, durch welche diese Zahlen theilbar sind.

Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, zerlege man jede derselben in ihre Primfactoren und hebe unter diesen diejenigen heraus, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen; das Product derselben ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da alle Factoren desselben in allen gegebenen Zahlen enthalten sind, gewiß ein gemeinschaftliches Maß derselben; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen Factor hinzufügen würde, durch dieses Product nicht mehr alle Zahlen theilbar wären.

Beispiel. Suche das gr. g. Maß von 300 und 420.

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \text{ gr. g. Maß} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

§. 80. Das gr. g. Maß zweier Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Primfactoren auf folgende Art bestimmt werden:

Man dividire die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Divisionsrest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gegebenen Zahlen.

Beweis. Sind a und b , wo $a > b$, die zwei gegebenen Zahlen und $r_1, r_2, r_3, r_4 \dots$ die aufeinander folgenden Divisionsreste, so läßt sich der Rechnungsgang so darstellen:

Dividend a ,	Divisor b ,	Rest r_1 ,
" b ,	" r_1 ,	" r_2 ,
" r_1 ,	" r_2 ,	" r_3 ,
" r_2 ,	" r_3 ,	" r_4 , u. s. w.

Zunächst ist klar, daß man bei fortgesetztem Dividieren endlich auf einen Rest = 0 kommen müsse, weil der jedesmalige Rest eine ganze Zahl und wenigstens um 1 kleiner als der Divisor, welcher der vorhergehende Rest war, sein muß. Es sei z. B. $r_4 = 0$.

Dann ist r_3 gewiß das größte gemeinschaftliche Maß von a und b . Aus der letzten Division folgt, daß r_3 das gr. g. Maß zwischen r_2 und r_3 ist; r_2 und r_3 kommen in der vorhergehenden Division als Divisor und Rest vor, also ist (§. 71, 3) r auch das gr. g. Maß zwischen dem Dividend r_1 und dem Divisor r_2 , folglich vermöge der nächstvorhergehenden Division, wo r_1 und r_2 Divisor und Rest vorstellen, r_3 das gr. g. Maß zwischen b und r_1 , und endlich vermöge der ersten Division r_3 auch das gr. g. Maß zwischen a und b .

Beispiele. 1. Um das gr. g. Maß von 1134 und 3654 zu finden, hat man

$$\begin{array}{rcl} 3654 : 1134 = 3 & \text{mit dem Reste } 252 & \text{oder } 1134 \overline{) 3654} 3 \\ 1134 : 252 = 4 & \text{" " " } & 126 \overline{) 252} 4 \\ 252 : 126 = 2 & \text{" " " } & 0 \end{array}$$

gr. g. Maß = 126.

2. Man suche das gr. g. Maß von 377 und 848.

$$\begin{array}{rcl} 377 \overline{) 848} 2 & \text{gr. g. M.} = 1. \\ 1 \overline{) 94} 4 & 377 \text{ und } 848 \text{ sind also relative Primzahlen.} \\ & 094 \end{array}$$

3. Es soll das gr. g. Maß zwischen $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ und $a^2 - b^2$ gesucht werden.

$$\begin{array}{r} (3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2 \\ \underline{3a^3 - 3ab^2} \\ - + + \\ \underline{- 2a^2 + a + 2b^2 + b} \\ - 2a^2 + 2b^2 \\ \underline{+ - - } \end{array}$$

+ a + b Rest.

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$$

Das gesuchte gr. g. Maß ist also der letzte Divisor $a + b$.

Um nach dieser Methode das gr. g. Maß von mehr als zwei Zahlen zu finden, suche man dasselbe zuerst von zwei Zahlen, dann von dem so gefundenen Maße und der dritten Zahl, hierauf von dem neuen Maße und der vierten Zahl, u. s. f.; das zuletzt gefundene gr. g. Maß ist zugleich das gr. g. Maß aller gegebenen Zahlen.

Aufgaben.

1.* Welches ist das gr. g. Maß zwischen a) 12 und 16? b) 15 und 20? c) 40 und 56? d) 72 und 96? e) 45 und 75?

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

- | | |
|---|--|
| 2. 84 und 308; | 3. 360 und 680; |
| 4. 108, 450 und 540; | 5. 560, 620 und 760; |
| 6. 693, 819 und 945; | 7. 504, 756, 1260 und 1764; |
| 8. $12acx$, $14a^2x$ und $16ax^2$; | 9. $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ und $20x^4y^2$; |
| 10. $m^2 + 2mn + n^2$ und $m^2 - n^2$; | 11. $a^2 - 2ab + b^2$ und $a^2 - b^2$; |
| 12. $a^2 - 2ab - 8b^2$ und $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$; | |

Suche ohne Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

- | | |
|--|-----------------------------|
| 13. 637 und 4277; | 14. 2091 und 1353; |
| 15. 1404 und 8658; | 16. 3552 und 5143; |
| 17. 7774 und 3718; | 18. 27671 und 21708; |
| 19. 50149 und 51119; | 20. 55660 und 66055; |
| 21. 39215 und 73997; | 22. 24955 und 338625; |
| 23. 1701, 6426, 10521; | 24. 120582, 145530, 167706; |
| 25. $12a^3 - 2a^2 - 35a - 11$ und $6a^2 + 11a + 3$; | |
| 26. $24x^3 - 10x^2 - 56x + 10$ und $6x^2 - x - 15$. | |

5. Vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

§. 81. Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, zerlege man alle gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren, und nehme aus diesen alle verschiedenen Factoren und zwar jeden so oft, als er in irgend einer gegebenen Zahl am häufigsten vorkommt; das Product dieser Factoren ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da es alle Factoren einer jeden der gegebenen Zahlen enthält, gewiss ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; es ist aber auch das kleinste g. Vielfache, weil man keinen jener Factoren weglassen darf, ohne daß das Product aufhören würde, durch alle gegebenen Zahlen theilbar zu sein.

Beispiel. Es soll das kl. g. Vielfache zwischen 60, 108 und 1050 gefunden werden.

$$\begin{aligned} 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \\ 108 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \\ 1050 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7, \end{aligned}$$

$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 18900.$$

Diese Auflösung führt auf folgendes praktische Verfahren zur Auffindung des kl. g. Vielfachen mehrerer Zahlen:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe neben einander, und lasse die kleineren Zahlen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weg.

2. Man untersuche, ob nicht zwei oder mehrere der übriggebliebenen Zahlen eine Primzahl als gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so hebt man dieses Maß rechts heraus und dividirt dadurch alle Zahlen, deren Maß es ist; die Quotienten, so wie die nicht theilbaren Zahlen setze man in eine darunter befindliche Reihe neben einander.

3. Mit dieser neuen Reihe verfare man eben so wie mit der ursprünglich aufgestellten, und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis man zuletzt eine Reihe erhält, in welcher lauter relative Primzahlen vorkommen.

4. Multiplicirt man dann die in der letzten Reihe befindlichen relativen Primzahlen und die rechts herausgehobenen Maße mit einander, so ist das Product das gesuchte kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen.

Beispiel. Es soll das kl. g. Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50 gesucht werden.

$$\begin{array}{r}
 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50 \\
 9, 12, 16, 45, 25 \mid 2 \\
 6, 8, 45, 25 \mid 2 \\
 3, 4, 45, 25 \mid 2 \\
 4, 9, 5 \mid 5
 \end{array}$$

$$\text{kl. g. Vielfaches} = 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 7200.$$

§. 82. Wenn sich die gegebenen Zahlen nicht leicht in Primfactoren zerlegen lassen, wird zur Auffindung des kl. g. Vielfachen ein anderes Verfahren angewendet, welches auf folgenden Erwägungen beruht:

Wenn man zwei Zahlen durch ihr gr. g. Maß dividirt, so müssen die Quotienten relative Primzahlen sein. Das Product, welches entsteht, indem man den bei der einen Zahl erhaltenen Quotienten mit der zweiten Zahl multiplicirt, enthält die Factoren beider Zahlen und ist somit durch beide Zahlen theilbar; auch kann keiner dieser Factoren weggelassen werden, ohne daß das Product aufhören würde, durch beide Zahlen theilbar zu sein. Jenes Product ist also das kl. g. Vielfache der beiden Zahlen.

Um daher das kl. g. Vielfache zweier Zahlen zu finden, sucht man zuerst das gr. g. Maß derselben, dividirt durch dieses eine der beiden Zahlen und multiplicirt mit dem Quotienten die andere Zahl. Das Product ist das gesuchte kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen. Z. B. Man suche das kl. g. Vielfache zwischen 648 und 972.

$$\begin{array}{r}
 648 \mid 9721 \\
 03242
 \end{array}
 \quad 324 \text{ ist das gr. g. Maß.}$$

$$648 : 324 = 2; 972 : 2 = 1944, \text{ oder}$$

$$972 : 324 = 3; 648 : 3 = 1944;$$

$$\text{kl. g. Vielfaches} = 1944.$$

Um nach dieser Methode das kl. g. Vielfache von drei oder mehreren Zahlen zu finden, sucht man nach dem eben angegebenen Verfahren das kl. g. Vielfache der zwei ersten Zahlen, dann von dem so gefundenen kl. g. Vielfachen und der dritten Zahl, hierauf von diesem letzten kl. g. Vielfachen und der vierten Zahl, u. s. w. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen.

Aufgaben.

1.* Welches ist das kl. g. Vielfache zwischen a) 8 und 15? b) 10 und 25? c) 24 und 36? d) 12 und 52? e) 30 und 48?

Suche mittelst Zerlegung in Factoren des kl. g. Vielfache der Zahlen:

2. 300 und 620;

3. 240 und 486;

4. 120, 168 und 182;

5. 105, 144 und 270;

6. 3, 4, 6, 10 und 25;

7. 2, 5, 9, 20, 21 und 24;

8. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70; 9. 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21;
 10. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56; 11. 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256;
 12. a , $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$; 13. $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$;
 14. m , $5m^2$, $3n$, $8mn$ und $15m$ ($m - n$);
 15. $3x$, $x - 2$, $5(x + 2)$, $20(x^2 - 4)$ und $6(x + 2)^2$.

Suche ohne Zerlegung in Factoren das fl. g. Vielfache der Zahlen:

16. 874 und 943; 17. 561 und 1530;
 18. 1716 und 2222; 19. 6987 und 8083;
 20. 816, 765, 697; 21. 259, 3219, 7548;
 22. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $x^2 - y^2$;
 23. $24a^3 + 14a^2 - 26a + 4$ und $6a^2 + 5a - 6$.

6. Wiederholungsaufgaben.

- 1.* Wie viel beträgt
 a) das 8fache der Summe aus $28 + 39$?
 b) der dritte Theil des 7fachen von 87?
 2.* Von welcher Zahl muß man das 3fache um 20 vergrößern, um 167 zu erhalten?
 3. Wie groß sind die Producte, welche man erhält, wenn man jede der Zahlen a) 57908, b) 38826, c) 471937 mit sich selbst multipliciert?
 4. $5m - \{ (2m + 3a) - 3m \}$.
 5. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$.
 6. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5)$.
 7. Suche das gr. g. Maß von a) 1081 und 1403, b) 4587 und 1441, c) 6417 und 28520, d) 41454 und 8118.
 8. Suche das fl. g. Vielfache von
 a) 5, 6, 8, 12, 16, 18; b) 12, 15, 20, 36, 40, 45, 60;
 c) 32, 40, 48, 60, 72, 84; d) 36, 42, 54, 84, 90, 112.
 9. Zerlege folgende Zahlen in Primfactoren:
 a) 60060, b) 23142, c) 61380, d) 3155625;
 e) $2ab + 4ac$, f) $xy - x$, g) $6ab(m^2 - n^2)$.
 10. $(5x^3y^2 + 7x^2y^3 - 1)(5x^3y^2 - 7x^2y^3 + 1)$.
 11. $(9x^2 - 16y^2 - 40yz - 25z^2) : (3x - 4y - 5z)$.
 12.* 6mal a) 122, b) 192, c) 236, d) 324, e) 420.
 13.* a) $476 + 450$, b) $775 + 164$, c) 960 - 324, d) $724 - 590$.
 14. Zerlege den Multiplicator in Factoren und multipliciere:
 a) $2358 \cdot 35$, b) $45892 \cdot 36$, c) $59375 \cdot 42$,
 d) $5702 \cdot 28$, e) $97654 \cdot 64$, f) $34498 \cdot 72$.
 15. Eine telegraphische Depesche geht von Paris um 10 Uhr 58 Min. 15 Sec. nach Wien ab und kommt daselbst in 1 Stunde 8 Minuten an. Wie viel Uhr ist es bei der Ankunft der Depesche in Wien, wenn die Wiener Uhr der Pariser um 56 Min. 10 Secunden vorangeht?

Vierter Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten mit gebrochenen Zahlen.

§. 83. Die Division kann an der Reihe der ganzen Zahlen nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist. Z. B. Der Quotient $8 : 3$ ist größer als 2 und kleiner als 3, er läßt sich daher durch die bisher betrachtete Zahlenreihe nicht darstellen.

Um nun den Quotienten $a : b$ auch in dem Falle, wo a kein Vielfaches von b ist, bestimmen zu können, ist man genöthigt, die Reihe der ganzen Zahlen durch Einschaltung neuer Zahlen zu erweitern, indem man die ursprüngliche Einheit in b gleiche Theile theilt und einen solchen Theil, welcher durch $\frac{1}{b}$ (1 btel) bezeichnet wird, als eine neue Einheit annimmt, um mit ihr zu zählen. Man erhält auf diese Weise eine neue Zahlenreihe

$$\frac{1}{b'} \quad \frac{2}{b'} \quad \frac{3}{b'} \quad \frac{4}{b'} \quad \dots \quad \frac{a}{b'} \quad \dots$$

in welcher sich für die Division jeder ganzen Zahl durch b der Wert des Quotienten genau vorfindet.

Eine Zahl $\frac{a}{b}$ dieser neuen Art nennt man im Gegensatze zu den bisher betrachteten ganzen Zahlen eine gebrochene Zahl oder einen Bruch; a heißt der Zähler, b der Nenner des Bruches.

Ein Bruch ist demnach eine Zahl, welche einen oder mehrere Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit ausdrückt. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile die ursprüngliche Einheit getheilt ist; der Zähler gibt an, wie vielmal ein solcher Theil gesetzt ist. Der Bruch $\frac{a}{b}$ bedeutet den b ten Theil der Einheit a mal gesetzt; oder

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

I. Gemeine Brüche.

1. Allgemeine Eigenschaften der Brüche.

§. 84. Wird die Einheit in b gleiche Theile getheilt, so ist die Summe von b solchen Theilen wieder gleich der Einheit; also $\frac{1}{b} \cdot b = 1$. Nimmt man weniger als b solche Theile, so erhält man weniger; nimmt man mehr als b solche Theile, so erhält man mehr als die Einheit.

Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist also kleiner als 1, wenn $a < b$; gleich 1, wenn $a = b$; und größer als 1, wenn $a > b$ ist. 3. B.

$$\frac{5}{8} < 1, \quad \frac{8}{8} = 1, \quad \frac{13}{8} > 1.$$

Ein Bruch, welcher kleiner als 1, dessen Zähler also kleiner als der Nenner ist, heißt ein echter Bruch, jeder andere Bruch ein unechter Bruch.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche besteht, heißt eine gemischte Zahl; 3. B.

$$5 + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}, \quad a + \frac{m}{n}, \quad a - \frac{m}{n}.$$

§. 85. Multipliziert man einen Bruch mit seinem Nenner, so ist das Product gleich dem Zähler.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot b &= \left\{ \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots (a \text{ mal}) \right\} \cdot b \\ &= \frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot b + \dots (a \text{ mal}) \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots (a \text{ mal}), \end{aligned}$$

also $\frac{a}{b} \cdot b = a.$

§. 86. Jeder Quotient kann als Bruch, und umgekehrt jeder Bruch als Quotient betrachtet werden; der Dividend ist der Zähler, der Divisor der Nenner des Bruches.

$$a : b = \frac{a}{b}, \quad 15 : 8 = \frac{15}{8}.$$

Denn $\frac{a}{b} \cdot b = a.$

§. 87. Aus dem Begriffe eines Bruches folgt:

1. Von zwei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den größeren Zähler hat.

2. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

§. 88. Jeder unechte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden, indem man den Zähler durch den Nenner dividirt.

$$\frac{20}{5} = 20 : 5 = 4.$$

$$\frac{23}{5} = \frac{20 + 3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}.$$

Allgemein

$$\frac{am}{m} = a, \quad \frac{am + r}{m} = a + \frac{r}{m}.$$

§. 89. 1. Jede ganze Zahl kann in der Form eines Bruches mit gegebenem Nenner dargestellt werden, indem man das Product aus der ganzen Zahl und dem gegebenen Nenner als den Zähler des Bruches annimmt.

$$a = an : n = \frac{an}{n}, \quad 5 = 5 \cdot 4 : 4 = 20 : 4 = \frac{20}{4}.$$

2. Jede gemischte Zahl kann in einen Bruch verwandelt werden, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliciert, und den Zähler dazu addiert oder davon subtrahiert, je nachdem der Bruch positiv oder negativ ist; diese Zahl ist der Zähler, der Nenner wird ungeändert beibehalten.

$$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \left\{ (5 + \frac{2}{3}) \cdot 3 \right\} : 3 = (15 + 2) : 3 = \frac{17}{3}.$$

$$a + \frac{m}{n} = \left\{ (a + \frac{m}{n}) \cdot n \right\} : n = (an + m) : n = \frac{an + m}{n}.$$

$$a - \frac{m}{n} = \left\{ (a - \frac{m}{n}) \cdot n \right\} : n = (an - m) : n = \frac{an - m}{n}.$$

§. 90. Da jeder Bruch als Quotient betrachtet werden kann, dieser aber nicht geändert wird, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividirt, so folgt unmittelbar:

Ein Bruch bleibt (seinem Werte nach) unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm'}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{32}{48};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m'}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}.$$

§. 91. 1. Mit Hilfe des ersten Theiles des Satzes in §. 90 kann man jeden Bruch ohne Änderung seines Wertes auf einen neuen Nenner bringen, sobald dieser neue Nenner ein Vielfaches des früheren Nenners ist; man braucht nur den neuen Nenner durch den früheren zu dividieren und mit dem Quotienten den früheren Zähler zu

multiplizieren; das Product ist der neue Zähler. Ist z. B. der Bruch $\frac{4}{5}$ auf den Nenner 40 zu bringen, so hat man

$$40 : 5 = 8; 4 \cdot 8 = 32; \text{ also } \frac{4}{5} = \frac{32}{40}.$$

Um $\frac{a}{2b}$ auf den Nenner $4bc$ zu bringen, hat man

$$4bc : 2b = 2c; a \cdot 2c = 2ac; \text{ also } \frac{a}{2b} = \frac{2ac}{4bc}.$$

Die Formveränderung eines Bruches durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit derselben Zahl wird die Erweiterung des Bruches genannt.

2. Durch die Erweiterung können auch mehrere Brüche auf einen neuen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden, nur muß dieser ein gemeinschaftliches Vielfaches aller gegebenen Nenner sein. Gewöhnlich bringt man die Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Man sucht zuerst das kl. g. Vielfache aller gegebenen Nenner; dieses ist der kl. g. Nenner. Um sodann den neuen Zähler eines jeden Bruches zu finden, dividirt man den neuen gemeinschaftlichen Nenner durch den früheren Nenner und multiplicirt mit dem Quotienten den früheren Zähler.

Beispiele.

1. Bringe die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{10}$ auf den kl. g. Nenner.

Das kl. g. Vielfache aller Nenner, somit der kl. g. Nenner, ist 40 und man hat

$40 : 2 = 20,$	$1 \cdot 20 = 20$	oder	$\frac{1}{2}$	20	20
$40 : 8 = 5,$	$3 \cdot 5 = 15$		$\frac{3}{8}$	5	15
$40 : 10 = 4,$	$9 \cdot 4 = 36$		$\frac{9}{10}$	4	36

daher

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40}, \quad \frac{3}{8} = \frac{15}{40}, \quad \frac{9}{10} = \frac{36}{40}.$$

2. Es sollen die Brüche $\frac{a}{2b}, \frac{3m}{4bc}, \frac{4n}{c^2d}$ auf den kl. g. Nenner gebracht werden.

Der kl. g. Nenner ist $4bc^2d$. Man hat daher

$4bc^2d : 2b = 2c^2d,$	$2c^2d \cdot a = 2ac^2d;$	also	$\frac{a}{2b} =$	$\frac{2ac^2d}{4bc^2d}$
$4bc^2d : 4bc = cd,$	$cd \cdot 3m = 3cdm;$		$\frac{3m}{4bc} =$	$\frac{3cdm}{4bc^2d}$
$4bc^2d : c^2d = 4b,$	$4b \cdot 4n = 16bn;$		$\frac{4n}{c^2d} =$	$\frac{16bn}{4bc^2d}.$

§. 92. Mit Hilfe des zweiten Theiles des Satzes in §. 90 kann man einen Bruch, dessen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl theilbar sind, abkürzen; man darf nur Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß dividieren. 3. B.:

$$\frac{35}{40} = \frac{7}{8}, \quad \frac{200}{240} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{4am}{6an} = \frac{2m}{3n}, \quad \frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}.$$

Aufgaben.

Verwandle in ganze oder gemischte Zahlen:

1.* $\frac{24}{4}, \frac{27}{2}, \frac{32}{5}, \frac{37}{4}, \frac{30}{6}, \frac{57}{3}, \frac{96}{8}, \frac{104}{7}, \frac{223}{10}.$

2. a) $\frac{982}{15}, \frac{744}{24}, \frac{2383}{9}, \frac{3383}{30}, \frac{13785}{128}, \frac{405979}{96}.$

b) $\frac{ax}{a}, \frac{3bx^2}{x}, \frac{4a+3}{4}, \frac{am+b}{m}, \frac{3ax-b}{3x}, \frac{ab^2c-mx}{ab}.$

Verwandle in unechte Brüche:

3.* $6\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 13\frac{2}{3}, 3\frac{5}{12}, 15\frac{3}{4}, 21\frac{3}{10}, 27\frac{6}{7}, 30\frac{5}{9}.$

4. a) $77\frac{2}{5}, 95\frac{1}{15}, 561\frac{5}{6}, 56\frac{17}{24}, 83\frac{19}{30}, 324\frac{37}{72}.$

b) $a + \frac{2}{m}, 3a + \frac{b}{a}, 5x - \frac{5y}{2x}, x + \frac{x^2-1}{x}, x - \frac{x^2-1}{x}.$

c) $m - \frac{m+n}{2}, 1 + \frac{a-b}{a+b}, 1 - \frac{x^2-2xy+y^2}{4xy},$

$a - 1 + \frac{a^2+1}{a+1}.$

d) $1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}, 1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}, a^2+b^2 - \frac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}.$

5.* Stelle die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ mit dem gemeinschaftlichen Nenner 24 dar.

6. Bringe die Brüche $\frac{1}{a}, \frac{2m}{3ab}, \frac{5n}{6ax}, \frac{3p}{10by}$ auf den Nenner 30abxy.

Bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

7.* a) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{12},$ b) $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4},$ c) $\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{6},$ d) $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{10}.$

8.* a) $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{20},$ b) $\frac{5}{12}$ und $\frac{11}{16},$ c) $\frac{13}{24}$ und $\frac{25}{32},$ d) $\frac{10}{27}$ und $\frac{5}{18}.$

9. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}.$

11. $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{18}{35}, \frac{19}{40}, \frac{25}{56}.$

13. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{15}{16}, \frac{31}{75}, \frac{127}{128}.$

15. $\frac{1}{a}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^3}.$

10. $\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{18}, \frac{13}{20}, \frac{8}{15}, \frac{11}{12}.$

12. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{20}.$

14. $\frac{17}{30}, \frac{5}{32}, \frac{23}{25}, \frac{19}{24}, \frac{38}{75}, \frac{29}{36}.$

16. $\frac{1}{m}, \frac{5a}{3m^2}, \frac{3bc}{4m^3}, \frac{4def}{5m^4}.$

$$\begin{aligned}
 17. & \frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}, & 18. & \frac{y+1}{y-1}, \frac{y-1}{y+1}, \frac{y^2+1}{y^2-1} \\
 19. & \frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \\
 20. & \frac{a}{1+a}, \frac{a}{1-a}, \frac{a^2}{1-a^2}, \frac{a^2}{1+2a+a^2}
 \end{aligned}$$

Kürze folgende Brüche ab:

$$21.* \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{24}{32}, \frac{15}{25}, \frac{18}{45}, \frac{28}{40}, \frac{35}{60}, \frac{60}{96}, \frac{24}{120}.$$

$$22. a) \frac{45}{54}; b) \frac{114}{250}; c) \frac{840}{1020}; d) \frac{1824}{7008}; e) \frac{4096}{7424}.$$

$$23. a) \frac{5 \cdot 12 \cdot 18}{4 \cdot 10 \cdot 27}; b) \frac{6 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 28}{4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 30}; c) \frac{6 \cdot 21 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 75}{8 \cdot 27 \cdot 50 \cdot 56 \cdot 60}.$$

$$24. a) \frac{391}{989}; b) \frac{637}{819}; c) \frac{765}{5304}; d) \frac{2079}{7029}; e) \frac{9082}{67735}.$$

$$25. \text{Bestimme den Wert von } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

für $n = 6$, dann für $n = 8$, und kürze die erhaltenen Brüche ab.

Kürze folgende Brüche ab:

$$26. a) \frac{3abx}{12bmx}; b) \frac{12a^2x}{28ax^2}; c) \frac{15amx^3}{40bmx}; d) \frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}.$$

$$27. a) \frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)}; b) \frac{2m(m-1)}{m^2-1}; c) \frac{15(a+b)(x-y)}{24(a-b)(x-y)}.$$

2. Addition und Subtraction der Brüche.

§. 93. 1. Sind die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ zu addieren, so hat man den mten Theil der Einheit zuerst a mal, dann b mal, also zusammen $(a+b)$ mal zu nehmen; folglich

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m},$$

d. h. Brüche von gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner gibt. Z. B.

$$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7+5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2};$$

$$\frac{a+b}{2m} + \frac{a-b}{2m} = \frac{(a+b) + (a-b)}{2m} = \frac{2a}{2m} = \frac{a}{m}.$$

2. Sind Brüche mit ungleichen Nennern zu addieren, so stellt man sie mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorigen Satze. Z. B.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12};$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn}.$$

§. 94. 1. Ist $\frac{b}{m}$ von $\frac{a}{m}$ zu subtrahieren, so hat man a mal den m ten Theil der Einheit, weniger b mal den m ten Theil der Einheit, also $(a - b)$ mal den m ten Theil der Einheit zu setzen; folglich

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m},$$

d. h. Zwei Brüche von gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner gibt. 3. B.

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7 - 3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{x + y}{m} - \frac{x - y}{m} = \frac{(x + y) - (x - y)}{m} = \frac{2y}{m}.$$

2. Sind Brüche mit ungleichen Nennern zu subtrahieren, so stellt man sie mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorhergehenden Satze. 3. B.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an - bm}{mn}.$$

Aufgaben.

1.* a) $8\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{8} + 4\frac{7}{8}$, c) $2\frac{3}{7} + 4\frac{4}{7}$, d) $10\frac{7}{12} + 6\frac{1}{12}$.

2.* a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$, b) $8\frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{4}{15}$, c) $5\frac{3}{10} + 6\frac{7}{10} + 7\frac{9}{10}$.

3. $35\frac{3}{20} + 57\frac{7}{20} + 79\frac{13}{20}$. 4. $54\frac{23}{32} + 98\frac{29}{32} + 44 + 61\frac{19}{32}$.

5.* a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, b) $\frac{7}{10} + \frac{11}{20}$, c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$, d) $3\frac{7}{12} + \frac{11}{18}$.

6.* a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, b) $2\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$, c) $3\frac{7}{8} + 9\frac{1}{6}$, d) $17\frac{8}{9} + 12\frac{7}{12}$.

7.* a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, b) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{4}{5}$, c) $1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5}$.

8. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{13}{15}$. 9. $\frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{11}{20} + \frac{12}{25}$.

10. $23\frac{2}{5} + 21\frac{4}{15} + 58\frac{9}{20} + 47\frac{39}{50}$.

11. $52\frac{5}{8} + 93\frac{7}{10} + 88 + 35\frac{11}{12} + 208\frac{7}{36}$.

12. $4068 + 1234\frac{17}{20} + 5678\frac{29}{35} + 987\frac{41}{48} + 6543\frac{37}{42}$.

13. Wie viel betragen folgende vier Straßenlängen zusammen: $28\frac{5}{8}$, $19\frac{3}{20}$, $36\frac{57}{100}$ und $25\frac{7}{25}$ Kilometer?

14. Eine Wasserpumpe kann das in einer Grube enthaltene Wasser in 15 Tagen, eine andere in 12 Tagen herauschaffen; der wievielte Theil des Wassers wird a) von jeder Maschine, b) von beiden Maschinen zusammen in 1 Tage herausgepumpt?

$$15.* \text{ a) } \frac{7}{11} - \frac{3}{11}, \text{ b) } 5\frac{7}{8} - \frac{3}{8}, \text{ c) } 8\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5}, \text{ d) } 37\frac{23}{25} - 18\frac{9}{25}.$$

$$16.* \text{ a) } 23\frac{3}{5} - 16, \text{ b) } 1 - \frac{5}{12}, \text{ c) } 10 - \frac{19}{24}, \text{ d) } 78 - 39\frac{7}{15}.$$

$$17. 503\frac{150}{93} - 319\frac{107}{93}. \quad 18. 723\frac{241}{425} - 476\frac{409}{425}.$$

$$19.* \text{ a) } \frac{7}{8} - \frac{3}{4}, \text{ b) } 2\frac{4}{5} - \frac{7}{10}, \text{ c) } \frac{13}{16} - \frac{5}{12}, \text{ d) } 8\frac{7}{20} - \frac{19}{20}.$$

$$20.* \text{ a) } 12\frac{13}{15} - 8\frac{7}{20}, \text{ b) } 16\frac{2}{5} - 7\frac{5}{6}, \text{ c) } 58\frac{19}{24} - 19\frac{5}{16}.$$

$$21. 265\frac{37}{40} - 156\frac{18}{25}. \quad 22. 374\frac{29}{48} - 215\frac{11}{20}.$$

$$23. 437\frac{7}{15} - 187\frac{11}{16}. \quad 24. 329\frac{13}{29} - 109\frac{37}{64}.$$

$$25. 822\frac{9}{24} - 428\frac{23}{36}. \quad 26. 657\frac{13}{25} - 384\frac{63}{80}.$$

27. Man hat folgende Brüche: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$; um wie viel ist die Summe der ersten zwei Brüche kleiner als 1? — um wie viel die Summe der ersten drei, vier, fünf, sechs Brüche?

28. Von folgenden Metallen wiegt 1 Cub.-Decim. in Kilogrammen: Platin 22 $\frac{9}{10}$, Gold 19 $\frac{9}{25}$, Blei 11 $\frac{4}{5}$, Silber 10 $\frac{1}{2}$, Kupfer 9 $\frac{8}{9}$; um wie viel ist 1 Cub.-Decim. jedes der vorangehenden Metalle schwerer, als ein Cub.-Decim. jedes der folgenden?

$$29. \frac{4x}{3} + \frac{2x}{3}.$$

$$30. \frac{3m}{4} - \frac{m}{4}.$$

$$31. \frac{x}{10} - \frac{y+z}{10}.$$

$$32. \frac{x}{8} - \frac{y-z}{8}.$$

$$33. \frac{a+4x}{3} + \frac{2a-x}{3}.$$

$$34. \frac{a+b}{3m} + \frac{2a-b+3c}{3m}.$$

$$35. \frac{3a-2}{5} + \frac{2a+3}{3}.$$

$$36. \frac{x+y}{8} - \frac{x-y}{12}.$$

$$37. \frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab}.$$

$$38. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

$$39. \frac{a+x}{a} + \frac{x}{a+x}.$$

$$40. \frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}.$$

$$41. \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}.$$

$$42. \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}.$$

$$43. \frac{9a+2}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}.$$

$$44. \frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}. \quad 45. \frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}.$$

$$46. \frac{2x+3y}{6x(2x-3y)} - \frac{2x-3y}{6x(2x+3y)}. \quad 47. \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c}.$$

$$48. \frac{a+b-c}{ab} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{b+c-a}{bc}.$$

$$49. \frac{5a-8b}{a+b} + \frac{3a-b}{a-b} - \frac{a-4b}{a+b} + \frac{a+5b}{a-b}.$$

3. Multiplication und Division der Brüche.

§. 95. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man den Zähler damit multipliciert oder den Nenner dadurch dividirt.

$$1) \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}, \quad \frac{2}{15} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{15} = \frac{8}{15};$$

$$2) \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}, \quad \frac{3}{16} \cdot 4 = \frac{3}{16:4} = \frac{3}{4}.$$

Beweis. 1. Nimmt man a Theile, deren jeder $\frac{1}{b}$ ist, m mal als Summand, so erhält man am solche Theile; also $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$.

$$2. \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} \text{ (nach 1)} = \frac{am : m}{b : m} \text{ (§. 90)} = \frac{a}{b : m}.$$

Die zweite Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, kann nur angewendet werden, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

§. 96. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Zähler dadurch dividirt oder den Nenner damit multipliciert.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}, \quad \frac{18}{25} : 3 = \frac{18 : 3}{25} = \frac{6}{25};$$

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}, \quad \frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8 \cdot 3} = \frac{7}{24}.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\frac{a : m}{b} \cdot m = \frac{(a : m) \cdot m}{b} \text{ (§. 95)} = \frac{a}{b},$$

als auch

$$\frac{a}{bm} \cdot m = \frac{a}{bm : m} \text{ (§. 95)} = \frac{a}{b}.$$

Die erste Art des Dividirens ist nur dann anwendbar, wenn der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

§. 97. Es sei 5 mit einem Bruche, z. B. mit $\frac{3}{4}$ zu multiplicieren. Hier sollte nach der in §. 31 gegebenen Erklärung der Multiplication die Zahl 5 $\frac{3}{4}$ mal als Summand gesetzt werden, welche Aufgabe offenbar keinen Sinn hat. Man muß daher den ursprünglich für ganze Zahlen aufgestellten Begriff des Multiplicierens so erweitern, daß er auch für die Brüche anwendbar wird.

Um 5 mit 3 zu multiplicieren, muß man 5 3mal als Summand setzen; um 5 mit dem 4ten Theile von 3 zu multiplicieren, wird man

nicht die Zahl 5 selbst, sondern den 4ten Theil derselben 3mal als Summand setzen; also

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}.$$

Eine Zahl mit einem Bruche multiplicieren heißt daher, die Zahl in so viele gleiche Theile theilen, wie der Nenner des Bruches anzeigt, und einen solchen Theil so oft als Summand setzen, wie der Zähler anzeigt.

Auf diese Erweiterung des Multiplicationsbegriffes wird man durch die Aufgaben des praktischen Lebens von selbst geführt. Um allgemein aus dem Betrage der Einheit den Betrag einer gleichartigen Mehrheit zu finden, wird der Betrag der Einheit mit der Zahl, welche die Mehrheit ausdrückt, multipliciert. Wenn z. B. 1 Meter 5 fl. kostet, so kosten $\frac{3}{4}$ Meter 5 fl. $\times \frac{3}{4}$. Was dieses Product bedeutet, wird aus der wirklichen Lösung der Aufgabe ersichtlich; man hat nämlich:

1 Meter kostet 5 fl.;

$\frac{1}{4}$ Meter kostet den 4ten Theil von 5 fl., also $\frac{5}{4}$ fl.;

$\frac{3}{4}$ Meter kosten 3mal so viel als $\frac{1}{4}$ Meter, also $\frac{5}{4}$ fl. $\times 3$;

$$\text{folglich ist } 5 \text{ fl.} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \text{ fl.} \times 3.$$

Eine Zahl wird demnach mit einem Bruche multipliciert, indem man sie durch den Nenner dividirt und den Quotienten mit dem Zähler multipliciert.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n};$$

$$10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{5} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ist ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem Bruche $\frac{m}{n}$ zu multiplicieren, so hat man nach dem vorhergehenden Satze

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left\{ \frac{a}{b} : n \right\} \cdot m = \frac{a}{bn} \cdot m = \frac{am}{bn},$$

d. h. ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, indem man dem Producte der Zähler das Product der Nenner als Nenner gibt.

$$\text{z. B. } \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{21}{50}.$$

Zusatz. Wenn zwei Zahlen zum Producte 1 geben, so heißt jede der umgekehrte oder reciproke Wert der anderen.

So ist $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, daher $\frac{1}{a}$ der umgekehrte Wert von a ,
 $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$, " $\frac{n}{m}$ " " " " $\frac{m}{n}$
 $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$, " $\frac{4}{3}$ " " " " $\frac{3}{4}$.

§. 98. Für die Division durch einen Bruch ergibt sich aus dem in §. 45 aufgestellten allgemeinen Begriffe der Division folgender Satz:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie durch den Zähler dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert, oder indem man sie mit dem umgekehrten Bruche multipliciert.

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot n, \quad 8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{40}{3}.$$

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}, \quad 8 : \frac{3}{5} = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\left(\frac{a}{m} \cdot n\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot m \quad (\S. 97) = a; \text{ als auch}$$

$$\left(a \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{m}{n} = a \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}\right) = a \cdot 1 = a.$$

Ebenso ist

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}, \quad \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

Aufgaben.

- 1.* a) $\frac{3}{5} \cdot 6$; b) $\frac{5}{12} \cdot 7$; c) $\frac{13}{18} \cdot 5$; d) $\frac{17}{25} \cdot 16$.
- 2.* a) $\frac{1}{12} \cdot 6$; b) $\frac{3}{48} \cdot 12$; c) $\frac{1}{30} \cdot 30$; d) $\frac{3}{45} \cdot 20$.
- 3.* a) $7\frac{3}{4} \cdot 9$; b) $8\frac{3}{20} \cdot 5$; c) $5\frac{7}{15} \cdot 6$; d) $13\frac{5}{8} \cdot 24$.
4. a) $81\frac{1}{30} \cdot 75$; b) $57\frac{3}{45} \cdot 79$; c) $258\frac{1}{50} \cdot 85$; d) $607\frac{5}{75} \cdot 120$.
- 5.* 1 Meter kostet $\frac{4}{5}$ fl.; wie viel kosten 5, 12, 37, 72 Meter?
- 6.* 1 Hektoliter kostet $23\frac{3}{4}$ fl.; wie viel kosten 6, 15, 32 Hektol.?
7. $\frac{ab}{4m} \cdot 3c$. 8. $\frac{6x^2}{m^2y} \cdot my$. 9. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} \cdot 5y^2$.
10. $\frac{24x^2}{5y^2} \cdot y^2$. 11. $\frac{a-b}{2ab} \cdot 2b$. 12. $\frac{a+b}{m} (a-b)$.
13. $\left\{a + \frac{b^2 - a^2}{a}\right\} \cdot 2a$. 14. $\left\{1 + \frac{1-a}{1+a}\right\} \cdot (1+a)$.

$$15. \left\{ \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \right\} \cdot m^4. \quad 16. \left\{ \frac{3m^3}{4n^3} + \frac{2m^2}{3n^2} + \frac{m}{2n} \right\} \cdot 12n.$$

$$17. \left\{ \frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} - 4 \right\} \cdot x^3.$$

$$18. \left\{ 1 + \frac{a^2b^2 - 2abc^2 + c^4}{4abc^2} \right\} \cdot (a^2b^2 - 2abc^2 + c^4).$$

$$19.* \text{ a) } \frac{8}{15} : 4; \text{ b) } \frac{24}{25} : 6; \text{ c) } \frac{35}{41} : 7; \text{ d) } 7\frac{1}{5} : 12.$$

$$20.* \text{ a) } \frac{7}{8} : 5; \text{ b) } \frac{13}{20} : 4; \text{ c) } 1\frac{7}{12} : 9; \text{ e) } 9\frac{3}{10} : 15.$$

$$21. \text{ a) } 912\frac{6}{7} : 3; \text{ b) } 184\frac{5}{6} : 16; \text{ c) } 791\frac{9}{10} : 27; \text{ e) } 179\frac{13}{25} : 34.$$

22.* Eine Locomotive legt in 4 Stunden $113\frac{3}{5}$ Kilometer zurück; wie viel in 1 Stunde?

23. Wenn ein Hektoliter Wein 18 fl. kostet; wie viel Hektoliter bekommt man für $499\frac{1}{2}$ fl.?

$$24. \frac{15ax}{4b} : 5x.$$

$$25. \frac{12amx}{5bc} : 4ax.$$

$$26. \frac{8x^2}{3my} : 3my.$$

$$27. \frac{5x^3y^3}{4a^2b} : 2ab^2.$$

$$28. \frac{10m^3n^2}{xy^2} : 5m^2 n^2.$$

$$29. \left\{ 1 + \frac{m-n}{m+n} \right\} : 2m.$$

$$30. \left\{ a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} \right\} : (a+b).$$

$$31. \frac{6a^2 + 5ab - 6b^2}{2a + 3b} : (3a - 2b).$$

$$32. \frac{1 + 2m - 2m^3 - m^4}{1 - 2m + m^2} : (1 + 2m + m^2).$$

$$33. \text{ a) } 15 \cdot \frac{3}{5}; \text{ b) } 64 \cdot \frac{7}{8}; \text{ c) } 31 \cdot \frac{7}{10}; \text{ d) } 8 \cdot 5\frac{3}{5}.$$

$$34. \text{ a) } \frac{6}{35} \cdot \frac{7}{9}; \text{ b) } \frac{14}{15} \cdot \frac{8}{21}; \text{ c) } 10\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{12}; \text{ d) } 27\frac{10}{27} \cdot \frac{16}{25}.$$

$$35. \text{ a) } \frac{31}{60} \cdot 15\frac{5}{13}; \text{ b) } 28\frac{2}{3} \cdot 9\frac{4}{5}; \text{ c) } 53\frac{13}{24} \cdot 8\frac{17}{30}; \text{ d) } 216\frac{9}{25} \cdot 15\frac{11}{16}.$$

$$36. 6\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot 1\frac{3}{5}.$$

$$37. \frac{4}{5} \cdot 1\frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{9}.$$

38.* Um wie viel ist das Product der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ kleiner als jeder der beiden Factoren?

39. Um wie viel ist das Product der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ kleiner als ihre Summe?

40. 1 Kg. Zucker kostet 58 fr.; wie viel kosten $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $4\frac{11}{20}$, $25\frac{9}{10}$ Kg.?

41. B hat $2\frac{1}{3}$ mal so viel Geld als A, C $1\frac{1}{2}$ mal so viel als B, D aber nur $\frac{2}{3}$ mal so viel als C; wenn nun A $45\frac{3}{5}$ fl. hat, wie viel hat a) jeder der übrigen, b) wie viel haben alle zusammen?

42. $8a \cdot \frac{b}{4}$. 43. $ax \cdot \frac{2b}{y}$. 44. $4x^2y^2 \cdot \frac{3ab}{2xy}$.
 45. $2a^3 \cdot \frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}$. 46. $(a-x) \cdot \frac{a+x}{ax}$ 47. $3ax \cdot \left\{a - \frac{b}{3ax}\right\}$.
 48. $\frac{4x}{3y} \cdot \frac{7a}{9b}$ 49. $\frac{2ab}{cd} - \frac{3ax}{cm}$. 50. $\frac{5mx}{9ny} \cdot \frac{3n}{10m}$.
 51. $\frac{4a}{5b} \cdot \frac{7b}{8x} + \frac{2a}{5c} \cdot \frac{2c}{3x}$. 52. $\frac{6a}{y} \cdot \frac{2x}{3a} - \frac{5x}{b} \cdot \frac{3b}{5y}$.
 53. $\frac{12a^2b}{39xy^5} \cdot \frac{13x^2y^6}{24a^4b}$. 54. $\frac{6a}{7b} \cdot \frac{2b}{3d} \cdot \frac{14c}{15e} \cdot \frac{5d}{6a}$.
 55. $\frac{a+b}{m-n} \cdot \frac{a-b}{m+n}$. 56. $\left\{1 + \frac{b}{a}\right\} \cdot \frac{a-b}{2b}$.
 57. $\left\{\frac{a^3}{2b} - \frac{a^2}{3b^2} + \frac{a}{4b^3}\right\} \cdot \frac{3a^2}{4b^2}$. 58. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 2x^2 + 4} \cdot \frac{x^4 + 8}{x^2 - 9}$.
 59. $\left\{1 + \frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{a}{b}\right\} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a-b}$.
 60. $\left\{\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right\} \cdot \left\{\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right\}$.
 61. $\left\{1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right\}$.

- 62.* a) $24 : \frac{6}{7}$; b) $15 : \frac{5}{8}$; c) $10 : \frac{3}{5}$; d) $32 : 5\frac{1}{3}$.
 63. a) $\frac{21}{32} : \frac{3}{32}$; b) $\frac{9}{10} : \frac{5}{12}$; c) $\frac{27}{40} : \frac{12}{35}$; d) $8\frac{3}{25} : \frac{7}{25}$.
 64. a) $7\frac{7}{15} : \frac{27}{40}$; b) $140\frac{4}{5} : 6\frac{5}{12}$; c) $105\frac{7}{10} : 12\frac{2}{3}$;
 d) $135\frac{7}{48} : 20\frac{19}{24}$.

65.* In Flaschen, welche genau $\frac{5}{6}$ Liter fassen, sollen $27\frac{1}{2}$ Liter Wein gefüllt werden; wie viel Flaschen werden voll?

66. Eine Anzahl Guldenstücke wiegt $13\frac{1}{3}$ Kg.; wie viel sind es, da 1 Stück $\frac{1}{81}$ Kg. wiegt?

67. Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre in 3, durch eine zweite in 4 Stunden gefüllt werden; a) welchen Theil des Behälters füllt jede Röhre in 1 Stunde, b) in wie viel Stunden wird der Behälter voll, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind?

68. Ein Eisenbahnzug legt bei verschiedener Steigung in den ersten 3 Stunden $94\frac{7}{8}$ Kilometer, in den folgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden $70\frac{13}{20}$ Kilometer und in den weiteren $3\frac{5}{6}$ Stunden $122\frac{7}{10}$ Kilometer zurück; wie groß ist die durchschnittliche Fahrgeschwindigkeit dieses Zuges in 1 Stunde?

69. $2am : \frac{2m}{b}$. 70. $12a^3 : \frac{3a^2}{x}$. 71. $6a^2y : \frac{3b^2}{2y}$.

$$72. (x + y) : \frac{x + y}{x - y}.$$

$$73. (a^2 - b^2) : \frac{a + b}{a - b}.$$

$$74. \frac{3a}{4y} : \frac{5x}{2b}.$$

$$75. \frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2} : \frac{x - y}{a + b}.$$

$$76. \left\{ a + \frac{b}{c} \right\} : \left\{ a - \frac{b}{c} \right\}.$$

$$77. \left\{ \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} \right\} : \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$78. \frac{4(x + y)}{9(m - n)} : \frac{8(m - n)}{3(x - y)}.$$

$$79. \left\{ \frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10} \right\} : \frac{3x}{5y}.$$

$$80. \left\{ \frac{1}{2}a^2 + \frac{47}{210}ab - \frac{2}{3}b^2 \right\} : \left\{ \frac{3}{4}a - \frac{5}{7}b \right\}.$$

$$81. \left\{ \frac{5x^6}{12a^6} - \frac{43x^2}{24a^2} + \frac{9a^2}{5x^2} \right\} : \left\{ \frac{3x^2}{4} - \frac{6a^2}{5x^2} \right\}.$$

II. Decimalbrüche.

§. 99. Ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl, und dessen Nenner eine Potenz von 10, also 10, 100, 1000, . . . 10^m ist, heißt ein Decimalbruch; z. B. $\frac{213}{100}$, $\frac{517}{10}$, $\frac{57}{1000}$. Die allgemeine Form eines Decimalbruchs ist $\frac{A}{10^m}$, wo A und m ganze Zahlen bezeichnen.

Im Gegensatze zu den Decimalbrüchen werden alle anderen Brüche gemeine Brüche genannt.

Die Decimalbrüche werden ohne Nenner angeschrieben; man braucht nur im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen Punkt, den Decimalpunkt, abzuschneiden, als der Potenzexponent von 10 im Nenner Einheiten enthält, oder was gleichviel ist, als im Nenner Nullen vorkommen: sollten nicht genug Ziffern vorhanden sein, um sie abzuschneiden zu können, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt. Z. B.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78.317, \quad \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0.5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0.00037.$$

Die Ziffern rechts nach dem Decimalpunkte werden Decimalen genannt. $\frac{A}{10^m}$ stellt demnach einen Decimalbruch mit m Decimalen vor.

Um die Bedeutung der Ziffern eines Decimalbruchs kennen zu lernen, sei der Decimalbruch $\frac{A}{10^4}$, welcher 4 Decimalen enthält; die Zahl vor

dem Decimalpunkte heiße m , und die Decimalziffern in der Ordnung gegen die Rechte seien a, b, c, d ; dann ist

$$A = m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

daher

$$\begin{aligned} \frac{A}{10^4} &= \frac{m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d}{10^4} \\ &= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}. \end{aligned}$$

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Decimalpunkte steht, eine ganze Zahl; die erste Decimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

$$\begin{aligned} \text{z. B. } 34.781 &= \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000} \\ &= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

In einer nach dem dekadischen Zahlensysteme (§. 8.) geschriebenen ganzen Zahl bedeutet jede Ziffer an der nachstfolgenden Stelle gegen die Rechte den 10. Theil von dem, was sie an der vorhergehenden Stelle gilt. Dasselbe Gesetz findet auch bei den Decimalen statt, da ein Zehntel der 10. Theil von einem Einer, ein Hundertel der 10. Theil von einem Zehntel, u. s. w. ist. Die Decimalbrüche sind also eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems in der Art, daß die Reihe der Zahlenordnungen . . . Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrigere Einheit als der zehnte Theil einer Einheit der nachst höheren Ordnung angenommen wird, noch unter den Einern hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendeln, . . . fortsetzt. Der Decimalpunkt scheidet die ursprüngliche Reihe der Zahlenordnungen von dieser Fortsetzung.

Hiernach ist

$$. . . c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} . . .$$

die allgemeine Form einer Zahl des dekadischen Systems, wo $E, a, b, c, . . .$ die Ziffern der Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, . . . , und $\alpha, \beta, \gamma, . . .$ die Ziffern der Zehntel, Hundertel, Tausendtel, . . . bezeichnen.

Um einen Decimalbruch zu lesen, spricht man zuerst die Ganzen vor dem Decimalpunkte aus, und dann jede Decimalstelle einzeln mit Hinzufügung ihres Nenners. Man kann den Nenner der einzelnen Decimalen beim Aussprechen auch weglassen und nur alle Decimalziffern, 0 nicht ausgenommen, in der Ordnung nennen.

Folgesatz. Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man den Decimalen rechts beliebig viele Nullen anhängt. Es ist z. B.

$$0.23 = 0.230 = 0.2300 = 0.23000.$$

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und umgekehrt.

§. 100. Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, dividire man den Zähler durch den Nenner und bringe im Quotienten nach den Ganzen, an deren Stelle bei einem echten Bruche eine Null gesetzt wird, den Decimalpunkt an. Dem Reste hänge man hierauf eine Null an, dividire wieder und schreibe die erhaltene Quotientenziffer nach dem Decimalpunkte hin; hänge dann eben so jedem etwa weiter folgenden Reste eine Null an und setze die Division fort, bis diese endlich ohne Rest aufgeht, oder, wenn dieses nicht eintritt, bis man die gewünschte Anzahl Decimalen erhalten hat.

$$\frac{3}{4} = 30 : 4 = 0.75$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2.632$$

$$\begin{array}{r} 790 \\ 400 \\ 250 \\ 0 \end{array}$$

Beweis. Indem man dem Reste der Ganzen eine Null anhängt, wird derselbe in Zehntel verwandelt, durch deren Division man daher auch im Quotienten Zehntel erhält. Indem man ebenso dem Reste der Zehntel eine Null anhängt, wird derselbe in Hundertel verwandelt, und man erhält durch deren Division auch im Quotienten Hundertel; u. s. w.

Zusätze. 1. Damit sich ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch genau verwandeln lasse, muss dieser ein endlicher Decimalbruch werden, d. i. die oben angegebene Division muss ohne Rest aufgehen. Dieses ist aber unter der Voraussetzung, dass Zähler und Nenner des gemeinen Bruches relative Primzahlen sind, nur dann möglich, wenn der Nenner keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält.

In allen Fällen, wo der Nenner entweder die Factoren 2 und 5 gar nicht, oder außer denselben noch andere davon verschiedene Factoren enthält, kann der auf die einfachste Form gebrachte gemeine Bruch nur annäherungsweise in einen Decimalbruch verwandelt werden.

$$\text{z. B. } \frac{23}{78} = 23.0 : 78 = 0.2948 \dots$$

$$\begin{array}{r} 740 \\ 380 \\ 680 \\ 56 \end{array}$$

2. Wenn ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Decimalbruch darstellen lässt, näherungsweise in einen Decimalbruch verwandelt wird, so müssen bei der Entwicklung einige Decimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehren. Denn bei der Division ist der Rest immer kleiner als der Divisor; man kann daher nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es ganze Zahlen gibt, welche kleiner sind als der Divisor, so dass im ungünstigsten Falle wenigstens unter so vielen Resten, als der Divisor

Einheiten enthält, wieder einer der vorigen Reste zum Vorschein kommt, von welchem an sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quotienten und dieselben Reste wie vorher ergeben müssen. Z. B.:

$$\frac{7}{15} = 7:0 : 15 = 0.46666 \dots \quad \frac{18}{37} = 18:0 : 37 = 0.486486 \dots$$

100

100

100

10

3 20

240

180

320

240

18

Decimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, nennt man periodische, und die immer wiederkehrende Ziffernreihe die Periode. Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen; es ist also

$$\frac{7}{15} = 0.4\dot{6}; \quad \frac{18}{37} = 0.48\dot{6}.$$

§. 101. Die Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch geschieht nach folgenden Sätzen:

1. Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man denselben in der Form eines gemeinen anschreibt und diesen, wenn es angeht, abkürzt.

$$\text{Z. B. } 0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \quad 31.325 = 31 \frac{325}{1000} = 31 \frac{13}{40}.$$

2. Ein rein periodischer Decimalbruch, d. i. ein solcher, worin der Periode keine Decimale vorangeht, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man als Zähler die Ziffern der Periode und als Nenner eine Zahl setzt, welche mit so vielen 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

$$0.\dot{4}6 = \frac{46}{99}.$$

Beweis. Drückt man den gesuchten gemeinen Bruch durch x aus, so ist

$$x = \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \frac{46}{1000000} + \frac{46}{100000000} + \dots$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit 100, so erhält man

$$100x = 46 + \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \frac{46}{1000000} + \dots$$

Subtrahiert man nun den früheren Ausdruck von dem letzten, so folgt

$$99x = 46,$$

und daraus

$$x = \frac{46}{99}.$$

3. Ein gemischt periodischer Decimalbruch, d. i. ein solcher, worin der Periode noch andere Decimalen vorangehen, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die der Periode vorangehenden Decimalen sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die der Periode vorangehenden Decimalen, ebenfalls als ganze Zahl betrachtet, subtrahiert und diese Differenz als Zähler, als Nenner aber eine Zahl annimmt, die mit so vielen 9, als die Periode Ziffern enthält, und so vielen rechts folgenden Nullen, als Decimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

$$0.32\bar{5} = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}.$$

Beweis. Bezeichnet man den gesuchten Bruch durch x, so ist

$$x = \frac{3}{10} + \frac{25}{1000} + \frac{25}{100000} + \frac{25}{1000000} + \dots$$

Wird dieser Ausdruck zuerst mit 1000, dann mit 10 multipliciert, so erhält man

$$1000x = 300 + 25 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \dots$$

$$10x = 3 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{1000000} + \dots$$

Durch Subtraction des zweiten dieser Ausdrücke von dem ersten folgt dann

$$990x = (300 + 25) - 3, \text{ und daraus}$$

$$x = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}.$$

Die vier Grundrechnungsarten mit Decimalbrüchen.

§. 102. Das Rechnen mit Decimalbrüchen beruhet auf denselben Gründen, wie das mit ganzen Zahlen, und fordert nur die genaue Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, d. i. auf die Stellung des Decimalpunktes.

Um Decimalbrüche zu addieren oder zu subtrahieren, schreibt man sie so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen, mithin auch die Decimalpunkte, genau unter einander zu stehen kommen, und addiert oder subtrahiert sie sodann von der Rechten gegen die Linke, wie

ganze Zahlen. Die fehlenden Decimalstellen kann man sich durch Nullen ersetzt denken.

$$\begin{array}{r}
 35 \cdot 312 \\
 0 \cdot 5678 \\
 39 \cdot 2 \\
 \hline
 \text{Summe } 75 \cdot 0798
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 215 \cdot 3456 \\
 91 \cdot 45923 \\
 \hline
 \text{Differenz } 123 \cdot 88637
 \end{array}$$

§. 103. 1. Ein Decimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multipliciert, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Rechte rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

$$3 \cdot 14159 \cdot 100 = 314 \cdot 159, \quad 0 \cdot 097325 \cdot 1000 = 97 \cdot 325.$$

2. Decimalbrüche werden multipliciert, indem man sie ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie ganze Zahlen multipliciert und im Producte von der Rechten angefangen so viele Ziffern als Decimalen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Dieselbe Regel gilt auch, wenn ein Factor eine ganze Zahl ist.

Hat das Product nicht so viele Ziffern, als abgeschnitten werden sollen, so ersetze man die fehlenden Stellen links durch Nullen.

$$\begin{array}{r}
 6 \cdot 543 \cdot 2 \cdot 37 \\
 13 \ 086 \\
 1 \ 9629 \\
 45801 \\
 \hline
 15 \cdot 50691
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \cdot 23 \cdot 0 \cdot 01307 \\
 1 \ 269 \\
 2961 \\
 \hline
 0 \cdot 0552861
 \end{array}$$

§. 104. Bei praktischen Rechnungen ist es gewöhnlich genügend, von einem Decimalbruche, der viele Decimalen enthält, nur einige Decimalstellen zu behalten, und zwar so viele, als das Bedürfnis der Rechnung erfordert. Den Fehler, den man dabei durch die Weglassung der überflüssigen Decimalen begeht, pflegt man dadurch so klein als möglich zu machen, daß man die letzte beibehaltene Decimalziffer um 1 erhöht, corrigiert, wenn die erstewegzulassende Ziffer 5 oder größer als 5 ist, dagegen die letzte Decimalziffer unverändert läßt, wenn die erste wegzulassende Ziffer kleiner als 5 ist. So setzt man statt des Decimalbruches 0·728374, wenn 4 Decimalen genügen, 0·7284, und, wenn 3 Decimalen genügen, 0·728. Ein solcher Decimalbruch heißt ein abgekürzter und ist bloß ein angenäherter Ausdruck für den vollständigen Decimalbruch. Der Fehler, den man begeht, ist jedoch nicht größer als eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Decimalstelle.

Damit man im Producte zweier Decimalbrüche keine niedrigeren Stellen erhalte, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt, bedient man

sich der abgekürzten Multiplication, bei welcher man mit jeder Ziffer des Multiplicators nur jene Ziffern des Multiplicands multipliciert, deren Producte auf die verlangten Stellen Einfluß haben. Zu diesem Ende wird folgendes Verfahren angewendet, dessen Richtigkeit leicht zu sehen ist:

1. Man setze die Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche im Producte die niedrigste der verlangten ist; die übrigen Ziffern werden in umgekehrter Ordnung daneben geschrieben, so daß der ganze Multiplicator umgekehrt erscheint.

2. Man multipliciere mit der ersten rechts vorkommenden Ziffer des umgekehrten Multiplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, schreibe jedoch dieses Product nicht an, sondern merke sich davon nur die nächsten Zehner, welche die Correctur bilden; dann multipliciere man die gerade darüber stehende Ziffer des Multiplicands, addiere zum Producte die Correctur, und fange hier das Product zu schreiben an; hierauf werden nach der Reihe auch die weiter folgenden Ziffern des Multiplicands multipliciert. Eben so multipliciert man mit der zweiten, dritten, . . . Ziffer des Multiplicators und schreibt die einzelnen dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte so unter einander, daß ihre ersten Ziffern rechts genau unter einander zu stehen kommen.

3. Diese Theilproducte werden addiert und in der Summe die verlangte Anzahl Decimalen abgeschnitten.

3. B. Es seien folgende Producte abgekürzt zu entwickeln:

a) $35\cdot2156 \cdot 3\cdot506$
in 3 Decimalen.

b) $3\cdot047653 \cdot 0\cdot000867$
in 5 Decimalen.

$$\begin{array}{r} 35\cdot2156 \\ 6053 \\ \hline 105647 \\ 17608 \\ 211 \\ \hline 123466 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\cdot047653 \\ 7680000 \\ \hline 244 \\ 18 \\ 2 \\ \hline 0\cdot00264 \end{array}$$

§. 105. 1. Ein Decimalbruch wird durch eine Potenz von 10 dividirt, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt, als der Divisor Nullen enthält.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

$$345\cdot67 : 10 = 34\cdot567, \quad 3\cdot78 : 1000 = 0\cdot00378.$$

2. Decimalbrüche werden dividirt, indem man Dividend und Divisor durch Anhängung von Nullen mit gleich vielen Decimalen darstellt und dann mit Weglassung der Decimalpunkte die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet.

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m} \cdot \frac{10^m}{b} = \frac{a}{b} = a : b.$$

$$3\cdot1452 : 1\cdot234 = 31452 : 12340 = 2\cdot54878 \dots$$

Dieselbe Vorschrift gilt auch, wenn der Dividend oder der Divisor eine ganze Zahl ist.

Praktisch verfährt man einfacher nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst einleuchtet:

a) Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividirt und im Quotienten den Decimalpunkt setzt, bevor man die erste Decimalziffer des Dividends in Rechnung zieht. Z. B.

$$487.75 : 25 = 19.51$$

237

127

25

0

b) Eine Zahl wird durch einen Decimalbruch dividiert, indem man im Dividend und im Divisor durch Multiplication mit der entsprechenden Potenz von 10 den Decimalpunkt so verschiebt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird, und dann die Division nach der Regel a) ausführt. Z. B.

$$0.05496 : 36.84 = 5.496 : 3684 = 0.00149 \dots$$

$$34461 : 0.63 = 3446100 : 63 = 54700.$$

Zusatz. Aus den voranstehenden Sätzen folgt: Die Ziffernreihe des Quotienten hängt bloß von der Ziffernreihe des Dividends und jener des Divisors ab; man erhält daher die auf einander folgenden Ziffern des Quotienten, wenn man im Dividend und im Divisor die Decimalpunkte ganz unberücksichtigt läßt und die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Um dann den Rang der Ziffern des Quotienten zu bestimmen, denkt man sich den Divisor unter den ersten Theildividend gesetzt; der Rang derjenigen Stelle des Dividends, unter welcher die Einerziffer des Divisors steht, gibt den Rang der ersten Ziffer im Quotienten an; durch den Rang dieser Ziffer ist aber auch der Rang der übrigen Ziffern bestimmt. Z. B.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 9142.2326 : 34.9 = 2 \dots \quad \text{b) } 3.4856 : 83.7 = 0.04 \dots \\ \quad 349 \qquad \qquad \qquad \quad 837 \end{array}$$

In a) steht die Einerziffer 4 des Divisors unter der Ziffer 1 des Dividends, welche Hunderte bedeutet; also bedeutet auch die erste Quotientenziffer 2 Hunderte.

In b) steht die Einerziffer 3 des Divisors unter der Ziffer 8 des Dividends, welche Hundertel bedeutet; also bedeutet auch die erste Ziffer 4 des Quotienten Hundertel.

§. 106. Um in dem Quotienten zweier Zahlen mit Vermeidung jeder überflüssigen Rechnung nur so viele Ziffern zu bestimmen, als ihrer zuverlässig sein sollen, bedient man sich der abgekürzten Division. Diese besteht in folgendem Verfahren:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und bestimme ihren Rang (Zusatz zu §. 105). Da der Quotient eine bestimmte Anzahl Decimalen enthalten soll, so ist aus dem Range der ersten Ziffer auch bekannt, wie viele Ziffern der verlangte Quotient im Ganzen haben soll.

2. Man schneide im Divisor von der Linken angefangen so viele Ziffern ab, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll; diese bilden den abgekürzten Divisor. Hat der Divisor nicht so viele Ziffern, als ihrer abgeschnitten werden sollen, so tritt die abgekürzte Division erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

3. Man behalte auch im Dividend nur so viele Ziffern von der höchsten angefangen, als ihrer der Quotient haben soll, oder um eine mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividends nicht enthalten ist; jene beibehaltenen Ziffern sind der abgekürzte Dividend.

4. Man dividire nach der gewöhnlichen Divisionsweise so lange fort, bis die letzte Ziffer des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde; hierauf schneide man bei jeder folgenden Division die niedrigste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab; die jedesmal gefundene Ziffer des Quotienten multipliciere man dann zuerst mit der höchsten im Divisor weggelassenen Ziffer und zähle die aus diesem Producte erhaltenen Zehner als Correctur zu dem ersten eigentlichen Producte dazu.

5. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 876\cdot54\cdot38 : 1\cdot8\cdot9\cdot5\cdot7\cdot9 = 46\cdot236 \\ 118\ 22 \\ 4\ 48 \\ 69 \\ 12 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\cdot91\cdot25 : 9\cdot4\cdot75 = 0\cdot094 \\ 39 \\ 1 \end{array}$$

Aufgaben.

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

$$1. \ a) \frac{2}{5}, \quad b) \frac{17}{25}, \quad c) \frac{39}{80}, \quad d) \frac{57}{125}, \quad e) \frac{2346}{625}, \quad f) \frac{107}{32}.$$

$$2. \ a) \frac{5}{6}, \quad b) \frac{43}{9}, \quad c) \frac{36}{11}, \quad d) \frac{25}{37}, \quad e) \frac{1043}{41}, \quad f) \frac{312}{13}.$$

$$3. \ a) \frac{7}{12}, \quad b) \frac{214}{55}, \quad c) \frac{113}{74}, \quad d) \frac{31}{36}, \quad e) \frac{108}{275}, \quad f) \frac{933}{1640}.$$

4. Verwandle folgende endliche Decimalbrüche in gemeine Brüche:
a) 0·25, b) 0·75, c) 3·072, d) 5·725, e) 0·0024, f) 8·0875.

5. Verwandle folgende rein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche: a) 0·6̄, b) 5·4̄, c) 0·2̄1, d) 6·0̄6, e) 4·2̄43, f) 0·4̄378.

6. Verwandle folgende gemischt periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche: a) 0·2̄6, b) 2·3̄51, c) 4·4̄13, d) 0·1̄245, e) 0·7̄9324, f) 7·2̄9074.

$$7. 32.38 + 43.49 + 21.27 + 78.04 + 49.83.$$

8. 5.273	9. 0.7619	10. 13.58	11. 23.3182
0.689	0.7988	6.376	9.305
5.035	0.5225	42.0457	0.2649
4.621	0.8098	86.93	68.16804

Abdiere folgende Decimalbrüche zuerst in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

a)	b)	c)	d)	e)	f)
12. 19.78 + 35.096 + 8.71295 + 0.2087 + 4.178063 + 15.892;					
13. 37.09 + 18.388 + 2.34966 + 0.2897 + 3.047585 + 74.418;					
14. 5.35 + 56.905 + 7.58506 + 0.5375 + 7.493203 + 9.005;					
15. 10.93 + 68.227 + 3.08751 + 0.1884 + 0.479728 + 56.793;					
16. 71.86 + 43.683 + 4.86235 + 0.5679 + 5.637564 + 88.608.					

$$17. 83.8 - 25.4.$$

$$18. 57.16 - 9.58.$$

$$19. 3.407 - 0.562.$$

$$20. 62.027 - 29.28.$$

$$21. 17.6 - 9.374.$$

$$22. 1 - 0.4736.$$

$$23. 257.328 - 138.$$

$$24. 85 - 46.55037.$$

25. Von 721.092 subtrahiere

a) 248, b) 93.7, c) 304.54, d) 58.709, e) 2.8765.

26. Bestimme $A = a + b + c$, $B = a + b - c$,

$C = a - b + c$, $D = b + c - a$

für $a = 23.4567$, $b = 39.0703$, $c = 51.809$.

27. Wenn man annimmt, daß ein freifallender Körper in der ersten Secunde seines Falles 4.904 Meter, und in jeder folgenden Secunde immer 9.808 Meter mehr als in der vorhergehenden zurücklegt; a) welches sind dann die Fallräume für die zweite, dritte und vierte Secunde? b) welches ist der Fallraum für alle vier Secunden?

28. Die Länge eines Pendels, das in jeder Secunde eine Schwingung macht, beträgt am Pole 996.088 Millimeter, am Äquator 990.891 Millimeter; wie groß ist der Unterschied beider Längen?

29. 1 Kilometer = 0.131823 österr. Meilen; wie viel österr. Meilen sind 10, 100, 1000 Kilometer?

30. Multipliciere a) 24.37, b) 1.928, c) 336.18, d) 0.27309 mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$$31. 3.147 \cdot 23.$$

$$32. 79.75 \cdot 87.$$

$$33. 4.5378 \cdot 58.$$

$$34. 7.928 \cdot 06.$$

$$35. 55.64 \cdot 9.3$$

$$36. 89.2586 \cdot 5.35.$$

$$37. 12.3456 \cdot 4.567.$$

$$38. 9.7084 \cdot 0.925.$$

$$39. 37.1774 \cdot 54.907$$

$$40. 0.82745 \cdot 0.0798.$$

41. Der Schall legt in jeder Secunde 332.25 Meter zurück; wie viel das Licht, welches sich 926406mal so schnell verbreitet wie der Schall?

42. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 58·525 Halbmesser des Erdäquators; wie viel macht dieses, wenn man den Halbmesser des Erdäquators zu 859·44 geogr. Meilen annimmt?

Bestimme nach der abgekürzten Multiplication:

43. 3·1415 · 9·2587. (3 Dec.) 44. 0·9156 · 23·851. (2 Dec.)

45. 12·0748 · 1·91345. (4 Dec.) 46. 81·2867 · 0·1234. (3 Dec.)

47. 5·376079 · 8·058876. (5 Dec.)

48. 8·14793 · 7·10936 · 2·51446. (4 Dec.)

49. 1·045 · 1·045 · 1·045 · 1·045. (6 Dec.)

50. 23·17346 · 8·09745 · 0·11944 · 3·58876. (4 Dec.)

51. Bestimme auf 4 Decimalen

$$p = (a + b + c) (a + b - c) (a - b + c) (b + c - a)$$

für $a = 1·30785$, $b = 2·09122$, $c = 2·80116$.

52. Dividiere a) 327·4, b) 58·06, c) 9·233, d) 0·5942 durch 10, 100, 1000, 10000.

53. 384 : 4. 54. 0·2244 : 6. 55. 0·25673 : 7.

56. 268·8 : 32. 57. 0·675 : 17. 58. 7·74772 : 109.

59. 71·541 : 0·9. 60. 0·3197 : 27·8. 61. 4735·02 : 0·53.

62. 0·5976 : 0·083. 63. 2·0093724 : 0·0054.

64. 30·9644 : 38·9. 65. 1·6820736 : 2·256.

66. Die Erde legt bei ihrer Bewegung um die Sonne in 1 Stunde 14787·68 geogr. Meilen zurück; wie viel a) in 1 Minute, b) in 1 Secunde?

Bestimme nach der abgekürzten Division:

67. 45·12345 : 3·8265. (3 Dec.) 68. 986·256 : 127·85. (2 Dec.)

69. 13·794 : 28·376. (4 Dec.) 70. 0·7123 : 43·566. (4 Dec.)

71. 754·06 : 0·649. (2 Dec.) 72. 3·1416 : 7·825. (3 Dec.)

73. 7·24257 : 19·14. (3 Dec.) 74. 0·436861 : 18·547. (4 Dec.)

75. 1 Kilogramm = 1·785523 Wiener Pfund; wie viel Kilogramm beträgt 1 Wiener Pfund? (5 Dec.)

76. Aus einem halben Kilogramm feinen Goldes werden 86·1111 Achtguldenstücke oder auch 68·2831 englische Sovereigns geprägt; wie viel Achtguldenstücke ist ein Sovereign wert? (3 Dec.)

III. Wiederholungsaufgaben.

1.* Wie viel kosten 45 Kg. à 20 fr.? (20 fr. = $\frac{1}{5}$ fl.)

2.* Wie viel kosten 64 Liter, wenn 1 Liter a) 10 fr., b) 20 fr., c) 25 fr., d) 50 fr. kostet?

3.* Wie viel betragen 48 Meter à 30 fr.? (30 fr. = $\frac{1}{4}$ fl. + $\frac{1}{20}$ fl.)

4.* Wie viel kosten 127 Stück à 15 fr., à 24 fr., à 35 fr., à 60 fr., à 75 fr.?

5. Verwandle in Decimalbrüche die gemeinen Brüche: a) $\frac{9}{16}$,
 b) $\frac{11}{125}$, c) $\frac{7}{21}$, d) $\frac{43}{75}$, e) $\frac{69}{82}$, f) $\frac{462}{591}$.

6. $(59 \cdot 302 - 27 \cdot 8775) \cdot 3 \cdot 32$.

7. $8 \cdot 137526 \cdot 3 \cdot 044891 \cdot 7 \cdot 628573$. (6 Dec.)

8. $68 \ 0124152 : 7 \cdot 961$. 9. $0 \cdot 0552861 : 0 \cdot 423$.

10. $(5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7)(6x^2 + 4x - 7)$.

11. $\frac{17x + 12y}{x + y} - \frac{3x - 7y}{x + y} + \frac{2x - 3y}{x + y}$.

12. $\frac{8m^3x}{5n^2y} \cdot \frac{ny}{4mx}$.

13. $\frac{4x^2y^2}{3b^2} : \frac{5a^2y^2}{3x^2}$.

14. Suche das gr. g. Maß von

a) 11467 und 16031;

b) 2370, 56485 und 47005.

15. $893\frac{4}{5} : 23\frac{3}{5}$.

16. $33\frac{11}{16} \cdot 37\frac{1}{21}$.

17. Multipliziere a) 45, b) 98, c) $16\frac{1}{2}$ mit 50. ($50 = \frac{100}{2}$).

18. Multipliziere a) 36, b) 48, c) 120 mit $12\frac{1}{2}$. ($12\frac{1}{2} = \frac{100}{8}$).

19. Multipliziere a) 24, b) 81, c) 135 mit $33\frac{1}{3}$. ($33\frac{1}{3} = \frac{100}{3}$).

20. $a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

21. $x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$.

22. $\frac{6 + 3x^2}{9 - 4x^2} - \frac{2 - 3x^2}{3 + 4x^2}$.

23. $(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}) : (\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4})$.

24. Um wie viel wird der Bruch $\frac{35}{36}$ größer oder kleiner, wenn man a) zum Zähler und Nenner 1 addiert, b) vom Zähler und Nenner 1 subtrahiert.

25. $\frac{17}{36} + \frac{38}{45} + \frac{47}{60} + \frac{73}{80}$. 26. $\frac{11}{40} + \frac{41}{45} + \frac{37}{72} + \frac{32}{75}$.

27.* $\frac{3}{4}$ Meter kosten 2 fl. 36 kr.; wie viel kostet 1 Meter?

28.* Nachdem A von einer Summe 16 fl. ausgegeben, besaß er nur noch $\frac{5}{9}$ von dem, was er anfangs hatte; wie viel hatte er anfänglich?

29. $\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{a + 2}{a - 2} + \frac{a + 3}{a - 3}$.

30. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 107. Die Gleichstellung zweier Zahlenausdrücke, welche denselben Wert haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$x = x, (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4, 7x - 6 = 5x.$$

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. Z. B. In der Gleichung $7x - 6 = 5x$ ist $7x - 6$ der erste, $5x$ der zweite Theil; der erste Theil besteht aus zwei Gliedern $7x$ und -6 .

Man unterscheidet identische und Bestimmungsgleichungen. Gleichungen, welche für jeden Wert der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen richtig sind, heißen identische Gleichungen. So haben die Gleichungen $x = x$ und $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ ihre Richtigkeit, man mag für x was immer für einen Wert setzen. Jede Formel für eine arithmetische Operation bildet eine identische Gleichung.

Gleichungen, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werte der darin vorkommenden Unbekannten richtig sind, heißen Bestimmungsgleichungen. So ist die Gleichung $7x - 6 = 5x$ eine Bestimmungsgleichung, da ihr nur der Wert $x = 3$ Genüge leistet. Jede Bestimmungsgleichung drückt eine Bedingung aus, welche die in ihr enthaltenen unbekannten Zahlen erfüllen sollen.

Die Werte der Unbekannten, welche einer Bestimmungsgleichung Genüge leisten, heißen die Wurzeln dieser Gleichung. So ist 3 eine Wurzel der Gleichung $7x - 6 = 5x$, weil sie statt x in die Gleichung substituirt derselben Genüge leistet.

Die Wurzeln einer Gleichung bestimmen, heißt die Gleichung auflösen.

Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei und mit mehreren Unbekannten. Z. B. $7x - 3 = 4x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 5$ eine Gleichung mit drei Unbekannten.

Eine Gleichung, in welcher keine der Unbekannten in einer höheren als der ersten Potenz und auch kein Product mehrerer Unbekannten vorkommt, heißt eine Gleichung des ersten Grades.

Eine Gleichung, welche außer den Unbekannten nur besondere Zahlen enthält, heißt eine numerische oder Ziffergleichung; z. B. $7x - 6 = 5$. Eine Gleichung, welche außer den Unbekannten auch allgemeine Zahlen enthält, heißt eine Buchstabengleichung; z. B. $ax - b = cx + d$.

1. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 108. Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruht auf dem Grundsatz (§. 7, 5):

Gleiches auf gleiche Weise verändert gibt Gleiches.

Dieser Grundsatz läßt sich durch folgende Sätze näher ausdrücken:

- a) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
- b) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.
- c) Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt Gleiches.
- d) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Aus diesen Sätzen folgt:

1. Jedes Glied des einen Theiles kann mit dem entgegengesetzten Zeichen in den andern Theil übertragen, transponiert werden. Z. B.

$$\text{Aus } 3x = 16 - 5x \text{ folgt } 3x + 5x = 16;$$

$$\text{„ } x + 3 = 8 \text{ „ } x = 8 - 3.$$

In der ersten Gleichung wurde zu beiden Theilen $5x$ addiert, in der zweiten von beiden Theilen 3 subtrahiert.

Auch kann man gleiche Glieder in beiden Theilen weglassen. Z. B.

$$\text{Aus } 5x - 3 = 6 + 3x - 3 \text{ folgt } 5x = 6 + 3x.$$

2. Jede Gleichung, in welcher Brüche vorkommen, kann von den Nennern befreit werden, indem man beide Theile mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multipliciert. Z. B.

$$\text{Aus } \frac{x}{4} - 1 = 2 \text{ folgt } x - 4 = 8;$$

$$\text{„ } \frac{2x}{3} = \frac{5x}{2} - 11 \text{ „ } 4x = 15x - 66.$$

3. Ein Factor des einen Theiles kann als Divisor in den andern Theil gesetzt werden. Z. B.

$$\text{Aus } 7x = 35 \text{ folgt } x = \frac{35}{7} \text{ oder } x = 5.$$

§. 109. Aus den in §. 108 angeführten Sätzen ergibt sich für die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten folgendes Verfahren:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung entweder nach einander mit jedem Nenner, oder sogleich mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert. (Wegschaffung der Brüche.)

2. Kommen in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die durch Klammern angezeigten Operationen wirklich ausgeführt. (Auflösung der Klammern.)

3. Es werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in den ersten Theil der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die bekannten Glieder dagegen werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reducirt. (Transponieren und Reducieren.)

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem man beide Theile der Gleichung durch denselben dividirt. (Division durch den Coefficienten der Unbekannten.)

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, substituirt man den gefundenen Wert für die Unbekannte in der gegebenen Gleichung und reducirt dann die Ausdrücke in beiden Theilen. Erhält man beiderseits dieselbe Zahl, d. i. wird die Gleichung zu einer identischen gemacht, so ist die Auflösung richtig.

Beispiele.

1) $4x + 5 = 17.$

Auflösung: $4x = 17 - 5$ Probe: $4 \cdot 3 + 5 = 17$
 $4x = 12$ $12 + 5 = 17$
 $x = 3.$ $17 = 17.$

2) $\frac{x}{5} = 2x - 36.$

Aufl.: $x = 10x - 180$ Probe: $\frac{20}{5} = 2 \cdot 20 - 36$
 $x - 10x = -180$ $4 = 40 - 36$
 $-9x = -180$ $4 = 4.$
 $x = 20.$

3) $6(2x - 5) = 5x + 12.$

Aufl.: $12x - 30 = 5x + 12$ Probe: $6 \cdot (2 \cdot 6 - 5) = 5 \cdot 6 + 12$
 $12x - 5x = 12 + 30$ $6 \cdot (12 - 5) = 30 + 12$
 $7x = 42$ $6 \cdot 7 = 42$
 $x = 6.$ $42 = 42.$

Aufgaben.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $5x + 4 = 19.$ | 2. $3x - 4 = 20.$ |
| 3. $70 - 3x = 40.$ | 4. $42x - 35 = 75.$ |
| 5. $92 - 27y = 11.$ | 6. $29 = 6z - 13.$ |
| 7. $7x + 8 = 5x + 18.$ | 8. $17 + 8x = 71 - x.$ |
| 9. $39x - 168 = 24x + 42.$ | 10. $5y - 60 = 324 - 19y.$ |
| 11. $5z - 40 = 8z - 73.$ | 12. $47x - 155 = 35x - 25.$ |
| 13. $2x + 2 = 2x - 3 + 5x.$ | 14. $14y - 23 + 17y = 24y + 109.$ |

15. $2x - 11 + 2x - 5x + 7 = 7x - 7$.
 16. $155 - 3x - 27 = 35 - 17x + 138 - 13x$.
 17. $a + x = b$.
 18. $a - x = b$.
 19. $ax + b = c$.
 20. $ax - b = cx - d$.
 21. $3a - 4x = 9a + 6b - 6x$.
 22. $2a - 5y + b = 4y$.
 23. $a^2x + ax - abx = a - b + 1$.
 24. $6ax - 7ac + 3ax - 5ab = 2ax + 2ab$.
-

25. $7(x - 5) = 35 + 7$.
 26. $5(3 + x) + 16 = 61$.
 27. $20 - (y - 4) = 2y$.
 28. $9(2x - 7) = 5(4x - 15)$.
 29. $2(x - 7) = 3(8 - x) + 22$.
 30. $3(7 - 8z) + 7(4z - 3) = 1$.
 31. $8x + 5(2x - 1) = 2(x + 4) - 5$.
 32. $2(2x - 19) + 3(x - 3) = 2(x - 1)$.
 33. $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32$.
 34. $3(5 + x) - 2(x + 6) = 3(2x + 9) - 9(4 + x)$.
 35. $12(3x - 7) - 3(2x + 28) = 15(16 - 2x) + 4(18 - 5x)$.
 36. $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x + 1$.
 37. $(5 + x)(4 - x) = (3 - x)(x + 2) + 22$.
 38. $2\{3(3y - 4) - 8\} + (11y - 15) = 2(5 - 2y)$.
 39. $5\{3 + (2x - 7)\} - 7(x + 5) + 1 = 3\{4(3 - x) - x\} - 60$.
 40. $a(x - b) = b(a - x) - c$.
 41. $p(y - q) + q(y + p) = m$.
 42. $m(x - a) - n(x - b) = (a + b)x$.
 43. $2a(a - x) + (a - b)x = a^2 + b^2$.
 44. $z(z - 2a) - (b - z)^2 = 3b^2 - 4a^2$.
-

45. $\frac{2x}{3} = 25 - x$.
 46. $\frac{3 - 4x}{7} + 3 = 4x$.
 47. $\frac{x}{4} + 17 = \frac{x}{5} + 18$.
 48. $\frac{y}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$.
 49. $7 = \frac{5}{6}x - 3$.
 50. $\frac{1}{4}x - 4 = \frac{2}{9}x - 3$.
 51. $2x - \frac{3x}{5} = 3(x - 2)$.
 52. $\frac{2z}{3} + \frac{z}{5} = z - 2$.
 53. $\frac{6 + x}{6 - x} = 2$.
 54. $\frac{1}{1 - x} = \frac{3}{x}$.
 55. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13$.
 56. $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = z + 1$.
 57. $\frac{30}{y} + \frac{90}{2y} = 4 + \frac{45}{37}$.
 58. $\frac{25}{x} - \frac{2(5 - x)}{x} = 3$.

59. $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2$. 60. $\frac{y+7}{5} - 1 = \frac{9-y}{14}$.
61. $\frac{3z+5}{4} - 9 = \frac{2z-1}{3} - 7$. 62. $\frac{x-5}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{7x-2}{15}$.
63. $\frac{13-x}{16-x} = \frac{3}{4}$. 64. $\frac{x+9}{x-3} = \frac{x+5}{x-5}$.
65. $\frac{10x+1}{5x-8} = \frac{6x+3}{3x-4}$. 66. $\frac{4}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{5x-1}{x^2-9}$.
67. $\frac{10y+1}{3(y+1)} - 1 = \frac{3y-2}{y+1}$. 68. $\frac{4}{x-8} - \frac{3}{x-7} = \frac{1}{x-9}$.
69. $z + \frac{z}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{3z}{4} = \frac{7z}{8} + 49$.
70. $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = x+2 - \frac{7x-8}{9}$.
71. $\frac{y}{2} + \frac{y+1}{3} + \frac{y-2}{4} = \frac{2y}{11} - \frac{2-3y}{4} - 3$.
72. $\frac{2x-13}{2(x-8)} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{29}{24} - \frac{70-9x}{3(x-8)}$.
73. $\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}$. 74. $\frac{x}{a} - b = \frac{x}{b} - a$.
75. $\frac{a-bx}{c} = \frac{m-nx}{p}$. 76. $\frac{a}{y} + c = \frac{a(b+c)}{by}$.
77. $\frac{m}{x+m} = \frac{n}{x+m}$. 78. $\frac{a-b}{z} + 1 = \frac{a}{b} - \frac{a+z}{z}$.
79. $\frac{a+b}{a-b} \cdot x = \frac{b-a}{a+b} \cdot x + \frac{a^2+b^2}{2}$.
80. $\left\{1 + \frac{a-b}{a+b}\right\} x - 1 = \left\{\frac{a+b}{a-b} - 1\right\} x$.

2. Anwendung der Gleichungen.

§. 110. In jeder Aufgabe werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genügen sollen. Die Lehre über die Anwendung der arithmetischen Gesetze auf die Lösung von Aufgaben, indem man die Beziehungen zwischen den unbekannten und bekannten Zahlen durch Gleichungen ausdrückt und aus diesen die Werte für die unbekannten Zahlen sucht, heißt Algebra. Das Geschäft der Algebra bei der Auflösung von Aufgaben ist daher ein zweifaches:

1. Der Ansatz der Gleichungen, d. i. die Übertragung der Bedingungen der Aufgabe aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Zeichensprache;

2. die Auflösung der gebildeten Gleichungen.

Für das Aufsetzen der Gleichungen können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; es ist das Werk des Scharffsinnes und kann nur durch vielfältige Übung geläufig gemacht werden. Anfängern kann folgende Regel als einigermaßen leitende Vorschrift dienen: Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst und behandle die Unbekannte so, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern; dadurch erhält man für eine und dieselbe Größe zwei verschieden geformte Ausdrücke, welche einander gleichgestellt die verlangte Gleichung geben.

Einfachere Aufgaben lassen sich auch ohne Ansatz einer Gleichung durch bloße Verstandeschlüsse im Kopfe auflösen.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe zu überzeugen, untersuche man, ob durch den gefundenen Wert der Unbekannten auch wirklich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

Beispiele.

1. Von welcher Zahl ist der 5te Theil um 52 kleiner als die Zahl selbst?

Im Kopfe. Der Unterschied zwischen einer Zahl und ihrem 5ten Theile ist $\frac{4}{5}$ der Zahl. Ist nun dieser Unterschied, d. i. $\frac{4}{5}$ der gesuchten Zahl, gleich 52, so ist $\frac{1}{5}$ derselben 13, daher die Zahl selbst 5mal 13 = 65.

Algebraisch. Ist x die unbekannte Zahl, so ist ihr 5ter Theil $\frac{x}{5}$.

Da aber $\frac{x}{5}$ um 52 kleiner sein soll als x , so muß man, um zwischen beiden eine Gleichung herzustellen, zu $\frac{x}{5}$ noch 52 addieren; man hat also

$$\frac{x}{5} + 52 = x$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man $x = 65$.

Probe. $\frac{1}{5}$ von 65 ist 13; $65 - 13 = 52$.

2. Ein Diener soll jährlich 90 fl. und ein Kleid erhalten; nach 3 Monaten wird der Diener entlassen und erhält als Lohn das Kleid. Wie theuer wurde ihm dieses angerechnet?

Im Kopfe. Erhält der Diener für 3 Monate, d. i. $\frac{1}{4}$ Jahr, das Kleid als Lohn, so muß er für die übrigen $\frac{3}{4}$ Jahre noch 90 fl., also für $\frac{1}{4}$ Jahr 30 fl. erhalten. Da er nun für diese Zeit das Kleid bekommt, so hat dieses einen Wert von 30 fl.

Algebraisch. Der Wert des Kleides sei x fl. Der Lohn für 1 Jahr beträgt also $(x + 90)$ fl., daher der Lohn für 3 Monate

$\frac{x + 90}{4}$ fl.; da nun für diese Zeit das Kleid, also x fl. im Werte als Lohn angerechnet wurde, so ist

$$x = \frac{x + 90}{4}$$

folglich $x = 30$ fl.

3. Jemand wurde um sein Alter gefragt und sagte: Mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre $= x$, so ist
 sein Alter nach 10 Jahren $= x + 10$,
 sein Alter vor 4 Jahren $= x - 4$.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein soll als die zweite, so wird, damit man eine Gleichung erhalte, die zweite Zahl mit 2 multipliciert; daher ist

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

woraus $x = 18$ folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren $= 28$ Jahre,
 Alter vor 4 Jahren $= 14$ Jahre,
 und wirklich ist $28 = 2 \cdot 14$.

4. Ein Vater ist 48, sein Sohn 18 Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird der Vater 4mal so alt sein als der Sohn?

Nach x Jahren. Dann hat der Vater ein Alter von $48 + x$, der Sohn ein Alter von $18 + x$ Jahren. Da nun nach dieser Zeit das Alter des Vaters gleich ist dem 4fachen des Alters des Sohnes, so hat man

$$48 + x = 4(18 + x),$$

woraus $x = -8$ folgt.

Hier erhält man für x einen negativen Wert. Da nach der Stellung der Aufgabe x Jahre künftige Jahre bedeuten sollen, so bedeutet der für x erhaltene negative Wert Jahre in einem Sinne, welcher dem ursprünglich in die Aufgabe gelegten entgegengesetzt ist, (Schlußabsatz zu §. 58,) also 8 vergangene Jahre, d. i. der Vater war vor 8 Jahren 4mal so alt als sein Sohn.

5. Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre in 3, durch eine zweite in 4 Stunden gefüllt werden. In wie viel Stunden wird der Behälter voll, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind?

Man setze die gesuchte Zahl der Stunden $= x$ und den Inhalt des Behälters $= v$. Die erste Röhre allein füllt in 1 Stunde $\frac{v}{3}$, also in x Stunden $\frac{vx}{3}$; die zweite Röhre füllt in 1 Stunde $\frac{v}{4}$, also in

x Stunden $\frac{vx}{4}$; beide Röhren füllen also in x Stunden $\frac{vx}{3} + \frac{vx}{4}$. Da diese Summe dem Inhalte v des ganzen Behälters gleich sein soll, so hat man $\frac{vx}{3} + \frac{vx}{4} = v$, oder

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1,$$

woraus $x = 1\frac{1}{7}$ folgt.

6. Einem Boten, der vor 2 Tagen von einem Orte abgieng und täglich 49 Kilometer zurücklegt, wird von demselben Orte aus ein zweiter Bote nachgeschickt, der täglich 77 Kilometer macht. In wie viel Tagen wird der zweite Bote den ersten einholen?

Im Kopfe. Der erste Bote hat in 2 Tagen 2mal 49 = 98 Kilometer zurückgelegt, ehe der zweite abgieng; da nun dieser täglich 77 Kilometer, also um 28 Kilometer mehr macht als der erste, so wird die Entfernung beider täglich um 28 Kilometer kleiner, also nach $\frac{98}{28} = 3\frac{1}{2}$ Reisetagen gleich 0, d. h. der zweite Bote wird den ersten in $3\frac{1}{2}$ Tagen einholen.

Algebraisch. Ist x die Zahl der Tage, nach denen der zweite Bote den ersten einholt, so reiset bis zum Zusammentreffen der erste Bote $2 + x$, der zweite x Tage; daher wird von dem ersten Boten die Strecke 49 $(2 + x)$, von dem zweiten die Strecke 77 x Kilometer zurückgelegt. Da nun die beiden Strecken gleich sein müssen, so ist

$$49(2 + x) = 77x,$$

daher $x = 3\frac{1}{2}$ Tage.

Aufgaben.

Die mit einem Sternchen bezeichneten Aufgaben sind sowohl im Kopfe als algebraisch zu lösen.

1.* Das 5fache einer Zahl, vermehrt um 23, ist gleich 88. Welche Zahl ist es?

2.* Zu welcher Zahl muß man 54 addieren, um ihr 4faches zu erhalten?

3.* Welches ist die Zahl, deren 8faches um 42 kleiner ist als ihr 5faches?

4.* Es ist einerlei, ob man eine Zahl 3mal nimmt, oder ob man sie um 3 vergrößert. Welche Zahl ist es?

5. Wenn man a zu dem m fachen einer Zahl addiert, so erhält man eben so viel, als wenn man von ihrem n fachen b subtrahiert. Welche Zahl ist es?

6.* Welche Zahl ist es, deren 4ter Theil, um 12 vermindert, ihren 12ten Theil gibt?

7.* Von welcher Zahl ist der 5te Theil 8mal genommen um 6 größer als die Zahl selbst?

8.* Die Hälfte und das Fünftel einer Zahl sind zusammen um 86 kleiner als das 5fache der Zahl. Wie groß ist diese?

9.* Von welcher Zahl ist der 8te Theil vermindert um den 10ten Theil gleich dem um 5 verminderten 15ten Theile?

10.* Addiert man zu einer Zahl ihre Hälfte, ihren dritten und 4ten Theil, so erhält man 100. Welche Zahl ist es?

11. Wenn ich zu einer Zahl a addiere und die Summe durch m dividire, so erhalte ich denselben Quotienten, als wenn ich von der Zahl b subtrahiere und die Differenz durch m dividire. Welches ist die Zahl?

12. Durch welche Zahl muß man 230 dividieren, damit man 13 zum Quotienten und 9 zum Reste erhalte?

13. Ich denke mir eine Zahl. Multipliciere ich sie mit 5, subtrahiere von dem Producte 6, dividire die Differenz durch 3 und addiere zu dem Quotienten 10, so erhalte ich das Doppelte der Zahl. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

14. Wenn man den dritten Theil einer Zahl um 1 vermehrt und das doppelte der Summe um 6 vermindert, so erhält man 0. Welche Zahl ist es?

15. Welche Zahl muß man von jeder der zwei Zahlen 19 und 11 subtrahieren, damit die erste Differenz doppelt so groß sei als die zweite?

16. Welche Zahl muß man zu dem Zähler und dem Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ addieren, damit man den Bruch $\frac{4}{5}$ erhalte?

17. Welche Zahl muß man von dem Zähler und dem Nenner des Bruches $\frac{1}{2}$ subtrahieren, damit man den Bruch $\frac{4}{5}$ erhalte?

18. Welche Zahl muß zu dem Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addiert, und von dem Nenner desselben subtrahiert werden, damit man den umgekehrten Bruch des früheren erhalte?

19. Subtrahiert man von dem Zähler und dem Nenner des Bruches $\frac{1}{6}$ eine bestimmte Zahl, so ist das Product aus dem gegebenen und dem neuen Bruche gleich $\frac{5}{6}$. Welche Zahl ist es?

20. Addiert man zu einer Zahl ihre Hälfte und 6, zu der Summe wieder die Hälfte derselben und 6, so erhält man 69. Wie heißt die Zahl?

21.* Man verminderte eine gewisse Zahl um ihre Hälfte und noch 15, den Rest wieder um den dritten Theil desselben und 10, und behielt so nur noch 30 übrig. Wie groß war die Zahl?

Im Kopfe. Da man zuletzt den dritten Theil des Restes und 10 wegnahm, so blieben $\frac{2}{3}$ desselben weniger 10 übrig; also sind $30 + 10$ oder 40 gerade $\frac{2}{3}$ des ersten Restes; sind aber $\frac{2}{3}$ des Restes = 40, so ist $\frac{1}{3}$ desselben = 20, und der ganze erste Rest 3mal 20 = 60. Da nun dieser die um 15 verminderte Hälfte der unbekannten Zahl ist, so muß $60 + 15$ oder 75 die Hälfte dieser Zahl, also die ganze unbekannte Zahl 2mal 75 = 150 sein.

22.* A hat 315 fl., B 205 fl.; wieviel muß A dem B abgeben, damit beide gleich viel haben?

23. Hätte ich 20 fl. mehr, als ich habe, so würden mir gerade noch 5 fl. auf das Doppelte von dem, was ich habe, fehlen. Wie viel Geld habe ich?

24. Von einer Ware, welche 320 Kg. wog, wurde ein Theil verkauft und es blieben noch 50 Kg. mehr übrig, als verkauft wurden. Wie viel Kg. wurden verkauft?

25.* Ein Knabe gibt von seinen 60 Nüssen einem andern eine gewisse Anzahl und behält selbst noch 4mal so viel, als er verschenkt hatte. Wie viel Nüsse hat er weggegeben?

26.* Von den jährlichen Einkünften verwendet Jemand die Hälfte auf Kost und Miete, den 8ten Theil auf Kleidung und Wäsche, den 5ten Theil auf Nebenauslagen, und erspart noch 260 fl. Wie groß ist sein jährliches Einkommen?

27. Ein Reisender wird gefragt, wie viel Kilometer er zurückgelegt hat. Er gibt zur Antwort: wenn ich 48 Kilometer mehr zurückgelegt hätte, so würde ich 3mal so weit gekommen sein als jetzt. Wie viel Kilometer hat er zurückgelegt?

28.* Jemand wollte für ein bestimmtes Geld Wein kaufen, die Flasche zu 90 Kr.; da die Flasche nur 70 kr. kostete, so erhielt er für dasselbe Geld 8 Flaschen mehr. Wie viel Flaschen erhält er?

29.* Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der sechste und neunte Theil derselben. Wie viele Schüler hatte er?

30. Ein Vater ist 32, sein Sohn 2 Jahre alt; nach wie viel Jahren wird der Vater gerade 3mal so alt sein als sein Sohn.

31. Ein Vater ist 60, sein Sohn 24 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater 4mal so alt als der Sohn?

32. Jemand wurde nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: nach 12 Jahren werde ich 4mal so alt sein, als ich vor 12 Jahren war. Wie alt ist er?

33. Ein Vater, welcher vor 8 Jahren 5mal so alt war als seine Tochter, ist jetzt 45 Jahre alt; wie alt ist die Tochter?

34.* Ein Menschenfreund wollte eine Summe, die er eben bei sich hatte, unter 10 Arme vertheilen. Gibt er jedem 20 fr., so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem nur 18 fr. geben will. Wie viel Kreuzer hatte er bei sich?

35. Als man ein Buch druckte, setzte man 36 Zeilen auf die Seite und 40 Buchstaben in die Zeile; hätte man auf die Seite 4 Zeilen mehr und in die Zeile 5 Buchstaben mehr gesetzt, so würde man 2 Bogen gespart haben. Wie viel Bogen beträgt die Stärke des Buches?

36. Um eine gewisse Strecke zurückzulegen, brauchte ein Eisenbahnzug $4\frac{1}{2}$ Stunden; er würde jedoch nur $3\frac{1}{2}$ Stunden gebraucht haben, wenn er in jeder Stunde $9\frac{1}{4}$ Kilometer mehr zurückgelegt hätte. Wie viel Kilometer hat der Zug stündlich zurückgelegt?

37.* Wenn man von einer Summe die Hälfte wegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte und von dem neuen Reste nochmals die Hälfte, so bleiben 37 fl. übrig. Wie groß war die anfängliche Summe?

38. Ein Spieler verliert im ersten Spiele 6 fl. weniger als $\frac{1}{4}$ seines Geldes, im zweiten Spiele 2 fl. mehr als $\frac{1}{6}$ des Restes, im dritten Spiele 8 fl. mehr als $\frac{1}{7}$ dessen, was ihm nach dem zweiten übrig geblieben war, und hat nun 28 fl.; wie viel hatte er Anfangs?

39. Bei einem Verkaufe löst man 2744 fl. und gewinnt dabei $\frac{3}{25}$ der Einkaufssumme. Wie groß ist letztere?

40.* Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, das Meter zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{2}$ fl. das Meter. Wenn er nun dabei 27 fl. gewonnen hat, wie viel Meter enthielt das Stück?

41. Ein Getreidehändler hat eine Quantität Weizen. Verkauft er das Hektoliter zu 10 fl., so gewinnt er im Ganzen 192 fl.: verkauft er es aber zu 9 fl., so verliert er 48 fl. Wie viel Hektoliter hat er?

42. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; die erste Röhre allein füllt das Gefäß in 4 Stunden, die zweite allein in 6 Stunden, die dritte allein in 12 Stunden. In wie viel Stunden wird der Wasserbehälter gefüllt, wenn man das Wasser durch alle drei Röhren zugleich fließen läßt?

43. Zwei Arbeiter sollen einen Graben von 435 Meter Länge reinigen; der eine macht täglich 42 Meter, der andere 45 Meter fertig; wann wird die ganze Arbeit fertig sein?

44. Zu einer Arbeit bieten sich zwei Personen an; A würde die Arbeit in 18, B in 15 Tagen liefern. In wie viel Tagen wird die Arbeit durch A und B zusammen geleistet werden?

45. Von den Endpunkten A und B einer 300 Meter langen Strecke fangen zwei Körper gleichzeitig an sich gegen einander zu bewegen, der eine mit der Geschwindigkeit von 7 Meter, der andere mit der Geschwindigkeit von 5 Meter in der Minute. Wie viel Minuten nach dem Anfange der Bewegung treffen sie zusammen?

Die Summe der von beiden Körpern zur Zeit des Zusammentreffens zurückgelegten Strecken ist gleich der Entfernung der Punkte A und B.

46. Welches ist das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 300, 7, 5 die Zahlen d, a, b gesetzt werden?

47. Von A geht ein Bote, welcher täglich 56 Kilometer macht, nach dem 356 Kilometer entfernten Orte B; zu gleicher Zeit geht ein zweiter Bote, welcher täglich 52 Kilometer zurücklegt, von B nach A ab. Nach wie viel Tagen und in welcher Entfernung von A werden beide zusammentreffen?

48. A und B sind durch eine Eisenbahn verbunden, deren Endpunkte 225 Kilometer von einander abstehen. Von A geht gegen B ein Personenzug ab, der in jeder Stunde 30 Kilometer zurücklegt; zu gleicher Zeit geht von B gegen A ein Lastzug ab, der den Personenzug nach $4\frac{1}{2}$ Stunden begegnen soll. Wie viel Kilometer muß der Lastzug in jeder Stunde zurücklegen?

49.* Einem Boten, der vor 3 Tagen von einem Orte abgieng und jeden Tag 40 Kilometer zurücklegt, wird von demselben Orte aus ein anderer Bote nachgeschickt, der täglich 60 Kilometer macht. Wann wird letzterer den ersteren einholen?

50. Um 7 Uhr Vormittags fährt von Wien auf der Westbahn ein Personenzug, um 9 Uhr Vormittags ein Schnellzug ab. Wann und in welcher Entfernung von Wien wird der Schnellzug den Personenzug einholen, wenn der erstere in jeder Stunde 42, der letztere 26 Kilometer zurücklegt?

51.* Ein Courier geht nach A und macht täglich 12 Meilen; einen Tag später wird ihm ein zweiter Courier nachgeschickt; wie viel Meilen muß dieser zurücklegen, damit er den ersten Courier in 4 Tagen einhole?

52. Einem Boten, der von A aus vor 6 Tagen abgieng und täglich 48 Kilometer zurücklegt, wird von B aus, welchen Ort er berührte, ein zweiter Bote nachgeschickt, welcher täglich 75 Kilometer macht. In wie viel Tagen wird dieser den ersten einholen, wenn die Entfernung zwischen A und B 100 Kilometer beträgt?

53. Von B aus fährt in der Richtung gegen C ein Postzug, welcher in jeder Stunde 24 Kilometer zurücklegt; zu gleicher Zeit fährt von A aus, welcher Ort 36 Kilometer hinter B liegt, in derselben Richtung ein Schnellzug, welcher den Postzug in 3 Stunden erreicht. Wie viel Kilometer legt der Schnellzug in einer Stunde zurück?

54. Zwei Körper bewegen sich nach derselben Richtung, der erste von A aus, der zweite von dem 2 Meter hinter A gelegenen Orte B aus; außerdem beginnt der zweite seine Bewegung 6 Sekunden später als der erste. Nach wie viel Sekunden vom Abgange des zweiten an gerechnet wird dieser den ersten einholen, wenn der erste in jeder Secunde $\frac{1}{4}$ Meter, der zweite $\frac{4}{9}$ Meter zurücklegt?

55. Wie stellt sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 2, 6, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{9}$ die Zahlen d, t, a, b gesetzt werden.

56. Zwei Körper fangen gleichzeitig an sich auf der Peripherie eines Kreises von demselben Punkte aus nach derselben Richtung zu bewegen; der eine durchläuft die Peripherie in 24, der andere in 18 Minuten. Wie viel Minuten nach dem Anfange der Bewegung treffen sie wieder zusammen?

57. Wie viel Zeit verfliest von einem Zusammentreffen der beiden Zeiger einer Uhr bis zum nächsten Zusammentreffen derselben?

58. Wie viel Minuten nach 4 Uhr wird der Minutenzeiger einer Uhr über den Stundenzeiger zu stehen kommen?

III. Wiederholungsaufgaben.

1.* a) $56 \cdot 3 + 38 \cdot 4$; b) $36 \cdot 9 + 74 \cdot 4$; c) $97 \cdot 3 + 65 \cdot 8$.

2.* a) $96 \cdot 4 - 54 \cdot 5$; b) $98 \cdot 3 - 24 \cdot 9$; c) $81 \cdot 9 - 69 \cdot 6$.

3.* a) $\frac{1}{3} \cdot 255 + \frac{2}{3} \cdot 111$; b) $\frac{2}{5} \cdot 175 + \frac{5}{6} \cdot 276$;

c) $\frac{1}{8} \cdot 512 + \frac{5}{8} \cdot 264$.

4.* a) $\frac{3}{4} \cdot 340 - \frac{3}{8} \cdot 448$; b) $\frac{4}{9} \cdot 486 - \frac{2}{7} \cdot 546$;

c) $\frac{3}{5} \cdot 280 - \frac{2}{3} \cdot 108$.

5. $(17 \cdot 45 + 48 \cdot 354 + 8 \cdot 702 + 0 \cdot 0089 - 56 \cdot 2059) \cdot \frac{0 \cdot 7}{1 \cdot 847}$.

6. $\frac{4 \cdot 601}{0 \cdot 22} \cdot \frac{0 \cdot 34}{0 \cdot 682}$.

7. $\left(\frac{0 \cdot 6}{0 \cdot 9} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 8} \right) : (3 \cdot 5 - 2 \cdot 66)$.

8. $3(4x - 5) + 11(2x + 9) = 33(x + 3)$.

9. $\frac{7 + x}{5} - \frac{10 + x}{13} = \frac{4 + x}{7}$.

10. $\frac{8x - 3}{2x - 1} = \frac{3x + 4}{x + 1} + 1$.

11.* Auf welcher Länge erreicht das Ansteigen einer Eisenbahn $1\frac{1}{4}$ Meter Höhe, wenn dieselbe auf je 50 Meter Länge um $\frac{1}{4}$ Meter ansteigt?

12.* Addiert man das 6fache einer Zahl zu 204, so erhält man das 18fache derselben. Welches ist die Zahl?

13. Von welcher Zahl ist der 64ste Theil so groß als die Summe aus 209 · 15 und 158 · 23?

14. $\frac{2a^5}{3b^6} \cdot \frac{5b^5}{4a^4} + \frac{9a^2}{6b^3} \cdot \frac{5b^2}{9a^6}$.

15. $\frac{x^2 + 5ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} - \frac{a - b}{a + 2b}$.

16. $332166 : 138$. 17. $3672444 : 732$. 18. $5586875 : 875$.

19. $\frac{490 \cdot 65 \cdot 24}{50 \cdot 36}$.

20. $\frac{370 \cdot 81 \cdot 35}{280 \cdot 63}$.

21. $\frac{350 \cdot 120 \cdot 175}{360 \cdot 125}$.

22. Um wie viel wird der Bruch $\frac{4\frac{807}{218}}{7}$ größer oder kleiner, wenn man im Zähler und Nenner a) die letzte, b) die zwei Ziffern rechts weglässt?

$$23. \left\{ \frac{2a + 3x}{2a - 3x} \right\}^2.$$

$$24. \left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2} \right) \cdot \left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5} \right).$$

$$25. \left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3 \right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1 \right).$$

26. Ein Mann hat seinen Verwandten $\frac{3}{4}$ seines baren Vermögens, dem Armeninstitute $\frac{3}{4}$ von dem Reste und seiner Haushälterin die noch übrigen 225 fl. vermacht; wie viel beträgt die bare Hinterlassenschaft dieses Mannes?

27. Ein Wasserbehälter kann durch eine Röhre in $4\frac{1}{2}$, oder durch eine zweite in $5\frac{2}{3}$ Stunden gefüllt, durch eine dritte dagegen in $13\frac{1}{2}$ Stunden entleert werden; in wie viel Stunden wird der leere Behälter angefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich geöffnet sind?

Sechster Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

1. Verhältnisse.

§. 111. Die Division als Theilung führt auf die Brüche; die Division als Messung einer Zahl durch eine zweite führt auf den Begriff eines Verhältnisses. Unter dem Verhältniß zweier Zahlen oder zweier gleichartiger Größen a und b versteht man einen Ausdruck, welcher anzeigt, wie vielmal so groß a ist als b , oder wie oft b in a enthalten ist. Das Verhältniß der Größen a und b bezeichnet man daher durch das zwischen beide gesetzte Divisionszeichen, also durch $a : b$, welches gelesen wird: a verhält sich zu b , oder kürzer: a zu b . Dividend und Divisor heißen Glieder des Verhältnisses, und zwar der Dividend das Vorderglied, der Divisor das Hinterglied. Ist $a : b = q$, so heißt die unbenannte Zahl q der Quotient (Exponent) des Verhältnisses $a : b$. Z. B. In dem Verhältnisse $8 : 2$ ist 8 das Vorderglied, 2 das Hinterglied und 4 der Quotient.

Die Größe eines Verhältnisses hängt von seinem Quotienten ab; je größer dieser ist, desto größer ist auch das Verhältniß. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie denselben Quotienten haben; z. B. $8 : 2$ und $12 : 3$, ebenso $a : a$ und $bm : b$. Wenn umgekehrt zwei Verhältnisse gleich sind, so haben sie gleiche Quotienten.

Sind die Glieder eines Verhältnisses unbenannte Zahlen, so nennt man dasselbe ein Zahlenverhältniß; z. B. $8 : 2$.

Jedes Verhältniß zwischen zwei gleichbenannten Zahlen läßt sich als ein reines Zahlenverhältniß darstellen; z. B. das Verhältniß $10 \text{ fl.} : 5 \text{ fl.}$ ist gleichbedeutend mit dem Verhältnisse $10 : 5$, weil beide denselben Quotienten 2 haben.

§. 112. Weil jedes Verhältniß als eine angezeigte Division anzusehen ist, so gelten alle Sätze, welche in Bezug auf den Dividend, Divisor und Quotienten bewiesen wurden, auch in Beziehung auf das Vorderglied, Hinterglied und den Quotienten des Verhältnisses. Daraus ergeben sich für die Verhältnisse insbesondere folgende Sätze:

1. In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hinterglied multipliciert mit dem Exponenten. (§. 45.)

2. In jedem Verhältnisse ist das Hinterglied gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten. (§. 45.)

Wenn $a : b = q$ ist, so ist

$$1) a = bq; \quad 2) b = a : q.$$

3. B. $10 : 2 = 5$, daher

$$10 = 2 \cdot 5 \text{ und } 10 : 5 = 2.$$

3. Ein Verhältniß bleibt (seinem Werte nach) unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert. (§. 50.)

3. B. $12 : 4$ ist gleich dem Verhältnisse $(12 \cdot 2) : (4 \cdot 2)$ oder $24 : 8$;
 $12 : 4$ " " " " $(12 : 2) : (4 : 2)$ " $6 : 2$.

Mit Hilfe des ersten Theiles dieses Satzes kann man ein Verhältniß, dessen Glieder Brüche enthalten, durch ganze Zahlen darstellen; man braucht nur Vorder- und Hinterglied mit dem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner zu multiplicieren. 3. B.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot 12 : \frac{3}{4} \cdot 12 = 8 : 9$$

$$\frac{a}{m} : b = \frac{a}{m} \cdot m : bm = a : bm,$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot bd : \frac{c}{d} \cdot bd = ad : bc.$$

Der zweite Theil des letzten Satzes gibt ein Mittel an die Hand, ein Verhältniß, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abzukürzen; man darf nur Vorder- und Hinterglied durch jenes Maß dividieren. 3. B.

$$12 : 8 = \frac{12}{4} : \frac{8}{4} = 3 : 2,$$

$$abm : acm = b : c.$$

§. 113. Multipliciert man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder, und ebenso alle Hinterglieder mit einander, so bilden die Producte ein neues Verhältniß, welches im Gegensatze zu den gegebenen einfachen Verhältnissen ein zusammengesetztes Verhältniß genannt wird.

Sind 3. B. $a : b$

$$4 : 3$$

$c : d$

$$7 : 12$$

$e : f$

$$9 : 14 \text{ einfache Verhältnisse,}$$

so ist $ace : bdf$ $4 \cdot 7 \cdot 9 : 3 \cdot 12 \cdot 14$ ein zusammengesetztes Verhältniß.

Multipliciert oder dividiert man irgend ein Vorderglied und irgend ein Hinterglied in den einfachen Verhältnissen durch dieselbe Zahl, so wird dadurch auch sowohl das Vorder- als das Hinterglied des zusammen-

gesetzten Verhältnisses durch die nämliche Zahl multipliciert oder dividirt, folglich bleibt der Wert dieses letzteren ungeändert.

Aufgaben.

Drücke folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen aus:

1.* a) $\frac{3}{4} : 5$, b) $\frac{1\frac{9}{10}}{\frac{3}{10}} : \frac{1\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}}$, c) $\frac{2}{3} : \frac{7}{12}$;

2. a) $15\frac{3}{10} : 1\frac{4}{5}$; b) $128\frac{3}{8} : 45\frac{5}{6}$ c) $0.05 : 1$;

3. a) $35.4 : 12.56$, b) $\frac{m}{ab} : \frac{n}{ac}$, c) $(a - b) : \frac{ab}{a + b}$.

Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

4.* a) $30 : 24$, b) $112 : 144$, c) $240 : 96$;

5. a) $5 : \frac{5}{8}$, b) $3\frac{3}{4} : 4\frac{3}{8}$, c) $15\frac{5}{9} : 6\frac{2}{3}$;

6. a) $7.5 : 2.5$, b) $0.625 : 0.5$, c) $3.208 : 1.28$;

7. a) $ax(m^2 - n^2) : ab(m + n)$, b) $\frac{x + y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx^2}$.

8.* Von zwei Körpern legt A in jeder Minute 80 Meter, B 96 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

9.* Der Körper A legt in 8 Minuten dieselbe Strecke zurück, wie B in 6 Minuten; in welchem Verhältnis stehen ihre Geschwindigkeiten?

10.* Von zwei Rädern, deren Zähne in einander greifen, hat das erste 28, das zweite 36 Zähne; in welchem Verhältnis steht die Umdrehungsgeschwindigkeit des ersten Rades zu jener des zweiten?

11.* Der Abstand des natürlichen Gefrierpunktes von dem Siedepunkte ist bei dem Thermometer von Réaumur in 80° , bei dem von Celsius in 100° eingetheilt; wie verhält sich demnach 1° R. zu 1° C.?

12. Welches Wertverhältnis besteht in Österreich zwischen Gold und Silber, da aus 1 Kg. feinen Goldes $172\frac{3}{4}$ Achtguldenstücke, aus 1 Kg. feinen Silbers 90 Gulden geprägt werden, und 1 Achtguldenstück $8\frac{1}{10}$ Gulden in Silber gilt?

13. Wie verhalten sich die Flächen zweier Rechtecke, von denen das eine 28 Meter lang und 15 Meter breit, das andere 25 Meter lang und 16 Meter breit ist?

14. Von zwei Dampfmaschinen kann die eine in a Secunden b Kg. c Meter hoch, die andere in m Secunden n Kg. p Meter hoch heben; wie verhalten sich die Leistungskräfte dieser beiden Maschinen?

2. Proportionen.

§. 114. Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Ist $a : b = q$ und $c : d = q$, so ist auch $a : b = c : d$; dieser Ausdruck ist eine Proportion und wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. Das erste

Glied a und das vierte d nennt man die äußeren, das zweite b und das dritte c die inneren Glieder; auch heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder der Proportion. Das vierte Glied insbesondere wird die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern genannt.

Sind in einer Proportion die inneren Glieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige Proportion, z. B. $16 : 8 = 8 : 4$. Das innere Glied 8 wird die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel zu 16 und 4, und 4 die dritte stetige Proportionale zu 16 und 8 genannt.

Eine Proportion, deren alle Glieder unbenannte Zahlen sind, heißt eine Zahlenproportion; z. B. $12 : 4 = 15 : 5$.

Eine Proportion kann auch benannte Zahlen enthalten; nur müssen die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses gleiche Benennung haben; z. B.

$$18 \text{ Meter} : 3 \text{ Meter} = 12 \text{ Meter} : 2 \text{ Meter.}$$

$$6 \text{ Kg.} : 2 \text{ Kg.} = 15 \text{ Gulden} : 5 \text{ Gulden.}$$

$$15 \text{ Gulden} : 3 \text{ Gulden} = 25 : 5.$$

So wie jedes Verhältniß, läßt sich auch jede Proportion, worin benannte Zahlen vorkommen, als eine reine Zahlenproportion darstellen.

Sätze über Zahlenproportionen.

§. 115. 1. In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Beweis: Es sei $a : b = c : d$, und $a : b = q$, so muß auch $c : d = q$ sein. Daraus folgt $a = bq$, $c = dq$. Multipliciert man die erste dieser Gleichungen mit d , und die zweite mit b , so erhält man $ac = bdq$, $bc = bdq$, woraus sich $ad = bc$ ergibt.

Der Beweis kann auch so geführt werden:

Betrachtet man eine beliebige Proportion z. B. $6 : 2 = 15 : 5$, und setzt darin statt eines jeden Vordergliedes das Product aus seinem Hintergliede und dem Exponenten 3, so nimmt die Proportion die Form $2 \cdot 3 : 2 = 5 \cdot 3 : 5$ an, aus welcher ersichtlich ist, daß sowohl die zwei äußeren als die zwei inneren Glieder mit einander multipliciert, dieselben drei Factoren 2, 3 und 5 enthalten, somit auch dasselbe Product geben müssen; es ist wirklich $6 \cdot 5 = 2 \cdot 15 = 30$.

Aus dem obigen Satze folgt:

In einer stetigen Zahlenproportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$.

Z. B. Aus $16 : 8 = 8 : 4$ folgt $8^2 = 16 \cdot 4$.

2. Jedes äußere Glied einer Zahlenproportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividiert

durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividirt durch das andere innere Glied.

Ist $a : b = c : d$, daher $ad = bc$, so ist

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}, \quad \text{und}$$

$$b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

3. Aus zwei gleichen Producten läßt sich eine Proportion bilden, wenn man jedes der beiden Producte in zwei Factoren zerlegt und die Factoren des einen Productes als die äußeren, die Factoren des anderen Productes als die inneren Glieder annimmt. (Umkehrung von 1.)

Es sei $ad = bc$. Dividirt man jeden dieser gleichen Ausdrücke durch bd , so erhält man $ad : bd = bc : bd$, oder

$$a : b = c : d.$$

Das Kennzeichen für die Richtigkeit einer Zahlenproportion ist demnach nicht nur die Gleichheit der Exponenten beider Verhältnisse, sondern auch die Gleichheit der Producte aus den beiden äußeren und aus den beiden inneren Gliedern.

§. 116. Eine Proportion auflösen heißt, aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das noch unbekannte Glied finden.

a) Eine Proportion wird aufgelöst, indem man den Quotienten des bekannten Verhältnisses sucht und daraus das unbekannte Glied des andern Verhältnisses bestimmt.

b) Eine Zahlenproportion wird am einfachsten nach §. 115, 2 aufgelöst.

3. B. Aus $x : 2 = 15 : 3$ findet man

$$a) \quad 15 : 3 = 5, \quad x = 2 \cdot 5 = 10; \quad \text{oder}$$

$$b) \quad x = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10; \quad \text{daher}$$

$$10 : 2 = 15 : 3 \quad \text{die vollständige Proportion.}$$

Umformung von Proportionen.

§. 117. Jede Zahlenproportion bleibt richtig, wenn man a) die inneren Glieder unter einander oder b) die äußeren Glieder unter einander, oder c) die inneren Glieder mit den äußeren vertauscht.

Beweis: Es sei die Proportion $a : b = c : d$, somit $ad = bc$.

a) Vertauscht man in dieser Proportion die inneren Glieder, so folgt

$$a : c = b : d.$$

b) Durch Vertauschung der äußeren Glieder in diesen beiden Proportionen erhält man

$$d : b = c : a.$$

$$d : c = b : a.$$

c) Vertauscht man endlich in allen vier Proportionen die inneren Glieder mit den äußeren, so hat man

$$b : a = d : c,$$

$$c : a = d : b,$$

$$b : d = a : c,$$

$$c : d = a : b.$$

Dass die letzten sieben Ansätze richtige Proportionen sind, folgt daraus, dass in denselben das Product der äußeren Glieder ad und jenes der inneren bc , oder umgekehrt ist, die Producte ad und bc aber nach der Voraussetzung gleich sind.

Es kann daher jede Proportion durch bloße Umstellung ihrer Glieder auf achtfache Art dargestellt werden.

§. 118. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividirt.

Beweis: Ist $a : b = c : d$, also $ad = bc$, so ist auch

$$1) \begin{array}{ll} am : bm = c : d, & a : b = cm : dm, \\ am : b = cm : d, & a : bm = c : dm; \end{array}$$

$$2) \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d, \quad a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m},$$

$$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}.$$

Denn aus $ad = bc$ folgt sowohl $adm = bcm$, als auch $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$. Nun ist in der Proportion 1) das Product der äußeren Glieder adm , das Product der inneren bcm , ferner in den Proportionen 2) das Product der äußeren Glieder $\frac{ad}{m}$, das Product der inneren $\frac{bc}{m}$; also sind alle diese Proportionen richtig.

Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

§. 119. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten.

Beweis. Ist $a : b = c : d$, also $ad = bc$, so ist auch

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c, \text{ und}$$

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

Diese Proportionen sind richtig, wenn in denselben die Producte der äußeren Glieder den Producten der inneren gleich sind, d. i. wenn

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot (c \pm d) \text{ und } (a \pm b) \cdot d = b \cdot (c \pm d), \text{ also}$$

$$ac \pm bc = ac \pm ad \text{ und } ad \pm bd = bc \pm bd$$

ist. Dieses ist nun der Fall, da nach der Voraussetzung $ad = bc$ ist.

2. In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu deren Differenz, wie die Summe der beiden letzten Glieder zu deren Differenz.

Beweis. Ist $a : b = c : d$, so hat man nach 1.

$$(a + b) : a = (c + d) : c \text{ und } (a - b) : a = (c - d) : c,$$

oder, wenn man die inneren Glieder vertauscht

$$(a + b) : (c + d) = a : c \text{ und } (a - b) : (c - d) = a : c,$$

daher auch $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$,

und nach Umstellung der inneren Glieder

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

3. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Beweis. Es sei $a : b = c : d$. Vertauscht man die inneren Glieder, so hat man

$$a : c = b : d.$$

Dann ist nach 1.

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b \text{ und } (a \pm c) : c = (b \pm d) : d,$$

und nach Umstellung der inneren Glieder

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b \text{ und } (a \pm c) : (b \pm d) = c : d.$$

Zusatz. Sind mehrere Zahlenverhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Ist $a : b = c : d = f : g$, so ist auch

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b.$$

§. 120. Wenn man in zwei oder mehreren Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Es sei $a : b = c : d$, also $ad = bc$,

ferner $e : f = g : h$, „ $eh = fg$,

endlich $k : l = m : n$, „ $kn = lm$.

Durch die Multiplication erhält man $adehkn = bcfglm$.

Gibt man dem letzten Ausdruck die Form $aek \cdot dhn = bfl \cdot egm$, so folgt daraus die Proportion

$$aek : bfl = egm : dhn.$$

Man sagt, die letzte Proportion ist aus den gegebenen zusammen-
gesetzt.

Aufgaben.

Löse folgende Proportionen auf:

- | | |
|--|--|
| 1. $3 : 8 = 12 : x$. | 2. $12 : 27 = x : 15$. |
| 3. $36 : x = 6 : 3$. | 4. $x : 10 = 8 : 5$. |
| 5. $x : 15 = 165 : 66$. | 6. $88 : x = 72 : 63$. |
| 7. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$. | 8. $3\frac{1}{2} : 4 = 5\frac{3}{4} : x$. |
| 9. $x : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} : 3$. | 10. $7\frac{4}{5} : 2\frac{1}{6} = x : 5\frac{5}{8}$. |
| 11. $5\frac{1}{3} : 7\frac{3}{4} = x : 2\frac{1}{2}$. | 12. $x : \frac{7}{9} = 3\frac{1}{3} : 5$. |
| 13. $14 : 4\frac{4}{8} = x : 5\frac{1}{4}$. | 14. $x : 10\frac{1}{2} = 4\frac{2}{7} : 9\frac{1}{3}$. |
| 15. $1\frac{5}{9} : x = 3\frac{3}{5} : 4\frac{4}{5}$. | 16. $17\frac{1}{8} : 12\frac{2}{11} = 14\frac{2}{9} : x$. |
| 17. $10\frac{1}{2} : x = 13\frac{14}{5} : 18\frac{19}{20}$. | 18. $9\frac{7}{8} : 10\frac{1}{9} = 27\frac{3}{8} : x$. |
| 19. $x : 0.35 = 2.38 : 1.25$. | 20. $14.35 : 218.275 = 9.18 : x$. |

$$21. \frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}.$$

$$22. x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}.$$

$$23. x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n).$$

$$24. (6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2).$$

$$25. \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x.$$

$$26. \left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}.$$

$$27. (x + a) : x = b : c.$$

$$28. x : (a - x) = \frac{a}{a + b} : \frac{b}{a - b} \left. \vphantom{\frac{a}{a + b}} \right\} \text{ mit Rücksicht auf §. 119, 1.}$$

29. Führe an den Proportionen

$$a) 9 : 6 = 15 : 10,$$

$$b) 36 : 12 = 24 : 8$$

die in den §§. 117 und 119 bezeichneten Formveränderungen durch.

30. Wenn $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ und $d : e = 3 : 8$ ist, wie verhält sich $a : c$, $a : d$, $a : e$? (§. 120.)

3. Anwendung der Proportionen.

§. 121. Wenn zwei Arten von Zahlen so von einander abhängen, daß zu einer 2, 3, 4, ... m mal so großen Zahl der einen Art auch eine 2, 3, 4, ... m mal so große Zahl der andern Art gehört,

so sagt man, die beiden Arten von Zahlen sind gerade proportioniert, oder sie stehen in einem geraden Verhältnisse. So sind Ware und Preis gerade proportioniert; denn wenn ein Meter von einer bestimmten Ware a Gulden kostet, so kosten 2, 3, 4... m Meter von derselben Ware $2a$, $3a$, $4a$, ... ma Gulden.

Hängen dagegen zwei Arten von Zahlen so von einander ab, daß zu einer 2, 3, 4, ... m mal so großen Zahl der einen Art nur der 2te, 3te, 4te, ... m te Theil von der Zahl der andern Art gehört, so sagt man, die beiden Arten von Zahlen sind verkehrt proportioniert, oder sie stehen in einem verkehrten Verhältnisse. Dieses ist z. B. bei der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Arbeitstage der Fall; denn wenn ein Arbeiter zu einer bestimmten Arbeit a Tage braucht, so brauchen unter übrigens gleichen Umständen 2 Arbeiter für dieselbe Arbeit nur $\frac{a}{2}$ Tage, 3 Arbeiter nur $\frac{a}{3}$ Tage, ... m Arbeiter nur $\frac{a}{m}$ Tage.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen.

§. 122. Die Lösung von Proportionsaufgaben, deren Größen in einfachen Verhältnissen stehen, — die sogenannte einfache Regeldetri —, beruht auf folgenden zwei Sätzen:

1. Wenn zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben Ordnung genommen.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die zugehörigen Zahlen einer zweiten Art und diese beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert. Ist nun $A = ma$, so muß nach dem Begriffe der geraden Proportionalität auch $B = mb$ sein. Man hat daher $A : a = m$, und $B : b = m$, und somit

$$A : a = B : b.$$

2. Wenn zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in umgekehrter Ordnung genommen, daher das Product der zusammengehörigen Zahlen der beiden Arten dasselbe.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die beiden zugehörigen Zahlen der andern Art, und diese zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert. Ist nun $A = ma$, so muß $B = \frac{b}{m}$ oder $b = mB$ sein. Man hat daher $A : a = m$ und $b : B = m$; folglich

$$A : a = b : B \text{ und } AB = ab.$$

Beispiele. 1. 7 Meter Tuch kosten 30 fl., wie viel kosten 42 Meter von demselben Tuche? Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so hat man

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ Meter } 30 \text{ fl.} & & x : 30 = 42 : 7 \\ 42 \text{ " } x \text{ " } & & \text{also } x = 180 \text{ fl.} \end{array}$$

2. 16 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 4 Tagen zu Stande bringen? Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert, und man hat

$$\begin{array}{rcl} 16 \text{ Arb. } 6 \text{ Tage} & & x : 16 = 6 : 4 \\ x \text{ " } 4 \text{ " } & & x = 24 \text{ Arbeiter.} \end{array}$$

Eine Regeldetri-Aufgabe besteht aus zwei Sätzen: der eine spricht eine Bedingung aus, der andere enthält eine Frage.

Bei jeder Regeldetri-Aufgabe müssen, damit dieselbe Sinn und Gestalt für das Leben habe, bei den zwei mit einander verglichenen Arten von Zahlen im Bedingungs- und Fragefaze alle darin nicht genannten Umstände als vollkommen gleich gedacht werden; oder, was einerlei ist, es muß stillschweigend oder ausdrücklich vorausgesetzt werden, daß zu jeder Einheit der einen Art im Bedingungs- und im Fragefaze die nämliche Menge von Einheiten der andern Art gehört. Diese Voraussetzung muß man bei allen nachfolgenden Regeldetri-Aufgaben im Auge haben, wenn sie auch der Kürze wegen nicht überall ausdrücklich hervorgehoben wurde.

§. 123. Einfachere Aufgaben der Regeldetri können oft sehr bequem durch leichte Verstandeschlüsse im Kopfe aufgelöst werden. Dabei wird im Allgemeinen aus der gegebenen Bestimmung für eine Mehrheit auf diejenige für die Einheit geschlossen und sodann aus der gefundenen Bestimmung für die Einheit wieder die für eine andere Mehrheit gesucht. Z. B.:

8 Meter Tuch kosten 32 fl., wie hoch kommen 5 Meter? — Wenn 8 Meter 32 fl. kosten, so kostet 1 Meter den 8ten Theil von 32 fl., also 4 fl.; 5 Meter kosten daher 5mal 4 fl., d. i. 20 fl.

6 Arbeiter bringen eine Arbeit in 20 Tagen zu Stande, wie viel Tage werden zu derselben Arbeit 5 Arbeiter brauchen? — Wenn eine Arbeit von 6 Arbeitern in 20 Tagen vollendet wird, so wird 1 Arbeiter dazu 6mal 20 Tage, somit 120 Tage brauchen; 5 Arbeiter aber werden nur den 5ten Theil jener Zeit brauchen, in welcher 1 Arbeiter jene Arbeit zu Stande bringt, also den 5ten Theil von 120 Tagen, d. i. 24 Tage.

Kürzer gestaltet sich die Auflösung im Kopfe, wenn die Mehrheit des Fragefazes ein Vielfaches oder ein Theil oder das Vielfache eines Theiles von der gleichnamigen Mehrheit des Bedingungsfazes ist. Z. B.:

5 Hektoliter Gerste kosten 21 fl. 15 kr.; wie hoch kommen 30 Hektol.? — 30 Hektol. sind 6mal 5 Hektol., sie kosten also 6mal 21 fl. 15 kr., d. i. 126 fl. 90 kr.

100 fl. Capital geben jährlich 5 fl. Zins; wie viel Zins bekommt man jährlich von 25 fl. Capital? — Da 25 fl. der 4te Theil von 100 fl. sind, so geben sie auch nur den 4ten Theil von 5 fl., somit 1 fl. 25 kr. Zins.

48 Meter kosten 60 fl. 72 fr.; wie viel kosten 36 Meter? — 36 Meter sind 3mal 12 Meter; 12 Meter sind der 4te Theil von 48 Meter, sie kosten also den 4ten Theil von 60 fl. 72 fr., d. i. 15 fl. 18 fr.; 36 Meter kosten daher 3mal 15 fl. 18 fr., also 45 fl. 54 fr.

In einzelnen Fällen können die Regeldetri-Aufgaben auch durch eine schickliche Zerlegung der Mehrheit des Fragejages aufgelöst werden. Z. B.:

Wie viel kosten 30 Kg., wenn 14 Kg. mit 43 fl. 82 fr. bezahlt werden? — 30 Kg. sind 2mal 14 Kg. und noch 2 Kg.; 2mal 15 Kg. kosten 2mal 43 fl. 82 fr., d. i. 87 fl. 64 fr.; 2 Kg. sind der 7te Theil von 14 Kg. und kosten daher den 7ten Theil von 43 fl. 82 fr. d. i. 6 fl. 26 fr.; 87 fl. 64 fr. und 6 fl. 26 fr. sind 93 fl. 90 fr.

Wenn 5 Hektoliter Wein 92 fl. kosten, wie hoch kommen 19 Hektol.? — 20 Hektol. würden 4mal 92 fl., also 368 fl. kosten. Um nun den Betrag für 19 Hektoliter zu finden, muß man von 368 fl. noch den Wert eines Hektoliters subtrahieren; 1 Hektoliter kostet den 5ten Theil von 92 fl., d. i. 18 fl. 40 fr.; von 368 fl. zuerst 18 fl. weg, bleiben 350 fl., und davon noch 40 fr. weg, bleiben 349 fl. 60 fr.

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 124. Die Lösung von Aufgaben, deren Größen in zusammengesetzten Verhältnissen stehen, — die sogenannte zusammengesetzte Regeldetri — beruht auf folgendem Satze:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren andern Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert ist, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proportioniert sind.

Die Richtigkeit dieses Satzes soll an folgender Aufgabe nachgewiesen werden:

3 Maurer führen in 14 Tagen 50 Cub.-Meter Mauerwerk auf; in wie viel Tagen werden 7 Maurer 125 Cub.-Meter Mauerwerk auf-führen?

Die Aufgabe läßt sich in folgende zwei Aufgaben mit einfachen Verhältnissen zerlegen:

1. 3 Maurer führen ein Mauerwerk in 14 Tagen auf; in wie viel (y) Tagen führen unter sonst gleichen Umständen 7 Maurer dasselbe Mauerwerk auf?

Da die Zahl der Maurer und die Zahl der zu einer bestimmten Arbeit erforderlichen Arbeitstage verkehrt proportioniert sind, so liegt die Antwort auf die gestellte Frage in der Proportion.

$$y : 14 = 3 : 7,$$

aus welcher man $y = 6$ findet.

2. Wenn 7 Maurer in y ($= 6$) Tagen 50 Cub.-Meter Mauerwerk vollenden, in wie viel (x) Tagen werden dieselben Maurer 125 Cub.-Meter Mauerwerk aufführen? Die Antwort darauf erhält man, da die Größe des Mauerwerkes und die Zahl der zur Ausführung erforderlichen Tage gerade proportioniert sind, durch Auflösung der Proportion

$$x : y = 125 : 50,$$

wodurch die Unbekannte $x = 15$ der ursprünglich gegebenen Aufgabe bestimmt ist.

Es ist aber nicht nothwendig, die Unbekannte y durch eine besondere Proportion wirklich zu berechnen; man kann x auch unmittelbar bestimmen, indem man die früher erhaltenen Proportionen zusammensetzt. Multipliciert man nämlich die gleichstelligen Glieder der zwei Proportionen

$$y : 14 = 3 : 7 \text{ und}$$

$$x : y = 125 : 50, \text{ so erhält man}$$

$$y \cdot x : 14 \cdot y = 3 \cdot 125 : 7 \cdot 50$$

und, wenn man das erste Verhältniß durch y dividirt,

$$x : 14 = 3 \cdot 125 : 7 \cdot 50,$$

was der leichteren Uebersicht wegen auch so geschrieben werden kann:

$$x : 14 = 3 : 7$$

$$125 : 50$$

wobei man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multiplicieren sind.

Das Verhältniß $x : 14$ ist demnach gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus $3 : 7$ und $125 : 50$.

Beispiel. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Meter Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Meter Länge vollenden?

20 Arb. 12 Std. tägl. 5 Woch. 375 Meter Länge,

12 " 10 " " x " 600 " "

$$x : 5 = 20 : 12$$

$$12 : 10$$

$$600 : 375$$

$$x : 1 = 16 : 1$$

$$x = 16 \text{ Wochen.}$$

§. 125. 1. Einfachere Aufgaben können auch hier durch leichte Schlüsse im Kopfe gelöst werden. 3. B.

4 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, bringen eine Arbeit in $7\frac{1}{2}$ Tagen zu Stande; wie viel Tage brauchen dazu 6 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten?

Wenn 4 Arbeiter $7\frac{1}{2}$ Tage brauchen, so hat 1 Arbeiter 4mal so viel Zeit, also 4mal $7\frac{1}{2} = 30$ Tage nöthig; 6 Arbeiter aber brauchen nur den 6ten Theil von 30 Tagen d. i. 5 Tage bei täglich 12stündiger Arbeit; würden sie aber nur 1 Stunde täglich arbeiten, so hätten sie 12mal 5 Tage = 60 Tage daran zu thun; da sie nun 10 Stunden täglich arbeiten, so brauchen sie nur den 10 Theil von 60 Tagen, also 6 Tage.

2. Dieselben Schlüsse, wie beim Kopfrechnen, können auch der schriftlichen Rechnung zu Grunde gelegt werden.

Für die §. 124 behandelte Aufgabe würde sich die schriftliche Schlussrechnung so stellen:

3 Maurer brauchen zu	50 Cub.-Meter	14 Tage
1 " braucht "	50 "	$14 \cdot 3$ "
7 " brauchen "	50 "	$14 \cdot 3$ "
		7 "
		$14 \cdot 3$
7 " " " 1 "		$7 \cdot 50$ "
		$14 \cdot 3 \cdot 125$
7 " " " 125 "		$7 \cdot 50 = 15 \text{ Tage.}$

Aufgaben.

1.* 6 Meter Tuch kosten 18 fl.; wie viel kosten 12 Meter?

Im Kopfe: Wenn 6 Meter 18 fl. kosten, so kostet 1 Meter den 6ten Theil von 18 fl., also 3 fl.; 12 Meter werden daher 12mal 3 fl. d. i. 36 fl. kosten. — Oder kürzer: 12 Meter sind 2mal 6 Meter, sie kosten somit 2mal so viel als 6 Meter, also 2mal 18 fl. = 36 fl.

2.* 1 Hektoliter kostet 28 fl.; wie viel kosten 40 Liter?

3.* 300 Kg. Kaffee kauft man für 320 fl.; wie viel Kaffee bekommt man für 32 fl.?

4.* An 100 fl. gewinnt man 16 fl.; wie viel gewinnt man an 425 fl.?

5.* Ein Haus trägt 540 fl. jährlichen Zins; wie viel kommt auf 8 Monate?

6.* 16 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufzuführen; in wie viel Tagen würde dieselbe Mauer von 10 Arbeitern aufgeführt werden?

Im Kopfe: Wenn 16 Maurer zu einer Arbeit 20 Tage brauchen, so braucht ein Maurer dazu 16mal so viel Zeit, also 320 Tage; 10 Maurer brauchen nur den 10ten Theil von der Zeit, die 1 Maurer braucht, also nur den 10. Theil von 320 Tagen d. i. 32 Tage.

7. Wenn die Luft auf eine Fläche von $1\frac{1}{2}$ □ Decimeter einen Druck von 154 Kg. ausübt, welcher Luftdruck lastet auf einer Fläche von 1 □ Meter?

8. Ein Arbeiter verdient in 4 Tagen so viel, als ein anderer in 5 Tagen; wenn nun der erste in 15 Tagen $18\frac{3}{4}$ fl. verdient, wie viel verdient der zweite in derselben Zeit?

9. Ein Manuscript gibt 126 Seiten zu 45 Zeilen; wie viel Seiten wird es geben, wenn auf die Seite nur 35 Zeilen kommen?

10. Wenn ein Rad in 48 Minuten 264 Umdrehungen macht, a) wie viele Umdrehungen macht es in 36 Minuten? b) in wie viel Minuten dreht es sich 840mal?

11. Das Vorderrad eines Wagens hat a Meter, das Hinterrad b Meter im Umfange; wie oft hat sich ersteres umgedreht, wenn letzteres m Umläufe gemacht hat?

$$a = 2.8; b = 4.2; m = 170.$$

12.* Mit dem Bau einer Eisenbahn können 3000 Arbeiter in 9 Monaten fertig werden; wie viel Arbeiter wird man noch aufnehmen müssen, damit der Bau in 6 Monaten fertig werde?

13. Ein Acker von $6\frac{2}{5}$ Hektar gibt einen Ertrag von $68\frac{1}{2}$ Hektoliter Weizen; a) wie viel Weizen trägt eine Ackerfläche von $3\frac{7}{8}$ Hektar? b) auf wie viel Hektar erhält man $37\frac{3}{4}$ Hektoliter Weizen?

14. Eine Maschine hebt in a Sekunden b Kg. auf eine Höhe von c Meter; in welcher Zeit kann sie b' Kg. c' Meter hoch heben?

$$a = 93, b = 4185, c = \frac{3}{5}, b' = 3912, c' = 1\frac{1}{4}.$$

15. 47 Liter Olivenöl wiegen eben so viel als 43 Liter Wasser; wie viel wiegt ein Liter Olivenöl, wenn ein Liter Wasser 1 Kg. wiegt?

16. Wenn sich das feste Erdreich zum lockeren dem Inhalte nach wie 10 : 17 verhält, a) wie viel lockere Erde geben 248 Cub.-Meter feste Erde, b) wie viel festes Erdreich geben 300 Cub.-Meter lockere Erde?

17. Wenn ein Maurer bei gleichem Fleiße bei Grundmauern täglich 500, bei Gewölbmauern dagegen nur 325 Ziegelsteine legt, und für 1 Cub.-Meter Grundmauer 1 fl. 25 kr. an Arbeitslohn gezahlt wird, wie viel beträgt der Arbeitslohn für 1 Cub.-Meter Gewölbmauer?

18. 15 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 10 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie die nämliche Arbeit in 6 Tagen vollenden, indem sie täglich nur 10 Stunden arbeiten?

19. Von zwei in einander greifenden Zahnrädern hat A 60 Zähne, B 120 Zähne; wenn sich A in 12 Sekunden 10mal umdreht, wie oft wird sich B in 36 Sekunden umdrehen?

Im Kopfe. Da B statt 60, 120 Zähne hat, so wird es nur die Hälfte von 10, d. i. 5 Umdrehungen machen; da es sich ferner statt durch 12 durch 36 Sekunden bewegt, so wird es sich 3mal $5 = 15$ mal umdrehen.

20. Eine Dampfmaschine von 4 Pferdekraft hebt in 5 Sekunden eine Last von 1500 Kg. 1 Meter hoch; wie viel Kg. wird eine Maschine von 6 Pferdekraft in 12 Sekunden eben so hoch heben?

21. Von einer Wiese, welche 512 Meter lang und 72 Meter breit ist, werden 10 Wagen Heu gewonnen, von welchen jeder 900 Kg. Ladung hat; wie viel Wagen Heu, jeder zu 1000 Kg., wird man verhältnismäßig von einer Wiese gewinnen, die 384 Meter lang und 192 Meter breit ist?

22.* An einem Graben, welcher 80 Meter lang, 5 Meter breit und 2 Meter tief wird, arbeiten 20 Arbeiter 18 Tage; wie viele Arbeiter werden einen 120 Meter langen, 6 Meter breiten und 3 Meter tiefen Graben in 36 Tagen vollenden?

Im Kopfe. Wäre der Graben statt 80 Meter nur 40 Meter lang, so brauchte man nur $\frac{1}{2}$ von 20, d. i. 10 Arbeiter; wird der Graben 120 Meter, also 3mal so lang, so braucht man 3mal 10 = 30 Arbeiter; u. s. w.

23. 4500 Mann haben auf 8 Monate Brot, wenn jeder täglich $1\frac{1}{4}$ Kg. bekommt. Nun kommen 500 Mann dazu; wie viel Kg. wird jeder täglich bekommen, damit das Brot auf $7\frac{1}{2}$ Monate ausreiche?

24. In einem Bergwerke befinden sich zwei Dampfmaschinen; die eine schafft alle 2 Minuten 7 Hektoliter Wasser aus einer Tiefe von 84 Meter, die andere alle 3 Minuten 10 Hektoliter aus einer Tiefe von 108 Meter. In welcher Zeit würden beide Maschinen zusammen 2550 Hektoliter Wasser auf eine Höhe von 120 Meter zu bringen im Stande sein?

25. Aus einer gewissen Quantität Wolle können 16 Stück $\frac{5}{8}$ Meter breites Tuch verfertigt werden, wenn das Stück 54 Meter hält. Aus einem Theil der Wolle werden 2 Stück $1\frac{1}{4}$ Meter breites Tuch verfertigt, jedes Stück zu 48 Meter; wie viele Stück $1\frac{1}{4}$ Meter breites Tuch, das Stück zu 47 Meter, können aus dem Reste verfertigt werden?

26. 6 Arbeiter vollendeten in 4 Tagen einen Graben, welcher 300 Meter lang, $8\frac{1}{3}$ Decimeter breit und 6 Decimeter tief ist. Bei einem zweiten Graben erfordert die Förderung von $2\frac{1}{3}$ Cub-Meter eben so viel Zeit als beim ersten die Förderung von $4\frac{1}{2}$ Cub-Meter. a) Wie viele Arbeiter vollenden den zweiten Graben in 9 Tagen, wenn er 245 Meter lang, $11\frac{2}{3}$ Decimeter breit und $3\frac{1}{2}$ Decimeter tief ist; b) in wie viel Tagen vollenden den zweiten Graben 10 Arbeiter, wenn derselbe 250 Meter lang, $9\frac{3}{4}$ Decimeter breit und $4\frac{1}{2}$ Decimeter tief ist?

4. Wiederholungsaufgaben.

1.* Wie viel ist das 6fache des Unterschiedes zwischen $10\frac{3}{5}$ und $6\frac{4}{5}$?

2.* Vermindere das 7fache von $5\frac{5}{9}$ um $29\frac{1}{9}$ und nimm von dem Reste den 4ten Theil.

$$3. \frac{65\frac{1}{6} \cdot 19}{3\frac{5}{6}} + \frac{259\frac{7}{8} \cdot 23}{12\frac{3}{8}} + \frac{124\frac{2}{3} \cdot 15}{5\frac{2}{3}} - \frac{1508\frac{5}{12} \cdot 17}{23}.$$

$$4. \frac{3a + 4}{3} - \frac{7a + 5}{4} - \frac{8 - 7a}{6} + \frac{5 - 3a}{8} - \frac{3 - 7a}{12}.$$

$$5. \frac{12a^2b}{13xy^5} \cdot \frac{26xy^6}{36a^4b}.$$

$$6. \frac{26x^3y^4z^5}{45a^2b^3c^4} : \frac{39x^2y^3z^4}{40ab^2c^3}.$$

$$7. \left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b} \right). \quad 8. \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} + \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1}.$$

9. Entwickle folgende Producte in 4 Decimalen:

a) $24.83275 \cdot 2.0437$.

b) $27.0889 \cdot 0.3067$.

c) $6.354 : 0.00875$

d) $5.047329 : 0.00278$.

10. Entwickle folgende Quotienten in 3 Decimalen:

a) $815.9025 : 87.53$.

b) $12.345 : 678.908$.

c) $4328.6 : 9876.702$.

d) $3.8752 : 0.0207$.

11.* 30 Meter kosten 138 fl.; wie viel kosten 65 Meter?

12.* 45 Liter kosten 18 fl.; wie viel kosten 10 Liter?

13.* Ein Eilwagen und eine Locomotive haben in ihrer Bewegung das Geschwindigkeitsverhältniß 2 : 9; die Locomotive legt in 2 Stunden 15 Kilometer zurück; welche Strecke legt der Eilwagen in 12 Stunden zurück?

14. Von drei Maurern macht der erste in 3 Stunden 158 Cub.-Decimeter, der zweite in 4 Stunden 205 Cub.-Decimeter, der dritte in 6 Stunden 281 Cub.-Decimeter; a) wie viel Cub.-Decimeter fertigen alle zusammen in einer Stunde, b) in wie viel Tagen werden sie eine Mauer von 1708 Cub.-Decimeter herstellen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten?

15. $(x + a) : (x - a) = b : c$. 16. $4 : \frac{2x}{3} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right)$.

17. $(x + 1) : (x - 5) = (x + 3) : (x - 7)$.

18. $(8x - 1) : (4x + 2) = (6x - 9) : (3x - 4)$.

19.* Von welcher Zahl ist der dritte Theil um 4 größer als der vierte Theil?

20. Um 6 Uhr Morgens fährt ein Eilwagen aus einem Orte A nach einem Orte B und macht jede Stunde $7\frac{1}{5}$ Kilometer; 20 Minuten nach 2 Uhr Nachmittags verläßt ein Bahnzug, der stündlich 36 Kilometer zurücklegt, den Ort A und kommt zu gleicher Zeit mit dem Eilwagen in B an; wie weit ist A von B entfernt?

Siebenter Abschnitt.

Die wichtigsten Verhältnissrechnungen des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.

I. Die Procentrechnung.

§. 126. Der hundertste Theil einer Zahl wird ein Procent (1%) derselben genannt. 2, 3, . . p Procent von einer Zahl sind $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$. . $\frac{p}{100}$ dieser Zahl.

Hiernach betragen 1, 2, 3, . . p Procent von 100 Einheiten bezüglich 1, 2, 3, . . p Einheiten. Das Procent ist daher eine Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer bestimmten Art von 100 Einheiten derselben Art zu nehmen sind.

Um Procentangaben in kleinen Brüchen zu vermeiden, wird für manche Größen der von 1000 entfallende Betrag angegeben, den man Promille (‰) nennt; z. B. $\frac{1}{2}\text{‰}$ heißt, von 1000 Einheiten ist $\frac{1}{2}$ Einheit zu berechnen.

Bei der Rechnung nach Procenten kommen vier Größen in Betracht: 1. die Zahl 100 als die Grundzahl; 2. der von 100 entfallende Ertrag, das Procent; 3. die Summe, von welcher die Procente berechnet werden; 4. der Ertrag, d. i. die von der gegebenen Summe nach den Procenten entfallende Menge.

§. 127. Man kann eine dreifache Procentrechnung unterscheiden: von Hundert, auf Hundert und in Hundert.

1) Von Hundert wird gerechnet, wenn die Summe, von welcher die Procente berechnet werden, mit der Grundzahl 100 selbst gleichartig ist. Z. B. Bei dem Einkaufe einer Ware, welche 400 fl. kostet, hat man 2% Spesen; wie viel fl. betragen die Spesen? Zur Auflösung dieser Aufgabe hat man folgende Proportion:

$$x : 2 = 400 : 100.$$

2) Auf Hundert wird gerechnet, wenn die Summe, von welcher die Procente berechnet werden, nicht mit der Grundzahl 100 selbst, sondern mit 100 vermehrt um das Procent gleichartig ist. Z. B. Eine Ware kommt mit Einrechnung von 2% Spesen auf 400 fl.;

wie viel betragen die Spesen? Man hat hier zur Auflösung die Proportion:

$$x : 2 = 400 : 102.$$

3) In Hundert endlich wird gerechnet, wenn die gegebene Summe, deren Ertrag nach Procenten berechnet wird, mit der Grundzahl 100 vermindert um das Procent gleichartig ist. Z. B. Für eine Ware erhält man nach Abzug von 2% Spesen 400 fl.; wie viel betragen die Spesen? Hier hat man

$$x : 2 = 400 : 98.$$

Daraus sieht man, daß allgemein für p%
bei der Rechnung von Hundert die Zahl 100,
" " " auf Hundert " " 100 + p,
" " " in Hundert " " 100 - p,
als die mit der gegebenen Summe gleichartige Zahl angenommen werden müsse.

Rechnung von Hundert.

§. 128. Bezeichnet p das Procent und e den Ertrag von der Summe s, so hat man die Proportion

$$e : p = s : 100,$$

aus welcher zunächst

$$e = \frac{sp}{100}$$

folgt, d. h.: Der Ertrag einer Summe nach Procenten von Hundert ist gleich dem 100sten Theile des Productes aus der gegebenen Summe und dem Procent.

Beim Promille wird die gegebene Summe mit dem Promille multipliciert und das Product durch 1000 dividirt.

Zur Bestimmung von s und p erhält man aus der obigen Proportion

$$s = \frac{100e}{p} \text{ und } p = \frac{100e}{s}.$$

Drücke auch diese zwei Formeln mit Worten aus.

Die Procentberechnungen können auch ohne Anwendung der Proportionen durch die Schlussrechnung ausgeführt werden. Einfachere Aufgaben werden im Kopfe berechnet.

Beispiele.

1) Wie viel beträgt a) 5% von 2450, b) 4½% von 6800.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 2450 \text{ à } 5\% \\ \hline 12250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 6800 \text{ à } 4\frac{1}{2}\% \\ \hline 272 \\ 34 \\ \hline 306 \end{array}$$

Nach der Schlussrechnung:

b) 1% d. i. $\frac{1}{100}$ von 6800 ist 68, 4% ist 4mal 68 = 272, ½% ist die Hälfte von 68, d. i. 34; 272 und 34 ist 306.

2) Von welcher Summe geben 5% den Ertrag 87?

$$s = \frac{8700}{5} = 1740.$$

Nach der Schlussrechnung:

$$\begin{array}{l} 5\% \text{ von der Summe} = 87, \\ 1\% \text{ d. i. } \frac{1}{100} = 17.4; \end{array}$$

daher die Summe selbst $= 17.4 \cdot 100 = 1740$.

3) Wie viel % von 450 fl. sind 18 fl.?

$$p = \frac{1800}{450} = 4\%.$$

Nach der Schlussrechnung:

1% von 450 fl. sind $4\frac{1}{2}$ fl.; 18 fl. sind daher so viel % von 450 fl., wie oft $4\frac{1}{2}$ fl. in 18 fl. enthalten sind, also 4%.

Rechnung auf Hundert.

§. 129. Für die Procentrechnung auf Hundert hat man, wenn p, s und e die ihnen in §. 128 gegebene Bedeutung behalten, die Proportion

$$e : p = s : (100 + p),$$

und folglich

$$e = \frac{sp}{100 + p}, \quad s = \frac{e(100 + p)}{p}, \quad p = \frac{100e}{s - e}.$$

Beispiele.

1) Wie viel betragen 4% auf Hundert von 2912 fl.?

$$e : 4 = 2912 : 104; \quad e = 112 \text{ fl.}$$

2) Welche Summe ist nöthig, um bei 6% auf Hundert 75 fl. zu erzielen?

$$s : 106 = 75 : 6; \quad s = 1325 \text{ fl.}$$

3) Wie viel % auf Hundert sind 120 fl. von 3120 fl.?

Man erhält

$$p : 120 = (100 + p) : 3120$$

daher $3120p = 12000 + 120p$, und aus dieser Gleichung $p = 4\%$.

Rechnung in Hundert.

§. 130. Behalten p, s, e ihre frühere Bedeutung, so ist für die Procentrechnung in Hundert

$$e : p = s : (100 - p),$$

daher

$$e = \frac{sp}{100 - p}, \quad s = \frac{e(100 - p)}{p}, \quad p = \frac{100e}{s + e}.$$

Beispiele.

- 1) Wie viel betragen 5% in Hundert von 2109 fl.?
 $e : 5 = 2109 : 95; \quad e = 111 \text{ fl.}$
- 2) Von welcher Summe betragen 4% in Hundert 64 fl.?
 $s : 96 = 64 : 4; \quad s = 1536 \text{ fl.}$
- 3) Wie viel % in Hundert beträgt es, wenn von 5031 fl. berechnet werden 129 fl.?

$$\begin{aligned} p : 129 &= (100 - p) : 5031 \\ 5031 p &= 12900 - 129 p \\ p &= 2\frac{1}{2}\%. \end{aligned}$$

Aufgaben.

- 1.* a) 2% von 50, 25, 20, 10, 75, 300, 650, 975;
 b) 3% von 200, 700, 2500, 250, 1250, 175, 975;
 c) 4% von 400, 1600, 350, 775, 860, 1230, 2575;
 d) 5% von 600, 1400, 50, 350, 920, 480, 2860;
 e) 20% von 30, 200, 550, 625, 860, 1075, 1635.
2. Wie viel betragen
 a) 4% von 635? b) 5 $\frac{1}{2}$ % von 846?
 c) 6 $\frac{1}{4}$ % von 1832? d) 7 $\frac{3}{4}$ % von 6052?
3. Wie viel beträgt
 a) 1%₀₀ von 7360? b) 1 $\frac{1}{4}$ %₀₀ von 8640?
 c) 1 $\frac{1}{2}$ %₀₀ von 8380? d) 1 $\frac{3}{4}$ %₀₀ von 14320?
4. Wie viel gibt eine Summe von 5280 fl. zu a) $\frac{1}{3}$ %, b) 3 $\frac{1}{4}$ %,
 c) 4 $\frac{3}{4}$ %, d) 5 $\frac{1}{2}$ %, e) 6 $\frac{3}{8}$ %?
5. Von 409 35jährigen Menschen sterben 40% bis zum 60sten Jahre; wie viele erreichen demnach das 60ste Jahr?
6. Eine Straßenstrecke von 6350 Meter hat eine Steigung von 1·8%; wie viel Meter beträgt die Steigung?
7. Die Bevölkerung einer Stadt, welche im Jahre 1840 15860 Einwohner zählte, hat bis zum Jahre 1875 um 25% zugenommen; wie groß war die Bevölkerung dieser Stadt im Jahre 1875?
8. Zu einem Baue hat man 64800 Ziegelsteine nöthig; wie viel Stück müssen geliefert werden, wenn man für Bruch und Verlust 8 $\frac{1}{2}$ % rechnet?
9. Niederösterreich hat 1885840 Hektar productive Bodenfläche, darunter 42 $\frac{1}{2}$ % Acker; wie viel Hektar betragen die letzteren?
- 10.* Welche Summe gibt
 a) zu 2% 48 b) zu 3% 74, c) zu 4% 38,
 d) zu 4 $\frac{1}{2}$ % 50, e) zu 5% 110, f) zu 6% 150
 als Ertrag?
11. Wie groß ist die Bevölkerung eines Ortes, wenn 22% derselben 572 beträgt?

12. Man nimmt an, daß aus Runkelrüben 5% Rohzucker gewonnen wird; wie viel Kg. Runkelrüben sind erforderlich, um daraus 47200 Kg. Rohzucker zu gewinnen?

13. Rindfleisch verliert beim Sieden 15% seines Gewichtes; a) wie viel wiegt ein Stück von $3\frac{1}{4}$ Kg. roh (ohne Knochen) nach dem Sieden? b) wie viel rohes Fleisch muß täglich für 12 Personen angeschafft werden, wenn jede $\frac{1}{8}$ Kg. gekochtes Fleisch bekommen soll?

14.* Wie viel % sind

- a) 12 von 200? b) 16 von 400? c) 38 von 2000?
d) 36 von 800? e) 80 von 1200? f) 63 von 1400?

15. Wie viel % sind

- a) 40 fr. von 8 fl.? b) 35 fl. von 1050 fl.? c) 308 fl. von 5600 fl. d) 116.64 fl. von 1728 fl.?

16. In einer Silbermasse, welche $12\frac{1}{2}$ Kg. wiegt, sind 5 Kg. Kupfer; wie viel % Kupfer befindet sich in dieser Legierung?

17. Aus 25 Kg. Kaffee erhält man nach dem Brennen nur $21\frac{3}{4}$ Kg., wie viel % ist am Gewichte verloren gegangen?

18. Böhmen zählte im Jahre 1780 2561794, im Jahre 1870 5140156 Einwohner; um wie viel Procent hat die Bevölkerung Böhmens in dieser Zeit zugenommen?

19. Wie groß ist der Ertrag auf Hundert

- a) von 923 fl. à 3%? b) von 1555 fl. à $5\frac{1}{2}$ %?
c) von 680.85 à 2%? d) von 3047.5 fl. à $\frac{1}{3}$ %?

20. Wie viel betragen a) 3528 fl., b) 907.48 fl. nach Abzug von 2% auf Hundert?

21. Wie viel % auf Hundert sind 105 fl. von 3105 fl.?

22. Wie groß sind die Beträge in Hundert

- a) von 2508 fl. à 10%? b) von 836 fl. à $8\frac{1}{2}$ %?
c) von 7018 fl. à $2\frac{1}{2}$ %? d) von $1601\frac{1}{5}$ fl. à $6\frac{1}{4}$ %?

23. Von welchen Summen sind die nachfolgenden Beträge zu den beigesetzten Procenten gerechnet worden:

- a) 300 fl. à 10%? b) $128\frac{1}{4}$ fl. à $11\frac{1}{2}$ %?
c) 130.2 fl. à $3\frac{1}{2}$ %? d) $78\frac{1}{2}$ fl. à $1\frac{1}{2}$ %?

24. Wie viel % in Hundert sind 66 fl. von 3234 fl.?

25. Für eine Steuer sammt 32% Umlage werden 125 fl. 40 fr. gezahlt; wie groß ist die ursprüngliche Steuer?

26. Jemand zahlte für eine Steuer, bei welcher ihm 4% nachgelassen wurden, 398 fl. 40 fr.; wie viel Steuer war ihm berechnet worden?

27. Ein Kaufmann erhielt für eine Ware nach Abzug von $2\frac{1}{2}$ % Kosten einen Betrag von $6676\frac{4}{5}$ fl.; wie groß waren die Kosten?

28. Bei einer Warenbezahlung betrug der Abzug zu $3\frac{1}{4}$ % $175\frac{1}{2}$ fl.; wie viel fl. zahlte der Käufer?

Tara.

§. 131. Wenn eine Ware sammt dem Behältnisse, worin sie sich befindet, gewogen wird, so heißt dieses ganze Gewicht das Brutto-Gewicht. Der Abzug vom Brutto-Gewichte, welcher wegen des Gewichtes des Behältnisses gemacht wird, heißt Tara, und das Gewicht der Ware selbst das Netto-Gewicht. Die Tara wird häufig in Procenten angegeben und von Hundert des Bruttogewichtes berechnet. Die Decimalen der Kilogramme werden, außer bei sehr feinen Waren, weggelassen; nur wird, wenn 5 oder mehr als 5 Zehntel vorkommen, die Anzahl der Kilogramme um 1 vermehrt. Z. B.

Wie viel kosten 5 Ballen Kaffee Brutto 773 Kg., Tara 5%, zu 115 fl. pr. 100 Kg. Netto?

773 à 5%	Brutto Kg. 773
38.65 Kg.	Tara 5% " 39
	Kg. 734 à 115
	734
	36 70
	fl. 844.10.

Sconto oder Rabatt.

§. 132. Beim Warenverkaufe im Großen wird dem Käufer gewöhnlich eine bestimmte Zahlungsfrist gewährt, und darum der Preis etwas höher gestellt. Zieht nun der Käufer die bare Zahlung vor, so muß ihm wegen der baren Bezahlung vom Warenpreise ein Abzug, welcher Warendiscont, Sconto, auch Rabatt heißt und nach Procenten von Hundert berechnet wird, bewilligt werden. Wird von dem Warenpreise der Sconto subtrahiert, so heißt der Rest die contante Zahlung.

Unter Rabatt versteht man häufig auch den Abzug, welcher vom Preise solcher Waren, bei denen der Erzeuger den Preis für den Einzelverkauf festgestellt hat, dem Kleinhändler als Ersatz für die Bezugskosten und zur Ermöglichung eines Gewinnes gewährt wird. Von dieser Art ist der Buchhändler-rabatt. Dieser beträgt in der Regel solche Procente, die einen bequemen Theil von 100 ausmachen; z. B. $33\frac{1}{3}\%$ oder $\frac{1}{3}$ des Ladenpreises, 25%, 20%. Die Berechnung des Buchhändler-Rabatts geschieht durch die Procentrechnung von Hundert, häufig auch durch eine einfache Division.

Beispiele.

1) Wie groß ist bei einem Warenbetrage von 5192 fl. a) der Sconto à 2%, b) die contante Zahlung?

Warenbetrag fl. 5192
Sconto 2% " 103.84
contante Zahlung fl. 5088.16.

2) Eine Verlagsbuchhandlung hat Bücher im Werte von 2518 fl. versendet; wie viel hat sie dafür bei 20% Rabatt zu fordern?

2518 à 20%	oder: $\frac{1}{5}$ von 2518 fl.	2518 fl.
503.60 fl. Rabatt	503.6 fl.	503.6 "
		2014.4 fl.

Sensarie.

§. 133. Zur Abschließung von Geschäften zwischen Kaufleuten desselben Ortes gibt es beedete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe wird Sensarie oder Courtagé genannt.

Bei Waarengeschäften beträgt die Sensarie gewöhnlich 1%, wovon $\frac{1}{2}\%$ der Käufer, $\frac{1}{2}\%$ der Verkäufer zahlt, bei Wechselgeschäften dagegen 1‰.

Beispiele.

1. Wie viel beträgt die Sensarie von einem Warengeschäfte von fl. 4580 zu $\frac{1}{2}\%$; wie viel bekommt der Verkäufer, und wie viel muß der Käufer zahlen?

4580 à $\frac{1}{2}\%$	
22·90 fl. Sensarie.	
Der Käufer zahlt	
für die Ware	fl. 4580
dazu die Sensarie à $\frac{1}{2}\%$. .	fl. 22·90
zusammen	fl. 4602·90
Der Verkäufer erhält	
für die Ware	fl. 4580
ab Sensarie à $\frac{1}{2}\%$	fl. 22·90
reine Einnahme	fl. 4557·10.

2. Wie hoch beläuft sich die Einkaufssumme von Staatspapieren, wenn die Sensarie à 1‰ 5 fl. 64 kr. beträgt?

$$x = 5·64 \cdot 1000 = 5640 \text{ fl.}$$

Provision.

§. 134. Wenn jemand die Ausführung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waren, einem andern aufträgt, so heißt die Person, welche den Auftrag erteilt, der Committent, die Person aber, welche das Geschäft zu vollziehen beauftragt wird, der Commissionär. Die Vergütung, die der Commissionär für seine Mühe erhält, wird Provision oder Commission genannt, und in Procenten von Hundert bestimmt.

Beim Einkaufe wird die Provision von dem Betrage der gekauften Ware, nachdem schon die dabei vorkommenden Auslagen dazugezählt wurden, berechnet. Die Provision wird dann zu jenem ganzen Betrage addiert.

Beim Verkaufe wird die Provision von dem Betrage der verkauften Ware, ehe noch die dabei vorkommenden Spesen abgezogen wurden, berechnet. Die Provision wird sammt den Spesen von dem Warenbetrage subtrahiert; was übrig bleibt, ist der reine Ertrag der verkauften Ware.

Die Rechnung, welche der Commissionär seinem Committenten über den vollzogenen Einkauf oder Verkauf einer Ware erteilt, heißt bezüglich Factura oder Verkaufsberechnung.

Beispiele.

1. Wie viel beträgt die Provision à $\frac{1}{2}\%$, und wie groß ist der reine Ertrag eines verkauften Wechsels von 1785·12 fl.?

1785·12 à $\frac{1}{2}\%$	Wechselbetrag	1785·12 fl.
8·9256 fl. Provis.	ab Prov. $\frac{1}{2}\%$	. . 8·93 "
	Reinertrag	1776·19 fl.

2. Ein Triester Kaufmann kauft für einen Wiener 3 Kisten sici-
lianische Weinbeeren Nr. 12—14, gewogen Brutto 768 Kg., Tara
18 Kg. pr. Kiste, à fl. 31 pr. 100 Kg. Netto; auf welchen Betrag lautet
die Factura, wenn die Spesen für Kisten, Verpacken zc. fl. 15·58 betragen,
 $\frac{1}{2}\%$ Senfarie und 2% Provision gerechnet wird?

Factura.

3 Kisten sici- lianische Weinbeeren Nr. 12—14			
Brutto 768 Kg.			
Tara 18 Kg. pr. Kiste 54 "			
Netto 714 Kg. à 31	fl. ö. W.	221	34
Spesen:			
Kisten, Verpacken zc.	fl. 15·58		
Senfanie $\frac{1}{2}\%$	" 1·11		
		16	69
	fl. ö. W.	238	3
Provision 2%	"	4	76
	fl. ö. W.	242	79

3. In Breslau werden im Auftrage eines Prager Committenten
218 Etr. Weizen à Mark 19 " 80 pr. 200 E verkauft; die Fracht
beträgt 30 Pfenn. pr. Etr., Maßgeld, Trinkgeld zc. Mark 10 " 80,
Senfanie $\frac{1}{2}\%$; auf welchen Reinertrag lautet die Verkaufsrechnung,
wenn die Provision zu $2\frac{1}{4}\%$ gerechnet wird?

Verkaufsrechnung.

218 Etr. Weizen à 19 " 80 pr. 200 E	Mark	2158	20
Spesen:			
Fracht 30 Pf. pr. Etr.	Mark 65 " 40		
Maßgeld, Trinkgeld zc.	" 10 " 80		
Senfanie $\frac{1}{2}\%$	" 10 " 79		
Provision $2\frac{1}{4}\%$	" 48 " 57		
		135	56
Reinertrag Mark		2022	64

Assicuranz.

§. 135. Gesellschaften, welche gegen eine bestimmte Gebühr den
Schadenersatz für Unfälle und Verluste übernehmen, die durch den natür-
lichen Lauf der Dinge oder durch außerordentliche Naturereignisse herbei-
geführt werden, nennt man Versicherungs- oder Assicuranz-
Gesellschaften. Die Gebühr, welche für die Übernahme der Schaden-

vergütung bezahlt wird, heißt Prämie; die über den Versicherungsbetrag ausgestellte Urkunde heißt Polizza. Die Prämie wird nach Procenten von Hundert der versicherten Summe berechnet. Z. B.

Wie viel beträgt die Prämie für versicherte 15280 à $1\frac{5}{8}\%$?

15280	à	$1\frac{5}{8}\%$
7640	"	$\frac{1}{2}\%$
1910	"	$\frac{1}{8}\%$
24830	fl.	

Gewinn und Verlust.

§. 136. Bei der Gewinn- und Verlustrechnung kommen drei Bestimmungen vor: die Ausgabe beim Einkaufe, die Einnahme beim Verkaufe und der Gewinn oder Verlust. Dieser wird von den Kaufleuten gewöhnlich nach Procenten bestimmt; es heißt z. B. 6% gewinnen, statt 100 fl., die man beim Einkaufe ausgelegt hat, beim Verkaufe 106 fl. einnehmen; 6% verlieren aber, für 100 fl. Ausgabe beim Einkaufe nur 94 fl. Einnahme beim Verkaufe haben.

Beispiele.

1. Ein Kaufmann kauft das Meter Tuch für 4 fl. 80 kr.; wie theuer muß er es verkaufen, um 15% zu gewinnen?

48	à	15	Einkaufspreis	4 fl. 80 kr.
240			Gewinn 15%	— " 72 "
0720	fl. Gewinn.		Verkaufspreis	5 fl. 52 kr.

2. Eine Ware, welche im Einkaufe 725 fl. gekostet hat, mußte für 674 fl. 25 kr. verkauft werden; wie viel % betrug der Verlust?

Einkaufssumme	725 fl.		
Verkaufssumme	674 " 25 kr.	x =	$\frac{5075 \cdot 100}{725} = 7\%$
Verlust	50 fl. 75 kr.		

Aufgaben.

1. Eine Ware wiegt Brutto 2792 Kg.; wie groß ist das Nettogewicht bei a) 3%, b) $5\frac{1}{2}\%$, c) 12% Tara?
2. Von einer Ware ist das Bruttogewicht 2150 Kg., das Nettogewicht 1978 Kg.; wie viel % beträgt die Tara?
3. Wie hoch beläuft sich der Sconto à $2\frac{1}{4}\%$ bei a) 2577 fl., b) 3538 fl., c) 93985 fl., d) 171417 fl.?
4. Wie hoch kommen 4 Fässer Feigen Brutto 518 Kg., Tara 10%, wenn 100 Kg. Netto zu 24 fl. mit $1\frac{1}{2}\%$ Sconto bezahlt werden?
- 5.* Den wievielten Theil des Ladenpreises eines Buches betragen 10%, 20%, 25%, $33\frac{1}{3}\%$ Rabatt?
- 6.* Wie viel beträgt der Rabatt à $33\frac{1}{3}\%$ bei einer Bücherrechnung von a) 151824 fl., b) 917 $\frac{2}{3}$ Reichsmark?

7.* Wie groß ist die Sensarie à $\frac{1}{2}\%$

a) von 918 fl.?

b) von 506 fl. 58 fr.?

c) von 3096 fl.?

d) von 2744 fl. 87 fr.?

8. Der Einkaufspreis einer Ware beläuft sich mit Einschluß von $\frac{1}{2}\%$ Sensarie auf 2653 fl. 40 fr.; wie groß ist der ursprüngliche Warenpreis?

9. Wie groß ist die Provision à 2%

a) von 458 fl.?

b) von 720 fl.?

c) von 912 fl. 50 fr.?

d) von 1325 fl.?

e) von 3915 fl.?

f) von 1118 fl. 75 fr.?

10. Wie viel beträgt die Provision von 4760 fl.

a) zu $\frac{1}{2}\%$?

b) zu $\frac{5}{8}\%$?

c) zu $1\frac{1}{2}\%$?

d) zu $1\frac{3}{4}\%$?

11. Jemand besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 2085 fl. 25 fr.; wie viel verblieb dem Verkäufer nach Abschlag der Provision à $1\frac{3}{4}\%$?

12. Eine Ware kommt sammt 2% Einkaufs-Provision auf 3207 fl. 90 fr.; a) wie viel beträgt die Provision? b) wie groß ist der reine Warenbetrag?

13. Für eine verkaufte Ware erhält man nach Abzug von 2% Provision 2158 fl. 88 fr.; wie viel beträgt die Provision?

14. Ein Kaufmann besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 3518 fl., zahlt dem Sensalen $\frac{1}{2}\%$ und berechnet für sich $1\frac{3}{4}\%$ Provision; wie viel erhält der Verkäufer?

15. Wie viel kosten 2308 Kg. Brutto einer Ware, wenn die Tara 8% beträgt, 100 Kg. Netto 85.72 fl. mit 2% Sconto kosten und die Provision zu $1\frac{5}{8}\%$ berechnet wird?

16. Wie groß ist die Versicherungsprämie von 7850 fl.

a) zu $\frac{1}{2}\%$?

b) zu $\frac{3}{8}\%$?

c) zu 1%?

d) zu $1\frac{1}{2}\%$?

17.* Ein Hauseigentümer zahlte für sein Haus an eine Versicherungs-Gesellschaft 18 fl. 84 fr., wobei die Gesellschaft $\frac{1}{2}\%$ des Realitätenwertes gerechnet hat; wie groß ist letzterer?

18.* Den wievielten Theil der Einkaufssumme beträgt ein Gewinn von 5% , $6\frac{1}{4}\%$, $8\frac{1}{3}\%$, 10% , $12\frac{1}{2}\%$, $16\frac{2}{3}\%$, 20% ?

19.* Wie theuer wird eine Ware, welche im Einkaufe 780 fl. kostet, verkauft, wenn man a) 10% gewinnt, b) 10% verliert?

20. Eine Ware wurde um 4250 fl. eingekauft und mit einem Gewinne von 340 fl. verkauft; wie viel % betrug der Gewinn?

21. Für eine mit 3% Verlust verkaufte Ware werden 1040 fl. gelöst; wie groß ist a) der Verlust, b) der Einkaufspreis?

22. Die Verkaufssumme einer Ware von 1590 fl. enthält einen Gewinn von 90 fl.; wie viel % beträgt dieser?

23. Die Verkaufssumme von 1410 fl. bringt einen Verlust von 90 fl.; wie viel % beträgt dieser?

24. Ein Wiener Kaufmann erhält aus Triest 4 Kisten Weinbeeren, gewogen Brutto 972 Kg., Tara 18 Kg. pr. Kiste, zu 30 fl. pr. 100 Kg. Netto, Sensarie $\frac{1}{2}\%$, Provision 2% ; Einfuhrzoll, Fracht und andere Spesen betragen 68 fl. 64 kr.; wie theuer muß er das Kg. verkaufen, um 15% zu gewinnen?

II. Die Zinsrechnung.

1. Einfache Zinsrechnung.

§. 137. Eine Summe Geldes, welche man entweder selbst zu einer nutzbringenden Unternehmung verwendet, oder einem anderen gegen regelmäßig wiederkehrende Entrichtung eines Geldbetrages zur freien Benützung überläßt, heißt Capital, und das Erträgnis, das man daraus bezieht, Zins oder Interesse. Der Zins wird nach Procenten berechnet, welche sich auf 100 Capitalseinheiten und auf eine Zeiteinheit, gewöhnlich ein Jahr, beziehen. Das Jahr wird dabei zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen angenommen.

Die Zinsrechnung ist demnach eine Procentrechnung, in welcher außer den bei dieser zusammentretenden Größen noch eine weitere Größe, die Zeit, in Berücksichtigung kommt.

§. 138. Die Zinsrechnung beruht auf der zusammengesetzten Proportion; die Aufgaben derselben können jedoch auch durch die Schlussrechnung aufgelöst werden. Letztere wendet man insbesondere beim Kopfrechnen an.

Ein Capital von 1346 fl. ist zu 5% angelegt; wie groß ist der Zins in 3 Jahren?

Nach der Schlussrechnung:

1346 fl. Cap. geben zu 1% in 1 Jahre	$\frac{1346}{100}$	fl. Zins
1346 " " " " 5% " 1 " "	$\frac{1346 \cdot 5}{100}$	" "
1346 " " " " 5% " 3 Jahren	$\frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100}$	" "
	= 201.9 fl. Zins.	

Mittelsst der zusammengesetzten Proportion:

100 fl. Cap. in 1 Jahr	5 fl. Zins	$x : 5 = 1346 : 100$
1346 " " " 3 Jahren	x " "	$3 : 1$
		$x = \frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100}$

Allgemein: Bezeichnet c das Capital, p das Procent, n die Anzahl der Jahre und z den Zins, so erhält man auf gleiche Weise

$$z = \frac{cpn}{100},$$

aus welcher Gleichung man auch

$$c = \frac{100z}{pn}, \quad p = \frac{100z}{cn}, \quad n = \frac{100z}{cp}$$

erhält.

Drücke diese vier Formeln in Worten aus.

Beispiele.

1) Wie viel Zinsen geben 350 fl. zu 4% in 3 Jahren?

Im Kopfe. 350 fl. geben in 1 Jahre zu 1% den 100sten Theil von 350 fl., also $3\frac{1}{2}$ fl., daher zu 4% 4mal $3\frac{1}{2}$ fl. = 14 fl.; somit in 3 Jahren 3mal 14 fl. = 42 fl. Zins.

Nach der Formel:

$$z = \frac{350 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 42 \text{ fl.}$$

2) Wie groß ist das Capital, welches bei 4% in 5 Jahren 540 fl. Zins einbringt?

Im Kopfe. $\frac{4\%}{100}$ des Capitals in 5 Jahren = 540 fl.
 $\frac{4\%}{100}$ " " " 1 Jahr = 108 "
 $\frac{1\%}{100}$ d. i. $\frac{1}{100}$ " " " 1 " = 27 "
 daher das Capital selbst = 100mal 27 = 2700 fl.

Nach der Formel:

$$c = \frac{100 \cdot 540}{4 \cdot 5} = 2700 \text{ fl.}$$

3) Zu wie viel % muß ein Capital von 3450 fl. angelegt werden, damit es in 2 Jahren 276 fl. Zins gebe?

Im Kopfe. 1% von 3450 fl. beträgt in 1 Jahre $34\frac{1}{2}$ fl., in 2 Jahren 69 fl.; 276 fl. sind daher so viel %, wie oft 69 in 276 enthalten ist, also 4%.

Nach der Formel:

$$p = \frac{100 \cdot 276}{3450 \cdot 2} = 4\%.$$

4) Wie lange muß ein Capital von 4800 fl. zu 5% ausstehen, um 600 fl. Zinsen zu geben?

Im Kopfe. 4800 fl. geben in 1 Jahre zu 1% 48 fl., zu 5% also 5mal 48 = 240 fl.; 600 fl. Zinsen gibt daher daselbe Capital in so viel Jahren, wie oft 240 in 600 enthalten ist, somit in $2\frac{1}{2}$ Jahren.

Nach der Formel:

$$n = \frac{100 \cdot 600}{4800 \cdot 5} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. 139. Praktisch berechnet man die Zinsen eines Capitals für irgend eine gegebene Zeit gewöhnlich auf folgende Art:

1. Die Zinsen für ein Jahr berechnet man nach der Procentrechnung, indem man den 100sten Theil des Capitals mit dem Procent multipliciert.

2. Um die Zinsen für mehrere Jahre zu finden, darf man nur die einjährigen Zinsen mit der Anzahl der Jahre multiplicieren.

3. Die Monate werden als bequeme Theile des Jahres, und die Tage als bequeme Theile des Monats betrachtet, die auf diese Theile entfallenden Zinsbeträge durch die Division bestimmt, und zuletzt zu den Zinsen auf Jahre addiert.

3. B. Wie viel Zins geben 4850 fl. Capital zu $4\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren 7 Monaten 12 Tagen?

4850 fl. zu $4\frac{1}{2}\%$ in 3 J. 7 M. 12 T.

19400

2425

218.25 fl. für 1 Jahr

654.75 fl. für 3 Z.

109.125 " " 6 M. = $\frac{1}{2}$ S.

18.187 " " 1 " = $\frac{1}{6}$ von 6 M.

$$6.062 \quad " \quad " \quad 10 \text{ } \mathfrak{L}. = \frac{6}{3} \text{ } \mathfrak{M}.$$

$$1.212 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad = \frac{1}{5} \text{ von } 10 \text{ T.}$$

789.336 fl.

§. 140. Häufig sind die Zinsen eines Capitals bloß für eine bestimmte Anzahl von Tagen zu berechnen. In diesem Falle sucht man zuerst die Zinsen zu 6%, und leitet daraus durch entsprechende Zerfällung die Zinsen für das gegebene Procent ab.

Heißt c das Capital, welches zu 6% durch t Tage angelegt ist, so hat man zur Berechnung der Zinsen

$\frac{100 \text{ fl. Cap.}}{c} = \frac{360 \text{ Tag.}}{t}$

c " " " t " x " " t : 360

also $x = \frac{ct}{6000}$;

d. h. die Zinsen für eine bestimmte Anzahl Tage zu 6% werden berechnet, wenn man das Capital mit der Anzahl Tage multipliciert und das Product zuerst durch 1000 und dann durch 6 dividirt.

Wenn bei den Gulden des Capitals auch Kreuzer vorkommen, so läßt man sie gewöhnlich während der Rechnung weg, vergrößert jedoch, wenn 50 oder mehr als 50 Kreuzer vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer als Decimalen von Gulden angelegt.

Beispiele.

12. ¹⁾ Wie viel Zins geben 780 fl. Capital zu 6% vom 3. April bis August?

Vom 3. April bis 3. August sind 4 Mon. = 120 Tage
 „ 3. Aug. „ 12. „ „ 9 „
129 Tage.

780 . 129
 1560
 7020

 100 620 : 6

 1677 fl.

2) Wie viel betragen die Zinsen von 4559 fl. 80 fr. zu 8% in 57 Tagen?

4560 . 57

 22800
 31920

 259920
 4332 Zins zu 6%
 1444 „ „ 2% = $\frac{1}{3}$ von 6%

 5776 fl. Zins zu 8%.

Aufgaben.

1.* Berechne die einjährigen Zinsen

- a) von 30 fl., 75 fl., 120 fl., 350 fl., 862 fl., 924 fl. à 5%;
 b) von 55 fl., 80 fr., 110 fl., 235 fl., 560 fl., 772 fl. à 4%;
 c) von 500 fl., 125 fl., 350 fl., 720 fl., 375 fl., 880 fl. à $4\frac{1}{2}\%$.

2.* Wie viel betragen die Zinsen à 4% von

- a) 200 fl. in 3 Jahren? b) 525 fl. in 5 Jahren?
 c) 465 fl. „ 8 „ d) 255 „ „ 6 „

3.* Wie viel betragen die Zinsen à 6% von

- a) 300 fl. in 4 Jahren? b) 475 fl. in 3 Jahren?
 c) 650 fl. „ 2 „ d) 1250 fl. „ 5 „

4. Eine Witwe lebt von den Zinsen eines zu $5\frac{1}{2}\%$ ausgeliehenen Capitals von 9560 fl.; wie viel darf sie täglich ausgeben?

5. Berechne die Zinsen à $4\frac{1}{2}\%$ von

- a) 634 fl. in 3 Jahren; b) 962 fl. in 5 Jahren;
 c) 1236 fl. in $2\frac{1}{2}$ Jahren; d) 6720 fl. in $3\frac{1}{4}$ Jahren.

6. Wie viel beträgt der Zins von

- a) 4105 fl. à 5% in 3 Jahren?
 b) 2412 fl. à $5\frac{3}{4}\%$ in 5 Jahren?
 c) 884 fl. 75 fr. à $6\frac{1}{2}\%$ in 4 Jahren?

7. Wie viel Zins geben 1428 fl.

- a) zu 5% in 4 Monaten? b) zu 6% in 7 Monaten?
 c) zu $4\frac{1}{2}\%$ in 5 Monaten? d) zu $5\frac{3}{4}\%$ in 9 Monaten?

8. Wie viel Zins tragen

- a) 6720 fl. à $4\frac{1}{2}\%$ in 1 Jahr 5 Monaten?
 b) 2928 fl. à $5\frac{1}{4}\%$ in 2 Jahren 7 Mon. 15 Tagen?
 c) 5704 fl. à $6\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren 10 Mon. 20 Tagen?

9. Wie viel betragen die Zinsen à 6% von

- a) 984 fl. in 65 Tagen? b) 2250 fl. in 212 Tagen?
 c) 2127.6 in 96 Tagen? d) 3284 fl. in 192 Tagen?

10. Wie viel Zins geben

- a) 8888 fl. Capital zu 7% in 12 Tagen?
 b) 9379 fl. Capital zu $6\frac{1}{2}\%$ in 147 Tagen?
 c) 1230 fl. 39 fr. Capital zu $4\frac{1}{2}\%$ in 305 Tagen?

11. Wie viel Zinsen tragen

- a) 945 fl. zu $5\frac{1}{4}\%$ vom 1. Aug. bis 7. Nov.?
 b) 1278 fl. zu $6\frac{1}{2}\%$ vom 25. Mai bis 3. October?
 c) 3377 fl. zu 5% vom 13. Juni bis 27. August?

12. Ein Capital c wird nach n Jahren zurückgezahlt; zu welcher Summe (s) ist es bei $p\%$ einfachen Zinsen angewachsen?

13. Auf einem Gute lastet eine Schuld von 8500 fl.; nach 2 Jahren zahlt der Besitzer die Schuld und die $5\frac{1}{2}\%$ Zinsen; wie viel muß er zahlen?

14.* Wie vielmal so groß ist das Capital als die jährlichen Zinsen

- a) zu 5% , b) zu 4% ?

15.* Welches Capital gibt an jährlichen Zinsen

- a) 20 fl., 25 fl., 30 fl., 36 fl., 82 fl., 145 fl. à 5% ?
 b) 10 fl., 24 fl., 40 fl., 75 fl., 120 fl., 200 fl. à 4% ?

16.* Wie groß ist das Capital, dessen Zinsen à 5% in 3 Jahren

- a) 75 fl., b) 90 fl., c) 125 fl. betragen?

17. Berechne die Capitalien, welche folgende Zinsen bringen:

- a) zu 4% in 2 Jahren 70 fl. Zins,

- b) " 5% " $1\frac{1}{2}$ " $92\frac{1}{2}\%$ " "

- c) " 6% " $2\frac{2}{3}$ " 692 " "

18. Welches Capital gibt

- a) zu $4\frac{1}{2}\%$ in 3 Jahren 837 fl. Zins?

- b) " $6\frac{1}{2}\%$ " $1\frac{2}{3}$ Jahren 390 fl. Zins?

- c) " $5\frac{1}{4}\%$ " 2 Jahren 7 Mon. 398.58 fl. Zins:

19.* Zu wie viel $\%$ geben in 1 Jahre

- a) 800 fl. Cap. 40 fl. Zins? b) 1500 fl. Cap. 80 fl. Zins?
 c) 600 fl. Cap. 27 fl. Zins? d) 1400 fl. Cap. 63 fl. Zins?

20.* Wie viel $\%$ erhält man, wenn an Zins einbringen:

- a) 400 fl. in 2 Jahren 28 fl.?

- b) 700 " " 4 " 140 " ?

- c) 800 " " $2\frac{1}{2}$ " 120 " ?

21. Zu wie viel % sind 4260 fl. angelegt, wenn sie in 3 Jahren 4 Monaten 710 fl. Zins geben?

22. Ein Capital bringt in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}\%$ 60 $\frac{3}{4}$ fl. Zins; ein um 150 fl. größeres Capital bringt in derselben Zeit 90 fl. Zins; zu wie viel % ist das letztere verzinst?

23. Zu wie viel % muß man 9110 fl. anlegen, damit sie vom 2. Mai bis 15. October 206 fl. 23 kr. Zins bringen?

24. Zu wie viel % muß ein Capital ausstehen, damit die einfachen Zinsen a) in 20, b) in 25, c) $33\frac{1}{3}$ Jahren dem Capitale gleich sind?

25. Zu wie viel % müssen 375 fl. ausgeliehen werden, damit sie mit den einfachen Zinsen in $1\frac{3}{5}$ Jahren zu 402 fl. anwachsen?

26. In welcher Zeit geben

- | | | | | |
|----|--------------|---------|---------------------|-------|
| a) | 225 fl. Cap. | à 4% | 45 fl. | Zins? |
| b) | 320 " " | à 5% | 32 " " | ? |
| c) | 250 " " | à 4% | 70 " " | ? |
| d) | 450 " " | à 6% | $94\frac{1}{2}$ " " | ? |

27. In welcher Zeit geben

- a) 5460 fl. Cap. zu $5\frac{1}{2}\%$ 365 fl. Zins?
 b) 5244 $\frac{5}{8}$ fl. Cap. zu $5\frac{1}{4}\%$ 956 $\frac{3}{4}$ fl. Zins?
 c) 6580 $\frac{5}{8}$ fl. Cap. zu $4\frac{3}{4}\%$ 849 $\frac{8}{15}$ fl. Zins?

28. Wie lange muß ein Capital angelegt bleiben, damit die Zinsen a) zu 4% , b) zu 5% , c) zu 6% eben so viel betragen, als das Capital?

2. Discontrechnung.

§. 141. Wenn Jemand eine Summe Geldes, die er erst nach einer gewissen Zeit ohne Zinsen zu zahlen verpflichtet ist, sogleich bezahlt, so wird er offenbar nicht die volle schuldige Summe entrichten, sondern nur einen so großen Betrag, daß dieser vermehrt um die Zinsen, die er bis zum Zahlungstermine tragen würde, der Schuldsomme gleich wird; es muß daher in diesem Falle dem Schuldner ein bestimmter Abzug gewährt werden. Dieser Abzug von der Schuldsomme heißt Discont und wird nach Procenten berechnet. Wenn man den Discont von dem Schuld capitale subtrahiert, so heißt der Rest der bare oder gegenwärtige (auch discountierte) Wert des Capitals.

3. B. Jemand will eine unverzinsliche Schuld von 418 fl., die er nach $1\frac{1}{2}$ Jahren abzutragen hat, sogleich bezahlen; a) wie viel wird ihm bei 6% jährlichen Discont nachgelassen, b) wie groß ist die bare Bezahlung?

Wenn die Barsumme 100 fl. ist, so beträgt bei 6% Zins deren künftiger Wert nach $1\frac{1}{2}$ Jahren 109 fl., und umgekehrt; 109 fl., welche

5. Jemand bietet auf ein Haus 11820 fl. unter der Bedingung, daß er das Geld erst nach 3 Jahren zahlen werde; wie viel fl. ist das Anbot gegenwärtig wert, wenn man 5% Discout rechnet?

6. A soll an B nach 5 Jahren 1245 fl. bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}\%$ Zins nach 2 Jahren zu zahlen?

7. Eine Schuld von 980 fl., zahlbar nach 6 Monaten, wird mit 931 fl. bar bezahlt; wie viel % Discout rechnet man?

8. Jemand leiht 1850 fl. zu 6% aus, zieht aber die jährlichen Zinsen sogleich ab; um wie viel ist dabei der Schuldner, welcher die Zinsen erst nach Ablauf des Jahres zu zahlen hätte, im Nachtheil?

9. A bietet auf ein Landgut 40000 fl. bar, B 44000 fl., wovon er 20000 fl. bar und den Rest nach 2 Jahren zahlen will. Wer bietet am meisten, wenn man $5\frac{3}{4}\%$ Discout rechnet?

10. Jemand kauft einen Weingarten für 8000 fl. mit der Bedingung, daß er 2580 fl. sogleich, 2380 fl. nach einem Jahre und den Rest nach 3 Jahren ohne Zinsenvergütung zahlt; er entschließt sich aber, da der Verkäufer damit zufrieden ist, auch die beiden letzten Posten mit $6\frac{1}{4}\%$ jährlichem Discout sogleich zu entrichten; wie groß ist die ganze Barzahlung?

3. Terminrechnung.

§. 142. Wenn unverzinsliche Geldsummen, welche in verschiedenen Zeitfristen oder Terminen zahlbar sind, auf einmal oder zu anderen als den festgesetzten Terminen abgetragen werden sollen, so nennt man das Verfahren, durch welches ermittelt wird, zu welcher Zeit dieses ohne Nachtheil des Schuldners und des Gläubigers geschehen kann, die Terminrechnung.

Es seien allgemein die Capitalien c' , c'' , c''' , welche bezüglich nach m' , m'' , m''' Zeiträumen (Jahren, Monaten) unverzinslich zu zahlen sind. Alle Zahlungen sollen auf einmal geleistet werden, und t sei die Anzahl der Zeiträume, nach welchen dieses zu geschehen hat.

Damit weder dem Schuldner noch dem Gläubiger dadurch ein Schaden erwachse, muß der bare Wert der ganzen Zahlung der Summe der baren Werte der einzelnen Theilzahlungen gleich sein. Zur richtigen Bestimmung der Barwerte ist der Discout auf Hundert zu berechnen (Hofmann'sche Methode). In der Praxis wendet man gewöhnlich die minder genaue, aber einfachere Carpzow'sche Methode an, bei welcher man den Discout von Hundert, d. i. die Zinsen zu Grunde legt. Dieses Verfahren beruht dann auf dem Satze: Die Zinsen der ganzen Zahlung $c' + c'' + c'''$ müssen der Summe der Zinsen der einzelnen Terminzahlungen c' , c'' , c''' gleich sein. Nimmt man daher den Zinsfuß zu $p\%$, so muß

$$\frac{(c' + c'' + c''') \text{ pt}}{100} = \frac{c' \text{ pm}'}{100} + \frac{c'' \text{ pm}''}{100} + \frac{c''' \text{ pm}'''}{100},$$

oder, wenn man durch $\frac{p}{100}$ dividirt,

$$(c' + c'' + c''') t = c' m' + c'' m'' + c''' m'''$$

sein. Aus dieser Gleichung kann jede einzelne der in ihr vorkommenden Größen aus den übrigen bestimmt werden.

Gewöhnlich ist t , d. i. der mittlere Zahlungstermin, zu suchen. Man erhält aus der obigen Gleichung

$$t = \frac{c' m' + c'' m'' + c''' m'''}{c' + c'' + c'''},$$

d. h. der mittlere Zahlungstermin mehrerer Terminzahlungen wird berechnet, indem man jede Terminzahlung mit der Zahl der Zeiträume, nach welchen sie geleistet werden soll, multiplicirt und die Summe dieser Producte durch die Summe aller Terminzahlungen dividirt.

3. B. A hat ein Haus um 8000 fl. unter der Bedingung gekauft, daß die Zahlung in mehreren Terminen ohne Zins und zwar in folgender Weise geleistet werden soll: 3500 fl. nach 2 Monaten, 2000 fl. nach 3 Monaten, 1500 fl. nach 4 Monaten und 1000 fl. nach 5 Monaten; wann ist der mittlere Termin für die Gesamtzahlung?

3500 fl. nach 2 Mon. . . .	7000
2000 " " 3 " . . .	6000
1500 " " 4 " . . .	6000
1000 " " 5 " . . .	5000
<u>8000</u>	<u>24000</u> : 8000 = 3 Mon.

Mache die Zinsenprobe.

Zusatz. Sind die Terminzahlungen einander gleich, und zwar jede = c , so ist der mittlere Termin

$$t = \frac{cm' + cm'' + cm'''}{3c} = \frac{m' + m'' + m'''}{3},$$

also die Durchschnittszahl der einzelnen Zeiträume.

§. 143. Sind die Capitalien c' , c'' , c''' bezüglich nach m' , m'' , m''' Zeiträumen zu zahlen, und wird statt dessen das Capital k' nach n' , das Capital k'' nach n'' Zeiträumen gezahlt, so entsteht die Frage, nach wie vielen Zeiträumen der Rest $(c' + c'' + c''') - (k' + k'') = r$ zu zahlen ist, so daß weder dem Schuldner noch dem Gläubiger ein Nachtheil erwachse.

Nennt man t die Anzahl dieser Zeiträume, so muß, analog wie in §. 142, für einen beliebigen Procentsatz p

$$\frac{k'pn'}{100} + \frac{k''pn''}{100} + \frac{rpt}{100} = \frac{c'pm'}{100} + \frac{c''pm''}{100} + \frac{c'''pm'''}{100},$$

oder

$$k'n' + k''n'' + rt = c'm' + c''m'' + c'''m'''$$

sein. Aus dieser Gleichung folgt

$$t = \frac{(c'm' + c''m'' + c'''m''') - (k'n' + k''n'')}{r}.$$

3. B. A hat nach 3 Jahren 300 fl., nach 4 Jahren 500 fl. und nach 5 Jahren 600 fl. zu zahlen; er zahlt jedoch schon nach 2 Jahren 400 fl. und nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 600 fl.; wann wird der Rest fällig sein?

300 fl. . 3 = 900 fl.	400 fl. . 2 = 800 fl.
500 " . 4 = 2000 "	600 " . $2\frac{1}{2}$ = 1500 "
600 " . 5 = 3000 "	1000 fl. = 2300
1400 fl.	5900 fl.
1000 "	2300 "

Rest 400 fl. 3600 fl. : 400 fl. = 9.

Der Rest von 400 fl. wird also nach 9 Jahren, von Beginne an gerechnet, zu zahlen sein.

Aufgaben.

1.* Vier Capitalien von je 600 fl. sind nach 4, 5, 7, 8 Monaten zahlbar; nach wie viel Monaten können sie auf einmal gezahlt werden?

2.* 4800 fl. sollen in drei gleichen Raten nach 2, $2\frac{1}{2}$ und 3 Jahren abgetragen werden; wann kann die Zahlung der ganzen Summe erfolgen?

3.* Jemand ist verpflichtet 1200 fl. so zu zahlen, daß er nach je 3 Monaten 300 fl. abtrage; wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

4. Eine Summe von 10000 fl. ist in 4 Raten zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 8 Monaten und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt wird, wann soll dieses geschehen? (Zinsenprobe.)

5. Wann müssen 1800 fl. auf einmal bezahlt werden, wenn man 300 fl. nach 1 Jahr, 400 fl. nach $1\frac{1}{4}$ Jahr, 500 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Jahren und den Rest nach $3\frac{1}{2}$ Jahren ohne Zins zu zahlen schuldig ist?

6. Jemand hat 20000 fl. so zu entrichten, daß er 4000 fl. sogleich, 4000 fl. nach 3 Monaten, 5000 fl. nach 6 Monaten und den Rest nach 10 Monaten bezahlt; er wünscht nun die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; nach wie viel Monaten wird dieses geschehen müssen?

7. A hat an B drei Capitalien zu zahlen: 1600 fl. am 1. Juli, 1400 fl. am 1. September, 1000 fl. am 1. November; wann kann er die drei Capitalien zugleich zahlen?

Als Ausgangspunkt wird der 1. Juli angenommen.

8. A soll 2000 fl. nach 2 Jahren und 1600 fl. nach 4 Jahren ohne Zinsen zahlen; er bezahlt 2400 fl. schon nach $1\frac{1}{6}$ Jahr; wann muß er dann den Rest bezahlen?

9. Jemand hat nach 8 Monaten 3000 fl. zu bezahlen; er zahlt 1800 fl. bar; wie lange darf er den Rest behalten?

10. A hat 800 fl. nach 2 Monaten, 500 fl. nach 3 Monaten und 600 fl. nach 4 Monaten zu zahlen; er bezahlt die 800 fl. nach 1 Monate, die 500 fl. nach $3\frac{1}{2}$ Monaten; wann muß er dann die 800 fl. berichtigen?

11. Jemand soll am 20. März 1500 fl., am 25. Juni 2000 fl. und am 30. September 1200 fl. zahlen; er zahlt aber am 1. März 1000 fl., am 25. Mai 800 fl. und am 15. August 1600 fl.; wann muß er den Rest zahlen?

4. Zinseszinsrechnung.

§. 144. Wenn der Zins am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Capital geschlagen, und die so vermehrte Summe von neuem verzinst wird, so nennt man die daraus hervorgehenden Interessen Zinseszinsen, während die gewöhnlichen Zinsen einfache genannt werden.

Bei den Zinseszinsrechnungen kommt, wie bei der einfachen Zinsrechnung, das Capital, die Zeit, das Procent und der Zins in Betracht. Als Zeitperiode der Verzinsung ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ein Jahr zu verstehen. Ist ein Capital zu $p\%$ angelegt, so wachsen 100 Einheiten des Capitals (Gulden, Mark) in einem Jahre sammt den Zinsen auf $100 + p$ an; somit hat 1 Capitalseinheit nach 1 Jahre mit Hinzufügung der Zinsen den Wert $\frac{100 + p}{100}$

$= 1 + \frac{p}{100}$. Den Wert $1 + \frac{p}{100}$ zu welchem die Einheit des Capitals mit Zinsen in 1 Jahre anwächst, nennt man gewöhnlich den Zinsfuß. Für 4% ist also der Zinsfuß $1 + \frac{4}{100} = 1.04$.

§. 145. Ein Capital a ist zu $p\%$ auf Zinseszinsen angelegt; zu welchem Werte wächst es nach p Jahren an?

Da die Capitalseinheit mit den Zinsen nach 1 Jahre den Wert $1 + \frac{p}{100}$ erhält, so hat das Capital a nach 1 Jahre den Wert

$$e_1 = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

d. h. man findet den Wert eines Capitals nach 1 Jahre, indem man den Anfangswert mit dem Zinsfuße multipliciert.

n	2%	2½%	3%	4%	5%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·131408	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·159693	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1·979932
15	1·345868	1·448298	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·521618	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·638616	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·679582	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·721571	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·764611	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	1·808726	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	1·853944	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	1·900293	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	1·947800	2·221289	2·883369	3·733456
28	1·741024	1·996495	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·046407	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·097568	2·427262	3·243398	4·321942

Beispiele.

1) Wie viel werden 5800 fl. zu 3% Zinsseszins bei ganzjähriger Capitalisierung nach 20 Jahren wert sein?

$$5800 \cdot (1.03)^{20} = 5800 \cdot 1.806111 = 10475.44 \text{ fl.}$$

2) Wie hoch wird ein zu 4% Zins von Zins angelegtes Capital von 1234 fl. in 7 Jahren bei halbjähriger Capitalisation anwachsen?

Hier sind 14 Halbjahre und das halbjährige Procent, nämlich 2%, in Rechnung zu bringen; man hat also

$$1234 \cdot (1.02)^{14} = 1234 \cdot 1.319479 = 1628.24 \text{ fl.}$$

§. 146. Ist umgekehrt der Wert eines Capitals vor einer gegebenen Zeit mit Rücksicht auf Zinsseszinsen zu bestimmen, d. i. aus dem Endcapitale das Anfangscapital zu berechnen, so ergibt sich aus der Formel

$$e_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ sofort}$$

$$a = \frac{e_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = e_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n};$$

d. h. Das Anfangscapital ist gleich dem Quotienten aus dem Endcapital und der sovielten Potenz des Zinsfußes, als die Zahl der Zeitperioden anzeigt, oder gleich dem Producte aus dem Endcapital und dem umgekehrten Werte dieser Potenz.

So find 2000 fl. bei 5% Zinseszins vor 12 Jahren wert

$$2000 \cdot \frac{1}{(1.05)^{12}} \text{ fl.}$$

Die bereits berechneten umgekehrten Werte der Potenzen des Zinsfußes für 2, 2½, 3, 4, 5% und für n = 1, 2, 3, . . . 29, 30 enthält die nachstehende Tabelle:

n	2%	2½%	3%	4%	5%
1	0.980392	0.975610	0.970874	0.961538	0.952381
2	0.961169	0.951814	0.942596	0.924556	0.907029
3	0.942322	0.928599	0.915142	0.888996	0.863838
4	0.923845	0.905951	0.888487	0.854804	0.822702
5	0.905731	0.883854	0.862609	0.821927	0.783526
6	0.887971	0.862297	0.837484	0.790315	0.746215
7	0.870560	0.841265	0.813092	0.759918	0.710681
8	0.853490	0.820747	0.789409	0.730690	0.676839
9	0.836755	0.800728	0.766417	0.702587	0.644609
10	0.820348	0.781198	0.744094	0.675564	0.613913
11	0.804263	0.762145	0.722421	0.649581	0.584679
12	0.788493	0.743556	0.701380	0.624597	0.556837
13	0.773033	0.725420	0.680951	0.600574	0.530321
14	0.757875	0.707727	0.661118	0.577475	0.505068
15	0.743015	0.690466	0.641862	0.555265	0.481017
16	0.728446	0.673625	0.623167	0.533908	0.458112
17	0.714163	0.657195	0.605016	0.513373	0.436297
18	0.700159	0.641166	0.587395	0.493628	0.415521
19	0.686431	0.625528	0.570286	0.474642	0.395734
20	0.672971	0.610271	0.553676	0.456387	0.376889
21	0.659776	0.595386	0.537549	0.438834	0.358942
22	0.646839	0.580865	0.521893	0.421955	0.341850
23	0.634156	0.566697	0.506692	0.405726	0.325571
24	0.621722	0.552875	0.491934	0.390121	0.310068
25	0.609531	0.539391	0.477606	0.375117	0.295303
26	0.597579	0.526235	0.463695	0.360689	0.281241
27	0.585862	0.513400	0.450189	0.346817	0.267848
28	0.574375	0.500878	0.437077	0.333477	0.255094
29	0.563112	0.488661	0.424346	0.320651	0.242946
30	0.552071	0.476743	0.411987	0.308319	0.231377

Beispiele.

1) Welchen Wert haben fl. 7310 „ 75 vor 15 Jahren, 5% Zinseszins und ganzjährige Capitalisierung vorausgesetzt?

$$7310.75 \cdot \frac{1}{(1.05)^{15}} = 7310.75 \cdot 0.481017 = 3516.6 \text{ fl.}$$

2) Wie viel Capital muß man zu 4% Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 fl. anwachse?

$$5200 \cdot \frac{1}{(1.02)^{24}} = 5200 \cdot 0.621722 = 3232.95 \text{ fl.}$$

Zusatz. Die in §§. 145 und 146 für Zinseszinsen abgeleiteten Formeln können auch auf andere Größen, wenn dieselben in einem beständigen Verhältnisse wachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes eines Waldes u. dgl., angewendet werden.

Aufgaben.

1. Zu welcher Summe wachsen 1350 fl. zu 4% Zinseszinsen in 24 Jahren an?

2. Welche Summen erhält man bei Zinseszinsen für folgende Capitalien?

a) 3280 fl. à 5% in 15 Jahren?

b) 6340 „ à 4% „ 22 „

c) 5165 „ à 3% „ 28 „

3. Jemand hat in der Sparcasse ein Capital von 4600 fl. Wenn nun die Sparcasse mit 5% jährlich verzinst, und die Zinsen halbjährig zum Capitale schlägt, welchen Wert wird jenes Capital nach 11 Jahren haben?

4. Jemand legt 3560 fl. zu 4% unter der Bedingung an, daß die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden; wie hoch wird das Capital in 10 Jahren anwachsen?

5. Der Bestand eines Waldes ist gegenwärtig 9800 Cubikmeter; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?

6. Eine Stadt hatte im Jahre 1850 35846 Einwohner; wie groß ist die Bevölkerung derselben im Jahre 1875 bei einer jährlichen Zunahme von $2\frac{1}{2}\%$?

7. Jemand ist verpflichtet, 3000 fl. nach 1 Jahre, 2000 fl. nach 2 Jahren, 1000 fl. nach 3 Jahren und 4000 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren wert sein, wenn man 5% Zinseszins rechnet und wenn die Capitalisierung ganzjährig geschieht?

8. Jemand legt zu Anfang jedes halben Jahres durch 4 Jahre hinter einander 140 fl. in eine Sparcasse, bei welcher halbjährige Capitalisierung mit 2% stattfindet; wie groß ist sein Ersparnis nach dieser Zeit?

9. Welchen Wert haben 2485 fl. vor 5 Jahren, wenn man 5% Zinsezins und ganzjährige Capitalisierung rechnet?

10. Welchen gegenwärtigen Wert haben 8500 fl., fällig nach 9 Jahren, bei 4% Zinsezins und ganzjähriger Verzinsung?

11. Berechne den gegenwärtigen Wert folgender Capitalien:

a) 750 fl. à 3%, fällig nach 25 Jahren;

b) 4060 „ à 4%, „ „ 17 „

c) 6372 „ à 5%, „ „ 12 „

12. Welche Summe ist à 4% Zinsezins angelegt worden, wenn man dafür nach 7 Jahren 4711.03 fl. erhalten hatte?

13. Welches Capital wächst bei 5% halbjähriger Verzinsung in 20 Jahren auf 8000 fl. an?

14. Ein Land zählt gegenwärtig 1258750 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 25 Jahren, wenn dieselbe jährlich um $2\frac{1}{2}\%$ zunahm?

15. Jemand will ein Grundstück verkaufen. A bietet ihm 3600 fl. bar, B 4250 fl. ohne Zins nach 2 Jahren zahlbar, C 4310 fl. ohne Zins nach 3 Jahren zahlbar. Welches Anerbieten stellt sich bei 5% ganzjähriger Verzinsung als das vortheilhafteste für den Verkäufer heraus?

Um die Angebote mit einander vergleichen zu können, müssen sie alle auf dieselbe Zeit reducirt werden; man wird entweder den gegenwärtigen Wert aller drei Angebote, oder ihren Wert nach 3 Jahren zu suchen haben.

16. Jemand will durch 3 Jahre eine jährliche Summe (Jahresrente) von 1000 fl. beziehen; wie viel Capital muß er zu diesem Ende anlegen, wenn die Zinsezinsen ganzjährig zu 5% angelegt werden?

17. A will dem B eine Geldsumme geben, damit ihm dieser durch 5 Jahre am Ende eines jeden Jahres 586 fl. auszahle; wie groß wird jene Summe bei 4% Zinsezins und ganzjähriger Capitalisierung sein müssen?

18. Jemand übernimmt ein Haus mit der Verpflichtung, dem bisherigen Besitzer 15 Jahre hintereinander eine nachschußweise Rente von 600 fl. auszuzahlen; wie hoch wurde das Haus veranschlagt, wenn 5% Zinsezinsen gerechnet werden?

III. Die Theilregel.

§. 147. Wenn eine gegebene Zahl in mehrere Theile, welche sich wie andere gegebene Zahlen verhalten, getheilt werden soll, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche das Verhältniß der Theile ausgedrückt wird, heißen Verhältniszahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so wird die einfache; sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

§. 148. Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu vertheilende Zahl, a , b und c die Verhältniszahlen. Nennt man die noch unbekannten Theile x , y und z , so muß

$$\begin{aligned} x : y &= a : b \text{ und } y : z = b : c, \text{ oder} \\ x : a &= y : b \text{ und } y : b = z : c, \text{ daher} \\ x : a &= y : b = z : c \end{aligned}$$

sein. Nach §. 119, Zusatz ist dann

$$\begin{aligned} (x + y + z) : (a + b + c) &= x : a \\ &= y : b \\ &= z : c. \end{aligned}$$

Da nun $x + y + z = s$ sein muß, so hat man

$$s : (a + b + c) = x : a, \text{ daher } x = \frac{s}{a + b + c} \cdot a$$

$$s : (a + b + c) = y : b, \quad " \quad y = \frac{s}{a + b + c} \cdot b$$

$$s : (a + b + c) = z : c, \quad " \quad z = \frac{s}{a + b + c} \cdot c.$$

Bei der einfachen Theilregel dividirt man daher die zu vertheilende Zahl durch die Summe aller Verhältniszahlen und multiplicirt den Quotienten mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Wenn die Verhältniszahlen Brüche enthalten, so werden sie zuerst in ganzen Zahlen dargestellt, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplicirt. Haben alle Verhältniszahlen ein gemeinschaftliches Maß, so werden sie dadurch abgekürzt.

3. B. Es sollen 5610 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ unter A, B, C, D vertheilt werden.

A $\frac{1}{2}$	6;	170 . 6 = 1020 fl. erhält A
B $\frac{2}{3}$	8;	170 . 8 = 1360 " " B
C $\frac{3}{5}$	9;	170 . 9 = 1530 " " C
D $\frac{5}{6}$	10;	170 . 10 = 1700 " " D

$$5610 : 33 = 170$$

5610 fl. zusammen.

Auf dieselbe praktische Regel wird man auch durch die Schlussrechnung geleitet.

Es seien 3. B. 640 fl. unter drei Personen A, B, C nach dem Verhältnisse der Zahlen 9, 7 und 4 zu theilen; wie viel entfällt auf jede Person?

Auf A kommen 9, auf B 7 und auf C 4, also auf alle zusammen 20 gleiche Theile; der 20ste Theil von 640 fl. sind 32 fl.; somit bekommt

$$A \text{ 9mal } 32 \text{ fl.} = 288 \text{ fl.}$$

$$B \text{ 7mal } 32 \text{ " } = 224 \text{ "}$$

$$C \text{ 4mal } 32 \text{ " } = 128 \text{ "}$$

Diese Schlussweise wird insbesondere beim Kopfrechnen angewendet.

§. 149. Jede zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung kann auf eine einfache zurückgeführt werden.

3. B. Drei Kaufleute sind mit einander in Gesellschaft getreten und haben zusammen 2300 fl. gewonnen; wenn nun A 2000 fl. durch 8 Monate, B 4000 fl. durch 6 Monate, C 5000 fl. durch 5 Monate in dem Geschäftsfonde liegen ließ, wie viel von dem Gewinne wird jeder erhalten?

Hier hängen die Antheile am Gewinne nicht bloß von der Einlage, sondern auch von der Zeit ab. Es ist jedoch gleichviel,

ob A 2000 fl. 8 Monate oder 16000 fl. 1 Monat

" B 4000 " 6 " " 24000 " 1 "

" C 8000 " 5 " " 40000 " 1 "

in dem Fonde liegen läßt. Da nun im zweiten Falle die Zeit für alle drei Antheile gleich ist, so hängen dieselben nur von den zu dieser Zeit gehörigen Einlagen, nämlich den Producten 16000 fl., 24000 fl. und 40000 fl. ab, welche daher als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet werden. Die Rechnung steht:

A 2000 fl. 8 Mon.	16000	2	230 . 2 =	460 fl.
B 4000 " 6 "	24000	3	230 . 3 =	690 "
C 8000 " 5 "	40000	5	230 . 5 =	1150 "
	2800	: 10 =	230	2300 fl.

Bei der zusammengesetzten Theilregel multipliciert man daher die auf denselben Theil Bezug habenden Verhältniszahlen mit einander, und betrachtet die Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Theilregel, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Aufgaben.

1.* 175 fl. sollen unter A und B so vertheilt werden, daß A 2, B 3 Theile von gleicher Größe erhalte; wie viel wird jeder erhalten?

2.* Die Zahl 160 soll in zwei Theile getheilt werden, welche sich verhalten wie 7 : 9; wie heißen diese Theile?

3.* Vier Personen nehmen ein Lotterielos; dazu gibt A 50 fr., B 1 fl., C 1 fl. 50 fr., D 2 fl. Sie gewinnen damit 8000 fl.; wie viel bekommt jeder?

4. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäft gibt A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest. Sie gewinnen zusammen 240 fl.; wie viel erhält jeder?

5. Zu weißem Glas nimmt man 13 Theile Quarz, 4 Theile Pottasche und 1 Theil Kreide; wie viel muß man von jedem zu einer Glasmasse von 125 Kg. nehmen?

6. Für die Versendung von 2133 Kg. Kaffee, 1735 Kg. Zucker und 923 Kg. Pfeffer werden 65 fl. 30 fr. Fracht gezahlt; wie viel kommt auf jeden dieser Artikel?

7. Ein Kaufmann ist schuldig: an A 2000 fl., an B 3200 fl. an C 1200 fl., an D 2800 fl., an E 4600 fl.; sein Vermögen besteht aber nur in 8625 fl.; wie viel wird jeder Gläubiger bei der Theilung erhalten und wie viel Procent verliert jeder?

8. Es sollen 67270 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{13}{60}$ unter A, B, C, D und E getheilt werden; wie viel kommt auf jede Person?

9. Jemand hinterläßt ein Vermögen von 15845 fl., welches unter seine drei Erben so vertheilt werden soll, daß A 2mal so viel als B und B 3mal so viel als C bekommt; wie viel bekommt jeder Erbe?

10. Drei Personen sollen 9150 fl. so unter einander theilen, daß A so oft 5 fl. als B 3 fl., und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel bekommt jede Person?

11. Drei Kaufleute kaufen eine Partie Ware und verkaufen dieselbe mit 15% Gewinn, den sie nach Verhältnis ihrer Einlage unter sich theilen; A erhielt vom Gewinn 810 fl., B 350 fl. und C 220 fl.; wie viel hat jeder eingelegt?

12. Bei Auflösung eines Geschäftes, wozu drei Geschäftsleute 16000 fl. zusammengeschlossen hatten, erhielt A 5400 fl., B 6200 fl., C 8400 fl.; wie viel hat jeder eingezahlt, und wie viel % wurde gewonnen?

13. Drei Personen handeln auf gemeinschaftlichen Gewinn. A legt ein 1500 fl. auf ein Jahr, B 1200 fl. auf 6 Monate, C 1000 fl. auf 8 Monate; sie gewinnen 960 fl.; wie viel erhält jeder davon?

14. Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 500 fl. Aus der Gemeinde A arbeiten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jenem Lohne wird jede der drei Gemeinden haben?

15. A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 fl.; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 fl. bei, und noch zwei Monate später gesellt sich auch C mit 3000 fl. dazu. Beim Jahresabschlusse zeigt sich ein Gewinn von 1059 fl.; wie viel bekommt jeder davon?

16. Zu einem Geschäftes, welches einen Fond von 9000 fl. forderte, gab A $\frac{1}{3}$ auf 10 Monate, B $\frac{4}{9}$ auf 8 Monate, C den Rest auf 6 Monate; der Rechnungsabschlusse zeigte einen Gewinn von 629 fl.; wie mußte dieser vertheilt werden?

17. A beginnt am 1. Jänner ein Geschäft mit 8000 fl. Capital, am 1. Mai tritt B mit 5000 fl., und am 1. Juli C mit 6000 fl. bei; wenn sich nun am Ende December ein Gewinn von 1180 fl. 33 kr. ergibt, wie viel gebührt davon jedem der Theilnehmer?

IV. Die Mischungsrechnung.

§. 150. Häufig werden gleichartige Stoffe, die jedoch an Wert oder Gehalt verschieden sind, mit einander gemischt (gemengt), um eine Mischungsorte von mittlerem Werte zu erhalten. Dabei kommen folgende Größen zur Betrachtung: 1) die Menge der einzelnen Bestandtheile, 2) der Wert derselben, und 3) der Wert der Mischung.

Die Rechnung, welche diese Größen aus einander herleitet, wird im allgemeinen die Mischungsrechnung genannt. Sie enthält sehr mannigfache Aufgaben, von denen die zwei folgenden von besonderer praktischer Wichtigkeit sind:

1. Es ist der Wert der Einheit einer Mischung zu suchen, welche aus gleichartigen Stoffen von verschiedenem Werte hergestellt wird. Die Rechnung heißt die Durchschnittsrechnung.

2. Es ist das Verhältniß zu finden, in welchem zwei gleichartige Stoffe von verschiedenem Werte mit einander verbunden werden müssen, um eine Mischung von bestimmtem Mittelwerte zu erhalten. Die Mischungsrechnung heißt in diesem Falle eine Alligationsrechnung.

§. 151. 1. Die Durchschnittsrechnung beruht auf ganz einfachen Schlüssen.

3. B. Ein Kaufmann mischt dreierlei Kaffee: 6 Kg. à 1.32 fl., 8 Kg. à 1.20 fl. und 10 Kg. à 1.08 fl.; wie viel kostet 1 Kg. der Mischung?

6 Kg. à 1.32 fl.	kosten	7.92 fl.
8 " à 1.20 "		9.60 "
10 " à 1.08 "		10.80 "
24 Kg. der Mischung		<u>28.32 fl.</u>
also kostet 1 Kg.		1.18 fl.

2. Dagegen tritt bei der Alligationsrechnung eine besondere Art von Schlüssen auf, die wir an der folgenden Aufgabe näher erläutern wollen.

Ein Weinhändler will Wein zu 20 fl. pr. Hektoliter haben, er hat aber nur Weine zu 16 fl. und zu 30 fl.; in welchem Verhältnisse muß er diese beiden Gattungen mischen, damit 1 Hektoliter der Mischung gerade den Preis von 20 fl. erhalte?

Ein Hektoliter der besseren Sorte kostet $30 - 20 = 10$ fl. mehr, 1 Hektoliter der schlechteren Sorte $20 - 16 = 4$ fl. weniger, als 1 Hektoliter der Mischung. Man wird also beim Verkaufe der Mischung an 4 Hektolitern der besseren Sorte, welche darin vorkommen, eben so viel verlieren, als an 10 Hektolitern der schlechteren Sorte gewonnen wird, nämlich $4 \times 10 = 40$ fl. Man muß daher, damit sich der Verlust und der Gewinn ausgleichen, je 4 Hektoliter der besseren Sorte mit 10 Hektolitern der schlechteren, d. h. man muß die bessere Sorte mit der geringeren in dem Verhältnisse 4 : 10 oder 2 : 5 mischen.

Der schriftliche Ansatz steht so

	30	4	2
20			
	16	10	5

Es seien allgemein zwei gleichartige Stoffe A und B, von welchen die Einheit bezüglich den Wert a und b hat. In welchem Verhältnisse muß man sie mischen, wenn die Einheit der Mischung den Mittelwert m haben soll, wobei $a > m > b$ vorausgesetzt wird?

Bezeichnet x die Anzahl Einheiten, welche man von dem Stoffe A, und y die Anzahl Einheiten, welche man von dem Stoffe B nehmen muß, so ist, da die Werte der zur Mischung verwendeten Stoffe zusammen dem Werte der Mischung gleich sein müssen,

$$x \cdot a + y \cdot b = (x + y) \cdot m, \text{ folglich}$$

$$x(a - m) = y(m - b), \text{ oder}$$

$$x : y = (m - b) : (a - m);$$

d. h.: Die von dem besseren Stoffe zu nehmende Menge verhält sich zu der von dem schlechteren Stoffe zu nehmenden Menge, wie die Differenz des mittleren und geringeren Wertes zur Differenz des höheren und mittleren Wertes.

Ansatz:

	a	m — b
m		
	b	a — m.

Ist auch die Quantität der Mischung gegeben, so wird die weitere Rechnung nach der Theilregel ausgeführt.

Aufgaben.

1.* Jemand mischt 1 Liter Wein zu 36 fr., 1 Liter zu 40 fr. und 1 Liter zu 56 fr. zusammen; wie viel ist 1 Liter der Mischung wert?

2.* An einem Tage zeigte das Thermometer des Morgens 16° , um Mittag 22° , des Abends 13° ; wie groß war die mittlere Temperatur dieses Tages?

3. Ein Gut gibt in 5 auf einander folgenden Jahren 2565 fl. 24 fr., 2844 fl. 64 fr., 2085 fl. 38 fr., 2633 fl., 2408 fl. 84 fr. reinen Ertrag; wie groß ist der jährliche Durchschnittsertrag?

4.* Was ist ein Liter der Mischung wert, wenn unter 5 Liter à 34 fr. und 4 Liter à 40 fr. 1 Liter Wasser gemischt wird?

5. Ein Weinwirt mischt 4 Hektoliter Wein à 24 fl., 3 Hektoliter à 28 fl. und 5 Hektoliter à 30 fl.; wie viel ist 1 Hektoliter des so gemischten Weines wert?

6. Jemand mischt 39 Liter Spiritus à 40 Grad mit 26 Liter à 30 Grad; welchen Gehalt hat die Mischung?

7. Jemand hat 3600 fl. à $4\frac{3}{4}\%$, 4500 à 5% und 1900 fl. à 6% ausgeliehen; zu wie viel $\%$ müßte die Summe aller drei Capitalien ausgeliehen werden, um gleich viel Zinsen zu erhalten?

8.* Ein Kaufmann hat 2 Sorten Reis, das Kg. zu 35 fr. und zu 28 fr.; er will aus beiden eine dritte Sorte mischen, von welcher das Kg. 32 fr. kosten soll; in welchem Verhältnisse muß er die beiden Sorten mischen?

9.* In welchem Verhältnisse muß man Spiritus à 60 Grad und à 45 Grad mischen, um Spiritus à 50 Grad zu erhalten?

10. Aus 800- und 600tausendtheiligem Silber soll 720tausendtheiliges legiert werden; welches ist das Mischungsverhältnis?

11. Wie viel Liter Wein à 36 fr. und wie viel à 56 fr. muß man mischen, um 100 Liter à 42 fr. zu erhalten?

12. Jemand will Spiritus à 90° und à 56° zusammengießen, um 720 Liter à 70° zu erhalten; wie viel Liter muß er von jeder Sorte nehmen?

13. Feines Silber (1000 Tausendtheile fein) und 640 Tsdth. feines Silber sollen zu Silber von 750 Tsdth. Gehalt eingeschmolzen werden; wie viel von jedem Bestandtheile kommt auf 24 Kg.?

14. Ein Goldschmied braucht zu einer Arbeit $\frac{3}{10}$ Kg. Gold à 700 Tausendth.; er will solches aus Gold von 650 und 900 Tsdth. Gehalt herstellen; wie viel muß er von jedem nehmen?

15. Ein Getreidehändler hat zweierlei Korn; von der besseren Sorte gilt das Hektoliter 6 fl. 60 fr., von der schlechteren 6 fl. 20 fr.; er will nun 42 Hektoliter so mischen, daß er jedes Hektoliter um 6 fl. 36 fr. verkaufen kann; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

16. Wie viel Kg. à 18 fr. muß man zu 564 Kg. à 32 fr. setzen, damit das Kg. der Mischung auf 24 fr. komme?

17. Wie viel Kupfer muß zu 3 Kg. Gold, das 850 Tausendtheile fein ist, zugesetzt werden, damit ein Feingehalt von 700 Tausendtheilen erzielt werde?

V. Die Kettenrechnung.

§. 152. Wenn die Beziehung zwischen zwei Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch eine zusammenhängende Aufstellung bekannter Zwischenbestimmungen gesucht werden muß, so wendet man die Kettenrechnung an.

Um dieses Rechnungsverfahren abzuleiten, wählen wir folgendes Beispiel:

Wie viel Kreuzer ö. W. kosten 4 Dekagramm einer Ware, von welcher $7\frac{1}{2}$ Kg. auf 75 Francs kommen?

Um hier den zu 4 Defagr. gehörigen Preis in Kr. ö. W. zu finden, muß man nebst der Angabe, daß $7\frac{1}{2}$ Kg. 75 Franks kosten, noch folgende Mittelbestimmungen zu Hilfe nehmen: 1 Kg. hat 100 Defagr., $2\frac{1}{2}$ Franks gelten 100 Kr. ö. W.; und die vollständige Aufgabe läßt sich dann in folgende Kettenverbindung bringen:

x Kr. ö. W. kosten 4 Defagramm,
wenn 100 Defagramm . . . 1 Kg. machen,
wenn $7\frac{1}{2}$ Kg. 75 Franks kosten,
und wenn $2\frac{1}{2}$ Franks . . . 100 Kr. ö. W. gelten?

Die Aufgabe zerfällt in folgende drei Aufgaben:

a) Wie viel (y) Kg. sind 4 Defagr., wenn 100 Defagr. 1 Kg. sind? Zur Bestimmung von y hat man

y Kg. 4 Def. y : 1 = 4 : 100.
1 " 100 "

b) Wie viel (z) Franks kosten y Kg., wenn $7\frac{1}{2}$ Kg. 75 Franks kosten? Zur Bestimmung von z hat man

z Franks y Kg. z : 75 = y : $7\frac{1}{2}$.
75 " $7\frac{1}{2}$ "

c) Wie viel (x) Kr. ö. W. sind z Franks, wenn $2\frac{1}{2}$ Franks 100 Kr. ö. W. gelten? Zur Bestimmung von x hat man

x Kr. ö. W. z Franks x : 100 = z : $2\frac{1}{2}$.
100 " " " $2\frac{1}{2}$ "

Multipliziert man in den erhaltenen drei Proportionen die gleichstelligen Glieder mit einander, so ergibt sich

$$\begin{aligned} yzx : 1 \cdot 75 \cdot 100 &= 4yz : 100 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}, \text{ oder} \\ x : 1 \cdot 75 \cdot 100 &= 4 : 100 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}; \text{ folglich} \\ x &= \frac{4 \cdot 1 \cdot 75 \cdot 100}{100 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = 16 \text{ Kr. ö. W.} \end{aligned}$$

Aus dem oben angegebenen Ansätze der Aufgabe und dem hier für x erhaltenen Ausdrucke ergibt sich daher für die Kettenrechnung folgendes praktisches Verfahren:

1. Man ziehe einen verticalen Strich, schreibe links neben denselben x mit der Benennung an und rechts die gegebene Größe, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Wert hat. Darunter setze man alle Mittelbeziehungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden rechts von gleicher Art ist; rechts neben jede Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichwertig ist. So wird fortgefahren, bis man rechts eine Größe erhält, die mit x gleichnamig ist.

2. Man dividire das Product aller rechts stehenden unbenannten Zahlen durch das Product aller links unter x stehenden; der Quotient gibt den gesuchten Wert von x.

3. B. Wenn in England 1 Quarter Weizen 52 Shilling kostet, welches ist der entsprechende Preis für 1 Hektoliter in fl. ö. W.? (11 Quarter = 32 Hektoliter, 20 Shilling = 1 Pfund Sterling, 10 Pfd. Sterl. = 112 fl. ö. W.)

Ansatz:

x fl. ö. W.	1 Hektoliter
32 Hektol.	11 Quarter
1 Quarter	52 Shilling
20 Shilling	1 Pfd. Sterl.
10 Pfd. Sterl.	112 fl. ö. W.

$$x = \frac{11 \cdot 52 \cdot 112}{32 \cdot 20 \cdot 10} = 10.01 \text{ fl. ö. W.}$$

Aufgaben.

1. Jemand kauft in Hamburg 3751 $\mathfrak{R}$ Kaffee für 3125 Reichsmark; wie viel in ö. W. kostet ein Kg., wenn 2 Hamb. $\mathfrak{R}$ = 1 Kg., und wenn 100 Mark = 54 fl. ö. W. sind?

2. Wie viel Londoner Str. machen 2534 Kg., wenn 100 Lond. Pfd. = $45\frac{2}{5}$ Kg. und wenn 1 Lond. Str. 112 Lond. Pfund enthält?

3. Wenn eine Eisenbahnschiene von 5 Meter Länge $125\frac{1}{2}$ Kg. wiegt und für 100 Kg. Schienen in Belgien $27\frac{6}{10}$ Franks bezahlt werden; wie viel fl. ö. W. kosten die für 1 Kilometer erforderlichen Schienen? (100 Frks. = 44 fl. ö. W.)

4. Ein österr. Guldenstück enthält 900 Tausendtheile feines Silber; wie viel Gramm wiegt es, wenn 45 Guldenstücke 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

5. Wie viel kosten 455 Kg. Brutto einer Ware, wenn nach Abzug von 10% Tara das Kg. Netto mit 62 Kr. bezahlt wird?

6. Einem Tuchhändler kommen 4 Stück Tuch à 30 Meter beim Einkaufe auf fl. 512; wie theuer wird er das Meter verkaufen, wenn er dabei 15% gewinnen soll, d. i. wenn 100 fl. Einkaufssumme 115 fl. Verkaufssumme geben sollen?

7. Wenn man 923 Kg. einer Ware für 876 fl. einkauft und je 100 Kg. für 87 fl. verkauft; hat man dabei Gewinn oder Verlust und zwar um wie viel Procent?

Man beginnt den Ansatz: x fl. Verkaufssumme geben 100 fl. Einkaufssumme, wenn u. i. w.

8. Wenn man das Hektoliter Wein zu 24 fl. kauft und das Liter um 32 kr. verkauft; wie viel % gewinnt man?

9. Wenn 100 Kg. einer Ware für 87 fl. eingekauft, und überdies 2% Provision gegeben werden, wie theuer muß man das Kg. verkaufen, wenn man $12\frac{1}{2}$ % gewinnen will?

10. Eine Maschine kostet in England 875 Pfund Sterling; die Speesen in London betragen 8%, die Transport- und andere Kosten bis Wien 25% vom Werte der Maschine; wie hoch in ö. W. kommt die Maschine in Wien, wenn 10 Pfund Sterling = 112 fl. ö. W. gerechnet werden?

16. In Smyrna kostet der Cantaro Feigen 272 Piafter, Einkaufs-
spesen daselbst sind $5\frac{1}{2}\%$, Provision $2\frac{1}{2}\%$, Fracht bis Wien, Zoll und andere
Spesen $24\frac{1}{2}\%$; wie hoch in ö. W. stellt sich das Kg. Feigen in Wien,
wenn 1 Cantaro = $56\frac{9}{25}$ Kg. und 100 Piafter = 8·5 fl. ö. W. find?

VI. Die Münzrechnung.

§. 153. An den Münzen unterscheidet man:

1) Das Gepräge d. i. die Inschriften und Abbildungen, welche
auf der Münze erhaben angebracht sind.

2) Das Metall, aus welchem die Münze geprägt ist. Zu den
niederen Scheidemünzen wird vorzugsweise Kupfer verwendet. Wert-
vollere Geldstücke bestehen aus Silber oder Gold, welche, um bei ihrer
Weichheit dem Abschleifen im Verkehr minder ausgesetzt zu sein, legiert
werden d. i. einen Zusatz von härteren Metallen, gewöhnlich von Kupfer,
erhalten.

3) Das Gewicht. Das ganze Gewicht einer Münze heißt das
Schrot derselben, das Gewicht des darin enthaltenen feinen Metalls
das Korn. Als Münzgewicht dient in Oesterreich-Ungarn das
Kilogramm mit seinen Unterabtheilungen.

Früher wurde die kölnische Mark = 233·87 Gramm, wie auch die Wiener
Mark = 280·67 Gramm, und seit 1857 das deutsche Pfund = 500 Gramm als
Münzgewicht gebraucht.

4) Der Feingehalt d. i. das Verhältnis des Kornes einer
Münze zu deren Schrot. Er wird im allgemeinen durch einen Bruch
ausgedrückt, dessen Zähler das Korn, dessen Nenner das Schrot ist.
In Oesterreich-Ungarn, in Deutschland und in den meisten
Staaten geschieht diese Angabe in Tausendtheilen; z. B. der Fein-
gehalt der österreichischen Guldenstücke ist $\frac{900}{1000}$ oder 0·900, heißt: in
1000 Gewichtstheilen eines Guldens (Schrot) sind 900 Theile feines
Silber (Korn) und 100 Theile Kupfer als Zusatz enthalten; man sagt auch
kürzer: die Gulden sind $\frac{9}{10}$ fein.

Früher wurde in Oesterreich und in Deutschland der Feingehalt bei
Silbermünzen in Loth, bei Goldmünzen in Karat angegeben, wobei man die Mark
beim Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Golde in 24 Karat à 12 Grän eintheilte.
z. B. Die alten österreichischen Zwanziger waren $9\frac{1}{2}$ löthig d. i. in 16 Theilen der-
selben waren 9½ Theile feinen Silbers; die kais. Ducaten sind $23\frac{1}{2}$ Karat fein, d. i.
unter 24 Theilen derselben sind $23\frac{1}{2}$ Theile feinen Goldes.

Die gesetzlichen Bestimmungen über Gewicht, Feingehalt, Eintheilung
und Ausprägung der Münzen nennt man Münzfuß.

Man unterscheidet einen dreifachen Wert der Münzen, den inneren,
den gesetzlichen und den Handelswert. Der innere Wert einer
Münze ist der Wert des darin enthaltenen feinen Metalls; der gesetz-
liche Wert ist der von der Regierung bestimmte Wert, zu dem sie im
Lande, wo sie geprägt wurde, allgemein angenommen werden soll; der

Handelswert, auch Courswert, ist der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat. Steht dieser veränderliche Preis, der Cours einer Münze höher als der gesetzliche Wert derselben, so heißt der Mehrbetrag das Agio. In manchen Ländern hat auch das Silbergeld ein Agio gegen das Papiergeld. Wenn z. B. an den österr. Börsen das Silber mit 103 notirt ist, so hat dasselbe 3% Agio, d. h. 100 fl. Silbergeld werden mit 103 fl. in Bank- oder Staatsnoten bezahlt.

Wird in einem Lande der Wert sämtlicher Münzen nach einer bestimmten Silbermünze bestimmt, so sagt man, das Land habe die Silberwährung; liegt dagegen dem Geldsystem eine Goldmünze zu Grunde, so hat das Land die Goldwährung. Letztere besteht z. B. in England, Portugal, in den nordamerikanischen Freistaaten, in der neuesten Zeit auch in Deutschland.

§. 154. Die wichtigsten Goldmünzen sind:

1. Die österr.-ungar. Achtguldenstücke, von denen aus dem Kg. $\frac{9}{10}$ feinen Goldes 155 Stücke ausgeprägt werden. Nach Verhältnis werden auch Vierguldenstücke geprägt.

2. Die Zwanzigfrankstücke in Frankreich, Belgien und in der Schweiz, und die Zwanziglirestücke in Italien; sie stimmen mit den österr. Achtguldenstücken überein; eben so sind die Zehnfrankstücke und Zehnlirestücke den österr. Vierguldenstücken gleich.

3. Die kais. österr. Ducaten; 67 Stück wiegen eine köln. Mark = 233.87 Gramm und enthalten $23\frac{2}{3}$ karatiges Gold.

4. Die deutschen Reichsgoldmünzen und zwar Fünf-, Zehn- und Zwanzigmarkstücke; von den Zehnmarkstücken werden aus dem Pfund = 500 Gramm feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ Stück ausgebracht; der Feingehalt ist $\frac{9}{10}$.

5. Die englischen Sovereigns (Pfund Sterling); aus dem Troypfund = 373.246 Gramm $\frac{11}{12}$ feinen Goldes werden $46\frac{2}{3}$ Stück geprägt.

6. Die russischen Halbmperiale, von denen $62\frac{2}{5}$ Stück ein russisches Pfund = 409.512 Gramm $\frac{11}{12}$ feinen Goldes enthalten.

Die wichtigsten Silbermünzfüße sind:

1. Der Fünfundvierzig-Guldenfuß oder die österreichische Währung. Aus 500 Gramm feinen Silbers werden 45 Gulden ($\frac{9}{10}$ fein) geprägt.

Bis zum Jahre 1857 bestand in Österreich der Zwanzig-Guldenfuß oder der Conventions-Münzfuß, nach welchem aus einer kölnischen Mark von 233.87 Gramm feinen Silbers 20 Gulden Conventionsmünze à 60 Kreuzer à 4 Pfennige geprägt wurden.

2. Der Frankenfuß (in Frankreich, Belgien, Italien und in der Schweiz), nach welchem aus 1 Kg. Silber, das $\frac{835}{1000}$ fein ist, 185 $\frac{5}{8}$ Franks (Lire oder Franken) geprägt werden.

3. Der Silberrubelfuß in Rußland; der Feingehalt ist $\frac{125}{144}$, das Korn eines Stückes 17.9961 Gramm.

§. 155. Berechnung des Feingehaltes, des Kornes oder Schrotes.

a) Der Feingehalt wird gefunden, indem man das Korn durch das Schrot dividirt; z. B.

Die neuen österr. Zwanziger wiegen $2\frac{2}{3}$ Gramm und enthalten $1\frac{1}{3}$ Gramm feinen Silbers; wie groß ist ihr Feingehalt?

$$\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = \frac{4}{8} = \frac{500}{1000}.$$

Die neuen Zwanziger sind also 500 Tausendtheile fein.

b) Das Korn ist gleich dem Producte aus dem Schrot und dem Feingehalte; z. B.

Aus 1 Kilogramm $\frac{9}{10}$ feinen Goldes werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel feines Gold enthält 1 Achtguldenstück?

$$\text{Schrot} = \frac{1000}{155} \text{ Gramm,}$$

$$\text{Korn} = \frac{1000}{155} \times \frac{9}{10} = 5.80645 \text{ Gramm.}$$

c) Das Schrot wird gefunden, indem man das Korn durch den Feingehalt dividirt. z. B.

Wie viel wiegt 1 kais. Ducaten, da er $23\frac{2}{3}$ Karat fein ist und 3.4421 Gramm feinen Goldes enthält?

$$\text{Feingehalt} \quad \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72}$$

$$\text{Schrot} = 3.4421 : \frac{71}{72} = 3.4906 \text{ Gramm.}$$

§. 156. Berechnung der Münzen nach ihrem inneren Werte.

Nach Verschiedenheit der Angaben des Münzfußes gestaltet sich auch die Lösung der hieher gehörigen Aufgaben verschieden. Ist der Wert einer Münze in ö. W. zu bestimmen, so ist es am einfachsten, zunächst den Wert eines Grammes feinen Silbers oder Goldes in ö. W. zu suchen, und daraus den Wert der betreffenden Silber- oder Goldmünze, nachdem ihr Korn in Gramm ausgedrückt wurde, durch die Multiplication zu berechnen. z. B.

1) Wie viel ist 1 Gramm feinen Silbers wert, da 45 fl. ö. W. 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

$$45 \text{ fl.} : 500 = 0.09 \text{ fl.} = 9 \text{ kr.}$$

1 Gramm feinen Silbers ist also 9 kr. ö. W. wert.

2) Wie viel fl. ö. W. sind 100 Franken wert?

$$\begin{array}{l} 1 \text{ Frank hat } 4.5 \text{ Gramm fein Silber} \\ 100 \quad \quad \quad \text{haben } 450 \\ 9 \text{ kr.} \times 450 = 4050 \text{ kr.} = 40.5 \text{ fl. ö. W.} \end{array}$$

3) Wie viel ist 1 Gramm feinen Goldes wert, wenn das Verhältniß zwischen Gold und Silber $15\frac{1}{2} : 1$ ist?

$$9 \text{ fr.} \times 15\frac{1}{2} = 139\frac{1}{2} \text{ fr.} = 1.395 \text{ fl. ö. W. in Silber.}$$

4) Welchen Wert in österr. Silbergulden hat 1 Achtguldenstück, dessen Korn 5.80645 Gramm beträgt?

$$1.395 \text{ fl.} \times 5.80645 = 8.1 \text{ fl. ö. W. in Silber.}$$

So wie bei den Gold- und Silbermünzen, wird der Feingehalt und der innere Wert auch bei ungemünztem Golde und Silber bestimmt; nur bedient man sich dabei statt der Ausdrücke „Schrot“ und „Korn“ der Bezeichnung Rauhgewicht und Feingewicht.

§. 157. Berechnung der Münzen nach dem Course.

An der Wiener Börse werden sämtliche Münzen per Stück und zwar in Gulden ö. W. Bankvaluta notiert; nur für Silber (Silbergulden oder Coupons der Silberrente) wird der Cours in Procenten angegeben. Die Berechnung geschieht bezüglich durch die Multiplication oder nach der Procentrechnung. 3. B.

1) Der Cours der kais. Ducaten ist 5 fl. 35 fr.; wie viel muß man für 31 Stück zahlen?

$$\begin{array}{r} 5.35 \times 31 \\ \hline 160.5 \end{array}$$

165.85 fl. in Papiergeld.

2) Wie viel in Papiergeld find 658 fl. Silber bei 3% Agio wert?

$$\begin{array}{r} 658 \quad \text{à} \quad 103 \\ \hline 19.74 \end{array}$$

677.74 fl. in Papiergeld.

Aufgaben.

1.* Die neuen österr. Zwanziger find 500, die Zehner 400, die Fünfer 350 Tausendtheile fein; gib den Feingehalt dieser Münzen in den kleinsten Brüchen an.

2.* Welchen Feingehalt hat eine Silbermasse, welche 640 Gramm wiegt und 480 Gramm feines Silber enthält?

3. Wie viele Tausendtheile beträgt der Zusatz in einer Mischung, welche $\frac{11}{12}$ feines Silbers enthält?

4. Der russische Silberrubel wiegt 20.7315 Gramm und enthält 17.9961 Gramm feines Silber; welchen Feingehalt hat er in Tausendtheilen?

5. Wie viel feines Silber enthält ein holländ. Gulden, da aus 1 Kg. Silber von 0.945 Feingehalt 100 Gulden geprägt werden?

6. Wie viel Silber und Kupfer hat einen Barren Silber, der $3\frac{3}{4}$ Kg. wiegt und 0.520 fein ist?

7. Welches Korn in Gramm hat ein österr. Ducaten, da aus einer köln. Mark $23\frac{3}{4}$ Karat feinen Goldes 67 Stück geprägt werden?

8. 45 fl. ö. W. sind $\frac{9}{10}$ fein und enthalten 500 Gramm feines Silbers; wie viel wiegt eine Geldpost von 100 Guldenstücken?

9. Welches Schrotgewicht hat ein deutsches 20-Markstück, da aus 500 Gramm feinen Goldes $69\frac{3}{4}$ Stück geprägt werden?

10. Wie viel wiegt eine legierte Silbermasse, welche 2257 Gramm feines Silber enthält und $\frac{3}{40}$ fein ist?

11.* Verwandle nach dem inneren Werte in ö. W. a) 58 Mark, b) 252 Mark, c) 47 Mark 62 Pfennige.

12. a) 1 Frank (Pira) hat 4.5 Gramm feines Silber,

b) 1 holl. Gulden " 9.45 " " "

c) 1 russ. Silberrubel " 17.9961 " " "

welchen Silberwert in ö. W. hat jede dieser Münzen?

13. 20 fl. Conventions-Münze enthalten 233.87 Gramm feinen Silbers; wie viel fl. ö. W. ist hiernach 1 fl. C. M. wert?

14. a) 1 kais. Ducaten hat 3.4421 Gramm feines Gold,

b) 1 deutsches 10 Markstück " 3.5842 " " "

c) 1 engl. Sovereign " 7.3223 " " "

welchen Wert in ö. Bergguldern hat jede dieser Münzen?

15. Eine Silberstange wiegt $2\frac{1}{2}$ Kg. und ist $\frac{8}{10}$ fein; wie groß ist der Silberwert in ö. W.?

16. An der Wiener Börse notiert man an einem Tage

den Cours für kais. Ducaten mit 5.32 fl.	} in	
" " " Achtguldenstücke " 9.05 "		} Bank=
" " " Sovereigns " 11.28 "		

wie viel kosten 158 Stück jeder dieser Goldmünzen?

17. Für 1000 fl. ö. W. werden Ducaten im Course zu 5.25 gekauft; wie viele Stücke erhält man, und wie groß ist der Rest im Courantgelde?

18. Jemand hat eine Zahlung von 2083 fl. in Silber zu leisten; wie viel in Bankvaluta muß er dafür bei $2\frac{1}{2}\%$ Silberagio zahlen?

19. Wie viel sind 1266 fl. Silber wert bei a) 5% , b) $3\frac{1}{2}\%$, c) $2\frac{3}{4}\%$, d) $1\frac{1}{4}\%$ Agio?

20. Als das Silberagio 25% war, wurde der Wien. Str. (56.006 Kg.) Zucker mit 32 fl. in Papiergeld verkauft, später, als das Agio auf 2% sank, das Kg. mit 56 fr.; wann war der Zucker verhältnismäßig theurer?

VII. Wechselrechnung.

§. 158. Eine Urkunde, in welcher sich der Aussteller unter wechselseitlicher Haftung verpflichtet, eine bestimmte Geldsumme an eine gewisse Person zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen, oder durch eine dritte Person zahlen zu lassen, wird Wechsel genannt.

Rücksichtlich des Zahlers unterscheidet man eigene Wechsel und fremde, oder gezogene, trassirte Wechsel.

a) Eigene Wechsel heißen jene Wechsel, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme selbst zu bezahlen. Z. B.

A. Richter in Wien kauft von F. Haas daselbst um 2000 fl. Waren, zahlbar nach 2 Monaten, und stellt ihm über diesen Betrag folgenden Wechsel aus:

Wien am 7. August 1878.

pr. fl. 2000 ö. W.

Zwei Monate von heute zahle ich gegen diesen Sola-Wechsel an den Herrn F. Haas die Summe von zweitausend Gulden öst. Währung.

A. Richter.

Richter ist dann nach Wechselstrenge verpflichtet, nach 2 Monaten dem Inhaber dieses Wechsels die darin genannte Summe zu zahlen.

In einem eigenen Wechsel kommen wenigstens zwei Personen vor: 1. der Aussteller, welcher sich zur Zahlung der Wechselsumme verpflichtet (hier Richter); 2. der Remittent oder der erste Inhaber des Wechsels, dem sich der Aussteller die Zahlung zu leisten verpflichtet (hier Haas).

b) Gezogene oder trassirte Wechsel sind solche Wechsel, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme durch eine dritte Person zahlen zu lassen. Z. B.

C. Fischer in Wien erhält von H. Wittgen in Hamburg Waren im Betrage von 1200 Mark, zahlbar nach 3 Monaten. In Wien ist aber der Kaufmann J. Moser, welcher mit dem Hamburger Kaufmann F. Korne in Geschäftsverbindung und Rechnung steht. Statt, daß der Wiener Fischer die Summe deutsches Geld mit österreichischem kauft und an Wittgen in Hamburg sendet, was mit Unbequemlichkeit, Kosten und Gefahren verbunden wäre, begibt er sich zu Moser, erlegt ihm eine Summe in ö. W., welche denselben Wert hat als 1200 Mark und erhält dafür von Moser folgenden Wechsel:

Wien am 15. Juli 1878.

pr. Mark 1200.

Drei Monate nach heute zahlen Sie gegen diesen Prima-Wechsel an den Herrn H. Wittgen die Summe von eintausend zweihundert Mark.

Herrn F. Korne in Hamburg.

J. Moser.

Diesen Wechsel übersendet Fischer von Wien an Wittgen in Hamburg, welcher denselben an Korne dort zur Zahlungserklärung vorweist oder präsentiert. Korne erklärt sich auf demselben schriftlich zur Zahlung der Summe zur bestimmten Zeit, d. i. er acceptiert den Wechsel, und hat nun zu der genannten Zeit die Zahlung an Wittgen zu leisten. Der Wiener hat dadurch seine Zahlung an den Gläubiger Wittgen in Hamburg auf eine sehr einfache Weise geleistet. Würde aber Korne den Wechsel nicht acceptieren, so wäre der Aussteller unter wechsel-

rechtlicher Haftung verpflichtet, für die Wechselsumme und für die Auslagen Ersatz zu leisten.

Ein Wechsel bietet demnach ein sehr einfaches Mittel zur Ausgleichung von Schulden und Forderungen zwischen Kaufleuten verschiedener Plätze.

Bei einem gezogenen Wechsel sind im Allgemeinen vier Personen betheilig: 1. Der Aussteller oder Trassant, welcher den Wechsel ausstellt, zieht oder trassiert (hier Moser); 2. der Bezogene oder Trassat, welcher vom Aussteller zur Zahlung der Wechselsumme aufgefordert wird (hier Korne), er heißt, wenn er den Wechsel acceptiert hat, auch Acceptant; 3. der Remittent, d. i. jene Person, welche den Wechsel kauft, um ihn an seinen Gläubiger zu übermachen, zu remittieren (hier Fischer); 4. der Präsentant, welcher den Wechsel zur Annahme und späteren Zahlung vorweist (hier Wittgen).

Ein Wechsel wird in Beziehung auf den Trassanten und den Trassaten eine Tratte, in Beziehung auf den Remittenten und den Präsentanten eine Remesse genannt.

§. 159. Die im Wechsel bestimmte Zeit zur Zahlung der Wechselsumme, d. i. die Verfallszeit, kann auf vier Arten festgesetzt werden:

a) Auf einen bestimmten Tag, z. B. 8. Mai dieses Jahres, medio Mai d. J. (unter medio versteht man immer den 15. des Monates), ultimo Mai d. J. (31. Mai). Solche Wechsel heißen Tagewechsel.

b) Nach Sicht, und zwar 1. unmittelbar nach Sicht (auf Sicht, auf Verlangen, a vista, a piacere), wenn der Wechsel noch am Tage der Vorzeigung oder Präsentation zu bezahlen ist, und 2. auf eine bestimmte Zeit (8 Tage, 3 Wochen, 2 Monate) nach Sicht, wenn die Zahlung in der angegebenen Zeit nach der Präsentation zur Annahme zu leisten ist. Bei den Sichtwechseln der zweiten Art muß der Acceptant der Acceptation auch das Datum derselben beifügen. Ein Unterlassen der Datierung hat jedoch auf die Gültigkeit des Acceptes keinen Einfluß.

c) Auf eine bestimmte Zeit nach dem Tage der Ausstellung, z. B. 2 Monate a dato, 3 Wochen nach heute. Diese Wechsel heißen Datowechsel.

d) Auf eine Messe oder einen Markt. Solche Wechsel heißen Messwechsel, und sind, wenn die Messe nur einen Tag dauert, an diesem Tage, wenn der Markt mehrere, jedoch nicht über 8 Tage dauert, am Tage vor dem gesetzlichen Schlusse des Marktes, und wenn der Markt mehr als 8 Tage dauert, am dritten Tage vor dem Schlusse des Marktes fällig.

Damit der Wechsel als kaufmännisches Zahlungsmittel in ausgedehntestem Umfange verwendet werden könne, ist der Remittent berechtigt, den Wechsel sammt dem ihm daraus zustehenden Rechte einem andern abzutreten. Das Übertragen der Rechte des Wechselinhabers an einen andern heißt indossieren oder girieren; es geschieht durch eine schrift-

liche Erklärung auf dem Wechsel, der Rückseite oder einer Copie desselben, Indossament oder Giro genannt. Derjenige, welcher den Wechsel an einen andern überträgt, heißt Indossant oder Girant; derjenige, an welchen der Wechsel übertragen wird, Indossatar oder Giratar. Der Indossatar kann den Wechsel wieder an einen andern, selbst an den Aussteller, Bezogenen oder einen früheren Giranten gültig girieren, bis zur Verfallszeit der letzte Eigenthümer die Wechselzahlung wirklich erhält.

§. 160. Wechseldiscount.

Wechsel, welche auf die Valuta des eigenen Handelsplatzes lauten und daselbst zahlbar sind, heißen Platzwechsel. Wenn ein Platzwechsel vor dem Verfallstage verkauft wird, so muß sich der Verkäufer wegen der früheren Bezahlung einen Abzug gefallen lassen, welcher von der Zeit abhängt, die der Wechsel noch zu laufen hat. Dieser Abzug heißt Discount oder Escompt. Einen Wechsel vor der Verfallszeit gegen Abzug des Discountes verkaufen oder kaufen, heißt denselben discountieren.

Der Wechseldiscount wird in Procenten für ein Jahr angegeben und sollte richtig auf Hundert gerechnet werden (§. 141); er wird jedoch thatsächlich immer nach der bequemerem Procentrechnung von Hundert bestimmt, weil die sich ergebende Differenz mit Rücksicht auf die kurze Laufzeit der Wechsel sehr gering ist. Man berechnet daher den Wechseldiscount für die Zeit vom Kauftage bis zum Verfallstage wie die Zinsen auf Tage (§. 140), zählt bei der Bestimmung dieser Zeit den Kauftag oder den Verfallstag nicht und rechnet jeden Monat zu so viel Tagen, als er deren wirklich hat. Z. B.

Ein Wechsel pr. 960 fl., zahlbar 31 Tage nach Sicht, acceptiert am 18. Juni, wird am 27. Juni mit 4% discountiert; wie viel nimmt man dafür ein?

Accepttag	18. Juni	Wechselsumme	960 fl.
Verfallstag	19. Juli	4% Discount für 22 Tage	2 „ 35 fr.
Verkaufstag	27. Juni	discountierter Wert	957 fl. 65 fr.
	Juni 3 Tage		
	Juli 19 „		
	22 Tage		

§. 161. Wechselreduction.

Wechsel, welche auf fremde Handelsplätze und gewöhnlich auch auf eine fremde Währung lauten, heißen ausländische Wechsel oder Devisen. Beim Ein- oder Verkaufe von Devisen muß nach einem gegebenen Wechselcourse der Betrag des fremden Geldes (die Wechselvaluta) in die eigene Währung, oder umgekehrt umgerechnet werden. Diese Rechnung nennt man die Wechselreduction.

Der Wechselcourse hängt von dem inneren Werte des fremden Geldbetrages, von der Laufzeit des Wechsels, sowie von der Nachfrage und dem Anbote solcher Wechsel ab und bezieht sich immer auf zwei Geldwährungen, die des eigenen und die des fremden Handels-

places; es wird nämlich angegeben, daß für eine unveränderliche oder feste Summe der einen Valuta eine veränderliche, bald größere, bald geringere Summe in der andern Valuta geleistet wird. An den österreichischen Börsen bilden immer 100 (für London 10) Einheiten des fremden Geldes die feste Valuta und gibt der notierte Cours an, wie viel fl. ö. W. Bankvaluta dafür gezahlt oder empfangen werden. Wenn z. B. der Cours auf Paris mit 44 notiert ist, so heißt dies: für 100 Franks zahlt man 44 fl. österr. Währ. in Banknoten.

Die Wechselreduction wird meistens nach der Procent- oder nach der Schlussrechnung ausgeführt. Z. B.

1) Ein Wiener hat in Amsterdam eine Zahlung von 2360 fl. holl. zu leisten; er will diese durch Übersendung eines Wechsels begleichen, den er zum Course 93·50 einkauft; wie viel muß er für diesen Wechsel bezahlen?

2360 à 93½	oder	100 fl. holl.	93·50 fl. ö. W.
7080		2000 fl. holl.	1870·00 fl. ö. W.
21240		300 " "	280·50 " "
1180		60 " "	56·10 " "
2206·60 fl. ö. W.			2206·60 fl. ö. W.

2) Ein Wiener hat für seine Rechnung in Paris 2485 fl. ö. W. zu fordern; welchen Betrag in Franks wird er trassieren, wenn der Cours auf Paris 44 steht?

$$\begin{array}{rcl}
 44 \text{ fl. ö. W.} & . . . & 100 \text{ Franks} \\
 1 \text{ " " " } & . . . & \frac{100}{44} \\
 2485 \text{ " " " } & . . . & 2485 \times \frac{100}{44} = 5647·73 \text{ Franks.}
 \end{array}$$

Aufgaben.

1. Ein Wechsel von fl. 1249·13 pr. 15. Juni wird am 8. Mai mit $4\frac{1}{2}\%$ Discout verkauft; wie viel beträgt die Einnahme?

2. Berechne den Discout und den discountierten Wert für folgende Wechsel:

Wechselsumme	Kauftag	Verfallstag	Discout
a) 1834 fl. 56 fr.	3. April	31. Mai	6 %
b) 2508 " 80 "	27. März	2. Mai	5 %
c) 960 " — "	18. Juni	15. August	$4\frac{1}{2}\%$
d) 3047 " 75 "	20. August	10. October	$6\frac{3}{4}\%$

3. Ein per medio August ausgestellter Wechsel über 849 fl. wird am 26. Juni zu $6\frac{1}{2}\%$ discountiert; wie viel ist der Wechsel an diesem Tage wert?

4. Wie groß ist der discountierte Wert eines Wechsels über 3180 fl. 14 Tage nach Sicht, acceptiert am 20. November, und zu $4\frac{1}{2}\%$ discountiert am 23. November?

5. Ein Wechsel von fl. 3048·72, ausgestellt am 13. Mai 2 Monate a dato, wird am 18. Juni à $5\frac{1}{2}\%$ mit $\frac{1}{3}\%$ Provision discountiert; wie viel ist dafür zu zahlen?

6. Am 24. April werden bei der österr. Nationalbank folgende Wechsel zu 5% escomptiert:

3128 fl. auf E. Moser, pr. 20. Mai;

1073 " " F. Sinf pr. ultimo Mai;

536 " " K. Müller, 31 Tage nach Sicht, accept. 8. April;

2895 " " H. Probst, vom 28. März, 2 Monate a dato.

Wie viel hat die Bank für alle diese Wechsel zu bezahlen?

7. Ein Wiener hat in Augsburg 2915 Reichsmark zu fordern und will diese Forderung mittelst eines Wechsels, den er auf seinen Schuldner ausstellt und à 55·60 verkauft, an sich bringen; wie viel nimmt er für diesen Wechsel ein?

8. Ein Handlungshaus in Marseille hat von einem Wiener 5682 Franks 56 Cent. zu fordern; wie groß ist diese Forderung in ö. W., wenn 100 Franks = 44·75 fl. ö. W. gerechnet werden?

9. Wien kauft 3708 Franks auf Paris à 44·80, wie viel kostet diese Devisen, wenn dabei $\frac{1}{2}\%$ Sensarie gezahlt werden muß?

10. Wie hoch stellt sich in Wien der Wert eines Wechsels auf Berlin über a) 738 Mark à 54·80, b) 1335 Mark à 54·92, c) 3085 Mark 48 Pfenn. à 54·85?

11. Wien kauft im Auftrage 7123 wallach. Piafter in Devisen auf Bukarest à 17·15 und berechnet $\frac{1}{2}\%$ Provision und $\frac{3}{4}\%$ Sensarie; mit welchem Betrage in ö. W. wird Wien den Committenten belasten?

12. A kauft in Wien Wechsel auf Hamburg:

2032 Mark, Discout für 126 Tage,

1760 " " " 80 "

3188 " " " 52 "

Wie viel fl. ö. W. sind zu bezahlen bei dem Cours $54\frac{3}{4}$, wenn der Discout zu $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet wird?

13. Einem Amsterdamer wurden fl. ö. W. 2227·75 in 2345 fl. holl. übermacht; zu welchem Course remittierte Wien?

14. Wie steht der Cours auf Brüssel, wenn bei Berechnung von $\frac{1}{2}\%$ Provision für 5248 Franks 2241 fl. 55 fr. ö. W. gutgeschrieben werden?

VIII. Berechnung der Staatspapiere und Actien.

§. 159. Staatspapiere sind Schuldverschreibungen, welche vom Staate oder mit Bewilligung des Staates von einzelnen Ländern, von größeren gesellschaftlichen Unternehmungen und selbst von einzelnen Güterbesitzern über Theilbeträge eines empfangenen Darlehens ausgestellt werden.

Der Capitalbetrag, auf welchen ein Staatspapier lautet, wird der Nominalwert desselben genannt.

Die Staatspapiere sind entweder verzinsliche Obligationen, für welche in bestimmten Terminen die Zinsen nach einem bestimmten Zinsfuße, und zwar gewöhnlich gegen gedruckte Zinsanweisungen, Coupons, ausgezahlt werden, oder Lose, deren Erträgnis in bestimmten Gewinften besteht, die in festgesetzten Ziehungen entfallen. Einige Lose gewähren außer der Möglichkeit, einen großen Gewinn zu machen, auch regelmäßige Zinsen.

Actien sind Antheilscheine über die durch Einzahlung eines bestimmten Capitals erworbene Mitgliedschaft an größeren Transport-, Industrie- oder Handelsunternehmungen.

Das Erträgnis der Actien, die Dividende, besteht entweder in bestimmten Zinsen oder in einem Antheile am Gewinne der Unternehmung, oder meistens in beiden zugleich. Die ordentliche Dividende gilt für die Zinsen, die außerordentliche vertheilt den Mehrgewinn.

Außer den Actien werden von den Actiengesellschaften häufig auch verzinsliche Schuldverschreibungen hinausgegeben, welche zwar zu keinem Antheile am Gewinne, dagegen zu dem Anspruche auf die Zahlung der Zinsen noch vor den Actien berechtigen und darum Prioritäts-Obligationen oder Prioritäten heißen.

Die Actien, Prioritäten und die öffentlichen Fonds werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Effecten bezeichnet.

§. 163. Die Effecten haben einen veränderlichen Wert, welcher Cours heißt und nicht bloß von dem Nominalwerte, sondern auch von der Höhe des Zinsfußes und des Gewinnes, von der Nachfrage und dem Anbote abhängt. An den österreichischen Börsen werden die Course in Gulden ö. W. Bankvaluta, und zwar bei sämtlichen Actien sowie bei Privatlosen pr. Stück, dagegen bei allen Staatspapieren, Grundentlastungs-Obligationen, Pfandbriefen und den meisten Prioritäts-Obligationen in Procenten d. i. für 100 fl. des Nominalwertes notiert.

Beim Kaufe zinstragender Effecten müssen dem Verkäufer nebst dem Capitalwerte auch die noch nicht behobenen Zinsen vom letzten Zins-termin bis zum Tage des Kaufes vergütet werden. Die Zinsen der Effecten werden immer von dem Nominalwerte berechnet; dabei wird der Monat zu 30 Tagen gerechnet.

Wenn ein Effect auf Conventions-Münze lautet, so haben dieselbe Benennung auch die Zinsen; diese müssen daher, weil der Courswert in ö. W. ausgedrückt ist, gleichfalls in ö. W. umgerechnet werden. Bezüglich der in Silber verzinslichen Effecten besteht an den österreichischen Börsen die Übung, daß die laufenden Zinsen in Papiergeld ohne Zuschlag des Silberagio berechnet werden.

Bei den meisten Staatspapieren muß von den Zinsen noch die Einkommensteuer in Abzug gebracht werden; nur die Actien, Pfandbriefe und einige Prioritätsobligationen sind steuerfrei.

Beispiele.

1) A kauft am 3. December 8 Stück Actien der Nationalbank à 845; wie viel muß er dafür zahlen? (Nominalwert einer Actie = 600 fl. ö. W., 5% Zinsen seit 1. Juli rückständig.)

8 Stück à 845 fl.	6760 fl.
Zinsen von 8 Stück à 600 fl. = 4800 fl.	
vom 1. Juli, 152 Tage, à 5%	101 „ 33 fr.
	6861 fl. 33 fr.

2) Am 26. November werden 2400 fl. einheitliche Staatsschuld in Silber zum Course 66 90 gekauft; wie viel ist dafür zu zahlen? (Zinsen zu $4\frac{1}{5}\%$ seit 1. Juli.)

2400 fl. à 66 90	1605 60 fl.
Zinsen seit 1. Juli, 125 Tage, à $4\frac{1}{5}\%$. .	37 50 „
	1743 10 fl.

3) Wie viel erhält man am 16. September für verkaufte 12 Stück Lose vom Jahre 1854 à 106? (Nominalwert à 250 fl. C. M., Zinsen 4% mit 20% Einkommensteuer seit 1. April.)

12 Stück à 250 fl. C. M. = 3000 fl. C. M.	
3000 fl. C. M. à 106	3180 fl. ö. W.
Zinsen von 3000 fl. C. M., 165 Tage à 4%,	
55 fl. C. M. =	57 75 fl. ö. W.
ab Eink.-St. à 20%	11 55 „ „
	46 20 „ „
	3133 80 fl. ö. W.

Aufgaben.

1.* Wie viel betragen 9 Stück Lose vom J. 1864 à 142?

2.* Wie viel kosten

6 Stück Creditlose à 166,

12 „ Palfy-Lose à 26, und

15 „ Lose der Rudolfsstiftung à 14?

3. Welchen Wert haben am 18. August fl. 2500 einheitliche Staatsschuld in Noten mit Coupons vom 1. Mai à 64 75? (Zinsen $4\frac{1}{5}\%$.)

4. Wie viel muß man am 9. September für 6 Stück ganze Lose vom J. 1860 à 114 25 bezahlen? (Nominalwert à 500 fl., 5% Zinsen mit 20% Einkommensteuer.)

5. Am 1. Mai werden gekauft:

14 Stück Actien der Graz-Köflacher Bahn à 18,

9 „ „ „ Kronprinz Rudolfsbahn à 129 75, und

12 „ „ „ Siebenbürger Bahn à 116 50.

(Nominalwert à 200 fl., Zinsen à 5% seit 1. Jänner.)

6. Jemand verkauft am 6. December 9 Stück Lose vom Jahre 1854 à 108 75; wie viel nimmt er dafür ein? (Nominalwert à 250 fl. C. M., Zinsen 4% mit 20% Einkommen-Steuer seit 1. April.)

7. Am 26. Februar werden verkauft:

18 Stück Prioritäten der Siebenbürger Bahn à 71.75, und

10 "Franz-Josefsbahn à 93.75.

(Nominalwert à 200 fl., Zinsen 5% seit 1. Oct.)

8. Am 4. October werden gekauft: fl. 6000 Pfandbriefe des steierm. Sparcasse-Vereins à 99; wie viel ist dafür bei $\frac{1}{2}\%$ Senfarie zu bezahlen? (Zinsen $5\frac{1}{2}\%$ seit 1. Juli.)

9. Wie viel kosten am 26. April

2 Stück Ferdinands-Nordbahn-Actien à 2070 (Nominalwert à 1000 fl. C. M.), und

6 Stück Elisabethbahn-Actien à 167.25 (Nominalwert à 200 fl. C. M.),

wenn die 5% Zinsen seit 1. Jänner zu vergüten sind und $\frac{1}{2}\%$ Senfarie gerechnet wird?

10. Jemand läßt am 26. Nov. in Wien verkaufen:

4 Stück Actien der Nationalbank à 835 (Zinsen seit 1. Juli);

8 Stück Lose vom J. 1860 à 112 (Nominalwert à 500 fl., 5% Zinsen mit 20% Eink.-St. seit 1. Nov.);

3500 fl. 5% Pfandbriefe der österr. Boden-Creditanstalt à 107.50 (Zinsen seit 1. Nov.);

wie viel erhält er dafür, wenn die Senfarie $\frac{1}{2}\%$ und die Provision $\frac{1}{3}\%$ beträgt?

IX. Wiederholungsaufgaben.

1.* An einem Tage stand das Thermometer um 6 Uhr Morgens auf 12 Grad, um 10 Uhr auf 15 Grad, um 2 Uhr auf 21 Grad, um 6 Uhr Abends auf 16 Grad; wie groß war die mittlere Temperatur dieses Tages?

2.* Man mischt 3 Liter Wein à 40 fr. mit 5 Liter à 56 fr.; wie viel sind 6 Liter der Mischung wert?

3. $100 - \{ (2\frac{1}{4} + 16\frac{7}{12} + 3\frac{5}{8} + 8\frac{3}{7}) \cdot \frac{9}{10} \}$.

4. $(5\frac{5}{12} + 7\frac{7}{8} + 25\frac{11}{36}) - (\frac{3}{4} + 9\frac{25}{108} + 2\frac{7}{54})$.

5. Man hat vier Zahlen: die erste ist $25\frac{1}{3}$, die zweite um $8\frac{3}{4}$ größer als die erste, die dritte um $12\frac{3}{5}$ kleiner als die zweite, die vierte ist gleich dem Unterschiede zwischen der ersten und dritten; wie groß ist die Summe aller vier Zahlen?

6. Wie viel sind 4% a) von, b) auf, c) in Hundert von 775 fl.?

7. Von welcher Summe sind 75 fl. 6% a) von, b) auf, c) in Hundert?

8. Wie viel % a) von, b) auf, c) in Hundert sind 86 fl. von 1634 fl.?

9. Man bestimme den Wert von 4 Kisten Feigen im Gewichte von 511 Kg. Brutto, wenn die Tara zu 10% und das Kg. Netto zu 36 fr. gerechnet wird?

10. Wenn man eine Zahl mit 15 multipliciert, zu dem Producte 20 addiert, die Summe durch 4 dividirt und von dem Quotienten 14 subtrahiert, so erhält man das 3fache der fraglichen Zahl; welche Zahl ist es?

$$11. \frac{32a^4x^4}{27b^4y^4} : \frac{4a^3x}{9b^3y}$$

$$12. \frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3} : \frac{4m^2n^2p}{5xy^2z^3}$$

$$13. (8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + \{ (3x - 2n) - (4m + 3n) \}.$$

14. Welcher Wert in fl. ö. W. ergibt sich für 1 Achtguldenstück, da 155 Stück auf 1 Kg. Gold von 900 Tausendtheilen Feingehalt gehen, wenn das Verhältnis des Goldes zum Silber wie $15\frac{1}{2} : 1$ angenommen wird?

15. Welchen Wert in Papiergeld haben 2350 fl. Silber, wenn das Silber 4% Agio hat?

16. Wie viel in Silber sind 3285 fl. Papiergeld wert, wenn das Silber mit $103\frac{1}{2}$ notirt ist?

17.* A kauft einen Garten für 1200 fl., wovon er sich nach je 3 Monaten 240 fl. zu zahlen verpflichtet; wann müsste er die ganze Summe auf einmal entrichten?

18.* Wie viel betragen die jährlichen Zinsen à 5% von: a) 4 fl., b) 20 fl., c) 34 fl., d) 377 fl., e) 2850 fl.?

19. Wie groß sind die Zinsen von

a) 3678 fl. à 5% in 1 Jahr 5 Mon.?

b) 5782 fl. à $5\frac{3}{4}$ % in 6 Mon. 12 Tagen?

c) 986·85 fl. à $6\frac{1}{4}$ % in 2 Jahren 8 Mon. 21 Tagen?

20. Wie viel betragen die Zinsen

a) von 942·75 fl. à $4\frac{1}{4}$ % in 37 Tagen?

b) von 1348 fl. à $5\frac{1}{2}$ % in 132 Tagen?

21. Berechne die Zinsen

a) von 1745 fl. zu 6% vom 15. April bis 12. Juli;

b) von 5680 fl. zu $6\frac{1}{2}$ % vom 1. Juli bis 18. October.

22. Jemand kauft in Triest 5 Fässer einer Ware, gewogen Brutto 5219 Kg. mit 10% Tara; wie viel wird er contant dafür bezahlen, wenn man 100 Kg. Netto zu 14 fl. mit 2% Sconto rechnet?

$$23. \frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{2x}{5} + \frac{7}{4}.$$

$$24. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66}.$$

$$25. \frac{23 \cdot 75x - 25}{6 \cdot 25} = 3 \cdot 6x. \quad 26. \frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{2 \cdot 93x}{16} - 0 \cdot 00925.$$

$$27. \frac{7}{3}(2x + 5) + 3(2x - 3) - \frac{3}{4}(5x - 7) = 1.$$

28. Jemand legt ein Capital von 3485 fl. zu 4% Zins auf Zins an; wie hoch wird das Capital in 3 Jahren anwachsen?

29. Wenn jährlich in eine Versicherungsbank 200 fl. eingezahlt werden, welches Capital wird diese nach 8 Jahren bei 4% Zinseszins dafür zurückerstatten?

30.* Berechne 2% Provision von:

a) 568 fl., b) 1240 fl., c) 1736 fl., d) 2518 fl., e) 3712 fl.

31.* Berechne $\frac{1}{2}\%$ Senfarie von:

a) 884 fl., b) 1508 fl., c) 2030 fl., d) 2264 fl., e) 4508 fl.

32. Der Einkaufsbetrag einer Ware beläuft sich mit Einschluß von $\frac{1}{2}\%$ Senfarie auf 2653 fl. 40 kr.; wie groß ist die Senfarie? (Auf Hundert.)

33. Der Verkaufswert einer Ware beträgt nach Abzug von $\frac{1}{2}\%$ Senfarie 5537 fl. 42 kr.; um wie viel wurde die Ware verkauft? (In Hundert.)

34. Verwandle folgende rein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche: a) 0·2, b) 0·15, c) 6·023, d) 0·324, e) 4·5148.

35. Verwandle folgende gemischt periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche: a) 0·16, b) 2·08, c) 15·327, d) 0·1472, e) 0·65243.

36. Ein Wechsel über 2929 Mark 3 Wochen nach Sicht, acceptiert am 11. August, wird in Leipzig am 17. August mit 4% discountiert; wie viel wird dafür bezahlt?

37. Ein Wiener Kaufmann soll für aus Marseille erhaltene Waren 5633 Francs 63 Centimes bezahlen; wie viel in ö. W. wird er bei dem Course 44·15 seinem Handelsfreunde gutschreiben müssen?

38.* Jemand kauft Tuch, zu 5 fl. das Meter; im Verkauf gibt er 4 Meter zu 27 fl. und gewinnt 504 fl. Wie viel Meter sind gekauft worden?

39.* 1000 fl. sollen unter A und B so vertheilt werden, daß A so oft 3 fl. erhält, wie B 2 fl. Wie viel erhält jeder?

40. Zu einem Unternehmen gibt A 8000 fl., B 7200 fl., C 4800 fl. Damit haben sie 232½ fl. weniger als 16% des Einlagecapitals gewonnen; wie viel erhält jeder von dem gemeinschaftlichen Gewinne?

$$41. \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} - 1.$$

$$42. \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{(x + y)^2} + \frac{1}{(x - y)^2}.$$

$$43. (5x + a)(2x - a) - (4x - 3a)(7x + a) + (3x - a)(6x + 2a).$$

$$44. (48y^8 - 14a^4y^4 + 17a^6y^2 - 6a^8) : (6y^4 - 3a^2y^2 + 2a^4).$$

$$45. \left\{ \frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2} \right\} : \left\{ \frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x} \right\}.$$

46.* Für 7200 Mann reicht ein gewisser Vorrath 15 Monate lang aus; wie lange wird er ausreichen, wenn $\frac{1}{3}$ der Mannschaft entlassen wird?

47.* Zum Ausgraben eines Canals brauchten 6 Arbeiter 76 Tage; wie viel Tage hätten 8 Arbeiter dazu gebraucht?

48. A hat in seiner Fabrik 24 Gasflammen, wofür er in 6 Monaten bei täglich 4stündiger Brennzeit 300 fl. zahlt. Wie viel muß B bezahlen, der 30 Gasflammen $5\frac{1}{2}$ Monate lang bei täglich $4\frac{1}{2}$ stündiger Brennzeit brauchte, wenn jede Flamme 14mal so viel Gas verzehrte als die des A?

49. Ein Capital gibt zu $4\frac{1}{2}\%$ in einer bestimmten Zeit 239 $\frac{2}{3}$ fl. Zinsen; wie viel Zinsen gibt es in derselben Zeit zu $5\frac{1}{2}\%$?

50. Welches Capital bedarf man, um zu 5% dieselben Zinsen zu haben, welche 3200 fl. Capital à 4% geben?

51. Wenn ein Capital in 5 Jahren 527 fl. Zinsen trägt, in wie viel Jahren trägt es 210 fl. Zinsen?

52. Zu wie viel $\%$ muß ein Capital angelegt werden, damit es in 3 Jahren eben so viel Zinsen gebe, als es in 2 Jahren à 6% geben würde?

53. Jemand erbt 4850 fl., welche aber erst nach 5 Jahren ausgezahlt werden sollen; man will ihm auf seinen Wunsch gegen $6\frac{1}{2}\%$ Discout das Geld gleich auszahlen; wie viel beträgt die Erbschaft in barer Summe?

54. Ein Kaufmann hat zwei Sorten einer Ware, eine bessere, das Kg. zu 60 fr., und eine geringere, das Kg. zu 36 fr.; er will von beiden eine Mischung von 80 Kg. bereiten, die er zu 45 fr. das Kg. verkaufen kann. Wie viel Kilogr. muß er von jeder Sorte nehmen?

55. Eine Partie Cacao, gewogen 923 Kg. Netto, kostet im Einkaufe mit allen Auslagen fl. 761 „ 50; wenn nun das Kilogr. à 88 fr. verkauft wird, wie viel beträgt der Gewinn oder Verlust a) überhaupt, b) in Procenten?

56. Jemand will durch 5 Jahre eine jährliche Summe (Jahresrente) von 1000 fl. beziehen; wie viel Capital muß er zu diesem Ende anlegen, wenn die Zinseszinsen ganzjährig zu 5% angelegt werden?

57.* Das 5fache einer Zahl ist um 86 größer als ihre Hälfte und ihr Fünftel zusammengenommen; welche Zahl ist es?

58. Jemand wird nach 10 Jahren doppelt so alt sein, als er vor 4 Jahren war; wie alt ist er jetzt?

59. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A 1000 fl. und $\frac{1}{3}$ des Restes, B $\frac{1}{2}$ des neuen Restes und noch 500 fl. darüber, C die noch übrigen 2500 fl. Wie groß ist die Summe, wie viel erhält A, wie viel B?

60. Ein Kaufmann in Wien verkauft für einen Triester Kaufmann 6 Fässer Tafelöl, gewogen Brutto 3285 Kg., Tara 16% , zu fl. 75 pr. 100 Kg. Netto; Spesen fl. 21 „ 35, Senzarie $\frac{1}{2}\%$, Provision $1\frac{3}{4}\%$. Man stelle die Verkaufsrechnung zusammen.

Achter Abschnitt.

Potenzen und Wurzeln.

I. Potenzieren.

§. 164. Eine Zahl a zur n ten Potenz erheben oder a mit n potenzieren heißt a n mal als Factor setzen (§. 37). a ist die Grundzahl oder Basis, n der Potenzexponent und das erhaltene Product p die n te Potenz von a . Man schreibt $a^n = p$. Eine Potenz ist demnach ein Product gleicher Factoren.

Das Potenzieren hat zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl und größer als 1 ist; außerdem müssen sowohl Basis als Exponent unbenannte Zahlen sein.

Die in §. 37 gemachte Annahme $a^1 = a$ und der in §. 51. abgeleitete Satz $a^0 = 1$ sind als Erweiterungen des ursprünglichen Potenzbegriffes anzusehen.

Sätze über die Potenzen.

§. 165. 1. Potenzen derselben Basis werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^5 \cdot a^3 = a^8.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ mal}) \cdot a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ mal}), \\ &= a \cdot a \cdot a \dots (m + n) \text{ mal} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

2. Aus der Umkehrung dieses Satzes folgt

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

d. h.: Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliciert.

§. 166. 1. Potenzen derselben Basis werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit einer Zahl potenziert, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a^8 : a^3 = a^5.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} a^{m-n} \cdot a^n &= a^{m-n+n} = a^m; \\ a^5 \cdot a^3 &= a^{5+3} = a^8. \end{aligned}$$

2. Durch Umkehrung erhält man

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

d. h.: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man sie mit dem Minuend und mit dem Subtrahend potenziert und die erste Potenz durch die zweite dividirt.

§. 167. 1. Potenzen desselben Exponenten werden multipliciert, indem man das Product der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m, \quad 2^3 \cdot 5^3 = 10^3.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m &= a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ mal}) \cdot b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ mal}) \\ &= ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \dots (m \text{ mal}) \quad (\S. 32) \\ &= (ab)^m \end{aligned}$$

2. Durch Umkehrung ergibt sich

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m,$$

d. h.: Ein Product wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Factor damit potenziert.

§. 168. 1. Potenzen desselben Exponenten werden dividirt, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad \frac{21^4}{7^4} = 3^4.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{b^m} &= \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ mal})}{b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ mal})} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots (m \text{ mal}) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^m. \end{aligned}$$

2. Aus der Umkehrung dieses Satzes folgt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

d. h.: Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenziert, indem man Dividend und Divisor damit potenziert.

§. 169. 1. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man die Basis mit dem Product beider Exponenten potenziert.

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots (n \text{ mal}) \\ &= a^{m+m+m \dots (n \text{ mal})} \\ &= a^{mn}. \end{aligned}$$

2. Umkehrung:

$$a^{mn} = (a^m)^n,$$

d. h.: Eine Zahl wird mit einem Producte potenziert, indem man sie mit dem einen Factor und die erhaltene Potenz mit dem anderen Factor potenziert.

3. Die Potenz einer Potenz bleibt unverändert, wenn man die Exponenten unter einander vertauscht.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Beweis. Nach 1. ist

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ und } (a^n)^m = a^{nm};$$

aber $mn = nm$ (§. 32), also auch $a^{mn} = a^{nm}$, und somit

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Vorzeichen der Potenzen.

§. 170. 1. Eine positive Basis gibt mit einer ganzen Zahl potenziert immer eine positive Potenz.

Beweis. Nach §. 65, 2. a ist

$$(+a)^2 = +a \cdot +a = +aa = +a^2,$$

$$(+a)^3 = +a \cdot +a \cdot +a = +aaa = +a^3,$$

$$(+a)^4 = +a \cdot +a \cdot +a \cdot +a = +aaaa = +a^4,$$

u. f. w.; allgemein

$$(+a)^m = +a^m.$$

2. Eine negative Basis gibt mit einer geraden ganzen Zahl potenziert eine positive, mit einer ungeraden ganzen Zahl potenziert eine negative Potenz.

Beweis. Nach §. 65, 2. b ist

$$(-a)^2 = -a \cdot -a = +aa = +a^2,$$

$$(-a)^3 = -a \cdot -a \cdot -a = -aaa = -a^3,$$

$$(-a)^4 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = +aaaa = +a^4,$$

$$(-a)^5 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = -aaaaa = -a^5$$

u. f. w.; allgemein

$$(-a)^{2m} = +a^{2m}, \quad (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

Potenzen mit negativen Exponenten.

§. 171. Der durch die Gleichung $a^m : a^n = a^{m-n}$ ausgedrückte Lehrsatz für die Division zweier Potenzen derselben Basis (§. 166, 1), wurde bisher auf den Fall, wo $m \geq n$ ist, beschränkt. Ist nun $m < n$ und zwar $m + p = n$, so führt die Anwendung der obigen Gleichung auf eine Potenz mit negativem Exponenten; es ist

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Damit daher das durch die obige Gleichung ausgesprochene Gesetz allgemeine Geltung habe, ist man genöthigt, auch den Potenzen mit negativen Exponenten eine Bedeutung beizulegen, durch welche auch sie auf den ursprünglichen Potenzbegriff zurückgeführt werden. Diese Bedeutung

ergibt sich sogleich, wenn man den Quotienten, welchen a^{-p} vorstellen soll, in einer anderen Form entwickelt. Man hat

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

mithin ist
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p};$$

d. h.: Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist.

Um diesen Satz für besondere Exponenten nachzuweisen, sei z. B. $a^2 : a^5$ zu bestimmen. Man hat

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}, \text{ und auch}$$

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3},$$

somit
$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Zusatz. Aus $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ folgt $a^p \cdot a^{-p} = 1$, folglich ist auch $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Man kann daher jede Potenz, die im Zähler eines Bruches als Factor vorkommt, als Factor in den Nenner, und umgekehrt, übertragen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

§. 172. Alle bisher erwiesenen Lehrsätze von den Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Denn es ist:

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m};$$

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}; \text{ u. s. w.}$$

Quadrieren der Zahlen.

§. 173. Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliciert, so erhält man ihr Quadrat. Um also das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, darf man dieses nur mit $a + b$ multiplicieren; man findet dadurch, wie in §. 39, Folges.,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

d. h. das Quadrat eines Binoms besteht aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Um ein Trinom $a + b + c$ zum Quadrate zu erheben, betrachte man dasselbe als ein Binom, indem man $a + b$ als das erste, und c als das zweite Glied ansieht; es ist also

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2.$$

Eben so findet man

$$(a + b + c + d)^2 = \\ = [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2, \\ (a + b + c + d + e)^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2 \\ + 2(a + b + c + d) \cdot e + e^2,$$

u. f. w.

Aus den hier abgeleiteten Ausdrücken ergibt sich für das Quadrieren eines Polynoms folgendes Bildungsgesetz:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.

2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder mit diesem Gliede, und das eigene Quadrat.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Beispiel.

$$(2a - 3b + 4c)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 2(2a - 3b) \cdot 4c + 16c^2 \\ = 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2.$$

Zusatz. Die zwei Bestandtheile, welche ein Glied der gegebenen Zahl im Quadrate gibt, können auch in einen einzigen zusammengefaßt werden, wenn man dieses Glied zu der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder addiert, und die erhaltene Summe mit diesem Gliede multipliciert; denn

$$2a \cdot b + b^2 = (2a + b) \cdot b; \\ 2(a + b) \cdot c + c^2 = [2(a + b) + c] \cdot c; \text{ u. f. w.}$$

§. 174. Da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läßt, so kann man das fürs Quadrieren zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke abgeleitete Verfahren auch auf dekadische Zahlen anwenden.

Um z. B. 3417 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2 \\ = 3000^2 + 2 \cdot 3000 \cdot 400 + 400^2 + 2 \cdot 3400 \cdot 10 + 10^2 \\ + 2 \cdot 3410 \cdot 7 + 7^2;$$

oder wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt:

$$\begin{array}{r}
 3417^2 = \quad 3000^2 \dots 9000000 \\
 + 2 \cdot 3000 \cdot 400 \dots 2400000 \\
 \quad + 400^2 \dots 160000 \\
 + 2 \cdot 3400 \cdot 10 \dots 68000 \\
 \quad + 10^2 \dots 100 \\
 + 2 \cdot 3410 \cdot 7 \dots 47740 \\
 \quad + 7^2 \dots 49 \\
 \hline
 11675889,
 \end{array}$$

oder mit Hinweglassung der Nullen:

$$\begin{array}{r}
 3417^2 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad 9. \\
 \quad \quad 4^2 \quad \dots \quad 16. \\
 2 \quad 34 \quad 1 \quad \dots \quad 68. \\
 \quad \quad 1^2 \quad \dots \quad 1. \\
 2 \quad 341 \quad 7 \quad \dots \quad 4774. \\
 \quad \quad 7^2 \quad \dots \quad 49
 \end{array} \\
 \hline
 11675889.
 \end{array}$$

Man verfährt daher, um eine dekadische Zahl zum Quadrat zu erheben, auf folgende Art:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrat.
2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile, das Product aus der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer und ihr eigenes Quadrat.
3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert; die Summe ist das gesuchte Quadrat.

Beispiele.

417 ²	31417 ²
$ \begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 1 \quad \dots \quad 16. \\ \quad \quad 1^2 \quad \dots \quad 8. \\ 2 \quad 41 \quad 7 \quad \dots \quad 1. \\ \quad \quad 7^2 \quad \dots \quad 574. \\ \hline 173889 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad 1 \quad \dots \quad 9. \\ \quad \quad 1^2 \quad \dots \quad 6. \\ 2 \quad 31 \quad 4 \quad \dots \quad 1. \\ \quad \quad 4^2 \quad \dots \quad 248. \\ 2 \quad 314 \quad 1 \quad \dots \quad 16. \\ \quad \quad 1^2 \quad \dots \quad 628. \\ 2 \quad 3141 \quad 7 \quad \dots \quad 1. \\ \quad \quad 7^2 \quad \dots \quad 43974. \\ \hline 987027889 \end{array} $

Da die erste Ziffer der gegebenen Zahl im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Ziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viele Ziffern, als deren die Zahl hat, oder um eine weniger. Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die quadrierte Zahl Ziffern enthält.

Zusätze. 1. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ ist, so erhellet, daß bei einem Decimalbruche das Quadrat auf gleiche Weise wie bei einer dekadischen ganzen Zahl gebildet wird; nur muß man im Quadrate des Zählers doppelt so viele Decimalen abschneiden, als deren der gegebene Decimalbruch enthält. Daraus folgt auch, daß das Quadrat eines Decimalbruches immer eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat.

2. Die zwei Bestandtheile, welche die zweite und jede folgende Ziffer der gegebenen Zahl im Quadrate liefert, kann man in einen einzigen zusammenfassen, wenn man zu der doppelten vorangehenden Zahl die neue Ziffer hinschreibt, und die dadurch entstehende Zahl mit dieser neuen Ziffer multipliciert; nur muß bei diesem Vorgange jedes folgende Product um zwei Stellen weiter rechts hinausgerückt werden; es ist nämlich allgemein

$$(2A \cdot 10) \cdot p + p^2 = (2A \cdot 10 + p)p.$$

Das letzte Beispiel würde sich bei diesem verkürzten Verfahren so stellen:

$$\begin{array}{r}
 31417^2 \\
 \hline
 3^2 \dots\dots 9 \dots\dots \\
 61.1 \dots\dots 61 \dots\dots \\
 624.4 \dots\dots 2496 \dots\dots \\
 6281.1 \dots\dots 6281 \dots\dots \\
 62827 \cdot 7 \dots\dots 439789 \\
 \hline
 987027889.
 \end{array}$$

Cubieren der Zahlen.

§. 175. Multipliciert man das Quadrat einer Zahl mit dieser Zahl selbst, so erhält man ihren Cubus. Es ist also

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,
 \end{aligned}$$

d. h. der Cubus eines Binoms ist gleich dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten Gliede, dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Um nach diesem Satze den Cubus eines Trinoms $a + b + c$ zu erhalten, betrachtet man $a + b$ als das eine Glied und findet

$$\begin{aligned} & (a + b + c)^3 = \\ & = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 \cdot c + 3(a + b) c^2 + c^3 \\ & = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3. \end{aligned}$$

Eben so folgt

$$\begin{aligned} & (a + b + c + d)^3 = [(a + b + c) + d]^3 = \\ & = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3 \\ & = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3 \\ & \quad + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3, \end{aligned}$$

u. f. f.

Hieraus ergibt sich für das Cubieren eines mehrgliedrigen Ausdrucks folgendes Bildungsgeſetz:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdrucks gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile, das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit seinem Quadrate und seinen eigenen Cubus.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

Beispiel.

$$\begin{aligned} (y^2 + 2y - 3)^3 &= y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9(y^2 + 2y)^2 \\ &+ 27(y^2 + 2y) - 27 = y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9y^4 \\ &- 36y^3 - 36y^2 + 27y^2 + 54y - 27 = y^6 + 6y^5 + 3y^4 \\ &- 28y^3 - 9y^2 + 54y - 27. \end{aligned}$$

§. 176. Sucht man nach dem hier entwickelten Bildungsgeſetze für den Cubus eines algebraischen Polynoms den Cubus einer dedactischen Zahl, z. B. 4213; so erhält man, wenn die Bestandtheile unter einander gestellt werden:

$$\begin{array}{r} 4213^3 = (4000 + 200 + 10 + 3)^3 \\ = \begin{array}{r} 4000^3 \dots\dots\dots 64000000000 \\ + 3 \cdot 4000^2 \cdot 200 \dots\dots\dots 9600000000 \\ + 3 \cdot 4000 \cdot 200^2 \dots\dots\dots 480000000 \\ \quad + 200^3 \dots\dots\dots 8000000 \\ + 3 \cdot 4200^2 \cdot 10 \dots\dots\dots 529200000 \\ + 3 \cdot 4200 \cdot 10^2 \dots\dots\dots 1260000 \\ \quad + 10^3 \dots\dots\dots 1000 \\ + 3 \cdot 4210^2 \cdot 3 \dots\dots\dots 159516900 \\ + 3 \cdot 4210 \cdot 3^2 \dots\dots\dots 113670 \\ \quad + 3^3 \dots\dots\dots 27 \end{array} \\ = 74778091597 \end{array}$$

oder mit Weglassung der Nullen:

4213 ³		
	4 ³ . . .	64.
3 .	4 ³ 2 . . .	96.
3 .	4 . 2 ² . . .	48.
	2 ³ . . .	8.
3 .	42 ² 1 . . .	5292.
3 .	42 . 1 ² . . .	126.
	1 ³ . . .	1.
3 .	421 ² 3 . . .	1595169.
3 .	421 . 3 ² . . .	11367.
	3 ³ . . .	27
74778091597.		

Zur Entwicklung des Cubus einer dekadischen Zahl ergibt sich demnach folgendes Verfahren:

1. Man erhebe die erste Ziffer links zum Cubus.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer und ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Beispiele.

1·23 ³			30·54 ³		
	1 ³	1.		3 ³	27 ...
3 .	1 ² 2	6.	3 .	30 ² 5	13500.
3 .	1 . 2 ²	12.	3 .	30 . 5 ²	2250.
	2 ³	8.		5 ³	125.
3 .	12 ² 3	1296.	3 .	305 ² 4	1116300.
2 .	12 . 3 ²	324.	3 .	305 . 4 ²	14640.
	3 ³	27		4 ³	64
1·860867			28484401464		

Da die erste Ziffer der Zahl im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, und wegen jeder folgenden Ziffer im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Cubus einer Zahl immer entweder dreimal so viel Ziffern als deren die Zahl hat, oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Cubus von der Rechten angefangen in Abtheilungen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung zur Linken auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die cubierte Zahl Ziffern enthält.

Zusatz. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ ist, so folgt, daß man bei Decimalbrüchen vom Cubus des Zählers 3mal so viele Decimalen abschneiden müsse, als deren der gegebene Decimalbruch hat.

Aufgaben.

1. $a^5 \cdot a^4$. 2. $x^{3m} \cdot x^{2n}$. 3. $(2x)^3 \cdot (2x)^5$.
 4. $a^{n+1} \cdot a^{n-1}$. 5. $3a^2x^2 \cdot 7a^3x^4$. 6. $2a^2m^3x^4 \cdot 3am^5x^2$.
 7. $3a^2x \cdot 15ax^2 \cdot 4a^2x^2$. 8. $7am^2 \cdot 3b^2n^2 \cdot 8a^2bm^3n$.
 9. $(8a^3x^2 - 5b^3y^2) \cdot 3x^2y^2$. 10. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3) \cdot 8a^3b$.
 11. $(3m^2 - 8m - 5)(7m^2 + 5m - 6)$.
 12. Berechne:

- a) 4^8 aus $4^5 = 1024$ und $4^3 = 64$;
 b) 15^5 aus $15^3 = 3375$ und $15^2 = 225$;
 c) 1.04^{10} aus $1.04^8 = 1.368569$ und $1.04^2 = 1.0816$ (in 6 Dec.);
 d) 1.025^6 aus $1.025^4 = 1.103813$ und $1.025^2 = 1.050625$ (in 6 Dec.).

13. $x^9 : x^3$. 14. $27a^6 : 3a^2$. 15. $a^{2n+1} : a^{n-1}$.
 16. $30x^4y^3 : 5x^3y$. 17. $8x^{a+2b} : 12x^{2b-a}$.
 18. $3a^6b^3c^4d^5 : a^4b^2cd^3$. 19. $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x)$.
 20. $\frac{15ax^4}{8by^2} : \frac{3x^3}{4y}$. 21. $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^6xy}{5bc^2z^4}$.
 22. $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2$.
 23. $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2)$.

24. $2^3 \cdot 5^3$. 25. $25^2 \cdot 4^2$. 26. $4^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4$.
 27. $(3a)^5 \cdot (4a)^5$. 28. $(x+y)^2 \cdot (x-y)^2$.
 29. $(2x)^3$. 30. $(abc)^6$. 31. $(5ax)^4$.
 32. $45^3 : 9^3$. 33. $(6a^2)^5 : (2a)^5$. 34. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$.
 35. $(5a^2bc^2)^4 : (5ac)^4$. 36. $(84a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2$.
 37. $\left(\frac{x}{2}\right)^3$. 38. $\left(\frac{3a}{4b}\right)^4$. 39. $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^3$.
 40. $18x^4 \cdot \left(\frac{2y}{3x}\right)^2$. 41. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$.
 42. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3$. 43. $(3\frac{3}{5})^6 \cdot (\frac{5}{9})^6$.
 44. $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ax}{3by}\right)^3$. 45. $\left(\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a+b}{x-y}\right)^4$.

46. $(a^5)^3$. 47. $(x^3)^5$. 48. $(10a^2)^4$.
 49. $(3m^2n^3)^2$. 50. $(2x^2y^4)^6$. 51. $(am^2x^3)^5$.
 52. $\left(\frac{2x^2}{3y^2}\right)^3$. 53. $\left(\frac{3a^2x}{4by^2}\right)^3$. 54. $\left(\frac{7a^4m^2y^3}{8b^2n^3x^4}\right)^3$.

$$55. \left(\frac{a^4 b^5 c^2}{x^5 y^7} \right)^3 \cdot \left(\frac{x^4 y^6}{a^3 b^4 c} \right)^4 \quad 56. \left(\frac{2a^2 x^2}{3by^3} \right)^3 \cdot \left(\frac{6ax^2}{5b^2 y} \right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{5a^2} \right)^4$$

$$57. \left\{ \frac{(2x^3 y^2)^3 \cdot (3x^4 y^2)^2}{6x^2 y^2} \right\}^3 \quad 58. \left\{ \frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2 z^2)^4 \cdot (5y^3 z)^3}{(10x^3 y^2)^2 \cdot (6y^2 z^4)^3} \right\}^2$$

$$59. (-5)^3. \quad 60. (-a^2)^3. \quad 61. (-a^3)^2.$$

$$62. (-4x^3)^4. \quad 63. (-a^2 b^3)^5. \quad 64. (-3x^3 y z^2)^4.$$

$$65. \left(-\frac{3}{4}\right)^3. \quad 66. \left(-\frac{2a^3}{7b^3}\right)^2. \quad 67. \left(-\frac{3a^2 x}{5b^2 y}\right)^5.$$

$$68. 3^{-2}. \quad 69. 5^{-3}. \quad 70. 15^{-1}.$$

$$71. 0.25^{-2}. \quad 72. \frac{1}{4^{-3}}. \quad 73. \frac{3}{6^{-1}}.$$

$$74. a^5 \cdot a^{-3}. \quad 75. -a^{2m} \cdot a^{-m}. \quad 76. 2^{-3} \cdot 4^{-3}.$$

$$77. bx^2 \cdot b^{-1} x^{-3}. \quad 78. (x^{-2})^4. \quad 79. (x^{-1})^{-1}.$$

$$80. \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}. \quad 81. 5^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

$$82. \left(\frac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-6}. \quad 83. a^{-4} : -a^4.$$

$$84. -4a : a^{-4}. \quad 85. (-6a^{-5}) : (-3a^{-1}).$$

$$86. (2a + 3b)^2. \quad 87. (8x - 7y)^2. \quad 88. (5a^2 - 6y^3)^2.$$

$$89. \left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^2. \quad 90. \left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^2}{2}\right)^2. \quad 91. \left(\frac{a^3 m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2 m}\right)^2.$$

$$92. (a + 2b - 3c)^2. \quad 93. (4 + 2y - y^2)^2. \quad 94. (3x - 5y + 8z)^2.$$

$$95. (6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^2. \quad 96. (27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2.$$

$$97. \left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2. \quad 98. \left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} - \frac{4c}{5d}\right)^2.$$

$$99. \left(\frac{3y^2}{4b^2} + \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$100. (-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2.$$

$$101. 376^2. \quad 102. 2543^2. \quad 103. 5079^2. \quad 104. 73416^2.$$

$$105. 847^2. \quad 106. 7406^2. \quad 107. 08315^2. \quad 108. 23456^2.$$

$$109. 92704^2. \quad 110. 372182^2. \quad 111. 135079^2. \quad 112. 4612908^2.$$

$$113. (94^2)^2. \quad 114. 813^4. \quad 115. 5276^4. \quad 116. 7644^8.$$

$$117. (3x + 2y)^3. \quad 118. (4a - 3)^3. \quad 119. (2ax^2 + 3by^2)^3.$$

$$120. \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3. \quad 121. \left(\frac{3x}{5x} - \frac{2y}{4y}\right)^3. \quad 122. \left(\frac{7m^2}{3n^2} + \frac{5p^2}{6q^2}\right)^3.$$

$$123. (y^2 + 2y - 3)^3. \quad 124. (x^2 - 3xy + 2y^2)^3.$$

$$125. (1 - 2x - 3x^2 + 4x^3)^3. \quad 126. (1 - 2a^2 + 4a^4 - 8a^8)^3.$$

$$127. \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3.$$

$$128. \left(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3.$$

$$129. 734^3.$$

$$130. 862^3.$$

$$131. 6035^3.$$

$$132. 21709^3.$$

$$133. 78256^3.$$

$$134. 917^3.$$

$$135. 5946^3.$$

$$136. 699023^3.$$

$$137. (57^3)^3.$$

$$138. 0.623^9.$$

$$139. 1.376^6.$$

$$140. 1.05^{12}.$$

II. Wurzelausziehen.

§. 177. Ist der Wert einer Potenz und deren Exponent gegeben, so findet man die Basis durch das Wurzelausziehen oder Radicieren.

Aus einer Zahl a die n te Wurzel ausziehen, oder die Zahl a durch n radicieren, heißt aus der Potenz a und dem Exponenten n die Basis suchen. Die gegebene Potenz a heißt der Radicand, oder geradehin die Zahl, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent, und die gesuchte Basis p die n te Wurzel aus a .

Man schreibt $\sqrt[n]{a} = p$.

z. B. $4^3 = 64$, dann ist umgekehrt $\sqrt[3]{64} = 4$.

Die zweite und dritte Wurzel einer Zahl nennt man bezüglich Quadratwurzel und Cubikwurzel.

Damit $\sqrt[n]{a}$ nach dem bisherigen Zahlbegriffe Sinn und Bedeutung habe, muß der Radicand a die n te Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl sein. Auch müssen sowohl Radicand als Wurzelexponent unbenannte Zahlen sein.

§. 178. Aus der obigen Erklärung folgt:

1. Die Wurzel muß so beschaffen sein, daß sie mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radicand gibt.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[3]{27})^3 = 27.$$

2. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl potenziert und durch dieselbe Zahl radiciert.

$$a = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n}; \quad | a = (\sqrt[n]{a})^n.$$

Hiernach kann jede Zahl in Form einer Wurzel dargestellt werden;

$$z. B. b = \sqrt[5]{b^5}.$$

Das Potenzieren und das Radicieren sind demnach einander entgegengesetzt; das Radicieren ist eine Umkehrung des Potenzierens.

3. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst.

$$\text{Da } a^1 = a, \text{ so ist } \sqrt[1]{a} = a.$$

Für die erste Wurzel wird daher weder der Exponent 1, noch das Wurzelzeichen angeschrieben. Bei der zweiten oder Quadratwurzel wird das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben, so daß $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt[2]{a}$ bedeutet.

$$4. \sqrt[n]{1} = 1.$$

$$5. \sqrt[n]{0} = 0.$$

Sätze über die Wurzeln.

§. 179. Aus einem Producte wird eine Wurzel ausgezogen, indem man sie aus jedem Factor auszieht.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}, \quad \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 4 = 8.$$

Beweis. Soll $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ die richtige Wurzel sein, so muß sie mit dem Wurzelexponenten m potenziert den Radicand ab geben. Nun ist wirklich

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m \quad (\S. 167, 2) = a \cdot b \quad (\S. 178, 1).$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn der Radicand einen Factor enthält, aus welchem sich die verlangte Wurzel ausziehen läßt, diesen Factor vom Wurzelzeichen befreien. Z. B.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt{4a} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} = 2\sqrt{a}.$$

Durch dieses Verfahren können öfters auch Wurzeln mit ungleichen Radicanden, wenn sie denselben Exponenten haben, mit einem gemeinschaftlichen Radicand dargestellt, und dann reducirt werden. Z. B.

$$\begin{aligned} & \sqrt{8} + \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{128} \\ &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Durch Umkehrung des Satzes in 1. erhält man

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab},$$

d. h. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden multiplicirt, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Producte der Radicanden auszieht.

Nach diesem Satze kann man mit Beziehung von §. 178, 2 umgekehrt jeden Factor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, indem man ihn mit dem Wurzelexponenten potenziert und diese Potenz mit dem Radicand multiplicirt. Z. B.

$$\begin{aligned} a \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \\ 2 \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}. \end{aligned}$$

§. 180. 1. Aus einem Quotienten (Bruche) wird eine Wurzel ausgezogen, indem man sie aus dem Dividend und Divisor auszieht.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}.$$

Beweis. $\left\{ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \right\}^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}$ (§. 168, 2) = $\frac{a}{b}$ (§. 178, 1).

2. Durch Umkehrung erhält man

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}},$$

d. h. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Quotienten der Radicanden auszieht.

§. 181. 1. Aus einer Potenz wird eine Wurzel ausgezogen, indem man sie aus der Basis auszieht, oder indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

1) $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \sqrt[3]{(8^5)} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5.$

2) $\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2.$

Beweis.

1) $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m$ (§. 169, 3) = a^m (§. 178, 1).

2) $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n}$ (§. 169, 1) = a^m .

2. Durch Umkehrung der Gleichung $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$ erhält man

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)},$$

d. h. Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radicand damit potenziert.

Folgesatz. Soll eine Zahl potenziert und radiciert werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man diese Operationen vornimmt.

3. Durch Umstellung der Gleichung $\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}$ erhält man

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)},$$

d. h. Eine Zahl wird mit einem Bruche potenziert, indem man sie mit dem Zähler potenziert und durch den Nenner radiciert.

Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist demnach die sovielte Wurzel als der Nenner anzeigt, aus der sovielten Potenz der Basis als der Zähler anzeigt.

§. 182. Aus einer Wurzel wird eine Wurzel ausgezogen, indem man sie aus dem Radicand auszieht, oder indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliciert.

$$1) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3 \cdot 3]{27} = \sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3};$$

$$2) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[3 \cdot 6]{64} = \sqrt[18]{64} = 2.$$

Beweis.

$$1) \left\{ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right\}^m = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a} \right)^m} \quad (\S. 181, 2) = \sqrt[n]{a^m} \quad (\S. 178, 1).$$

$$2) \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^m = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a} \right)^{mn}} \quad (\S. 178, 2) = \sqrt[n]{a^{mn}} \quad (\S. 169, 1) = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen radicirt werden, so darf man sie entweder durch dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder sogleich durch ihr Product radicieren.

§. 183. Die Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\text{Es ist} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}; \text{ und}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}.$$

Der erste Theil dieses Satzes gibt ein Mittel an die Hand, beliebige Wurzeln auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten zu bringen.

Es seien z. B. die Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{c^3}$, $\sqrt[10]{d^7}$ mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darzustellen. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Wurzelexponenten 2, 3, 5, 10 ist 30; man hat also

$$30 : 2 = 15, \text{ daher } \sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},$$

$$30 : 3 = 10, \quad \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},$$

$$30 : 5 = 6, \quad \sqrt[5]{c^3} = \sqrt[30]{c^{18}},$$

$$30 : 10 = 3, \quad \sqrt[10]{d^7} = \sqrt[30]{d^{21}}.$$

Hiernach kann man auch Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, multiplicieren oder dividieren (§. 179, 2 und §. 178, 2), wenn man sie früher mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darstellt. Z. B.

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[12]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[12]{a^5};$$

$$\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^9 : a^4} = \sqrt[12]{a^5}.$$

Mit Hilfe des zweiten Theiles des obigen Satzes kann man eine Wurzel, worin Wurzel- und Potenzenexponent ein gemeinschaftliches Maß haben, abkürzen. Z. B.

$$\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}, \sqrt[4]{a^6} = \sqrt[2]{a^3}, \sqrt[2]{a^6} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Zeichen der Wurzeln.

§. 184. 1. Jeder ungeraden Wurzel aus einem positiven Radicand entspricht ein positiver Wert.

$$\sqrt[3]{+27} = +3.$$

Denn $(+3)^3 = 27.$

Allgemein: $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}.$

2. Jeder ungeraden Wurzel aus einem negativen Radicand entspricht ein negativer Wert.

$$\sqrt[3]{-27} = -3.$$

Denn $(-3)^3 = -27.$

Allgemein: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$

3. Jeder geraden Wurzel aus einem positiven Radicand entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werte.

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2.$$

Denn es ist sowohl $(+2)^4 = +16$ als auch $(-2)^4 = +16.$

Allgemein: $\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$

4. Es bleibt noch $\sqrt[2n]{-a}$ zu untersuchen übrig. Da weder eine positive noch eine negative Zahl zu einer geraden Potenz erhoben, ein negatives Resultat hervorbringen kann, so bedeutet $\sqrt[2n]{-a}$ eine Zahl, welche in der Reihe der bisher betrachteten Zahlen nicht vorkommt. Diese neue Zahlform heißt eine imaginäre Zahl, und im Gegensatz zu ihr nennt man alle übrigen Zahlen reelle Zahlen.

Z. B. $\sqrt[2]{-4}$ kann weder $= +2$, noch $= -2$ sein, da sowohl $(+2)^2 = +4$, als auch $(-2)^2 = +4$ ist.

Eine gerade Wurzel aus einem negativen Radicand ist imaginär.

Wenn auch die imaginäre Zahl $\sqrt[2n]{-a}$ in der Arithmetik keinen anderen Sinn hat, als den einer Zahl, die $2n$ mal als Factor gesetzt $-a$ gibt, so ist sie darum aus dem Gebiete der Mathematik doch nicht zu verbannen, da sie schon bei höheren algebraischen Rechnungen oft wichtige

Vortheile darbietet, in der Geometrie aber ihre ganz bestimmte Bedeutung hat. Wenn in einer rein arithmetischen Aufgabe, in welcher nur nach einer reellen Zahl gefragt werden kann, eine imaginäre Zahl als Resultat erscheint, so ist dies ein Zeichen, daß die gesuchte Zahl unter den in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen nicht möglich ist.

Irrationale Zahlen.

§. 185. Bei der Erklärung von $\sqrt[n]{a}$ in §. 177 wurde vorausgesetzt, daß der Radicand a die n te Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl sei. Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wo diese Voraussetzung nicht eintrifft.

Ist die ganze Zahl a nicht die n te Potenz einer ganzen Zahl, so kann $\sqrt[n]{a}$ weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; sie läßt sich jedoch annäherungsweise durch einen Bruch mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen.

Beweis. a) Bildet man die n ten Potenzen der auf einander folgenden ganzen Zahlen, nämlich

$$1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \dots, p^n, (p+1)^n, \dots$$

und ist a unter diesen Potenzen nicht enthalten, so muß es zwischen zwei auf einander folgenden Potenzen, z. B. zwischen p^n und $(p+1)^n$, daher $\sqrt[n]{a}$ zwischen p und $p+1$ liegen; somit ist $\sqrt[n]{a}$ keine ganze Zahl. Es läßt sich aber $\sqrt[n]{a}$ auch durch keinen Bruch $p + \frac{q}{r} = \frac{pr + q}{r}$, wo q und r relative Primzahlen seien, darstellen, weil die Potenz eines auf die einfachste Form gebrachten Bruches nie eine ganze Zahl a sein kann.

b) Gleichwohl hat die Form $\sqrt[n]{a}$ auch in diesem Falle eine bestimmte Bedeutung. Man kann nämlich zwischen p und $p+1$ eine Bruchzahlenreihe mit dem Nenner m einschalten. Erhebt man dann die Zahlen dieser Reihe

$p, p + \frac{1}{m}, p + \frac{2}{m}, \dots, p + \frac{c}{m}, p + \frac{c+1}{m}, \dots, p+1$
zur n ten Potenz, so fällt a zwischen zwei unmittelbar auf einander folgende solche Potenzen, z. B. zwischen $\left(p + \frac{c}{m}\right)^n$ und $\left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n$,
und folglich $\sqrt[n]{a}$ zwischen die Zahlen $p + \frac{c}{m}$ und $p + \frac{c+1}{m}$, deren Differenz $\frac{1}{m}$ ist.

Setzt man daher für $\sqrt[n]{a}$ die Zahl $p + \frac{c}{m}$ oder $p + \frac{c+1}{m}$, so begeht man einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{m}$ ist. Da aber m beliebig groß, daher $\frac{1}{m}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\sqrt[n]{a}$ mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen.

$p + \frac{c}{m}$ heißt der untere, $p + \frac{c+1}{m}$ der obere Näherungswert von $\sqrt[n]{a}$.

3. B. Es sei $\sqrt{2}$ zu bestimmen. Da 2 zwischen $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ liegt, so liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2. Ferner liegt 2

zwischen $1.4^2 = 1.96$ und $1.5^2 = 2.25$,
 " $1.41^2 = 1.9881$ " $1.42^2 = 2.0164$,
 " $1.414^2 = 1.999396$ " $1.415^2 = 2.002225$, u. f. w.

Folglich liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1.4 und 1.5,
 " 1.41 " 1.42,
 " 1.414 " 1.415, u. f. w.

Hieraus sieht man, daß $\sqrt{2}$ zwischen zwei Zahlen liegt, die man einander beliebig nähern kann, daß also $\sqrt{2}$ einen bestimmten Wert hat, welcher zwar nicht vollständig, aber doch bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung angegeben werden kann.

§. 186. Zahlen, welche sich weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen vollkommen genau, dagegen durch letztere annäherungsweise mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen. Im Gegensatz zu ihnen werden die ganzen und gebrochenen Zahlen rationale Zahlen genannt.

Unter den Rechnungsoperationen mit irrationalen Zahlen versteht man die gleichartigen Operationen mit den Näherungswerten, zwischen denen die irrationalen Zahlen liegen. Da hiernach die Resultate der Rechnungen mit irrationalen Zahlen durch die bezüglichlichen Rechnungsergebnisse ihrer Grenzwerte bestimmt werden, diese aber rationale Zahlen sind, so gelten alle für die rationalen Zahlen erwiesenen allgemeinen Sätze auch für die zwischen ihnen eingeschlossenen irrationalen Zahlen.

§. 187. Ein Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, kann durch entsprechende Multiplication des Zählers und des Nenners ohne Änderung seines Wertes mit einem rationalen Nenner dargestellt werden. Man nennt diese Umformung das Rationalmachen des Nenners.

Hier sollen nur die einfachsten Fälle betrachtet werden.

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{\sqrt[n]{a^n}}$, wobei $m > n$ ist, mit

einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

$$\text{z. B. } \frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m \sqrt[3]{a^2}}{a}; \quad \frac{3 \sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3 \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3 \sqrt[5]{a^9}}{a}.$$

2. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Es ist

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z (a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z (a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z (\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z (\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

$$\text{z. B. } \frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3 (5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15 (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5 (\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

§. 188. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor, so kann die Wurzel weggeschafft werden, indem man beide Theile der Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenziert; dabei muß die Wurzel, welche man wegchaffen will, allein in den einen Theil gebracht werden. Diese Formveränderung nennt man das Rationalmachen der Gleichung.

Es sei z. B. die Gleichung $\sqrt{2x+3} = 5$ rational zu machen. Gleiches mit derselben Zahl potenziert gibt wieder Gleiches. Erhebt man daher beide Theile der gegebenen Gleichung zum Quadrat, so erhält man die rationale Gleichung $2x+3 = 25$, welche leicht aufgelöst werden kann.

Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 189. Aus dem Gesetze (§. 173), nach welchem die Bestandtheile einer mehrgliedrigen Zahl in ihrem Quadrate zusammengestellt erscheinen, läßt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten Polynom folgendes Verfahren ableiten:

1. Das erste Glied des geordneten Polynoms ist das Quadrat des ersten Wurzelgliedes. Man findet daher das erste Glied der Wurzel, wenn man aus dem ersten Gliede des Radicands die Quadratwurzel auszieht. Das Quadrat des gefundenen ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Die ersten zwei Glieder des Restes enthalten die Bestandtheile, welche aus dem folgenden Gliede der Wurzel hervorgehen, und zwar ist das erste Glied des Restes das Product aus der doppelten, bereits gefundenen Wurzel und aus dem weiteren Gliede der Wurzel. Dividirt man daher das erste Glied des Restes durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so erhält man das folgende Glied der Wurzel. Man bilde nun die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Quadrate gibt, indem man (nach §. 174, Zusatz 1) zu dem Doppelten der früheren Wurzel das neue Glied addirt und die Summe mit diesem Gliede multiplicirt, und subtrahiere das Product von dem Reste des Polynoms.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist das gegebene Polynom ein vollständiges Quadrat und die erhaltene Quadratwurzel rational; bleibt aber ein Rest übrig, so ist die Wurzel irrational.

Beispiel.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5 \\
 \underline{x^4} \\
 + 6x^3 - x^2 : (2x^2 + 3x) \cdot 3x \\
 \underline{+ 6x^3 + 9x^2} \\
 - 10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) \cdot -5 \\
 \underline{- 10x^2 - 30x + 25} \\
 0
 \end{array}$$

§. 190. Auf gleiche Weise ergibt sich auch aus dem Gesetze (§. 174), nach welchem die einzelnen Wurzelziffern im Quadrate zusammengestellt erscheinen, für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer dekadischen ganzen Zahl folgendes Verfahren:

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann, suche die größte Zahl, deren Quadrat in der höchsten Abtheilung enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Das Quadrat der ersten Wurzelziffer wird von der höchsten Abtheilung des Radicands subtrahirt.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung des Radicands herab, dividire die dadurch gebildete Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel und zugleich als Ergänzung zu dem Divisor. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neuen Wurzelziffer und subtrahiere das Product von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer.

3. Dieses Verfahren setze man fort, bis alle Abtheilungen des gegebenen Radicands in Rechnung gezogen worden sind.

Bleibt zuletzt ein Rest übrig, so ist die Quadratwurzel aus der vorgelegten Zahl eine irrationale Zahl. Um diese angenähert zu bestimmen, hängt man dem letzten sowie jedem folgenden Reste eine Abtheilung von

zwei Nullen an und verfährt weiter wie vorhin; in der Quadratwurzel wird der Decimalpunct gesetzt, bevor man die erste Abtheilung von Nullen in Rechnung zieht.

$$\begin{array}{r}
 \text{3. B.} \quad \sqrt{3|76|36} = 194 \qquad \sqrt{23|61} = 48.59 \dots \\
 \begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 276 : 2 \dots 2.1 \\
 29.9 \dots \underline{261} \\
 1536 : 38 \dots 2.19 \\
 384.4 \dots \underline{1536} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Man kann das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neugefundene Ziffer angehängt hat, und aus dieser neuen Ziffer sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende subtrahieren. Die obigen zwei Beispiele würden sich dann so stellen:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{3|76|36} = 194 \qquad \sqrt{23|61} = 48.59 \dots \\
 \begin{array}{r}
 276 : 2_9 \\
 1536 : 38_4 \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

§. 191. Aus einem Decimalbruche wird die Quadratwurzel nach demselben Verfahren ausgezogen, wie aus einer ganzen Zahl; nur muß man den Decimalbruch vom Decimalpuncte aus nach links und rechts in Abtheilungen von je zwei Stellen theilen, und in der Wurzel den Decimalpunct setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird. Wenn in den Decimalen die letzte Abtheilung nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird, damit die Anzahl der Decimalstellen eine gerade werde, eine Null angehängt.

$$\begin{array}{r}
 \text{3. B.} \quad \sqrt{152.27|56} = 12.34 \qquad \sqrt{0.68|30} = 0.8264 \dots \\
 \begin{array}{r}
 52 : 2_2 \\
 827 : 24_3 \\
 9856 : 246_4 \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, zieht man dieselbe aus Zähler und Nenner; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

$$\begin{array}{r}
 \text{3. B.} \quad \sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23} \\
 \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0.625} = 0.7905 \dots
 \end{array}$$

§. 192. Will man in der Quadratwurzel nur mit einer bestimmten Anzahl Decimalen berechnen, so bedient man sich eines abgekürzten Verfahrens. Nachdem man nämlich die halbe Anzahl der verlangten

Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läßt man, anstatt zu dem Reste eine neue Abtheilung von Nullen anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg, und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division.

Hat man z. B. $\sqrt{138}$ auf 5 Decimalstellen genau, also im ganzen mit 7 geltenden Ziffern zu bestimmen, so sucht man die ersten 4 Ziffern durch das Radicieren, die letzten 3 durch die abgekürzte Division. Die Rechnung steht:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{138} & = & 11.74734 \dots \\ 38 & : & 21 \\ 1700 & : & 227 \\ 11100 & : & 2344 \\ 1724 & : & 2348 \\ 80 & & \\ 10 & & \\ 1 & & \end{array}$$

Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 193. Aus dem Bildungsgesetze des Cubus eines mehrgliedrigen Ausdrucks (§. 175) ergibt sich durch Umkehrung für das Ausziehen der Cubikwurzel aus einem geordneten algebraischen Ausdrucke folgendes Verfahren:

1. Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Gliede des geordneten Radicands; diese ist das erste Glied der Wurzel. Der Cubus des ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Man dividire das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel; der Quotient ist das folgende Glied der Wurzel. Man bilde dann die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles multipliciert mit dem neuen Gliede, das Dreifache des vorhergehenden Wurzeltheiles multipliciert mit dem Quadrate des neuen Gliedes, und den Cubus dieses Gliedes, und subtrahiere die Summe dieser drei Bestandtheile von dem früheren Reste des Radicands.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Cubikwurzel rational; bleibt ein Rest, so ist sie irrational.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27} = y^2 - 2y + 3 \\ \underline{y^6} \\ -6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : \quad 3y^4 \\ -6y^5 + 12y^4 - 8y^3 \\ \hline + 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\ + 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 \\ \hline 27y^2 - 54y + 37 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. 194. Aus dem Gesetze für die Bildung des Cubus einer dekadischen ganzen Zahl (§. 176) läßt sich für das Ausziehen der Cubikwurzel aus einer dekadischen ganzen Zahl folgendes Verfahren ableiten:

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur zwei oder eine Ziffer haben kann, suche die größte Zahl, deren Cubus in der höchsten Abtheilung vorkommt, und schreibe sie als erste Ziffer in die Cubikwurzel. Den Cubus der ersten Wurzelziffer subtrahiere man von der ersten Abtheilung des Radicands.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung herab, dividire dann die dadurch entstehende Zahl mit Weglassung der letzten zwei Ziffern durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel, und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel. Dann bilde man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer, und ihren Cubus; schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte und subtrahiere die Summe der so angefügten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen des Radicands in Rechnung gezogen hat.

Bleibt zuletzt ein Rest, so ist die Cubikwurzel irrational; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man nach den bereits gefundenen Wurzelziffern den Decimalpunkt setzt, dann dem letzten sowie jedem folgenden Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

$ \begin{array}{r} \text{3. B. } \sqrt[3]{76 765 625} = 425 \\ 4^3 \dots 64 \\ \hline 12\ 765 \quad : 48 \dots 3 \cdot 4^2 \\ 3 \cdot 4^2 \cdot 2 \dots 96 \\ 3 \cdot 4 \cdot 2^2 \dots 48 \\ 2^3 \dots 8 \\ \hline 2\ 677\ 625 : 5292 \dots 3 \cdot 42^2 \\ 3 \cdot 42^2 \cdot 5 \dots 2\ 646\ 0 \\ 3 \cdot 42 \cdot 5^2 \dots 31\ 50 \\ 5^3 \dots 125 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} \sqrt[3]{10} = 2.15 \dots \\ 8 \\ \hline 2000 : 12 \\ 12 \\ \hline 6 \\ 1 \\ \hline 739000 : 1323 \\ 6615 \\ 1575 \\ 125 \\ \hline 61625 \end{array} $
--	---

§. 195. 1. Dasselbe Verfahren wird auch angewendet, um aus einem Decimalbruche die Cubikwurzel zu ziehen; nur muß man den Decimalbruch vom Decimalpunkte aus nach links und rechts in Abtheilungen

zu drei Ziffern theilen, und in der Cubikwurzel den Decimalpunkt setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird.

$$\begin{array}{r} \text{3. B. } \sqrt[3]{13 \cdot 144 \cdot 256} = 2 \cdot 36 \\ \begin{array}{r} 8 \\ \hline 5 \ 144 \\ 3 \ 6 \\ \hline 54 \\ 27 \\ \hline 977 \ 256 \\ 952 \ 2 \\ \hline 24 \ 84 \\ 216 \\ \hline 0 \end{array} : 12 \\ \sqrt[3]{0 \ 002 \ 360} = 0 \cdot 133 \dots \\ \begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 \ 360 : 3 \\ 9 \\ \hline 27 \\ 27 \\ \hline 163000 : 507 \\ 1521 \\ \hline 351 \\ 27 \\ \hline 7363 \end{array} \end{array}$$

2. Aus einem gemeinen Bruche wird die Cubikwurzel ausgezogen, indem man sie aus Zähler und Nenner auszieht, oder indem man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt und aus diesem die Cubikwurzel auszieht. 3. B.:

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7}.$$

$$\sqrt[3]{5\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5 \cdot 666666\dots} = 1 \cdot 7828\dots$$

§. 196. Sind in der Cubikwurzel nur eine bestimmte Anzahl von Ziffern zu entwickeln, so kann die Rechnung dadurch abgekürzt werden, daß man, nachdem die halbe Anzahl der verlangten Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden wurden, zur Bestimmung der weiteren Ziffern den letzten Rest durch den neuen Divisor nach Weglassung der letzten Ziffer abgekürzt dividirt.

Ist 3. B. $\sqrt[3]{3}$ mit 5 Decimalen zu bestimmen, so hat man:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{3} = 1 \cdot 44225 \\ 1 \\ \hline 2000 : 3 \\ 12 \\ \hline 48 \\ 64 \\ \hline 256000 : 588 \\ 2352 \\ \hline 672 \\ 64 \\ \hline 14016 : 62,2,0,8 \\ 1575 \\ \hline 331 \end{array}$$

Aufgaben.

1. $\sqrt[3]{4 \cdot 49}$.
2. $\sqrt[4]{9 \cdot 16}$.
3. $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$.
4. $\sqrt[3]{8a^3x^3}$.
5. $\sqrt[4]{16a^4b^4}$.
6. $\sqrt[5]{32(a+b)^5}$.
7. $\sqrt[3]{4a}$.
8. $\sqrt[3]{16}$.
9. $\sqrt[4]{x^5}$.
10. $x\sqrt[3]{y^3z^3}$.
11. $\sqrt[3]{9a^3b}$.
12. $\sqrt[3]{x^3y^5z^4}$.
13. $\sqrt{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}$.
14. $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$.
15. $\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{128}$.
16. $9\sqrt{48} - 3\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$.
17. $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$.
18. $4\sqrt{28} + 5\sqrt{63} - 3\sqrt{175}$.
19. $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a}$.
20. $\sqrt[3]{a^2x} + 2\sqrt[3]{b^2x} + 3\sqrt[3]{c^2x}$.
21. $5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{72} - 3\sqrt[3]{16}$.
22. $4\sqrt[3]{3x} - 2\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{192x}$.
23. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2}$.
24. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9}$.
25. $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.
26. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$.
27. $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$.
28. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{xy}$.
29. $3\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} - 2\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{32}$.
30. $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{xy}$.
31. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{6b} \cdot \sqrt{3ab}$.
32. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \sqrt{\frac{y}{b}}$.
33. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$.
34. $(8 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})$.
35. $(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{15} + \sqrt{20})$.
36. $(\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{48})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.
37. $(2 + \sqrt{3})^2$.
38. $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$.
39. $(2\sqrt{8} - 6\sqrt{18} + 3\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$.
40. $(3\sqrt{8} - 5\sqrt{32}) : \sqrt{2}$.

Bringe in den folgenden Wurzeln den Factor unter das Wurzelzeichen:

41. $3\sqrt{5}$.
42. $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.
43. $3\sqrt[3]{1\frac{7}{9}}$.
44. $4\sqrt{5a}$.
45. $4x\sqrt[3]{x}$.
46. $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$.
47. $\frac{x^2y}{a^2b}\sqrt{\frac{a^3b}{x^3y}}$.
48. $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.
49. $\sqrt[4]{\frac{9}{64}}$.
50. $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$.
51. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.
52. $\sqrt{2\frac{1}{4}}$.
53. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$.
54. $\sqrt[4]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{9}}$.

$$55. \sqrt[5]{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} \quad 56. \sqrt[5]{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}} \quad 57. \sqrt{\frac{a^5 b^3}{x^3 y^7}} \cdot \sqrt{\frac{xy^5}{a^4 b^3}}$$

$$58. \sqrt{\frac{a^2 b^2}{c^4}} \cdot \sqrt{\frac{a^4 c}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b^4}{ac^2}} \quad 59. \left(\sqrt{\frac{b^4}{a^3}} - \sqrt{\frac{a^2}{b}} \right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$60. \sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{8} \quad 61. \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} \quad 62. \sqrt[3]{48x} : \sqrt[3]{6x}$$

$$63. \sqrt{87\frac{1}{2}} : \sqrt{3\frac{1}{2}} \quad 64. \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}} \quad 65. \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a - b}}$$

$$66. \frac{\sqrt[3]{a^5 b^9 x}}{\sqrt[3]{a^2 b^6 x^4}} \quad 67. \sqrt[5]{\frac{a^3 b^4 c^7}{x^4 y^8}} : \sqrt[5]{\frac{c^2 x}{a^2 b y^3}}$$

$$68. \sqrt[3]{8^2} \quad 69. \sqrt{25^3} \quad 70. \sqrt[6]{64^5} - \sqrt[4]{16^3}$$

$$71. \sqrt{(a^2)^3} + a\sqrt{(a^3)^2} \quad 72. \sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)^3}$$

$$73. \sqrt[4]{5^4} \quad 74. \sqrt[3]{a^6} \quad 75. \sqrt[4]{2^6} + \sqrt[4]{2^8}$$

76. Verwandle in Wurzeln und berechne:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{3}{4}}$, d) $32^{\frac{3}{4}}$;

e) $48^{0.5}$, f) $81^{0.25}$, g) $64^{1.5}$, h) $16^{1.75}$,

i) $9^{-\frac{1}{2}}$, k) $125^{-\frac{1}{3}}$, l) $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, m) $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

$$77. x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad 78. a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}} \quad 79. 3^{\frac{3}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{4}}$$

$$80. 243^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{2}{3}} \quad 81. x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{1}{4}} \quad 82. x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$$

$$83. (\sqrt{2})^3 \quad 84. (\sqrt{a^3})^2 \quad 85. (\sqrt[4]{ab^2c^3})^3$$

$$86. \left(\sqrt[3]{\sqrt{a}} \right)^3 \quad 87. (\sqrt{a})^3 \cdot \sqrt{a} \quad 88. (\sqrt{a})^5 \cdot (\sqrt{a})^2$$

$$89. (2 + \sqrt{3})^2 \quad 90. (a - \sqrt{b})^2 \quad 91. (2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})^2$$

$$92. (\sqrt{2} + \sqrt{8})^3 \quad 93. (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a})^3 \quad 94. (4a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} - 3b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a})^3$$

$$95. \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} \quad 96. \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} \quad 97. \sqrt[3]{\sqrt{2^{10}}}$$

$$98. \sqrt[3]{\sqrt{2}} \quad 99. \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} \quad 100. \sqrt{\sqrt{256}}$$

$$101. \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}} \right)^6 \quad 102. \sqrt{x\sqrt{x}} \quad 103. \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

104. Kürze folgende Wurzeln ab:

a) $\sqrt[4]{x^2}$, b) $\sqrt[9]{a^{12}}$, c) $\sqrt[18]{x^{15}}$, d) $\sqrt[2n]{a^{3n}}$.

105. Stelle folgende Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzel-
exponenten dar:

a) $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x^2}$; b) $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{b^3}$ und $\sqrt[6]{c^5}$.

106. $\sqrt[8]{16} \cdot \sqrt{2}$. 107. $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$. 108. $2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$.

109. $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b}$. 110. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$.

111. $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$. 112. $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}$. 113. $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}) : \sqrt[6]{2}$.

Stelle folgende Brüche mit einem rationalen Nenner dar:

114. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 115. $\frac{8}{\sqrt{24}}$. 116. $\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$.

117. $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$. 118. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^2}}$. 119. $\frac{2 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

120. $\frac{2}{5 + \sqrt{2}}$. 121. $\frac{6\sqrt{3}}{3 - \sqrt{5}}$. 122. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$.

123. $\frac{3 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$. 124. $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}$.

125. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$.

Mache folgende Gleichungen rational und löse sie auf:

126. $3\sqrt{x-1} = 4$. 127. $\sqrt{x-3} = 5$.

128. $17 - 2\sqrt{x} = 15$. 129. $5\sqrt{x-14} = 4 + 3\sqrt{x}$.

130. $3\sqrt{6x+7} = 5\sqrt{5x-6}$. 131. $\sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x-1}$.

132. $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4+x}$. 133. $\frac{4}{\sqrt{x-4}} = \frac{3}{\sqrt{x-7}}$.

134. $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$. 135. $\sqrt{9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4}$.

136. $\sqrt{x^4 - 6ax^3 + 11a^2x^2 - 6a^3x + a^4}$.

137. $\sqrt{16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4}$.

138. $\sqrt{16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1}$.

139. $\sqrt{9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16}$.

140. $\sqrt{25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6}$.

141. $\sqrt{\left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right)}$.

142. $\sqrt{1296}$. 143. $\sqrt{7056}$. 144. $\sqrt{11664}$.
 145. $\sqrt{135424}$. 146. $\sqrt{556516}$. 147. $\sqrt{226576}$.
 148. $\sqrt{1920996}$. 149. $\sqrt{26956864}$. 150. $\sqrt{53993104}$.
 151. $\sqrt{395850816}$. 152. $\sqrt{422220304}$. 153. $\sqrt{54782211136}$.
 154. $\sqrt{1406\cdot25}$. 155. $\sqrt{27\cdot973521}$. 156. $\sqrt{0\cdot00178929}$.
 157. $\sqrt{785\cdot6809}$. 158. $\sqrt{0\cdot97535376}$. 159. $\sqrt{44105\cdot040144}$.
 160. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$. 161. $\sqrt{\frac{178929}{797449}}$. 162. $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.

163. $\sqrt[4]{29986576}$. 164. $\sqrt[4]{362673936}$. 165. $\sqrt[8]{1475789056}$.

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

166. $\sqrt{28}$. 167. $\sqrt{320}$. 168. $\sqrt{6584}$. 169. $\sqrt{552747}$.
 170. $\sqrt{3\cdot92}$. 171. $\sqrt{0\cdot101}$. 172. $\sqrt{8\cdot376}$. 173. $\sqrt{0\cdot07854}$.
 174. $\sqrt{0\cdot123457}$. 175. $\sqrt{55\cdot25734}$. 176. $\sqrt{19\cdot383838}$.
 177. $\sqrt[5]{\frac{57}{3}} = \sqrt[5]{\frac{11}{9}} = ?$ 178. $\sqrt[5]{\frac{91}{67}}$. 179. $\sqrt[7]{251\frac{7}{2}}$.

180. $\sqrt[3]{(a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6)}$.

181. $\sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8)}$.

182. $\sqrt[3]{(64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 + 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6)}$.

183. $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right)}$.

184. $\sqrt[3]{5832}$. 185. $\sqrt[3]{12167}$. 186. $\sqrt[3]{59319}$.

187. $\sqrt[3]{262144}$. 188. $\sqrt[3]{1259712}$. 189. $\sqrt[3]{8615125}$.

190. $\sqrt[3]{746142643}$. 191. $\sqrt[3]{1767172329}$. 192. $\sqrt[3]{627881709547}$.

193. $\sqrt[3]{0\cdot778688}$. 194. $\sqrt[3]{474\cdot552}$. 195. $\sqrt[3]{78\cdot402752}$.

196. $\sqrt[3]{20661046784}$. 197. $\sqrt[3]{1126162419264}$.

198. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. 199. $\sqrt[3]{32\cdot856}$. 200. $\sqrt[3]{0\cdot00008427}$.

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

201. $\sqrt[3]{100}$. 202. $\sqrt[3]{5213}$. 203. $\sqrt[3]{8135}$. 204. $\sqrt[3]{47838}$.

205. $\sqrt[3]{0\cdot3}$. 206. $\sqrt[3]{25\cdot643}$. 207. $\sqrt[3]{0\cdot0957}$. 208. $\sqrt[3]{0\cdot12345}$.

209. $\sqrt[5]{\frac{5}{6}} = \sqrt[5]{\frac{180}{216}} = ?$ 210. $\sqrt[7]{\frac{37}{70}}$. 211. $\sqrt[8]{8\frac{7}{2}}$.

III. Wiederholungsaufgaben.

- 1.* Theile nach dem Verhältnis 3 : 5 die Zahlen:
a) 20, b) 28, c) 35, d) $\frac{1}{5}$, e) 0.32.
- 2.* Ein Kaufmann hatte ein Stück Tuch; er verkaufte davon $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{10}$, und behielt noch 9 Meter. Wie viel Meter hatte das Stück?
- 3.* Den wievielten Theil eines Capitals betragen seine jährlichen Zinsen a) zu 4%, b) zu 5%?
4. Wie groß sind die jährlichen Zinsen von
a) 82 fl., 108 fl., 250 fl., 365 fl., 512 fl. à 5%?
b) 75 fl., 215 fl., 306 fl., 645 fl., 750 fl. à 4%?
- 5.* Ein Capital war zu 5% ausgeliehen; nach 5 Jahren erhielt man an Capital und einfachen Zinsen 2000 fl. Wie groß war das Capital?
6. Wie viel betragen die Zinsen
a) von 1800 fl. à 5% vom 1. Januar bis 20 Februar?
b) von 6400 Mark à 4% vom 1. Februar bis 18. Mai?
c) von 5600 Franks à $4\frac{1}{2}\%$ vom 1. November bis 24. Januar?
7. Von einer Ware, bei welcher die Tara 15% betrug, wurden 1989 Kg. Netto berechnet; wie groß war das Brutto-Gewicht?
8. Wie viel kosten 12 Fässer gelbes Wachs, gewogen Brutto 6767 Kg., Tara 636 Kg., wenn 100 Kg. Netto zu fl. 195.48 mit $2\frac{1}{2}\%$ Sconto gerechnet werden?
9. $29607 : 1202\frac{5}{128}$.
10. $1728\frac{325}{628} : 57\frac{137}{250}$.
11. $\frac{5}{3x-9} - \frac{8}{5x-15}$.
12. $\frac{2x-1}{x-2} - \frac{2x-5}{x-4}$.
13. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4$.
14. $\left\{ \frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2z^2)^4 \cdot (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \cdot (6y^2z^4)^3} \right\}^2$.
15. Ein Kaufmann hat an den verschiedenen Artikeln seines Geschäftes einen durchschnittlichen Gewinn von $16\frac{2}{3}\%$; wie viel beträgt dieser, wenn er in einem Jahre 16008 fl. 60 kr. umsetzt?
16. Ein Kaufmann verkaufte mit 3% Provision für seinen Committenten Waren im Betrage von 2930 fl. 70 kr. und hatte dabei 52 fl. 40 kr. Auslagen; wie viel hat er an den Committenten einzusenden?
- 17.* Welche Zahl muß man mit $\frac{5}{4}$ multiplicieren, damit sie um $\frac{5}{4}$ größer werde?
- 18.* Nimmt man von einer Zahl erst die Hälfte, und von dem Reste wieder die Hälfte, so hat man 150 weggenommen. Welche Zahl ist es?
19. Von A geht ein Bote nach B und macht die Strecke in 10 Tagen. Ein anderer Bote geht von B nach A und macht die Strecke in 15 Tagen. Nach wie viel Tagen werden sie sich begegnen, wenn sie gleichzeitig abgehen?

20. $x^{m+3} \cdot x^{m-5} \cdot x^4 - m$.

21. $(x^2y^2 - 2abxy + a^2b^2)^2$.

22. $(\sqrt{4x} + \sqrt{5y})(\sqrt{4x} - \sqrt{5y})$. 23. $(2a^2b \sqrt{ab^2x})^2$.

24.* a) $534 + 215$, b) $663 + 157$, c) $424 + 569$, d) $439 + 298$.

25.* a) $605 - 96$, b) $684 - 355$, c) $936 - 547$, d) $765 - 397$.

26.* a) $23 \cdot 15$, b) $52 \cdot 18$, c) $43 \cdot 27$, d) $64 \cdot 22$, e) $34 \cdot 26$.

27.* a) $960 : 12$, b) $682 : 11$, c) $602 : 14$, d) $775 : 25$.

28.* Erhebe jede der Zahlen 11 bis 20 zum Quadrate.

29. Von 2734 Kg. Mandeln und 2891 Kg. Kaffee zahlt man 121 fl. 95 kr. Fracht; wie viel entfällt davon für die Mandeln, wie viel für den Kaffee?

30. Zur Heizung eines Schulzimmers waren für jeden Winter 18 Cub.-Meter Buchenholz erforderlich; in Zukunft will man mit Steinkohlen heizen. Wie viel Tonnen Steinkohlen wird man brauchen, wenn 1 Cub.-Meter Buchenholz 376 Kg. wiegt und wenn die Heizkraft der Steinkohlen um 70% größer ist als die einer gleichen Gewichtsmasse Buchenholz?

31. Wie viel 0.720 feines Gold muß zu 3 Kg. 0.900 feinem Gold legiert werden, wenn 0.840 feines Gold daraus entstehen soll?

32. Der Holzbestand eines Waldes wird jetzt zu 80000 Cub.-Meter veranschlagt. Wenn der jährliche Zuwachs 2% beträgt, a) wie stark war derselbe vor 10 Jahren, b) wie stark wird er nach 10 Jahren sein?

33.
$$\frac{22594}{7395} + \frac{18597 - 126584}{0325} - \frac{108724 \cdot 0368}{245}$$

34. Bestimme nach der abgekürzten Division in 3 Decimalen die Quotienten:

a) $83422 : 31586$,

b) $3456352 : 0789$,

c) $654728 : 1523$,

d) $047 : 16982$.

35.* A und B theilen 585 fl. so unter sich, daß sich ihre Antheile wie $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ verhalten; wie viel erhält jeder?

36. In Hamburg kostet das R Portorico-Kaffee 91 Pfenn., Spesen daselbst sind 3%, Provision 2%, Fracht bis Wien, Zoll u. dgl. 14%. Wie hoch kommt ein Kilogramm von diesem Kaffee bis Wien, wenn 100 Mark = 56.8 fl. ö. W. gerechnet werden?

37. $7(3x - 6) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 11$.

38. $\frac{a - bx}{b} = \frac{ax - b}{a}$.

39. $\frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}$.

40. $5 + \sqrt{2x} = 7$.

41. $2\sqrt{x} + 3 = 7(2\sqrt{x} - 3)$.

42. Am 1. Mai wurden 1550 fl. zu 4% ausgeliehen; als die Rück-erstattung erfolgte, betrug das Capital mit den Zinsen $1619\frac{3}{4}$ fl.; wann ist das Capital zurückgezahlt worden?

43. Am 18. Mai erhält ein Commissionär folgende Wechsel zum Eincaffieren zugesendet: 600 fl. zahlbar nach 36 Tagen, 800 fl. zahlbar nach 45 Tagen und 400 fl. zahlbar nach 60 Tagen; an welchem Tage wird er seinen Committenten die Summe derselben aufschreiben?

44. $\sqrt[3]{119025}$. 45. $\sqrt[3]{46335249}$. 46. $\sqrt[3]{9820611801}$.
 47. $\sqrt{857375}$. 48. $\sqrt{156590819}$. 49. $\sqrt{829789013773}$.

50.* Ein Capital, das bisher zu 4% ausgeliehen war, wird nunmehr zu 6% angelegt, wodurch eine jährliche Mehreinnahme von 52 fl. an Zinsen erzielt wird; wie groß ist das Capital?

51.* Wie lange müssen 100 fl. zu a) 2%, b) 4%, c) 5% ausgeliehen werden, wenn die einfachen Zinsen dem Capital gleichkommen sollen?

52. Die jährlichen Zinsen einer Staatsschuld von $10\frac{1}{2}$ Millionen Gulden betragen 367500 fl.; wie viel % betragen die Zinsen?

53. Eine Eisenbahn, $86\frac{1}{4}$ Kilometer lang, bringt am Ende des ersten Betriebsjahres einen Reingewinn von 212652 fl., so daß das zum Bau verwendete Capital 3% Zinsen abwirft. Wie viel hat durchschnittlich 1 Kilometer dieser Bahn gekostet?

54. $(16x^4 - 48x^3y + 108x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4)(4x^2 + 12xy + 9y^2)$.

55. $(64a^6 - 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 - 12ab + 9b^2)$.

56.* Wenn man von 80 eine gewisse Zahl subtrahiert, so bleiben noch 20 mehr übrig, als man subtrahiert hat. Welche Zahl ist es?

57. Zwei Arbeiter sollen einen Graben von 665 Meter Länge reinigen; der eine macht täglich 45 Meter, der andere 50 Meter fertig. Wann wird die ganze Arbeit fertig sein?

58. Ein Capital ist zu 4% ausgeliehen. Dividiert man den fünften Theil des Capitals durch die jährlichen Zinsen des ganzen Capitals und addiert zum Quotienten 75, so erhält man so viel Gulden, als die Jahreszinsen des ganzen Capitals betragen. Welches ist das Capital?

59. Wenn man von einer Zahl 10 subtrahiert, den Rest mit 3 multipliziert, aus dem Quotienten die Quadratwurzel auszieht und von dieser 17 subtrahiert, so erhält man 1. Wie heißt die Zahl?

60. Die Quadratwurzel aus einer um 1 vermehrten Zahl und die Quadratwurzel aus der um 1 verminderten Zahl geben 2 zur Summe. Welche Zahl ist es?

61. A, B und C haben bei einem gemeinschaftlichen Geschäfte 20% Verlust erlitten. Die gemachten Einlagen verhalten sich wie 9 : 8 : 7, und das Capital nach Abzug des Verlustes betrug 22480 fl. 80 kr.
 a) Wie viel erhält jeder zurück, b) wie viel hat jeder eingelegt, c) wie viel hat jeder verloren?

62. A nimmt ein Capital von 12000 fl. auf und zahlt für Rechnung der 5% Zinseszinsen und der Capitaltilgung am Schlusse eines jeden Jahres 800 fl.; a) wie groß wird noch der Schuldrest nach 10 Jahren sein, b) welchen gegenwärtigen Wert hat dieser Schuldrest?

Neunter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

I. Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. 197. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist unbestimmt; es gibt unendlich viele Werte, welche für die beiden Unbekannten substituirt, der Gleichung Genüge leisten. Hat man z. B. die Gleichung $2x + 5y = 19$, so folgt daraus, wenn einstweilen x als die Unbekannte, y aber als bekannt angesehen wird, $x = \frac{19 - 5y}{2}$. Jedem Werte, der in der Auflösung für y gesetzt wird, entspricht auch ein anderer Wert für x ; da nun für y unendlich viele verschiedene Werte angenommen werden können, so ist auch x unendlich vieler Werte fähig; die Auflösung ist demnach unbestimmt. Sollen nun x und y vollkommen bestimmt sein, so muß noch eine zweite, von der ersten wesentlich verschiedene und ihr nicht widersprechende Gleichung zwischen x und y gegeben werden, welche die Unbestimmtheit der aus der ersten Gleichung sich ergebenden Werte behebt.

Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, leitet man aus den beiden Gleichungen eine dritte her, in welcher nur eine der Unbekannten vorkommt. Dieses Verfahren heißt das Eliminieren der zweiten Unbekannten.

§. 198. Es sind vorzüglich drei Eliminations-Methoden im Gebrauche.

1. Die Comparations-Methode. Man bestimmt den Wert derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, setzt diese Werte einander gleich und löst die dadurch erhaltene Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält, auf. Z. B.

$$2x + 5y = 26 \quad . \quad . \quad 1) \quad \text{und} \quad 3x - 2y = 1 \quad . \quad . \quad 2)$$

$$\text{Aus 1) folgt } x = \frac{26 - 5y}{2},$$

$$\text{aus 2) folgt } x = \frac{1 + 2y}{3},$$

$$\text{daher } \frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3},$$

woraus man $y = 4$ erhält. Wird dieser Wert in 1) substituiert, so hat man

$$2x + 5 \cdot 4 = 26,$$

woraus $x = 3$ folgt.

2. Die Substitutions-Methode. Man sucht den Wert einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in die andere Gleichung; dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche dann aufgelöst wird. 3. B.

$$x + 2y = 8 \dots 1) \text{ und } 6x - 5y = 14 \dots 2)$$

Aus 1) folgt $x = 8 - 2y$.

Wird dieser Wert in 2) substituiert, so erhält man

$$6(8 - 2y) - 5y = 14,$$

woraus $y = 2$ hervorgeht. Durch Substitution dieses Wertes in 1) bekommt man sodann $x = 4$.

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man verschafft in beiden Gleichungen der zu eliminierenden Unbekannten durch Multiplikation aller Glieder mit einem geeigneten Factor gleiche Coefficienten, und addiert oder subtrahiert die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben; die dadurch erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird dann aufgelöst. 3. B.

$$4x - 3y = 9 \dots 1) \text{ und } 6x + 5y = 61 \dots 2)$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 4 und 6 ist 12. Multipliziert man daher die erste Gleichung mit 3, und die zweite mit 2, so erhält man

$$12x - 9y = 27,$$

$$12x + 10y = 122.$$

Wird nun die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so hat man

$$19y = 95,$$

woraus $y = 5$ folgt. Wenn man diesen Wert in der Gleichung 1) substituiert, so findet man daraus $x = 6$.

Zusatz. Welche von den drei Eliminations-Methoden in jedem besondern Falle am vortheilhaftesten anzuwenden sei, muß aus der Beschaffenheit der Coefficienten der Unbekannten beurtheilt werden. Gewöhnlich bestimmt man nur den Wert der einen Unbekannten nach einer der angeführten drei Methoden und substituiert dann den gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen, woraus sich der Wert für die zweite Unbekannte ergibt.

§. 199. Damit sich aus zwei zusammengehörigen Gleichungen mit zwei Unbekannten die Werte dieser Unbekannten bestimmen lassen, müssen die beiden Gleichungen von einander unabhängig sein und einander nicht widerstreiten, wie aus folgenden Beispielen erhellet.

$$1) 4x - 3y = 9 \text{ und } \frac{8x}{3} - 2y = 6.$$

Die zweite Gleichung ist von der ersten abhängig; sie ist aus derselben dadurch entstanden, daß alle Glieder mit $\frac{2}{3}$ multipliciert wurden. Wendet man auf diese Gleichungen die Comparationsmethode an, so ergibt sich

$$\begin{array}{r} 9 + 3y = 18 + 6y \\ 4 \qquad \qquad 8 \\ 18 + 6y = 18 + 6y \\ 0 = 0. \end{array}$$

Man erhält demnach keinen Wert für y .

2) $4x - 3y = 9$ und $8x - 6y = 15$.

Die zweite Gleichung widerstreitet der ersten, da der erste Theil der zweiten Gleichung das Zwefache des ersten Theiles der ersten Gleichung, 15 aber nicht das Zwefache von 9 ist. Wendet man auf diese Gleichungen die Methode der gleichen Coefficienten an, so hat man

$$\begin{array}{r} 8x - 6y = 18 \\ 8x - 6y = 15 \\ \hline 0 = 3. \end{array}$$

Die Lösung der gegebenen Gleichungen führt daher auf einen Widerspruch.

Aufgaben.

- | | |
|--|---|
| 1. $x + y = 11,$
$x - y = 3.$ | 2. $2x + y = 12,$
$x + 4y = 12.$ |
| 3. $2x - y = 4,$
$4x + 3y = 18.$ | 4. $3x + y = 19,$
$3x - 2y = 7.$ |
| 5. $7x - 2y = 12,$
$3x + 2y = 8.$ | 6. $4x + 5y = 22,$
$5x - 4y = 7.$ |
| 7. $8x - 5y = 25,$
$3x + 7y = 36.$ | 8. $3x + 4y = 4,$
$12x - 6y = 5.$ |
| 9. $16y - 25z = 7,$
$5z - 24y = 9.$ | 10. $28x + 6y = 9,$
$9y - 4x = 2.$ |
| 11. $3x + 7 = 4y + 3,$
$4x - 8 = 5y - 10.$ | 12. $3 \cdot 7x - 16 \cdot 6 = 4 \cdot 5y,$
$1 \cdot 5x - 2 \cdot 7 = 2 \cdot 4y.$ |
| 13. $x + y = 20,$
$\frac{x}{3} = y.$ | 14. $\frac{y}{4} = \frac{x}{3} + 8,$
$y = 3x - 33.$ |
| 15. $x - y = 12,$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$ | 16. $x + 2y = 30,$
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$ |
| 17. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2,$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4.$ | 18. $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 4,$
$\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 3.$ |

19. $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17,$
 $\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = 27.$
20. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$
 $\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$
21. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5},$
 $\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2},$
22. $\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 4,$
 $\frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1.$
23. $\frac{12x-1}{11} + 7y = 22,$
 $\frac{y+1}{2} - x = 1.$
24. $\frac{x}{0.3} = \frac{y}{0.2},$
 $\frac{x}{0.9} = 10 + \frac{y}{0.9}.$
25. $x+y = 36,$
 $x:y = 3:2.$
26. $x:y = 4:1,$
 $(x-6):(y+6) = 1:4.$
27. $(2x+y-1):(3x+2y+11) = 1:2,$
 $(5x-3y+4):(6x-3y+3) = 3:4.$
28. $(x-4)(y+7) = (x-3)(y+4),$
 $(x+5)(y-2) = (x+2)(y-1).$
29. $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3,$
 $\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4.$
30. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9.$
 $\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$
31. $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{3}{4},$
 $\frac{6}{x} - \frac{2}{y} = \frac{3}{10}.$
32. $\frac{1.6}{x} = \frac{2.7}{y} - 1,$
 $\frac{0.8}{x} = \frac{3.6}{y} = 5.$
33. $ax+y = m,$
 $x+by = n.$
34. $nx-my = m-n,$
 $mn(x+y) = m^2+n^2.$
35. $ax-by = a^2+b^2,$
 $bx+ay = a^2+b^2.$
36. $(a+c)x+(a-c)y = 2bc,$
 $(b-c)x+(b+c)y = 2ac.$
37. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y},$
 $x-y = c.$
38. $\frac{x-a+2b}{b} + \frac{y}{c} = \frac{b}{c},$
 $\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} = \frac{x+y}{ac}.$
39. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$
 $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$
40. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2,$
 $\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$

$$\begin{array}{ll}
41. \sqrt{x} : \sqrt{x+y} = 4 : 5, & 42. x = 1 + \sqrt{y}, \\
x + y = 25, & y = 4 - 3x + x^2. \\
43. 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, & 44. 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9. \\
\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 20. & 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \\
45. \frac{3}{\sqrt{32+x}} = \frac{1}{\sqrt{12-y}}, & 46. \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6. \\
\frac{4}{\sqrt{20-x}} = \frac{3}{\sqrt{1+y}}. & \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1.
\end{array}$$

II. Auflösung der Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten.

§. 200. Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander unabhängige und sich nicht widersprechende Gleichungen gegeben sein.

Um ein System von mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufzulösen, wendet man dieselben Methoden an, welche in §. 198 für die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angegeben wurden. Man eliminiert nämlich aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte und zugleich eine Gleichung weniger erhält; aus diesen neuen Gleichungen eliminiert man eine zweite Unbekannte und setzt dieses Verfahren fort, bis man zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher sich der Wert dieser Unbekannten ergibt.

Der gefundene Wert wird in eine der zunächst vorhergehenden zwei Gleichungen substituiert und dadurch eine zweite Unbekannte bestimmt. Die beiden gefundenen Werte substituiert man dann in eine der vorhergehenden drei Gleichungen u. s. w., und bestimmt auf diese Art nach und nach die Werte aller Unbekannten.

Beispiele.

$$\begin{array}{l}
1) \left. \begin{array}{l} 8x + 5y + 2z = 24 \\ 6x - 3y + z = 3 \\ 4x + 9y - 6z = 4 \end{array} \right\} \text{ nach der Comparations-Methode.} \\
x = \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\
x = \frac{3 + 3y - z}{6} \\
x = \frac{4 - 9y + 6z}{4}
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x = \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x = \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{array}} \right\} \text{ folglich } \left\{ \begin{array}{l} \frac{24 - 5y - 2z}{8} = \frac{3 + 3y - z}{6} \\ \frac{3 + 3y - z}{6} = \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{array} \right.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich, wenn man sie nach y auflöst,

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned} \right\} \text{daher } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

aus welcher letzteren Gleichung $z = 3$ folgt.

Substituiert man den Wert von z in einen der für y gefundenen Ausdrücke, z. B. in $y = \frac{60 - 2z}{27}$, so hat man

$$y = \frac{60 - 2 \cdot 3}{27} = 2.$$

Werden endlich die gefundenen Werte von y und z in einen der für x aufgestellten Ausdrücke, z. B. in $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$ substituiert, so erhält man

$$x = \frac{3 + 2 \cdot 3 - 3}{6} = 1.$$

Probe.
$$\begin{aligned} 8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= 24, \\ 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 &= 3, \\ 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 3 &= 4. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad 3x + y + z &= 18 \\ 2x + 3y + 2z &= 28 \\ 5x + 2y + 3z &= 38 \end{aligned} \right\} \text{nach der Substitutions-Methode.}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{18 - y - z}{3}$. Substituiert man diesen Wert in die zweite und dritte Gleichung, so erhält man

$$2 \times \frac{18 - y - z}{3} + 3y + 2z = 28, \text{ oder } 7y + 4z = 48,$$

$$5 \times \frac{18 - y - z}{3} + 2y + 3z = 38, \text{ oder } y + 4z = 24.$$

Aus der letzten Gleichung folgt $y = 24 - 4z$. Wird dieser Wert in die vorletzte Gleichung substituiert, so ergibt sich

$$7(24 - 4z) + 4z = 48,$$

woraus $z = 5$ folgt.

Substituiert man den Wert von z in $y = 24 - 4z$, so ist

$$y = 24 - 4 \cdot 5 = 4.$$

Werden endlich die Werte von y und z in den Ausdruck

$$x = \frac{18 - y - z}{3}$$

eingestellt, so erhält man

$$x = \frac{18 - 4 - 5}{3} = 3.$$

$$\begin{array}{rcl} 3) & 3x - 2y + 5z = 8 \\ & 2x + 5y - 2z = 18 \\ & 4x - y + 2z = 14 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 3) & 3x - 2y + 5z = 8 \\ & 2x + 5y - 2z = 18 \\ & 4x - y + 2z = 14 \end{array}} \right\} \text{nach der Methode der gleichen Coefficienten.}$$

Um aus den ersten zwei Gleichungen x zu eliminieren, multipliciere man die erste mit 2, die zweite mit 3; es ist

$$\begin{array}{rcl} 6x - 4y + 10z = 16 \\ 6x + 15y - 6z = 54 \\ \hline -19y + 16z = -38. \end{array} \quad \text{subtrahiert}$$

Um aus der zweiten und dritten Gleichung x zu eliminieren, braucht man nur die zweite mit 2 zu multiplicieren, und die Subtraction zu verrichten; man erhält

$$\begin{array}{rcl} 4x + 10y - 4z = 36 \\ 4x - y + 2z = 14 \\ \hline 11y - 6z = 22. \end{array}$$

Nun hat man zwei Gleichungen, worin noch die Unbekannten y und z vorkommen. Um aus denselben y zu eliminieren, wird man die erste Gleichung mit 11, die zweite mit 19 multiplicieren, und die neuen Gleichungen addieren; dadurch ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} -209y + 176z = -418 \\ 209y - 114z = 418 \\ \hline 62z = 0; \text{ also } z = 0. \end{array}$$

Wird der Wert von z in die Gleichung $11y - 6z = 22$ substituiert, so hat man $11y = 22$, daher $y = 2$.

Substituiert man endlich die Werte von y und z in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in $3x - 2y + 5z = 8$, so ergibt sich $3x - 2 \cdot 2 = 8$, folglich $x = 4$.

Aufgaben.

$$\begin{array}{l} 1. \ x + y = 12, \\ \quad x + z = 10, \\ \quad y + z = 8. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3. \ x + 3y = 30, \\ \quad 3x + 2z = 25, \\ \quad 4x - 3z = 12. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5. \ 3x + y + 2z = 13, \\ \quad x + 2y + 3z = 17, \\ \quad 2x + 3y + z = 12. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7. \ 7x - 2y + 7z = 60, \\ \quad 3x + 4y + 2z = 20, \\ \quad 5x - 8y - 3z + 2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \ x + y = 30, \\ \quad 3y - 2z = 25, \\ \quad x - 2z = 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4. \ 3x - 4y = 6, \\ \quad 2x + 3z = 26, \\ \quad 5y - 6z = 18. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6. \ 6x - 4y + 3z = 28, \\ \quad 4x - y - 3z = 7, \\ \quad 2x - 3y + 4z = 13. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8. \ 4x + 3y - 5z = 13, \\ \quad 3x - 4y + z = 2, \\ \quad -2x + 7y + 3z = 11. \end{array}$$

9. $4x - 2y + 3z = 8,$
 $7x + 8y - z = 59,$
 $10x + 3y - 2z = 49.$
10. $x - 3y + z = 2,$
 $20x - y - 2z = 7,$
 $7x + 9y - 4z = 3.$
11. $x + y + z = 100,$
 $x : y = 5 : 3,$
 $y : z = 3 : 2.$
12. $0.4x + 0.5y + 0.7z = 51,$
 $0.3x + 0.4y + 0.5z = 38,$
 $0.2x + 0.3y + 0.4z = 29.$
13. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} = 18,$
 $\frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19,$
 $\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} = 23.$
14. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612,$
 $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612,$
 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612.$
15. $y + \frac{1}{2}x = 112,$
 $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z = 36,$
 $\frac{2y - z}{z - y} = 3.$
16. $\frac{x + 1}{y + 1} = 2,$
 $\frac{y + 2}{z + 1} = 4,$
 $\frac{z + 3}{x + 1} = \frac{1}{2}.$
17. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13,$
 $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{z}{5} = 10,$
 $3x - y - z = 10.$
18. $\frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{3} = 5,$
 $\frac{x + z}{3} + \frac{y + z}{3} = 6,$
 $2x + 2y - 5z = 6.$
19. $\frac{x}{y + z} = \frac{1}{2}$
 $\frac{y}{x + z} = \frac{1}{5}$
 $\frac{z}{x + y} = 1$
20. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 11,$
 $-\frac{3}{x} + \frac{y}{2} + \frac{8}{z} = 25,$
 $\frac{7}{x} + \frac{y}{4} - \frac{6}{z} = -19.$
21. $x + y + z = a,$
 $x - y + z = b,$
 $x + y - z = c.$
22. $ax + by = m,$
 $ax + cz = n,$
 $by + cz = p,$
23. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = m,$
 $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = n,$
 $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = p.$
24. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c,$
25. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5,$
 $\sqrt{x} + \sqrt{z} = 6,$
 $\sqrt{y} + \sqrt{z} = 7.$
26. $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 4,$
 $\sqrt{x} - \sqrt{z} + \sqrt{y} = 6,$
 $-\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 8.$

$$\begin{aligned}
 27. \quad & u + x = 15, \\
 & u + y = 14, \\
 & x + y = 13, \\
 & x + z = 12.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29. \quad & 3u - x + y + 2z = 20, \\
 & 2u + 3x - y + z = 17, \\
 & u + 2x + 3y - z = 21, \\
 & -u + x + 2y + 3z = 12.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28. \quad & 3u + 5x + y + 2z = 37, \\
 & u + 3x + 3y + 4z = 47, \\
 & 4u + 3x + y + z = 26, \\
 & 2u + 4x + 2y + 3z = 42.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30. \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 6, \\
 & \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}u = 5, \\
 & \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}u = 4, \\
 & \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - \frac{1}{4}u = 3.
 \end{aligned}$$

III. Anwendung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 201. Sind in einer Aufgabe zwei oder mehrere Zahlen unbekannt, so müssen sich zu ihrer Bestimmung aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen bilden lassen, als Unbekannte da sind. Durch die Auflösung dieser Gleichungen erhält man die Werte für die Unbekannten.

Häufig kann eine solche Aufgabe auch auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt werden, indem man die übrigen durch diese Unbekannte und durch gegebene bekannte Zahlen ausdrückt.

Ist z. B. die Zahl 40 in zwei Theile zu theilen, welche eine gegebene Bedingung erfüllen, so kann man die gesuchten Theile mit x und y bezeichnen und hat dann $x + y = 40$ als die eine Gleichung; die zweite Gleichung wird der gegebenen Bedingung gemäß aufgestellt. Man kann aber auch den einen Theil $= x$, und den andern, weil ihre Summe 40 betragen soll, $= 40 - x$ setzen und erhält dann aus der weiteren Bedingung eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten.

Auch hier können einfachere Aufgaben durch bloße Verstandesschlüsse im Kopfe gelöst werden.

Beispiele.

1) Ich denke mir zwei Zahlen, von denen die erste um 3 kleiner ist als die zweite; multipliciere ich die erste mit 4 und subtrahiere vom Producte 18, so erhalte ich die zweite. Welches sind die zwei Zahlen?

a) Im Kopfe. Die um 18 verminderte 4fache erste Zahl ist gleich der zweiten, d. i. um 3 größer als die erste; also ist die um 21 verminderte 4fache erste Zahl gleich dieser Zahl selbst; der Unterschied zwischen dem 4fachen der Zahl und der einfachen Zahl, d. i. das 3fache der Zahl beträgt demnach 21, daher die erste Zahl selbst 7. Die zweite Zahl, welche um 3 größer ist als die erste, ist 10.

b) Algebraisch mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es seien x und y die beiden Zahlen. Da die erste um 3 kleiner ist als die zweite, so hat man die Gleichung

$$x = y - 3.$$

Nach der zweiten Bedingung der Aufgabe muß das 4fache der ersten Zahl um 18 vermindert die zweite Zahl geben, also die Gleichung

$$4x - 18 = y$$

stattfinden. Durch die Auflösung dieser zweier Gleichungen erhält man $x = 7$ und $y = 10$.

c) Algebraisch mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten. Nennt man x die erste Zahl, so ist $x + 3$ die zweite. Man hat daher nach den Bedingungen der Aufgabe

$$4x - 18 = x + 3,$$

woraus $x = 7$, und daher $x + 3 = 10$ hervorgeht.

Probe. Die zweite Zahl 10 ist wirklich um 3 größer als die erste 7; ferner gibt das 4fache von 7 weniger 18 zur Differenz 10, d. i. die zweite Zahl.

2) Ein Vater ist gegenwärtig 2mal so alt als sein Sohn; vor 15 Jahren war er 5mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Sohn sei x Jahre alt, so ist das Alter des Vaters $2x$ Jahre; vor 15 Jahren war also der Vater $2x - 15$, der Sohn $x - 15$ Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

woraus man $x = 20$ und $2x = 40$ erhält. Der Vater ist also 40, der Sohn 20 Jahre alt.

Man löse diese Aufgabe auch mit Hilfe zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten auf.

3) Unter drei Personen werden 100 fl. so vertheilt, daß B doppelt so viel als A, und C um 10 fl. mehr als die Hälfte dessen bekommt, was A und B zusammen erhalten. Wie viel bekommt jede der drei Personen?

a) Mittelst dreier Gleichungen. Es seien x, y, z die Zahlen der Gulden, welche folgeweise A, B und C bekommen, so ist erstlich

$$x + y + z = 100.$$

Da B doppelt so viel als A bekommt, so ist ferner

$$y = 2x.$$

Da endlich C um 10 fl. mehr als die Hälfte dessen bekommt, was A und B zusammen erhalten, so hat man auch

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man nun $x = 20$, $y = 40$ und $z = 40$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung.

Es sei x die Anzahl Gulden, welche A bekommt,

so ist $2x$ " " " " B "

$\frac{x + 2x}{2} + 10$ " " " " C "

2

daher

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

welche Gleichung $x = 20$ gibt.A bekommt also $x = 20$ Gulden,B " " $2x = 40$ "C " $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ "

4) Zwei Körper vom specifischen Gewichte s_1 und s_2 sollen so mit einander verbunden werden, daß der entstehende Körper p Kg. wiege und das specifische Gewicht s habe; wie viel Kg. eines jeden Körpers hat man zu nehmen?

Bezeichnet x die Anzahl Kg., welche man vom ersten Körper, und y die Anzahl Kg., welche man vom zweiten Körper zu der Verbindung nehmen muß, so ist der Cubikinhalte des ersten Körpers $\frac{x}{s_1}$, und jener des zweiten Körpers $\frac{y}{s_2}$, während $\frac{p}{s}$ der Cubikinhalte der Verbindung ist.

Da die Summe der absoluten Gewichte der beiden Bestandtheile dem absoluten Gewichte der Verbindung gleich sein muß, so ist

$$x + y = p.$$

Da ferner auch die Summe der Cubikinhalte der Bestandtheile dem Inhalte der Verbindung gleich sein muß, so hat man

$$\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s},$$

woraus sich

$$x = \frac{s_1 p (s - s_2)}{s (s_1 - s_2)} \text{ und } y = \frac{s_2 p (s_1 - s)}{s (s_1 - s_2)}$$

ergibt.

A u f g a b e n.

1.* Die Summe zweier Zahlen ist 47, ihre Differenz 9; welches sind die beiden Zahlen?

2.* Von welchen zwei Zahlen ist sowohl die Summe als der Quotient gleich 3?

3.* Die Differenz zweier Zahlen ist 12, das 3fache der ersten gleich dem 5fachen der zweiten; welche Zahlen sind es?

4. Die Hälfte einer Zahl ist um 18 größer als der 5te Theil einer zweiten Zahl; das Doppelte der zweiten Zahl ist um 32 größer als die erste. Welches sind die beiden Zahlen?

5. Ich denke mir zwei Zahlen, welche um 1 verschieden sind; dividire ich die größere durch 4 und die kleinere durch 5, so sind die Quotienten ebenfalls um 1 verschieden. Welche Zahlen habe ich mir gedacht?

6. Die Differenz zweier Zahlen ist 10; subtrahiert man die größere von 135, die kleinere von 105, so verhalten sich die Reste wie 9 : 7. Welche Zahlen sind es?

7. Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3; addiert man zu jeder 16, so verhalten sich die Summen wie 10 : 13. Wie heißen die zwei Zahlen?

8. Vermehrt man die erste von zwei Zahlen um 10, so ist sie 4mal so groß als die zweite; vermehrt man die zweite um 16, so ist sie 3mal so groß als die erste. Welche Zahlen genügen diesen Bedingungen?

9.* Man theile 50 so in zwei Theile, daß der eine Theil um 6 kleiner sei als der andere.

10. Die Zahl 32 soll in drei Theile so getheilt werden, daß der erste um 5, der zweite um 3 größer sei als der dritte; welches sind diese Theile?

11. Die Zahl 48 in drei Theile zu theilen, welche sich wie 4 : 5 : 7 verhalten.

12. Man soll die Zahl 76 in zwei Theile so theilen, daß, wenn der größere durch 11 und der kleinere durch 7 dividiert wird, die Summe der Quotienten gleich 8 wird.

13.* Zähler und Nenner eines Bruches betragen zusammen 16; vermehrt man den Zähler um 2 und vermindert den Nenner um 2, so erhält man den umgekehrten Bruch. Wie heißt der gegebene Bruch?

14. Welcher Bruch geht seinem Werte nach in $\frac{1}{4}$ über, wenn man vom Zähler und Nenner 3 subtrahiert; in $\frac{1}{2}$, wenn man zum Zähler und Nenner 5 addiert?

15. Von drei Zahlen ist die erste gleich der halben Summe der beiden anderen, die zweite gleich dem dritten Theile von der Summe der ersten und dritten, die letzte um 10 kleiner als die Summe der beiden ersten. Welches sind die Zahlen?

16. Suche drei Zahlen von folgender Beschaffenheit: Vermindert man die erste und zweite um je 3, so verhalten sich die Reste wie 1 : 2; vermindert man die erste und dritte um je 4, so verhalten sich die Reste wie 1 : 3; vermehrt man die zweite und dritte um je 5, so verhalten sich die Summen wie 3 : 4.

17.* In einem Landtage, in welchem 64 Abgeordnete stimmten, wurde ein Antrag mit einer Stimmenmehrheit von 10 angenommen. Wie viele stimmten dafür, wie viele dagegen?

18.* Mitten im Mai ist der Tag an einem Orte um 6 Stunden 15 Minuten länger als die Nacht; wie lang ist da der Tag und wie lang die Nacht?

19.* Ein Knabe sagte: Ich und mein Vater haben zusammen 40 Altersjahre; mein Alter beträgt aber nur den 5ten Theil von dem des Vaters. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

20. Ein Vater, der 25 Jahre älter als sein Sohn ist, wird nach 5 Jahren doppelt so alt als dieser sein. Wie alt ist jeder?

21. Ein Vater ist jetzt dreimal so alt als sein Sohn, nach 12 Jahren wird er doppelt so alt als sein Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

22. Drei Personen theilen eine Summe von 350 fl. in der Art, daß B 18 fl. mehr als C und A 14 fl. mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder?

23. Unter drei Personen wird eine bestimmte Summe so vertheilt, daß B 20 fl. weniger als A, und C 20 fl. weniger als B bekommt; die ganze Summe ist um 25 fl. größer als das 4fache dessen, was C bekommt. Wie viel erhält jeder?

24.* A hat in zwei Rollen zusammen 206 fl., in der ersten 44 fl. mehr als in der zweiten; wie viel in jeder?

25. Von zwei Personen besitzt jede eine Summe Geldes. Gibt A an B 4 fl. ab, so haben beide gleich viel; gibt aber B an A 5 fl., so hat A doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat jeder?

26. Auf einem Tische lag eine bestimmte Summe Geldes. A sagt: ich habe 2mal so viel Geld; B, ich habe 3mal so viel Geld; C, ich habe die Hälfte von dem, was A und B zusammen haben. Wenn nun alle zusammen 240 fl. hatten, wie viel Geld lag auf dem Tische und wie viel besaß jeder?

27.* In einer Gesellschaft befinden sich 88 Personen, Männer und Frauen, und es verhält sich die Anzahl der Männer zu jener der Frauen wie 5 : 6. Wie viel Männer und wie viel Frauen zählt die Gesellschaft?

28. In einer Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen; nachdem aber später 3 Herren mit 4 Damen dazu kamen, waren 2mal so viel Herren als Damen. Wie viel Herren und Damen waren Anfangs da?

29. In einer Gesellschaft waren 2mal so viel Männer als Frauen; als 6 Männer mit ihren Frauen fortgiengen, blieben 5mal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und wie viel Frauen waren Anfangs in der Gesellschaft?

30.* Ein Capital trägt jährlich 420 fl. Zinsen; wäre es zu 1% höher angelegt, so würde es 84 fl. Zinsen mehr tragen. Wie groß ist das Capital, wie groß das Procent?

31. Jemand hat zwei Capitalien, das eine zu 4%, das andere zu 5%, angelegt; sie bringen ihm zusammen jährlich 1000 fl. Zinsen. Hätte er jedes Capital zu 1% höher ausgeliehen, so bekäme er jährlich 220 fl. Zinsen mehr. Wie groß sind die Capitalien?

32. Zwei Maurer sollen eine Mauer auführen; arbeiten sie zusammen, so werden sie in 12 Tagen fertig; arbeitet A 2 Tage und B 3 Tage, so führen sie in dieser Zeit den 5ten Theil der ganzen Mauer auf. Wie viel Tage braucht jeder allein zu der ganzen Mauer?

33. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte legte A 10000 fl., B 12000 fl. ein. Der Antheil des Gewinnes betrug für A 800 fl. weniger als für B. Wie groß war der Gewinn eines jeden?

34. Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund, unter Wasser getaucht nur $19\frac{5}{8}$ Pfund; wenn nun Gold im Wasser scheinbar $\frac{1}{9}$ und Silber $\frac{1}{6}$ von seinem Gewichte verliert, wie viel Gold und wie viel Silber war in der Krone?

35. Jemand hat zweierlei Wein. Mischt er 12 Liter des besseren Weines mit 4 Liter des schlechteren, so kostet 1 Liter der Mischung 52 kr.; mischt er aber 6 Liter des besseren mit 10 Liter des schlechteren, so kommt das Liter der Mischung auf 46 kr. Wie viel kostet 1 Liter jeder Sorte?

36. Zwei Fässer enthalten 351 Liter einer Flüssigkeit; läßt man aus dem ersten den sechsten und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so ist in beiden gleich viel enthalten. Wie viel Liter enthielt jedes Faß?

37. In jedem von zwei Fässern ist eine gewisse Menge Wein. Gießt man aus dem ersten in das zweite so viel, als schon darin ist; dann aus dem zweiten in das erste so viel, als jetzt darin ist; dann wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als darin übriggeblieben war; so enthalten beide Fässer gleich viel Wein, nämlich 72 Liter. Wie viel Liter enthielt jedes Faß?

38. Von zwei Röhren liefert die eine in 10 Minuten 17 Liter weniger Wasser, als die andere in 9 Minuten; beide zusammen liefern in 5 Minuten 305 Liter. Wie viel Liter liefert jede in einer Minute?

39. Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren gefüllt werden. Wenn die erste 2, die zweite $1\frac{1}{2}$ Stunden offen ist, so werden $25\frac{1}{2}$ Hektoliter gefüllt; ist die erste nur $1\frac{3}{5}$, die zweite $1\frac{1}{3}$ Stunden offen, so geben sie $3\frac{9}{10}$ Hektoliter weniger. Wie viel Liter gibt jede Röhre in einer Stunde?

40. Gehen zwei Fußgänger, deren Entfernung 9 Kilometer beträgt, einander entgegen, so treffen sie sich nach 1 Stunde; gehen sie aber nach derselben Richtung, so holt der schnellere den andern in 5 Stunden ein. Wie viel Kilometer legt jeder in einer Stunde zurück?

IV. Wiederholungsaufgaben.

1.* Wie viel ist

a) 5mal $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{8}$, $2\frac{3}{5}$, $12\frac{7}{10}$, $27\frac{3}{4}$, $55\frac{4}{9}$, $138\frac{9}{16}$?

b) 8mal $\frac{7}{16}$, $1\frac{5}{8}$, $7\frac{3}{4}$, $15\frac{4}{5}$, $48\frac{9}{10}$, $61\frac{17}{24}$, $104\frac{5}{12}$?

2. $(11\frac{7}{12} + 9\frac{4}{15} + 7\frac{5}{8}) \cdot 64 - (2\frac{5}{6} + 8\frac{7}{10} + 13\frac{3}{8}) \cdot 54$.

3.* Wie viel betragen die Zinsen von

a) 350 fl. à 4% in 3 Jahren? b) 375 fl. à 6% in 2 Jahren?

c) 780 fl. à 5% " 4 " d) 1600 fl. à $4\frac{1}{2}$ % in 3 Jahren?

4.* Welches Capital bringt zu $3\frac{1}{3}$ % jährlich $62\frac{1}{2}$ fl. Zinsen?

5.* Ein Capital trägt zu 4% jährlich 321 fl. Zinsen; wie lange muß das Capital anliegen, damit es zu $3\frac{1}{2}$ % dieselben Zinsen bringe?

6. A bietet auf ein Haus baar 8850 fl., B 9000 fl., wovon er die Hälfte baar, die andere Hälfte nach 6 Monaten zahlen will. Wer bietet mehr, wenn man 6% Zinsen rechnet?

7. Ein Wechsel über 2345 fl., per medio November zahlbar, wird am 5. September zu 6% discountirt; wie viel erhält der Verkäufer für denselben?

8. Ein Hamburger Kaufmann zahlt für einen Wiener eine Rechnung von 12820 Mark, trassirt dagegen auf den Wiener à 178 Mark pr. 100 fl. ö. W. und berechnet sich $\frac{1}{2}\%$ Provision und 1% Senfarie. Auf wie viel fl. ö. W. lautet die Tratte?

$$9. \frac{2a^3x^5}{3b^3y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{b^2y^2}{a^2}$$

$$10. \frac{7(3x^4y^3)^2}{5(2ab^2)^3} \cdot \frac{3(2a^2b^3)^2}{4(3x^3y^2)^3}$$

$$11. \frac{2}{2x-1} - \frac{9}{3x-1} + \frac{4}{2x-3} \quad 12. \frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x-1}{6x+6} - \frac{3x-4}{3x+3}$$

13. Wie viel fl. Papiergeld muß man für 3248 fl. Silber zahlen, wenn das Agio auf $4\frac{1}{2}\%$ steht?

14. Wenn für fl. 1114 „ 8 Papiergeld 950 fl. Silber gekauft wurden, auf wie viel % stand das Silberagio?

15. Ein Wirt gewinnt an einem Hektoliter Wein 9 fl. oder 25%; wie theuer hat er das Hektoliter gekauft?

16. Ein Kaufmann erhält 1400 Kg., wovon 100 Kg. 12 fl. kosten, und 1225 Kg. zu $15\frac{1}{2}$ fl. pr. 100 Kg.; die Speesen betragen 12 fl. 75 fr. Wie viel % wird gewonnen, wenn das Kg. zu 20 fr. verkauft wird?

$$17. 8\frac{1}{4}x - 4\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}x + 1 = 0. \quad 18. \frac{2+x}{3+2x} - \frac{3}{2} = \frac{3-x}{3+x}$$

$$19. \frac{a-x}{b-x} = \frac{a+x}{b+x} \quad 20. \frac{ax-2a}{ax-2b} = \frac{ax-2b}{ax+2a}$$

$$21. \sqrt{x} + \sqrt{3x} = 2. \quad 22. 2\sqrt{3x-1} = \frac{5x+8}{\sqrt{3x-1}}$$

23.* Von welcher Zahl ist das 8fache um 6 kleiner als 50?

24.* Welche Zahl ist um ihren 10ten Theil kleiner als 77?

25. Ich multipliciere eine gedachte Zahl mit 2, setze ihr rechts die Ziffer 5 dazu, dividire dann durch 11, so gibt der um 1 vermehrte Quotient das Doppelte der gedachten Zahl. Welche Zahl ist es?

26. Von einem Orte wird ein Courier abgeschickt, der alle 5 Stunden 54 Kilometer macht; 4 Stunden später wird ihm ein anderer Courier nachgeschickt, der alle 3 Stunden 42 Kilometer macht. Nach wie viel Stunden wird der zweite Courier den ersten einholen?

27.* 15 Meter kosten 64 fl.; wie viel kosten 40 Meter?

28.* Eine Röhre gibt in 1 Stunde $6\frac{2}{3}$ Hektoliter Wasser, eine zweite Röhre in derselben Zeit $7\frac{1}{2}$ Hektoliter; in wie viel Stunden erhält man $77\frac{1}{12}$ Hektoliter Wasser, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind?

29. Wie viel Sauerstoff und Stickstoff befindet sich in einem luft-erfüllten Raume von 87 Cub.-Meter, wenn in 100 Theilen atmosphärischer Luft 21 Theile Sauerstoff und 79 Theile Stickstoff enthalten sind?

$$30. \sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt{50}. \quad 31. 5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{135}.$$

$$32. \sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + \sqrt{25xy^3}.$$

$$33. \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8}.$$

$$34. (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^3}) (\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^7}).$$

$$35. (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2. \quad 36. (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2.$$

$$37. 1 : \sqrt{0.25}.$$

$$38. 3\sqrt{8} : 2\sqrt{2}.$$

$$39. \frac{7}{\sqrt{8}} : \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

$$40. \sqrt{\frac{3}{5}} : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

41. Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren: 240, 356, 540, 1536, 4158, 5250, 6048.

42. Von einer Schuld soll $\frac{1}{3}$ am 15. Januar, $\frac{1}{4}$ am 31. Januar, $\frac{1}{6}$ am 28. Februar und der Rest am 31. März gezahlt werden. Wann kann man die ganze Schuld auf einmal abtragen?

43.* Drei Personen theilen 360 fl. so unter einander, daß B doppelt so viel als A, und C 3mal so viel als A erhält; wie viel kommt auf jeden?

44. Wie viel erhält jeder von 688 fl., wenn A so oft 2 fl. als B 3 fl. und C so oft 6 fl. als B 5 fl. erhalten soll?

45. Jemand hinterließ ein Vermögen von 15650 fl., welches unter seine vier Erben in folgender Weise zu theilen ist: B soll 250 fl. mehr als A, C 300 fl. weniger als A und B zusammen, D 750 fl. weniger als A, B und C zusammen erhalten. Wie viel wird jeder bekommen?

$$46. \sqrt{269361}. \quad 47. \sqrt{6461764}. \quad 48. \sqrt{1292114916}.$$

$$49. \sqrt[3]{592704}. \quad 50. \sqrt[3]{125751501}. \quad 51. \sqrt{2918076589}.$$

52.* Jemand mischt 5 Eiter à 36 kr. und 7 Eiter à 47 kr.; wie viel kostet 1 Eiter der Mischung?

53. Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 1 Theil Gyps und 2 Theile Kies; wie viel von jedem braucht man zu einer Masse von 42 Kg.?

54. Jemand kauft mit $4\frac{1}{5}\%$ Papiergeld verzinsliche Staatsschuldverschreibungen zum Course $65\frac{1}{2}$; wie viel % Zinsen trägt das darin angelegte Capital?

55. Wie viel kosten 3500 fl. 5% Silber-Pfandbriefe der österr. Boden-Creditanstalt à 107 $\frac{3}{4}$ mit Zinsen für 136 Tage?

56. Wenn 1 Kg. feines Gold 1395 fl. gilt, wie hoch kommen $4\frac{1}{2}$ Kg. Münzgold von 900 Feingehalt?

57. Wie viel fl. ö. W. kosten $95\frac{1}{2}$ Meter, wenn $68\frac{1}{2}$ engl. Yard mit $17\frac{1}{2}$ Pfund Sterling bezahlt werden, und wenn 17 Yard = 16 Meter und 10 Pfund St. = 115 fl. ö. W. sind?

$$\begin{array}{rcl}
 58. & 2x - 3y + 4z - 5u + 6w & = 6, \\
 & 3x + y - 5z + u - 3w & = 3, \\
 & -x + 4y + 2z - 5u + 3w & = 8, \\
 & x - y + z - u + w & = 3, \\
 & x + y + z + u + w & = 15.
 \end{array}$$

59.* Die Zahl 150 so in zwei Theile zu theilen, daß der eine $\frac{2}{5}$ vom andern sei.

60. 1200 fl. sollen unter drei Personen so vertheilt werden, daß die zweite 3mal so viel als die erste weniger 20 fl., die dritte 4mal so viel als die zweite und noch 20 fl. erhält. Wie viel bekommt jede?

61. Ich denke mir zwei Brüche mit demselben Nenner; ihre Differenz beträgt $\frac{3}{4}$, das Verhältniß ihrer Zähler 5 : 1; vermindert man aber den größeren Zähler um 12, und vermehrt den kleineren um 12, so erhält man das umgekehrte Verhältniß 1 : 5. Wie heißen die zwei Brüche?

62. Jemand hat zwei Fässer mit Wein. Gießt er aus dem ersten den 5ten Theil in das zweite, und dann aus diesem den 5ten Theil in das erste, so sind in jedem Fasse 80 Liter. Wie viel Liter waren Anfangs in jedem Fasse?

63. Ein Weinhändler hat zwei Sorten Wein, das Hektoliter zu 40 fl. und das Hektoliter zu 60 fl., und will daraus 15 Hektoliter à 48 fl. mischen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

64. Jemand legt am Anfange eines jeden Jahres 2000 fl. zu 5% Zins von Zins an; am Ende des dritten Jahres fordert er sämtliche Capitalien sammt Zinsen von Capital und Zinsen ein; wie groß wird seine Forderung sein?

65. Welchen baren Wert haben 7520 fl., zahlbar in 8 Jahren, bei 5% Zinseszinsen?

66. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte legt ein: A sogleich 3000 fl. und nach 1 Jahr noch 2000 fl.; B sogleich 2000 fl. und nach $1\frac{1}{2}$ Jahren noch 2400 fl.; C sogleich 4000 fl. und nach 2 Jahren noch 1600 fl. Das Geschäft dauert 3 Jahre und bringt einen Gewinn von 9050 fl. Wie viel wird jeder von diesem Gewinn erhalten?

Zehnter Abschnitt.

Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

I. Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.

§. 202. Eine Gleichung, in welcher nach Wegschaffung der Nenner und Wurzeln und Auflösung der Klammern die höchste vorkommende Potenz der Unbekannten die zweite ist, heißt eine Gleichung des zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung.

Die quadratischen Gleichungen werden in reine und gemischte eingetheilt. Eine reine quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt; z. B. $x^2 = 5$, $x^2 - a = b$. Eine gemischte quadratische Gleichung ist eine solche, welche außer dem Quadrate der Unbekannten auch die erste Potenz derselben enthält; z. B. $2x^2 = 5x - 9$, $x^2 + ax = b$.

§. 203. Jede reine quadratische Gleichung kann durch Anwendung der in §. 109 angeführten Regeln, und, wenn sie Wurzeln enthält, durch Wegschaffung derselben (§. 188) auf die Form

$$x^2 = a,$$

wo a eine positive oder negative bekannte Zahl bezeichnet, gebracht werden.

Es sei z. B. die reine quadratische Gleichung $x^2 = 9$ gegeben.

Wenn man aus gleichen Größen dieselbe Wurzel auszieht, so erhält man wieder Gleiches. Zieht man daher aus beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9} \quad \text{oder} \quad x = \pm 3.$$

Der Wert von x kann also $+3$ oder -3 sein, da sowohl $(+3)^2 = 9$, als auch $(-3)^2 = 9$ ist.

Hat man allgemein die Gleichung $x^2 = a$ aufzulösen, so ergibt sich durch Ausziehen der Quadratwurzel aus beiden Theilen

$$x = \pm \sqrt{a}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat daher immer zwei Wurzeln, welche denselben absoluten Wert, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Ist a positiv, so sind beide Wurzeln reell; ist a negativ, so sind beide Wurzeln imaginär.

Beispiele.

$$1) \quad x^2 = 36 \\ x = \pm 36 \sqrt{=} \pm 6.$$

$$3) \quad \frac{x-4}{2x+1} = \frac{1}{x+6} \\ (x-4)(x+6) = 2x+1 \\ x^2 - 4x + 6x - 24 = 2x + 1 \\ x^2 = 25 \\ x = \pm 5.$$

$$2) \quad x = -36 \\ x = \pm \sqrt{-36}.$$

$$4) \quad \sqrt{33+2x-x^2} = x+1 \\ 33+2x-x^2 = (x+1)^2 \\ 33+2x-x^2 = x^2+2x+1 \\ -2x^2 = -32 \\ x^2 = 16 \\ x = \pm 4.$$

§. 204. Die allgemeine Form einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + ax = b,$$

wo a und b positive oder negative Zahlen bezeichnen.

Es sei z. B. die gemischte quadratische Gleichung $x^2 + 8x = 20$ aufzulösen.

Da der erste Theil dieser Gleichung zwei Glieder enthält, so ist er nicht das Quadrat eines eingliedrigen Ausdrucks; er kann aber auch nicht das vollständige Quadrat eines Binoms sein, da dasselbe nach der bekannten Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus drei Gliedern bestehen muß. Um also aus dem ersten Theile die Quadratwurzel auszuziehen und dadurch den Wert für die Unbekannte bestimmen zu können, muß zu beiden Theilen eine solche Zahl addiert werden, daß der erste Theil das vollständige Quadrat eines Binoms wird. Betrachtet man nun x^2 als das Quadrat des ersten Gliedes, somit x als das erste Glied des Binoms, ferner $8x$ als das doppelte Product, also $4x$ als das einfache Product beider Glieder, so stellt 4 das zweite Glied vor; es fehlt daher, damit der erste Theil der Gleichung das vollständige Quadrat des Binoms $x + 4$ werde, noch das Quadrat des zweiten Gliedes, nämlich 16 . Addiert man daher zu beiden Theilen der gegebenen Gleichung 16 , so ergibt sich

$$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16, \text{ oder}$$

$$(x + 4)^2 = 36,$$

und, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht

$$x + 4 = \pm \sqrt{36}, \text{ oder } x + 4 = \pm 6, \text{ daher}$$

$$\text{entweder} \quad x = -4 + 6 = +2,$$

$$\text{oder} \quad x = -4 - 6 = -10.$$

$$\text{Probe. } (+2)^2 + 8 \cdot +2 = 4 + 16 = 20, \text{ und auch} \\ (-10)^2 + 8 \cdot -10 = 100 - 80 = 20.$$

Ist allgemein die Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

gegeben, so muß man, um den ersten Theil zu einem vollständigen Quadrate zu ergänzen, zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten von x , d. i. $\frac{a^2}{4}$ addieren. Man erhält dadurch

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4},$$

und, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel zieht,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}, \text{ folglich}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Die Gleichung hat also folgende zwei Wurzeln:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Hieraus folgt:

In einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist die Unbekannte gleich dem halben Coefficienten der ersten Potenz mit entgegengesetzten Vorzeichen, vermehrt oder vermindert um die Quadratwurzel aus der Summe des bekannten Gliedes und des Quadrates jenes halben Coefficienten.

Ist b positiv, so sind, da $\frac{a^2}{4}$ stets positiv sein muß, die beiden Wurzeln reell.

Ist b negativ, so sind die zwei Wurzeln auch reell, so lange $\frac{a^2}{4} > b$ ist; für $\frac{a^2}{4} = b$ ist die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null und die beiden Wurzeln sind einander gleich und reell; für $\frac{a^2}{4} < b$ endlich sind beide Wurzeln imaginär.

Beispiele.

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 + 6x &= 112 \\ x &= -3 \pm \sqrt{112 + 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{121} \\ &= -3 \pm 11 \\ x_1 &= 8, \quad x_2 = -14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^2 - 12x &= -35 \\ x &= 6 \pm \sqrt{-35 + 36} \\ &= 6 \pm \sqrt{1} \\ &= 6 \pm 1 \\ x_1 &= 7, \quad x_2 = 5. \end{aligned}$$

$$3) \quad 8x^2 - 10x = 3$$

$$x^2 - \frac{10}{8}x = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{25}{64}}$$

$$= \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64}}$$

$$= \frac{5}{8} \pm \frac{7}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}$$

$$4) \quad \sqrt{3x-2} - 1 = \sqrt{4x-7}$$

$$3x-2-2\sqrt{3x-2}+1=4x-7$$

$$-x+6=2\sqrt{3x-2}$$

$$x^2-12x+36=4(3x-2)$$

$$x^2-24x=-44$$

$$x=12 \pm \sqrt{-44+144}$$

$$=12 \pm \sqrt{100}$$

$$=12 \pm 10$$

$$x_1=22, \quad x_2=2.$$

$$5) \quad x^2 + (3a-2b)x = 6ab$$

$$x = -\frac{3a-2b}{2} \pm \sqrt{\left\{6ab + \frac{(3a-2b)^2}{4}\right\}}$$

$$= -\frac{3a-2b}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{9a^2+12ab+4b^2}{4}\right\}}$$

$$= -\frac{3a-2b}{2} \pm \frac{3a+2b}{2}$$

$$x_1=2b, \quad x_2=-3a.$$

§. 205. Zwischen den bekannten Zahlen einer geordneten quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln finden folgende Beziehungen statt:

1. Die Summe der beiden Wurzeln ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten.

2. Das Product der beiden Wurzeln ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen von der Unbekannten freien Gliede.

Beweis. Bezeichnet man die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax = b$ mit x_1 und x_2 , so ist

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}};$$

daher

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -a, \text{ und}$$

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b - \frac{a^2}{4} = -b.$$

3. B. Aus $x^2 - 6x = 16$ folgt $x_1 = 8$ und $x_2 = -2$; und man hat
 $x_1 + x_2 = 6,$ $x_1 x_2 = -16.$

Mit Hilfe der vorhergehenden zwei Sätze kann man für zwei gegebene Wurzeln sogleich die Gleichung bilden, welcher sie angehören.

Sind z. B. die Wurzeln 4 und -6 gegeben, so hat man

$$x_1 + x_2 = -2 \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = -24;$$

daher ist

$$x^2 + 2x = 24$$

die Gleichung, welche 4 und -6 zu Wurzeln hat.

Aufgaben.

1. $x^2 = 49$.
2. $x^2 - 64 = 0$.
3. $x^2 = 56169$.
4. $x^2 - 0.0729 = 0$.
5. $\frac{1}{6}x^2 = 54$.
6. $3 : x = x : 12$.
7. $5x^2 - 1 = 2 + 4x^2$.
8. $3x^2 - 4093 = x^2 + 139$.
9. $(2x - 3)(2x + 3) = 7$.
10. $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$.
11. $\frac{x}{150} = \frac{3}{2x}$.
12. $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{12}{x}$.
13. $\frac{x - 8}{x + 8} = \frac{32 - x}{32 + x}$.
14. $\frac{4x + 3}{5(x + 2)} = \frac{7x + 2}{16x + 13}$.
15. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{5}{2}$.
16. $\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3x^2 - 7}{x^2 - 1}$.
17. $\sqrt{\frac{x + 2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{x - 2}}$.
18. $\sqrt{\frac{9 + x}{9 - x}} = 1 + \frac{10}{\sqrt{9 - x}}$.
19. $x^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$.
20. $(a + x)(a - x) = 2ab$.
21. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = 0$.
22. $\frac{a - x}{1 - ax} = \frac{1 - bx}{b - x}$.
23. $\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = 26$.
24. $2x \sqrt{a^2 + x^2} + 2(a^2 + x^2) = 5a^2$.
25. $x^2 - 4x = 21$.
26. $x^2 - 12x = -35$.
27. $x^2 + 12x = 45$.
28. $x^2 - 16x + 63 = 0$.
29. $x^2 - 4x = -4$.
30. $x^2 - 2x = 15$.
31. $x^2 - 6x + 7 = 0$.
32. $x^2 + 20x = 96$.
33. $x^2 + 3x = 10$.
34. $x^2 + x = 56$.
35. $x^2 + 5x - 36 = 0$.
36. $x^2 + 17x = -70$.
37. $5x^2 + 7x = 24$.
38. $8x^2 + 26x = -21$.
39. $12x^2 = 20x - 3$.
40. $5x^2 + 13x = -17$.
41. $x^2 + 0.3x = -0.02$.
42. $25x^2 - 45x = 7.36$.
43. $x^2 - \frac{3x}{2} = -\frac{11}{16}$.
44. $x^2 - \frac{5x}{6} = -\frac{1}{6}$.
45. $\frac{x^2}{4} + \frac{10x}{5} = 8\frac{1}{4}$.
46. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9$.

47. $x + \frac{1}{x-2} = 3.$

48. $\frac{10x+3}{3x+2} = x.$

49. $\frac{6x+5}{2x-3} = 4x-15.$

50. $\frac{13x+42}{9x-4} = \frac{11(x+2)}{7x-4}.$

51. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = 5.$

52. $\frac{6}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{1}{4}.$

53. $\frac{3x-4}{x-4} - 9 = \frac{2-x}{2}.$

54. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-4} = 5.$

55. $(x+3)^2 + (x+5)^2 = 514.$

56. $(x+3)(x+4) + (x-3)(x-1) = x(x+11).$

57. $\frac{x+11}{x} + \frac{4x+50}{x^2} = 6.$

58. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+1} = \frac{12}{x+2}.$

59. $\frac{4x+3}{7} - \frac{4(x-3)}{5} = \frac{19-2x}{x-5}.$

60. $\frac{3}{x-8} - \frac{2}{x-9} = \frac{2}{x+12}.$

61. $\frac{7x-2}{3x+2} + \frac{x+2}{3x-2} = \frac{6x^2+9x+5}{9x^2-4}.$

62. $x + 7\sqrt{x} = 30.$

63. $2x - 3\sqrt{x-1} = 4.$

64. $\sqrt{7x-13} - 12 = \sqrt{5x+1}.$

65. $\sqrt{8x-7} + 3 = \sqrt{15x+4}.$

66. $\sqrt{6x+25} = \sqrt{6x-24} + \sqrt{x-99}.$

67. $\sqrt{4x-11} + \sqrt{5x+25} = \sqrt{18x+19}.$

68. $\sqrt{2(7x+30)} + 2\sqrt{4x+25} = 2\sqrt{15x+79}.$

69. $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$

70. $x^2 - (a-b) = ab.$

71. $x^2 - 4ax = 96^2 - 4a^2.$

72. $4x^2 - 4ax = b^2 - a^2.$

73. $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(1-x)^2}.$

74. $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2.$

75. $\frac{x}{x^2+1} = \frac{ab}{a^2+b^2}.$

76. $\frac{x^2+1}{a^2+b^2} = \frac{2x}{a^2-b^2}.$

77. $x + \frac{1}{abx} = \frac{a+b}{ab}.$

78. $\frac{1}{x-a} + \frac{x+2a}{a} = 4 + \frac{1}{a}.$

79. $ax - b\sqrt{x} = c.$

80. $\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}.$

Bilde Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:

81. $+5$ und $-5.$

82. $+3\sqrt{2}$ und $-3\sqrt{2}.$

83. -3 und $+7.$

84. 12 und $7.$

85. 10 und $-1.$

86. -9 und $-13.$

87. $\frac{3}{2}$ und $\frac{11}{2}.$

88. $\frac{7}{3}$ und $-\frac{2}{3}.$

89. 0.7 und -2.4 .

90. 1.36 und 0.75 .

91. $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$.

92. $\frac{a + b}{2}$ und $\frac{a - b}{2}$.

II. Anwendung der Gleichungen des zweiten Grades.

§. 206. Wenn die Bedingungen einer Aufgabe, in die algebraische Zeichensprache übersetzt, auf eine Gleichung führen, in welcher die Unbekannte in der zweiten Potenz erscheint, so wird der Wert dieser Unbekannten durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt. Man erhält dadurch jedesmal zwei Werte, welche in arithmetischer Beziehung gleiche Berechtigung haben; bei angewandten Aufgaben muß man jedoch noch untersuchen, ob die Bedingungen der Aufgabe durch beide oder nur durch einen der gefundenen Werte erfüllt werden.

Beispiele.

1) Welche Zahl gibt mit ihrem dritten Theile multipliciert 972 zum Producte?

Heißt x die gesuchte Zahl, so ist $\frac{x}{3}$ ihr dritter Theil, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$x \cdot \frac{x}{3} = 972, \text{ oder } x^2 = 2916,$$

woraus $x = \pm 54$ folgt.

2) Von zwei Stück Tuch kostet jedes 120 fl.; in dem zweiten sind 6 Meter mehr als in dem ersten, dagegen kostet jedes Meter des ersten 1 fl. mehr, als jedes Meter des zweiten. Wie viel Meter enthält jedes Stück?

Enthält das erste Stück x Meter, so enthält das zweite $x + 6$ Meter; 1 Meter des ersten Stückes kostet $\frac{120}{x}$ fl., 1 Meter des zweiten $\frac{120}{x + 6}$ fl. Man hat daher nach der Bedingung der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x + 6} + 1,$$

oder nach vollzogener Ordnung

$$x^2 + 6x = 720,$$

woraus sich $x = 24$ oder $x = -30$ ergibt.

Der negative Wert von x hat nach der Natur der Aufgabe keinen Sinn. Es enthält also

das erste Stück $x = 24$ Meter,

„ zweite „ $x + 6 = 30$ „

3) Wie viel Secunden braucht ein mit der Geschwindigkeit 200 Meter senkrecht in die Höhe geworfener Körper, um eine Höhe von 400 Meter

zu erreichen, wenn ein freifallender Körper in der ersten Secunde eine Strecke von 4·9 Meter zurücklegt?

In x Secunden würde der Körper, dem die Geschwindigkeit 200 Meter mitgetheilt wird, die Höhe $200x$ Meter erreichen; in derselben Zeit aber würde er auch vermöge der Schwere, wie die Physik lehrt, einen Fallraum von $4·9x^2$ Meter zurücklegen. Für die wirklich zurückgelegte Strecke 400 Meter hat man daher die Gleichung

$$200x - 4·9x^2 = 400,$$

aus welcher sich $x = 38·7$ oder $x = 2·12$ ergibt.

Naturgemäß entsprechen beide Werte der Aufgabe; der Körper wird sich nämlich nach 2·12 Secunden während des Aufsteigens, und nach 38·7 Secunden während des Zurückfallens, in der Höhe von 400 Meter befinden.

Bezeichnet man in dieser Aufgabe allgemein die Anfangsgeschwindigkeit mit c , die Höhe mit h , die in Secunden ausgedrückte Zeit mit t und den Fallraum der ersten Secunde mit $\frac{g}{2}$, so erhält man ebenso die Gleichung

$$ct - \frac{gt^2}{2} = h,$$

aus welcher man, wenn von den vier Größen c , h , t , g drei gegeben sind, die vierte finden kann.

Ist die Zeit t gegeben, so hat man zur Bestimmung von c , h , oder g eine Gleichung des ersten Grades.

Aufgaben.

1. Das Product aus dem 4ten und 5ten Theile einer Zahl beträgt 180. Welches ist die Zahl?

2. Multipliciert man das 5fache einer Zahl mit ihrem 4ten Theile, so erhält man 480. Welches ist die Zahl?

3. Dividiert man 192 durch eine Zahl, so erhält man das 3fache derselben. Wie heißt die Zahl?

4. Welche Zahl muß um 6 vermehrt und um 6 vermindert werden, damit das Product der beiden neuen Zahlen 325 sei?

5. Wie groß ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen 48 und 363?

6. Das 12fache einer Zahl um 45 vermehrt gibt das Quadrat derselben. Welches ist die Zahl?

7. Wenn man zu einer Zahl 40 addiert und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividirt, so ist der Quotient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl. Wie groß ist diese?

8. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit 5 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 178. Welches ist die Zahl?

9. Die Zahl 53 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Product 612 ist.

10. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, so daß die Summe ihrer Quadrate 113 wird.

11. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, deren Quadrate sich wie 4 : 9 verhalten.

12. Welche ganze Zahl ist um 19 kleiner als das Quadrat der vorhergehenden Zahl?

13. Von welcher Zahl muß man ihren reciproken Wert subtrahieren, um $2\frac{1}{10}$ zu erhalten?

14. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 33. Wäre der Zähler um 39, und der Nenner um 20 größer, so würde der Bruch doppelt so groß sein. Welches ist der Bruch?

15. Bei zwei Brüchen, deren Differenz $\frac{5}{84}$, ist der Zähler des einen die Hälfte vom Nenner des anderen; der Nenner eines jeden Bruches ist um 1 größer als der Zähler. Welches sind die Brüche?

16. Ein freifallender Körper legt in der ersten Secunde 4.9 Meter zurück und die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten. Wie viel Secunden braucht ein Körper, um aus einer Höhe von 150 Meter zu fallen?

17. Jemand kauft für 117 fl. Weizen und zwar kostet jedes Hektoliter davon um 4 fl. weniger als Hektoliter sind; wie viel Hektoliter Weizen hat er gekauft?

18. Jemand kauft ein Stück Acker, das er kurze Zeit darauf als Bauplatz für 816 fl. verkauft. Dabei gewinnt er so viel %, als ihn der Acker Gulden gekostet hat. Wie theuer hat er den Ackergrund gekauft?

19. Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. zu gleichen Theilen; bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt in Folge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viele Kinder hinterließ der Vater?

20. Unter eine Anzahl armer Leute sollen 110 fl. zu gleichen Theilen vertheilt werden. Da sich bei der Austheilung 5 Arme mehr einstellen, als man erwartet hat, so entfällt auf jeden von ihnen $\frac{1}{5}$ fl. weniger, als ihm Anfangs bestimmt war. Wie viel Arme werden theilhaft?

21. Ein Kaufmann bestellt für 1080 fl. Kaffee. Da jedoch der Ballen Kaffee um 18 fl. im Preise gestiegen ist, so erhält der Kaufmann 2 Ballen weniger, als er erwartet hat. Wie viel Ballen erhält er?

22. Jemand kaufte für 400 fl. Tuch; hätte das Meter um 1 fl. weniger gekostet, so würde er für jenes Geld 20 Meter mehr erhalten haben. Wie viel Meter hat er gekauft?

23. Ein Fuhrmann soll 15000 Kg. Heu in einer bestimmten Anzahl Fuhren zur Stadt fahren. Er ladet aber für jede Fuhr 100 Kg. mehr, als ursprünglich festgesetzt ist, und spart dadurch 5 Fuhren. Wie oft sollte er fahren?

24. Ein Kaufmann hat in zwei auf einander folgenden Jahren gleichviel % gewonnen und dadurch sein Capital von 12000 fl. auf 15870 fl. vermehrt. Wie viel % betrug sein Gewinn?

25. Ein Reisender braucht zu einem Wege von 520 Kilometer 3 Tage mehr als ein anderer, weil dieser täglich 12 Kilometer mehr zurücklegt als der erstere. Wie viel Tage braucht jeder zu dieser Reise?

26. Ein Zug braucht für eine Strecke von 100 Kilometer eine gewisse Zeit; ein Schnellzug, der alle 3 Stunden 25 Kilometer mehr zurücklegt, braucht für dieselbe Strecke 1 Stunde weniger. Wie viel Kilometer legt der erste Zug in jeder Stunde zurück?

27. Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen; eine Reihe nach der Länge enthält 8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viel stehen in jeder Reihe?

28. An einem Wagen ist der Umfang des Hinterrades 2 Meter größer als der des Vorderrades. Auf einer Strecke von 6000 Meter macht das Vorderrad 500 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Wie groß ist der Umfang des Vorderrades?

29. Aus einem mit 144 Liter gefüllten Fasse wurde eine gewisse Anzahl Liter abgezapft und durch Wasser ersetzt; dann wurden eben so viel Liter der Mischung abgezapft und wieder durch Wasser ersetzt. Die so verdünnte Mischung enthielt noch 121 Liter reinen Weines. Wie viel Liter wurden jedesmal abgezapft?

30. Wie stellt sich das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 144 und 121 allgemein die Zahlen a und b gesetzt werden?

III. Wiederholungsaufgaben.

1.* Wie viel ist

a) 2% von 700, 40, 120, 260, 475, 580, 1425?

b) 5% von 500, 20, 380, 540, 660, 810, 1250?

2.* An 100 fl. gewinnt man $12\frac{1}{2}$ fl.; wie viel an 324 fl.?

3.* An 40 fl. gewinnt man $3\frac{1}{2}$ fl.; wie viel an 100 fl.?

4.* Eine 'Locomotive' legt in jeder Stunde 30 Kilometer zurück und kommt von A nach B in 6 Stunden; wie viel Kilometer müßte dieselbe stündlich zurücklegen, um jene Strecke in 5 Stunden zu durchlaufen?

5. Welchen Wert hat x in folgenden Proportionen:

a) $12\frac{3}{4} : x = 8\frac{1}{2} : 28$,

b) $x : 63\frac{3}{4} = 6 : 76\frac{1}{2}$,

c) $x : 21\frac{1}{8} = 12\frac{3}{5} : 18\frac{1}{2}$,

d) $3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{2} = x : 73\frac{1}{2}$,

e) $x : 50 = 0.24 : 0.64$,

f) $78.8 : 185 = 154.78 : x$.

6. Wie viel Münzgold à 900 fein kann man aus 12 Kg. 25 Dg. Gold à 800 fein herstellen?

7. Eine Dampfmaschine von 4 Pferdekraft hebt in 5 Secunden eine Last von 1500 Kg. 1 Meter hoch; wie viel Kg. wird eine Maschine von 6 Pferdekraft in 12 Secunden eben so hoch heben?

8. 20 Arbeiter können eine Arbeit in 18 Tagen zu Ende führen; in wie viel Tagen wird die Arbeit beendet sein, wenn nach 4 Tagen 12 Arbeiter abgehen und nach 11 Tagen wieder 8 derselben zurückkehren?

9.* Der Weizen ist um 6% im Preise gefallen; wie viel kostet nun 1 Hektoliter, da es bisher 9 fl. 50 fr. kostete?

10.* Wie groß muss die Summe sein, von welcher die Provision zu $1\frac{1}{2}\%$ gerechnet 78 fl. 60 fr. beträgt?

11. Bei einem Concurse erhält Jemand für seine Forderung von 5760 fl. nur 3840 fl.; wie viel % verliert er?

12. Ein Kaufmann kauft 600 Kg. einer Ware für 421.05 fl., und verkauft sie nach 8 Monaten zu 80 fr. pr. Kg., wie viel % beträgt der jährliche Gewinn?

13. Eine Partie Ware wiegt Brutto 430 Kg. und wird mit 480 fl. bezahlt; die Tara beträgt 30 Kg., die Provision 2%, die Fracht 54 fl. Wie theuer muss 1 Kg. verkauft werden, wenn man $16\frac{1}{2}\%$ gewinnen will?

14. Jemand kauft Tuch, je $4\frac{2}{3}$ Meter für $15\frac{2}{3}$ fl.; er verkauft dasselbe zu 4 fl. per Meter und gewinnt im Ganzen 428 fl. Wie viel Meter hat er gekauft?

$$15. x - \frac{x-2}{3} = 7 + \frac{3x-11}{8}. \quad 16. \frac{10+4y}{11} + \frac{8y-28}{13} = y-2.$$

$$17. 2\sqrt{x-7} = \sqrt{3x-17}. \quad 18. \sqrt{10+2\sqrt{x-1}} = 4.$$

19.* Von welcher Zahl muss man 20 wegnehmen, damit noch ihr 6ter Theil übrig bleibt?

20. Um welche Zahl muss man in den Producten 32.26 und 36.24 jeden Factor verkleinern, damit die neuen Producte einander gleich werden?

21. Ein Knabe gibt seinem ältesten Bruder die Hälfte seiner Nüsse weniger 8, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8, dem dritten wieder 8 weniger als die Hälfte des jetzigen Restes, und so auch dem vierten 8 weniger als die Hälfte des neuen Restes; die noch übrigen 20 Stücke behält er selbst. Wie viel Nüsse hatte er anfänglich und wie viele gab er jedem Bruder?

22. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit müsste ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, damit er in 4 Secunden eine Höhe von 500 Meter erreiche, wenn der Fallraum eines Körpers in der ersten Secunde 4.9 Meter beträgt?

23.* Wie viel kosten

a) 28 Liter à 48 fr.?

b) 16 Meter à 3 fl. 35 fr.?

24.* $1\frac{3}{4}$ Kg. kosten 2 fl. 24 fr.; wie hoch kommt 1 Kg.?

25.* $2\frac{1}{2}$ Meter kosten $9\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet 1 Meter?

26.* Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von
a) 6 und 15? b) 12 und 18? c) 16 und 24? d) 20 und 25?

27. Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von
a) 4, 5, 10, 12, 15, 36; b) 2, 5, 8, 11, 15, 21, 72.

28. Berechne die Zinsen von

- a) 3210 fl. à 3 $\frac{1}{2}$ % vom 5. Febr. bis 30. Juni,
b) 2545 " à 4 $\frac{1}{2}$ % " 17. Mai " 28. Oct.
c) 4080 " à 5 $\frac{1}{2}$ % " 26. März " 9. Juli.

29. Jemand hat ein Haus, das einen jährlichen Reinertrag von 680 fl. liefert, für 10120 fl. angekauft; wie viel % trägt ihm sein Capital?

30. Zwei Capitalien, die zusammen 3600 fl. betragen, tragen jährlich 168 fl. Zinsen. Wie groß ist jedes Capital, da das eine zu 5%, das andere zu 4% ausgeliehen ist?

31. Wie groß ist eine nach 3 Jahren 9 Monaten zu zahlende Schuld, deren barer Wert bei 4% Discout 1080 fl. beträgt?

32. Eine Schuld von 960 fl., nach 6 Jahren fällig, soll sogleich bezahlt werden; wie viel beträgt die Barzahlung bei 5% Discout?

$$33. \frac{1814\frac{1}{2} \cdot 100}{5\frac{1}{2} \cdot 5737\frac{11}{20}}$$

$$34. \frac{43\frac{3}{4} \cdot 32 \cdot 12\frac{1}{2}}{28\frac{3}{4} \cdot 28}$$

35. Von der jährlichen Einnahme verwendet A $\frac{2}{3}$ auf Kost und Kleidung, $\frac{1}{8}$ auf Wohnung, Heizung und Beleuchtung, mit $\frac{1}{2}$ bestreitet er Nebenbedürfnisse und erspart noch 349 fl. 25 fr. Wie groß ist die jährliche Einnahme?

$$36. \frac{(3a^3b^2)^3 \cdot (2x^3y^2)^2}{(4x^2y^3)^2 \cdot (3a^2b^3)^3}$$

$$37. \left\{ \frac{3a^2x^4}{2b^3y^3} - \frac{5b^2y^4}{9a^3x^3} \right\}^2$$

$$38. \sqrt[3]{16^3 \cdot 81^3}$$

$$39. 3\sqrt[3]{b^2} \cdot 5\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[12]{b}$$

$$40. (2\sqrt{b} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(\sqrt{b} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$$

$$41. \frac{13}{5 + 2\sqrt{3}}$$

$$42. \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$43. \frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

44.* Wie viel fl. ö. W. betragen nach dem innern Werte

- a) 136 Mark, b) 1315 Mark, c) 83 Mark 72 Pfennige?

45. Wie viel fl. in Papiergeld erhält man bei 3 $\frac{1}{2}$ % Agio für

- a) 600 fl., b) 368 fl., c) 1820 fl., d) 736 25 fl. Silber?

46. Wie viel fl. in Silber erhält man bei 4% für

- a) 316 fl., b) 578 fl., c) 950 fl., d) 2340 fl. Papiergeld?

47. Welchen Feingehalt in Tausendtheilen hat eine Mischung, wenn sich unter 20 Kg. Mischung a) 5 Kg., b) 8 Kg., c) 15 Kg. feinen Silbers befinden?

48. Ein Silberbarren wiegt 4 $\frac{1}{2}$ Kg. und enthält Silber à 750 Tausendtheile fein; wie viel ist er wert, wenn 1 Kg. feinen Silbers mit 90 fl. bezahlt wird?



49. A verkauft in Wien folgende Wechsel:

a) 3416 Reichsmark auf Berlin à 55.2,

b) 5204 Franken auf Paris à 44.8,

c) 837 Pfund St. auf London à 114.75;

wie viel nimmt er dafür ein, wenn $\frac{1}{2}\%$ Senfarie gerechnet wird?

50.* Die Actien einer Eisenbahn hatten am 1., 15. und 30. April einen Cours von 112, 116, $114\frac{3}{4}$; wie hoch war ihr Durchschnittscours?

51. Wie viel muß man am 12. December für gekaufte 1500 fl. C. M. böhm. Grundentlastungs-Obligationen à $100\frac{1}{4}$ bezahlen? (Zinsen 5% seit 1. Nov., Abzug von 10% Einkommensteuer.)

$$52. \frac{x + 12}{3y} = 1\frac{1}{3},$$

$$53. \frac{2x + 8}{3y - 4} = 3,$$

$$\frac{9y - 3x}{7} = 3.$$

$$\frac{2x - 12}{7y + 4} = 1.$$

$$54. 5x + 1 - \frac{6\frac{1}{4}x + y}{2} = 29 - \frac{3y + 33}{4},$$

$$4y - (5x + y) = 15x + \frac{4y - 3}{3}.$$

55.* Die Summe dreier Zahlen ist 500; die zweite ist doppelt so groß als die erste, die dritte doppelt so groß als die zweite. Welche Zahlen sind es?

56. Drei Zahlen sind so beschaffen, daß die Summe der ersten und zweiten 66, die der ersten und dritten 70, und die der zweiten und dritten 76 beträgt. Wie groß ist jede?

57. Suche drei Zahlen von folgender Beschaffenheit: Wird die erste zur 3fachen Summe der übrigen addiert, so erhält man 115; wird die zweite zur 4fachen Summe der übrigen addiert, so erhält man 135; wird endlich die dritte zur 5fachen Summe der übrigen addiert, so erhält man 145.

58. Wie lautet die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn statt der Zahlen 3, 4, 5, 115, 135, 145, allgemein m, n, p, a, b, c , gesetzt wird?

59. Von zwei Orten aus, die 81 Kilometer von einander entfernt sind, gehen A und B einander entgegen. Geht A 3 Stunden früher aus als B, so treffen sie nach 7 Stunden zusammen; geht B 3 Stunden früher aus, so treffen sie erst nach 8 Stunden zusammen. Wie viel Kilometer legt jeder in einer Stunde zurück?

60. Wie viel Kg. Korkholz von dem spezifischen Gewichte 0.25 muß man mit 12 Kg. Eisen von dem spezifischen Gewichte 7.9 verbinden, damit der entstehende Körper schwimmen könne, d. i. das spezifische Gewicht 1 habe?

61. Verwandle folgende periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche:

a) $0.\dot{3}\dot{6}$, b) $2.\dot{0}\dot{2}$, c) $0.\dot{3}7\dot{2}$, d) $6.\dot{5}14\dot{8}$;

e) $0.\dot{8}\dot{6}$, f) $0.\dot{0}\dot{3}$, g) $4.\dot{3}5\dot{2}\dot{7}$, h) $0.\dot{6}79\dot{5}\dot{4}$.

Entwickle abgekürzt auf 3 Decimalen:

62. $9 \cdot 5074 \cdot 0 \cdot 3487$.

63. $4 \cdot 9728 \cdot 0 \cdot 04725$.

64. $0 \cdot 79596 \cdot 73 \cdot 804$.

65. $256 \cdot 8735 \cdot 0 \cdot 09276$.

66. $27 \cdot 942 : 8 \cdot 5674$.

67. $37 \cdot 8268 : 0 \cdot 8927$.

68. $5 \cdot 72876 : 0 \cdot 0275$.

69. $242 \cdot 87 : 17 \cdot 384$.

70.* Wie viel Wasser muß zu 8 Liter Essig à 18 fr. gegossen werden, damit 1 Liter der Mischung noch 16 fr. wert sei?

71. Ein Kaufmann will durch Mischung 640 Liter Spiritus von 75 Grad erhalten; er nimmt zu dieser Mischung 460 Liter zu 80 Grad. Wie viel Grad muß die zweite Sorte halten, die er dazu gießen soll?

72.* Ein Meister hat mit 5 Gesellen eine Arbeit für den Preis von 375 fl. vollendet. Welchen Betrag erhält jeder, wenn auf den Meister $2\frac{1}{2}$ mal so viel kommen soll als auf einen Gesellen?

73.* Die Zahl 108 soll in drei Theile so getheilt werden, daß sich der erste Theil zum zweiten wie 3 : 5, und der zweite zum dritten wie 10 : 11 verhält.

74. Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3500 fl., B 2850 fl., C 4180 fl. hergegeben hat, werden 11% gewonnen; wie viel gewinnt jeder?

75. Zu einem gemeinsamen Geschäfte gibt A 1250 fl. auf 4 Monate, B 2380 fl. auf 5 Monate, C 3000 fl. auf 3 Monate und D 2710 fl. auf 10 Monate; der Gewinn beträgt 2188 fl. 48 fr.; wie viel erhält jeder?

76. $\sqrt[3]{198025}$.

77. $\sqrt[3]{1292 \cdot 114916}$.

78. $\sqrt[3]{3163725009}$.

79. $\sqrt[3]{91125}$.

80. $\sqrt[3]{49027896}$.

81. $\sqrt[3]{0 \cdot 428661064}$.

82. $\sqrt[3]{(a^6 - 6a^5 + 11a^4 - 16a^3 + 31a^2 - 10a + 25)}$.

83. $\sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1)}$.

84.* Vier gleich große unverzinsliche Beträge sind nach 3, 4, 5, 6 Monaten zahlbar. Nach welcher Zeit können alle auf einmal bezahlt werden?

85. 4196 fl. sollen nach 3 Monaten, 3148 fl. nach 7 Mon. und 1180 fl. nach 14 Mon. gezahlt werden. Wann muß die ganze Summe auf einmal gezahlt werden, wenn weder für den Gläubiger noch für den Schuldner ein Zinsverlust stattfinden soll?

86. A hat 500 fl. sogleich, 500 fl. nach 6 Monaten und 500 fl. nach 1 Jahre zu zahlen. Er zahlt aber nach 1 Monate 300 fl., nach 2 Monaten 200 fl. und nach 3 Monaten 100 fl. Wann muß er den Rest entrichten?

87. Jemand bietet für ein Haus 20000 fl., zahlbar nach 4 Jahren; wie groß ist der Barwert dieses Angebotes, wenn man 5% Zinsseszins und ganzjährige Verzinsung annimmt?

88. Die Einkaufssumme einer Ware beträgt 1573 fl. 20 fr. Wie hoch kommt die Ware zu stehen, wenn 2% Sconto, $\frac{1}{4}$ % Sensarie (vom Einkaufspreis), 216 fl. 50 fr. Plakspesen und 2% Provision (von der Gesamtauslage) in Rechnung kommen?

$$89. \frac{5}{x+4} - \frac{2}{x-5} = \frac{1}{4}. \quad 90. \frac{x}{6} + \frac{14}{3x} = \frac{2(x-1)}{x} + \frac{1}{6}.$$

$$91. \frac{x+4}{3} - \frac{4x+7}{9} = \frac{7-x}{x-3} - 1.$$

$$92. \sqrt{x+2a(a+b)} - 2a = \frac{x}{a+b}.$$

93. Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternommen, betragen 432 fl.; da zwei Personen frei gehalten wurden, mußte jede der übrigen Personen um 3 Gulden mehr bezahlen. Wie viel Personen nahmen an der Reise Theil?

94. Zwei Boten reisen von zwei Orten, deren Entfernung 84 Kilometer beträgt, zu gleicher Zeit einander entgegen; der eine braucht zu jedem Kilometer $2\frac{1}{12}$ Minuten mehr als der andere. In wie viel Minuten legt jeder 1 Kilometer zurück, wenn sie sich nach Verlauf von 5 Stunden begegnen?

95. A und B verkauften zusammen 100 Meter einer Ware, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein. Hätte A so viel Meter gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viel Meter als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viele Meter hat jeder verkauft?

Elfter Abschnitt.

Logarithmen.

I. Von den Logarithmen überhaupt.

§. 207. Sind der Wert einer Potenz und ihre Basis gegeben, so heißt die Rechnungsart, durch welche der Potenzexponent bestimmt wird, das Logarithmieren.

Eine Zahl a durch eine andere Zahl b logarithmieren, heißt den Potenzexponenten suchen, mit welchem b als Basis potenziert werden muß, um a als Potenz zu geben. Die Zahl b ist die Grundzahl oder Basis, die als Potenz gegebene Zahl a heißt der Logarithmand, oder geradezu die Zahl (Numerus), und der gesuchte Potenzexponent der Logarithmus. Ist $b^a = a$, so ist n der Logarithmus der Zahl a für die Basis b ; man hat dafür die Bezeichnung:

$$n = \log_b a.$$

Werden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis b bezogen, so schreibt man statt des letzten Ausdruckes kürzer $n = \log a$, wobei die Basis b als bekannt vorausgesetzt wird.

Z. B. $10^0 = 1$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^{-2} = 0.01$, ... Nimmt man daher 10 als Basis an, so ist

$$\log 1 = 0, \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \log 0.01 = -2, \dots$$

Sowohl Logarithmand als Basis müssen unbenannte Zahlen sein. Das Logarithmieren ist eine zweite Umkehrung des Potenzierens. Daß dem Potenzieren zwei wesentlich verschiedene Umkehrungen, das Radicieren und das Logarithmieren entsprechen, während sowohl das Addieren als auch das Multiplizieren nur eine Rechnungsart als Umkehrung hat, ist eine Folge davon, daß sich beim Potenzieren die zwei gegebenen Zahlen ohne Änderung des Wertes nicht vertauschen lassen, daß nämlich im Allgemeinen a^b von b^a verschieden ist.

§. 208. Aus dem Begriffe eines Logarithmus folgt:

1. Der Logarithmus der Basis in Bezug auf diese Basis selbst ist immer gleich 1.

Ist b die Basis, so ist $\log b = 1$, weil $b^1 = b$ ist.

2. Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0. Es ist $b^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$.

3. Für dieselbe Basis gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen; und umgekehrt: zu gleichen Logarithmen gehören auch gleiche Zahlen.

4. Für eine Basis, welche größer als 1 ist, gehört zu der größeren Zahl auch ein größerer Logarithmus; und umgekehrt: zu dem größeren Logarithmus gehört auch eine größere Zahl.

§. 209. Der Inbegriff der Logarithmen der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen für eine bestimmte Basis bildet ein logarithmisches System.

Eine negative Zahl kann nicht die Basis eines Logarithmensystems sein, weil sich durch ihre auf einander folgenden Potenzen nicht alle möglichen Zahlen darstellen lassen. Wollte man z. B. — 10 als Basis annehmen, so hätte man

$$\begin{aligned} (-10)^0 &= 1, & (-10)^1 &= -10, \\ (-10)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{-10}, & (-10)^2 &= 100, \\ (-10)^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{10^2}, & (-10)^3 &= -1000, \\ (-10)^{\frac{7}{9}} &= -\sqrt[9]{10^7}, & (-10)^4 &= 10000, \end{aligned}$$

u. s. w.

Man sieht, daß, während man die Exponenten allmählig wachsen läßt, die entsprechenden Potenzen keinem bestimmten Bildungsgesetze unterliegen, sondern bald positiv, bald negativ, bald reell, bald imaginär ausfallen; auch ist ersichtlich, daß sich z. B. die Zahlen 10, 1000 . . . durch keine Potenz von — 10 darstellen lassen.

Auch die Einheit eignet sich nicht als Basis eines Systems, weil jede Potenz von 1 wieder 1 ist.

Nur eine positive, von der Einheit verschiedene Zahl kann also als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Da jede ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenz einer positiven Zahl stets ein positives Resultat gibt, so folgt, daß die Logarithmen negativer Zahlen nicht reell ausfallen können, somit imaginär sind. Wenn bei Rechnungen, die man mit Hilfe der Logarithmen ausführt, negative Zahlen vorkommen, so betrachtet man sie während der Rechnung als absolute Zahlen, und berücksichtigt ihre Vorzeichen erst bei der Bestimmung des Vorzeichens in dem Resultate.

Im Gebrauche sind nur zwei logarithmische Systeme, nämlich das gemeine oder Briggs'sche für die Basis 10, und das natürliche oder Neper'sche für die irrationale Basis 2.718281828 . . .

Allgemeine Sätze über die Logarithmen.

§. 210. 1. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Beweis. Es sei für die Basis b

$$\log M = m, \log N = n, \log P = p,$$

so ist

$$M = b^m, N = b^n, P = b^p.$$

Multipliziert man diese drei gleichen Ausdrücke, so ergibt sich

$$MNP = b^{m+n+p}.$$

Die Basis b muß also zur Potenz $m + n + p$ erhoben werden, um die Zahl MNP zu geben, also ist $m + n + p$ der Logarithmus von MNP , folglich

$$\log MNP = m + n + p,$$

oder, wenn man für m, n, p ihre Werte setzt,

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

$$\text{z. B. } \log 3ab = \log 3 + \log a + \log b.$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3.$$

$$\log 15 = \log 3 + \log 5.$$

$$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$$

Wenn für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt sind, so lassen sich daraus durch bloße Addition auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

2. Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.

Beweis. Es sei für die Basis b

$$\log M = m, \log N = n;$$

so ist

$$M = b^m, N = b^n,$$

daher durch die Division

$$\frac{M}{N} = b^{m-n},$$

folglich

$$\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

$$\text{z. B. } \log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$$

$$\log 35 \cdot 29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a+b}{a-b} = \log (a+b) - \log (a-b).$$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Potenzexponenten.

Beweis. Es sei b die Basis und $\log M = m$, so ist $M = b^m$; erhebt man jede dieser gleichen Größen auf die p te Potenz, so erhält man $M^p = b^{mp}$, woraus

$$\log M^p = mp = p \log M$$

folgt.

$$\text{z. B. } \log 8^3 = 3 \log 8.$$

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log 2a^3 = \log 2 + \log a^3 = \log 2 + 3 \log a.$$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicands dividirt durch den Wurzelexponenten.

Beweis. Es sei für die Basis b , $\log M = m$, also $M = b^m$, so ist $\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, daher

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

$$3. \text{ B. } \log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}.$$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}$$

$$\log \frac{a \sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \frac{2}{3} \log x - \log y.$$

Aufgaben.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\log 3xyz.$ | 2. $\log 6ax (a+x).$ | 3. $\log (a^2 - b^2).$ |
| 4. $\log \frac{2ax}{b}.$ | 5. $\log \frac{1}{3xy}.$ | 6. $\log \frac{xy}{a(b+1)}.$ |
| 7. $\log \frac{5mx}{1-m^2}.$ | 8. $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$ | 9. $\log \frac{3(a^2 - b^2)x}{(3a+2b)y}.$ |
| 10. $\log a^4.$ | 11. $\log ax^3.$ | 12. $\log (ax)^3.$ |
| 13. $\log 5a^2x^2.$ | 14. $\log 2^3x^2(a^2 - b^2).$ | 15. $\log a^2m^3 \cdot (3nx^2)^3.$ |
| 16. $\log \frac{m^2n^3}{p^3q^2}.$ | 17. $\log \left(\frac{a^3}{x^2} \cdot \frac{b^2}{y^2} \right).$ | 18. $\log \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$ |
| 19. $\log \sqrt[5]{xy}.$ | 20. $\log 3a^2 \sqrt[3]{bx^2}.$ | 21. $\log x^3 \sqrt{x^2y^3}.$ |
| 22. $\log \sqrt[5]{\frac{a^3}{b^4}}.$ | 23. $\log \frac{2-a}{3\sqrt[3]{b}}.$ | 24. $\log \frac{x^2\sqrt[3]{a}}{5by^3}.$ |
| 25. $\log \sqrt{\frac{x^3y^3}{z^5}}.$ | 26. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$ | 27. $\log \frac{a^2\sqrt[5]{a^2b^3}}{b^2\sqrt[3]{a^2b}}.$ |
| 28. $\log 3 \cdot 100.$ | 29. $\log 3500.$ | 30. $\log 123000.$ |
| 31. $\log \frac{7}{10}.$ | 32. $\log 0.13.$ | 33. $\log 0.0834.$ |
| 34. $\log \frac{3^4}{2^5}.$ | 35. $\log \left(\frac{567}{678} \right)^3.$ | 36. $\log \frac{1}{15^2 \cdot 8^3}.$ |
| 37. $\log \sqrt[5]{\left(\frac{23}{37} \right)^3}.$ | 38. $\log \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{b}.$ | 39. $\log \sqrt[3]{\frac{3^4 \cdot \sqrt{17 \cdot 13}}{7 \cdot 14^2 \cdot \sqrt[5]{69}}}.$ |

II. Von den Brigg'schen Logarithmen.

Eigenschaften der Brigg'schen Logarithmen.

§. 211. Unter dem Brigg'schen Logarithmus einer Zahl versteht man den Potenzexponenten, mit welchem man die Basis 10 potenzieren muß, um die vorgelegte Zahl als Potenz zu erhalten.

In dem Brigg'schen Systeme ist

$10^0 = 1$	daher $\log 1 = 0$;
$10^1 = 10$,	" $\log 10 = 1$;
$10^2 = 100$,	" $\log 100 = 2$;
$10^3 = 1000$,	" $\log 1000 = 3$, u. f. w.;
$10^{-1} = 0.1$,	" $\log 0.1 = -1$;
$10^{-2} = 0.01$,	" $\log 0.01 = -2$;
$10^{-3} = 0.001$,	" $\log 0.001 = -3$, u. f. w.

Aus dieser Darstellung folgt:

1. Im Brigg'schen Systeme sind nur die Logarithmen der dekadischen Einheiten ganze Zahlen. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen liegen zwischen 0 und 1, zwischen 1 und 2, 2 und 3, u. f. w.; sie sind irrationale Zahlen und werden näherungsweise durch Decimalbrüche ausgedrückt. Ein Brigg'scher Logarithmus besteht daher im Allgemeinen aus Ganzen mit angehängten Decimalziffern. Man nennt die Ganzen eines solchen Logarithmus die Charakteristik oder Kennziffer, die Decimalstellen die Mantisse.

2. Die Charakteristik des Logarithmus einer ganzen Zahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern. Denn: Jede einziffrige Zahl liegt zwischen 1 und 10; der Logarithmus von 1 ist 0, der Logarithmus von 10 ist 1; der Logarithmus einer einziffrigen Zahl liegt also zwischen 0 und 1, ist also 0 Ganze mit darauffolgenden Decimalen; somit ist die Charakteristik 0. Jede zweiziffrige Zahl liegt zwischen 10 und 100; $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$; folglich liegt der Logarithmus einer zweiziffrigen Zahl zwischen 1 und 2, und hat also 1 zur Charakteristik, u. f. w.

3. Die Logarithmen aller Zahlen, welche größer als 1 sind, sind positiv; für alle positiven Zahlen, welche kleiner als 1 sind, ist der Logarithmus, also dessen Charakteristik und Mantisse negativ. Negative Mantissen pflegt man übrigens in der Rechnung zu beseitigen; man führt statt derselben positive Mantissen mit einer negativen Charakteristik ein, indem man den negativen Logarithmus von einer Zahl subtrahiert, die um 1 größer ist als die Charakteristik, wodurch eine positive Mantisse zum Vorschein kommt, und dann diese um 1 größere Zahl als negative Charakteristik hinter die Mantisse setzt. Z. B.

$$\begin{aligned} - 2.34567 &= 3 - 2.34567 - 3 \\ &= 0.65433 - 3. \end{aligned}$$

§. 212. Wenn man irgend eine Zahl mit einer Potenz von 10 multipliciert oder durch eine Potenz von 10 dividirt, so wird dadurch in ihrem Brigg'schen Logarithmus nur die Charakteristik geändert, während die Mantisse dieselbe bleibt.

Beweis. Es ist

$$\log(a \cdot 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

Es wird also der Logarithmus von a um die ganze Zahl n im ersten Falle vermehrt, im zweiten vermindert, d. h. erhält eine andere Charakteristik, während die Mantisse ungeändert bleibt.

Es ist z. B. $\log 3946 = 3.59\ 616$; daher ist:

$$\log 39460 = \log 3946 + \log 10 = 3.59\ 616 + 1 = 4.59\ 616;$$

$$\log 394600 = \log 3946 + \log 100 = 3.59\ 616 + 2 = 5.59\ 616;$$

und ebenso

$$\log 394.6 = \log 3946 - 10 = 3.59\ 616 - 1; = 2.59\ 616;$$

$$\log 39.46 = \log 3946 - \log 100 = 3.59\ 616 - 2; = 1.59\ 616;$$

$$\log 3.946 = \log 3946 - \log 1000 = 3.59\ 616 - 3 = 0.59\ 616;$$

$$\log 0.3946 = \log 3946 - \log 10000 = 3.59\ 616 - 4 = 0.59\ 616 - 1;$$

$$\log 0.03946 = \log 3946 - \log 100000 = 3.59\ 616 - 5 = 0.59\ 616 - 2.$$

Man sieht, daß hier die Mantisse stets dieselbe bleibt und nur die Charakteristik geändert wird, und zwar, daß letztere für jede Zahl dem Exponenten derjenigen Potenz von 10 gleich ist, welche den Rang der höchsten Ziffer ausdrückt. Daraus folgt:

1. Die Charakteristik des Logarithmus einer Zahl ist gleich dem Range exponenten der höchsten geltenden Ziffer dieser Zahl.

2. Die Mantisse eines Logarithmus hängt bloß von der Ziffernfolge der gegebenen Zahl ohne Rücksicht auf deren Rang ab, so daß alle Zahlen, welche sich nur in der Stellung des Decimalpunktes unterscheiden, dieselbe Mantisse haben.

Logarithmentafeln.

§. 213. Man hat die Logarithmen aller vier- oder fünfzigstigen ganzen Zahlen mit fünf, sechs oder sieben Decimalstellen in besonderen Tabellen, welche Logarithmentafeln heißen, zusammengestellt. Diese enthalten nur die Mantissen der Logarithmen, weil die Charakteristik in jedem Falle nach §. 208, 1 leicht bestimmt werden kann.

In den kleineren Logarithmentafeln sind nur die Mantissen vierziffriger Zahlen, und zwar mit fünf oder sechs Decimalstellen enthalten. Für die meisten praktischen Rechnungen genügen fünfstellige Logarithmen vollständig.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren zu jeder Zahl den entsprechenden Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl. *)

1. Zu einer gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmus zu finden.

Man suche aus den Tafeln zu der gegebenen Ziffernfolge die Mantisse und setze als Charakteristik den Rangexponenten der höchsten bedeutenden Ziffer.

a) Ist die gegebene Zahl vierziffrig, so sucht man die ersten drei Ziffern in der ersten Spalte links auf und geht von da in derselben Zeile in diejenige Spalte hinein, welche oben und unten die vierte Ziffer als Aufschrift hat; hier findet man die letzten drei Mantissenziffern. Die ersten zwei Ziffern stehen in der mit 0 bezeichneten Spalte, und zwar in derselben Zeile, oder etwas weiter oben, oder auch, wenn sich vor der ersten der drei Mantissenziffern ein Sternchen befindet, in der nächstfolgenden Zeile. So findet man z. B.

$$\log 5134 = 3.71046$$

$$\log 528.9 = 2.72337$$

$$\log 0.5375 = 0.73038 - 1$$

$$\log 0.05497 = 0.74013 - 2.$$

b) Hat die gegebene Zahl weniger als vier Ziffern, so denkt man sich ihr so viele Nullen hinzugefügt, daß man eine vierziffrige Zahl erhält. Ist z. B. der Logarithmus von 38 zu suchen, so nimmt man die Mantisse von 3800.

c) Enthält die gegebene Zahl fünf oder sechs Ziffern, so entnehme man aus den Tafeln nach a) zu den ersten vier Ziffern die zugehörige Mantisse und bestimme die Differenz zwischen dieser und der nächst größeren Tafelmantisse. Dann suche man aus den rechts stehenden Hilfstäfelchen unter jener Differenz die Differenztheile für die 5te und 6te Ziffer der gegebenen Zahl und addiere sie zu der bereits gefundenen Mantisse. Z. B.

$$\log 215.87 = 2.33405$$

$$\text{Diff. } 20 \quad 7 \dots 14$$

$$\hline 2.33419$$

$$\log 7.24638 = 0.86010$$

$$\text{Diff. } 6 \quad 3 \dots 18$$

$$8 \dots 05$$

$$\hline 0.86012$$

*) Eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold.

2. Zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl zu finden.

Man suche aus den Tafeln zu der Mantisse die entsprechende Ziffernfolge und bestimme den Stellenwert dieser Ziffern, indem man der höchsten Ziffer denjenigen Rang gibt, den die Charakteristik anzeigt.

Die ersten zwei Mantissenziffern sucht man in der mit 0 bezeichneten Spalte, die letzten Mantissenziffern aber in derselben oder in einer der nächst folgenden Zeilen, oder auch in den mit einem Sternchen bezeichneten Stellen der nächst vorhergehenden Zeile.

a) Sind die Mantissenziffern in der Tafel genau enthalten, so entnehme man die ersten drei Ziffern der gesuchten Zahl aus der ersten Spalte links in jener Zeile, in welcher die letzten Mantissenziffern gefunden wurden, die vierte Ziffer aber aus der obersten oder untersten Zeile in der Spalte, in welcher jene Mantissenziffern stehen. Z. B.

$$\begin{array}{ll} \log x = 2.91046 & \log y = 0.90811 - 2 \\ x = 813.7 & y = 0.08093. \end{array}$$

b) Ist die gegebene Mantisse in der Tafel nicht genau enthalten, so suche man die nächst kleinere Mantisse, welche in der Tafel steht, und bestimme nach a) die ihr zugehörige vierziffrige Zahl; diese gibt die ersten vier Ziffern der gesuchten Zahl. Sodann suche man sowohl die Differenz der beiden Tafelmantissen, zwischen denen die gegebene Mantisse liegt, als auch den Unterschied zwischen der gegebenen und der aus der Tafel entnommenen nächst kleineren Mantisse, und bestimme aus den Hilfstafelchen zu den Differenztheilen, welche der letztere Unterschied angibt, für die erhaltene Tafeldifferenz die entsprechende fünfte und sechste Ziffer. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} \log a = 0.88016 - 1 & \log b = 2.50729 & \\ & 013 \dots 7588 & 718 \dots 3215 \\ \text{Diff. 5} & \underline{3 \dots 6} & \underline{11} \\ & a = 0.75886 & \underline{98 \dots 7} \\ & & \underline{12 \dots 9} \\ & & b = 321.579. \end{array}$$

Rechnungsoperationen mit Logarithmen.

§. 214. In Beziehung auf das Rechnen mit Logarithmen hat man im Allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Erhält man beim Abaddieren der Logarithmen zwei Charakteristiken, eine positive und eine negative, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 2.27056 \\ 0.08341 - 1 \\ 0.62279 - 2 \\ \hline 2.97676 - 3 = 0.97676 - 1. \end{array}$$

2. Ist beim Subtrahieren der Minuend kleiner als der Subtrahend, so addiere man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, daß er größer wird als der Subtrahend und setze dann auch als Charakteristik des Restes so viele negative Einheiten. Z. B.

$$\begin{array}{r} + 2 \qquad \qquad - 2 \\ 2.65 \ 348 \\ 4.07 \ 513 \\ \hline 0.57 \ 835 - 2. \end{array}$$

3. Wird ein Logarithmus mit negativer Charakteristik mit einer Zahl multipliciert, so muß im Producte die neue negative Charakteristik mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$\begin{aligned} (0.931147 - 2) \times 5 &= 4.655735 - 10 \\ &= 0.655735 - 6. \end{aligned}$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Charakteristik durch eine Zahl zu dividieren, so muß die negative Charakteristik, wenn sie durch diese Zahl nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, daß sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Dadurch wird eine gebrochene Charakteristik vermieden. Z. B.

$$\begin{aligned} (0.47 \ 532 - 3) : 4 &= (1.47 \ 532 - 4) : 4 \\ &= 0.36 \ 883 - 1. \end{aligned}$$

Anwendung der Brigg'schen Logarithmen.

§. 215. Durch die allgemeinen Sätze, die in §. 210 entwickelt wurden, ist man im Stande, die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, das Potenzieren in eine Multiplication und das Radicieren in eine Division zu verwandeln.

1. Hat man zwei oder mehrere Zahlen zu multiplicieren, so nimmt man ihre Logarithmen und addiert sie; die Summe ist der Logarithmus des Productes; sucht man daher zu jenem Logarithmus die entsprechende Zahl, so ist diese das verlangte Product. Z. B.

$$\begin{aligned} x &= 2.1345 \cdot 3.8902 \cdot 0.7849. \\ \log 2.1345 &= 0.32 \ 930 \\ \log 3.8902 &= 0.58 \ 997 \\ \log 0.7849 &= 0.89 \ 481 - 1 \\ \log x &= 0.81 \ 408 = \log 0.65174 \\ x &= 0.65174. \end{aligned}$$

2. Sollen zwei Zahlen mit Hilfe der Logarithmen dividirt werden, so zieht man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividends ab; der Rest ist der Logarithmus des Quotienten; sucht man zu diesem Logarithmus die zugehörige Zahl, so hat man den verlangten Quotienten. Z. B.

$$a) \quad x = 7.6912 : 218.87$$

$$\quad \quad \quad + 2 \quad \quad - 2$$

$$\log 7.6912 = 0.88594$$

$$\log 218.87 = 2.34019$$

$$\log x = 0.54575 - 2 = \log 0.03514$$

$$x = 0.03514.$$

$$b) \quad x = \frac{3.4156 \cdot 4.023}{1.2378 \cdot 5.8709}.$$

$$\log x = \log 3.4156 + \log 4.023 - (\log 1.2378 + \log 5.8709)$$

$$\log 3.4156 = 0.53347$$

$$\log 4.023 = 0.60455$$

$$\hline 1.13802$$

$$\log 1.2378 = 0.09265$$

$$\log 5.8709 = 0.76871$$

$$\log x = 0.27666 = \log 1.8909$$

$$x = 1.8909.$$

3. Wenn eine Zahl zu einer Potenz erhoben werden soll, so suche man den Logarithmus dieser Zahl, und multipliciere ihn mit dem Potenzexponenten; das Product stellt den Logarithmus der gesuchten Potenz vor; um diese selbst zu erhalten, suche man zu jenem Logarithmus die entsprechende Zahl. *3. B.*

$$x = 1.05^{20}.$$

$$\log 1.05 = 0.02119$$

$$\log x = \frac{0.42380}{\times 20} = \log 2.6533$$

$$x = 2.6533.$$

4. Um aus einer Zahl eine bestimmte Wurzel auszu ziehen, suche man den Logarithmus dieser Zahl, und dividire ihn durch den Wurzelexponenten; der Quotient ist der Logarithmus der verlangten Wurzel; nimmt man die diesem Logarithmus entsprechende Zahl, so hat man die Wurzel selbst. *3. B.*

$$a) \quad x = \sqrt[6]{50}.$$

$$\log 50 = \frac{1.69897}{: 6}$$

$$\log x = 0.28316 = \log 1.9194$$

$$x = 1.9194.$$

$$b) \quad x = \sqrt[9]{\frac{1.052^2 \cdot \sqrt[2]{23}}{2 \sqrt[3]{18}}}.$$

$$\log x = \frac{1}{9} \{ 2 \log 1.052 + \frac{1}{2} \log 23 - (\log 2 + \frac{1}{3} \log 18) \}$$

$$\begin{aligned}
 \log 1.052 &= 0.02202 \\
 2 \log 1.052 &= 0.04404 \\
 \log 23 &= 1.36173 \\
 \frac{1}{2} \log 23 &= 0.68086 \\
 &\quad \underline{0.72490} \\
 \log 2 &= 0.30103 \\
 \log 18 &= 1.25527 \\
 \frac{1}{8} \log 18 &= 0.41842 \\
 &\quad \underline{0.00545} : 9 \\
 \log x &= 0.00061 = \log 1.0014 \\
 x &= 1.0014.
 \end{aligned}$$

§. 216. Eine vortheilhafte Anwendung finden die Logarithmen auch bei den Zinseszinsrechnungen.

Heißt e der Endwert, zu dem ein zu $p\%$ auf Zinseszinsen angelegtes Capital a bei ganzjähriger Verzinsung nach n Jahren anwächst, so hat man (§. 145)

$$e = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Nimmt man von beiden Theilen dieser Gleichung die Logarithmen, so ergibt sich

$$\log e = \log a + n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
 \log a &= \log e - n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right), \\
 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) &= \frac{\log e - \log a}{n}, \\
 n &= \frac{\log e - \log a}{\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}.
 \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen kann, wenn von den Größen a , e , p , n drei gegeben sind, die vierte bestimmt werden. Geschieht die Verzinsung halbjährig, so muß statt p und n bezüglich $\frac{p}{2}$ und $2n$ gesetzt werden.

Beispiele.

1) Zu welcher Summe wächst ein Capital von 1300 fl. in 25 Jahren mit Zinseszinsen zu 4% an?

$$\begin{aligned}
 e &= 1300 \cdot 1.04^{25}. \\
 \log 1.04 &= 0.01703 \\
 25 \log 1.04 &= 0.42575 \\
 \log 1300 &= 3.11394 \\
 \log e &= 3.53969 = \log 3465 \\
 e &= 3465 \text{ fl.}
 \end{aligned}$$

2) Welches Capital wächst in 10 Jahren mit Zinseszinsen zu 5% bei halbjähriger Verzinsung auf 2000 fl. an?

$$a = \frac{2000}{1.025^{20}}$$

$$\log 2000 = 3.30103$$

$$\log 1.025 = 0.01072$$

$$20 \log 1.025 = 0.21440$$

$$\log a = 3.08663 = \log 1220.75$$

$$a = 1220.75 \text{ fl.}$$

3) Zu wie viel % müssen 614 fl. 19 Jahre lang auf Zinseszinsen ausgeliehen werden, um auf 1859 fl. anzuwachsen?

$$\log \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{\log 1859 - \log 614}{19}$$

$$\log 1859 = 3.26928$$

$$\log 614 = 2.78817$$

$$\frac{0.48111}{19}$$

$$\log \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 0.02532 = \log 1.06$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.06, \text{ daher } p = 6\%.$$

4) Wie lange müssen 2518 fl. zu 5% Zinseszinsen anliegen, um auf 4522 fl. anzuwachsen?

$$n = \frac{\log 4522 - \log 2518}{\log 1.05}$$

$$\log 4522 = 3.65553$$

$$\log 1.05 = 0.02119$$

$$\log 2518 = 3.40106$$

$$\frac{0.25447}{0.02119} = 12 \text{ Jahre.}$$

Aufgaben.

Suche aus den Logarithmentafeln zu folgenden Zahlen die Logarithmen:

1. log 7.	2. log 58.	3. log 312.	4. log 993.
5. log 3905.	6. log 1358.	7. log 4850.	8. log 9499.
9. log 6458.	10. log 3094.	11. log 5759.	12. log 7766.
13. log 12345.	14. log 50736.	15. log 83925.	
16. log 46357.	17. log 13088.	18. log 74613.	
19. log 525729.	20. log 683744.	21. log 807625.	
22. log 290537.	23. log 426853.	24. log 109307.	
25. log 4.9.	26. log 72.85.	27. log 0.7839.	
28. log 7.0843.	29. log 0.07072.	30. log 1.0001.	
31. log 349.008.	32. log 6.0606.	33. log 1.000939.	

$$92. \frac{\sqrt{1 \cdot 037^3} \cdot \sqrt{9 \cdot 234^2}}{15 \cdot 735}$$

$$93. \frac{\sqrt{10} + \sqrt{10}}{2}$$

$$94. \sqrt[5]{\frac{83 \cdot \sqrt{9103}}{37 \cdot 26^2}}$$

$$95. \sqrt[4]{\frac{5 \sqrt{0 \cdot 57} \cdot \sqrt[3]{19}}{0 \cdot 045 \cdot 4 \cdot 16^2}}$$

96. Zu welcher Summe wächst ein Capital von 860 fl. in 15 Jahren mit Zinsezinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ an?

97. Jemand legt 1600 fl. in eine Sparcasse, welche die Einlagen zu 5% und zwar halbjährig verzinst, ein; nach 10 Jahren hebt er das Capital sammt Zinsezinsen; wie groß ist die Summe?

98. Ein Wald enthält jetzt 35800 Cubikmeter Holz; der jährliche Zuwachs beträgt $2\frac{1}{2}\%$. Welches wird sein Holzbestand nach 12 Jahren sein?

99. Ein Capital von 9000 fl. ist nach 10 Jahren unverzinslich fällig; wie groß ist sein Barwert, wenn Zinsezinsen zu 5% gerechnet werden?

100. Für ein durch 9 Jahre zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinsezins angelegtes Capital erhielt man 5234 fl.; wie groß war das Anfangscapital?

101. Eine Stadt zählt gegenwärtig 36230 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 30 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 2% ?

102. Ein Capital von 7537·8 fl. wächst in 20 Jahren mittelst Zinsezinsen auf 20000 fl. an; zu wie viel $\%$ war es verzinst?

103. Jemand borgt einem andern 250 fl. auf 3 Jahre, ohne Zinsen zu fordern, läßt sich jedoch dafür einen Schuldschein von 300 fl. ausstellen. Wie viel $\%$ hat er genommen, wenn man Zinsezinsen rechnet?

104. In wie viel Jahren wächst ein Capital von 500 fl. mit Zinsezinsen à 5% auf 3041 fl. an?

105. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinsezins und bei halbjähriger Capitalisierung?

III. Wiederholungsaufgaben.

1.* Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß von

a) 8 und 12, b) 15 und 40, c) 20 und 44, d) 32 und 48?

2. Suche das größte gemeinsch. Maß von

a) 465 und 589, b) 612 und 1080, c) 6579 und 9159,

d) 93345 und 165375, e) 168, 312 und 504.

3.* Wie groß ist die Summe aus dem 4fachen von $2\frac{4}{9}$ und dem 5fachen von $3\frac{4}{9}$?

4.* Um wie viel ist das 3fache von $5\frac{3}{4}$ kleiner als das 5fache von $7\frac{1}{4}$?

$$5. 8642\frac{327}{415} \times \frac{713}{866} + 19371\frac{38}{77} \times 255\frac{113}{225}$$

$$6. 4751\frac{426}{631} \times 571\frac{171}{812} - 3640\frac{319}{520} \times 460\frac{80}{401}$$

$$7. 1 - 10 + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

8.* 15 Meter kosten 69 fl.; wie viel 65 Meter?

9. Aus einer Röhre fließen in $4\frac{1}{2}$ Minuten $98\frac{1}{2}$ Liter Wasser; wie viel Liter fließen aus derselben Röhre in $45\frac{1}{2}$ Minuten?

10. Wien hat $14^{\circ} 2' 36''$, Berlin $11^{\circ} 2' 30''$ östlicher Länge von Paris; wie viel Uhr ist es in Wien, wenn in Berlin Mittag ist?

11. Wenn $5\frac{3}{5}$ Stück einer Ware, von der jedes Stück 18 Meter lang und $1\frac{1}{4}$ Meter breit ist, 742 fl. 30 kr. kosten; wie viel kosten $12\frac{3}{4}$ Stück von einem gleichwertigen Stoff, von welchem jedes Stück 25 Meter lang und $1\frac{1}{5}$ Meter breit ist?

Bestimme auf drei Decimalen a) durch abgekürzte Multiplication oder Division, b) mit Hilfe der Logarithmen, folgende Ausdrücke:

12. $5.4832 \cdot 7.519$.

13. $6.9754 \cdot 0.2844$.

14. $304.279 \cdot 0.0532$.

15. $1.065 \cdot 1.052 \cdot 1.0475$.

16. 83.423

17. 3.7936

18. 0.8464

31.586

13.859

0.00163

19. $3478 \cdot 0.07643$

20. $403 \cdot 7.19 \cdot 12.0795$

$4091 \cdot 0.08251$

$378 \cdot 8.23 \cdot 15.6324$

21.* Nimmt man mir von meinem Gelde die Hälfte und ein Viertel des selben, so bleiben mir noch 15 fl. übrig. Wie viel Geld habe ich?

$$22. 8\frac{1}{2} + \frac{19 - x}{3} = 2\frac{2}{9}x - \frac{2x - 3}{10} + \frac{2}{5}.$$

$$23. \left\{ \frac{x + 1}{6} + 3 \right\} - \left\{ \frac{3x - 1}{2} - 3 \right\} = \frac{3x + 3}{2} - \frac{5x + 2}{3}.$$

$$24. \frac{8x + 2}{x - 2} - 10 = \frac{2x - 1}{3x - 6} - \frac{3x + 2}{5x - 10}.$$

$$25. \frac{5x + 5}{x + 2} + 1 = \frac{6x + 12}{x + 3}. \quad 26. \frac{5}{7} \cdot \frac{2x - 5}{3x - 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x - 2}{7x - 3}.$$

$$27. \sqrt{2x} + \sqrt{8x} = 6. \quad 28. \sqrt{4x - 3} + 2 = x\sqrt{3}.$$

29.* Theile die Zahl 76 so in zwei Theile, daß der größere 4 mehr als das doppelte des andern betrage.

30.* Vier Personen theilen 2000 fl. so, daß A $\frac{1}{2}$ vom Antheile des B, C $\frac{3}{4}$ von dem des D, und D $\frac{2}{5}$ der ganzen Summe erhält. Wie groß ist der Antheil eines jeden?

31. In einer Schule von 178 Schülern sind in der zweiten Classe 5 Schüler mehr als in der ersten, in der dritten 9 weniger als in der zweiten, in der vierten 7 weniger als in der dritten. Wie viel Schüler sind in der ersten Classe?

32. Von zwei Spielern hatte A 4mal so viel Geld als B. Nachdem aber A an B 5 fl. verloren hat, hatte A nur noch 3mal so viel als B. Wie viel Geld hatte jeder am Anfange des Spieles?

33. Eine Gesellschaft soll eine bestimmte Summe durch gleich hohe Beiträge aufbringen. Zahlt jeder 600 fl., so kommen dadurch 900 fl. zu wenig zusammen; zahlt jeder 700 fl., so kommen 300 fl. mehr zusammen, als nöthig ist. Aus wie viel Personen besteht die Gesellschaft, und wie groß ist die aufzubringende Summe?

$$34. \frac{5a+7b}{2a-3b} - \frac{2a+3b}{5a-7b}$$

$$35. \frac{3x-8}{4x-3} - \frac{4x-5}{5x-4}$$

$$36. \frac{5a+4}{a-2} - \frac{3a-2}{a-3} - \frac{a^2-2a-17}{a^2-5a+6}$$

37.* Wie viel beträgt die Versicherungsprämie à $2\frac{1}{2}\%$ von
a) 3500 fl., b) 8250 fl., c) 4750 fl., d) 6300 fl.?

38. Wenn der Weizen im Preise um 28% höher steht als der Roggen; um wie viel $\%$ steht dann der Roggen tiefer als der Weizen?

39. Es werden 7 Faß Wein à 10 Hektoliter zu 29 fl. per Hektoliter auf 2 Monate Zeit gekauft; wie viel muß man contant zahlen, wenn $6\frac{1}{2}\%$ Jahres-Sconto gerechnet wird?

40. Auf eine von Triest nach Smyrna bestimmte Ware im Werte von 9108 fl. wird die Asscuranz gegen Seegefahr mit $2\frac{1}{8}\%$ berechnet. Wie hoch beläuft sich die Prämie, wenn die Provision $\frac{1}{2}\%$, die Senfarie 2% beträgt?

41.* Welches Capital gibt an jährlichen Zinsen

a) 30 fl., 45 fl., 52 fl., 75 fl., 124 fl. à 5% ?

b) 16 fl., 20 fl., 42 fl., 65 fl., 170 fl. à 4% ?

42. Jemand leiht 480 fl. zu 5% aus und zieht die jährlichen Zinsen sogleich ab. Um wie viel kommt der Schuldner zu Schaden?

43. A hatte an B zu zahlen:

am 15. Juli 2340 fl. 58 fr.;

am 20. Sept. 1547 fl. 83 fr.;

dagegen hatte B an A zu zahlen:

am 18. October 3104 fl. 75 fr.

am 10. December 873 fl. 6 fr.

Am 31. December wird die Abrechnung vorgenommen; welcher von beiden, und wie viel ist er dem andern schuldig, wenn die Zinsen zu 6% gerechnet werden?

44. Jemand erhält von seinen Capitalien 2392 fl. jährliche Zinsen; $\frac{4}{5}$ derselben waren zu 5% , $\frac{1}{5}$ zu 6% angelegt. Wie groß ist die ganze Capitalsumme?

45. Ein Landmann kauft eine Wiese für 832 fl. zahlbar nach 2 Jahren; wie viel muß er bei 6% Discont sogleich bar bezahlen?

46. Jemand hatte nach 4 Jahren eine Schuldforderung zu empfangen; wie groß war dieselbe, wenn ihm bei barer Bezahlung gegen 6% Discont 144 fl. abgezogen wurden?

$$47. \frac{\{x^2 - a^2\}^3}{\{y^2 - b^2\}} \cdot \frac{\{y + b\}^3}{\{x - a\}} \quad 48. \left\{ \frac{9a^2}{25x^2} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$49. \left\{ \frac{a^4 b^5 c^3}{x^2 y^3} \right\}^4 \cdot \left\{ \frac{x^5 y^4}{a^5 b^7 c^4} \right\}^3$$

50. $\sqrt[3]{\frac{7 \cdot 282}{361}}$

51. $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{2x}}$

52. $\frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}}$

53. $(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{15})^2$

54. $(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{8})^2$

55. $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

56. $\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}}}$

57.* Wie viel wird gewonnen: a) an 250 fl. bei 20%, b) an 168 fl. bei 25%, c) an 516 fl. bei 16 $\frac{2}{3}$ %?

58. Eine Handelsgesellschaft hat ein Capital von 50000 fl. angelegt und davon eine Jahreseinnahme von 5870 fl. erzielt. An Steuern sind $\frac{1}{20}$ und für sonstige Auslagen $\frac{2}{15}$ der Einnahme zu zahlen. Wie viel % beträgt der Gewinn?

58 b. Ein Geschäftsmann berechnet den Erzeugungspreis einer Ware, wie folgt: Rohmaterial 4.8 fl., Arbeitslohn 1.6 fl., für die Geschäftsleitung 4% und für die Verzinsung des Betriebscapitals 6% der Barauslagen. Wie theuer muß er die Ware verkaufen, wenn er 8% gewinnen will?

59. Wenn man eine Ware für 120 fl. verkauft, so verliert man 15%; wie theuer muß man sie verkaufen, um 15% zu gewinnen?

60. $\sqrt[3]{\left[\frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25 \right]}$

61. $\sqrt[3]{\left[1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6} \right]}$

62. $\sqrt[3]{37636}$

63. $\sqrt[3]{29844369}$

64. $\sqrt[3]{0.00367236}$

65. $\sqrt[3]{571787}$

66. $\sqrt[3]{751.089429}$

67. $\sqrt[3]{164206490176}$

Bestimme auf vier Decimalen a) nach dem Radicationsverfahren, b) mit Hilfe der Logarithmen, folgende Wurzeln:

68. $\sqrt[3]{2}$

69. $\sqrt[3]{2.5}$

70. $\sqrt[3]{578}$

71. $\sqrt[3]{38\frac{1}{2}}$

72. $\sqrt[3]{5}$

73. $\sqrt[3]{0.08}$

74. $\sqrt[3]{72.9}$

75. $\sqrt[3]{\frac{15}{7}}$

76. Von 1800 fl. soll A $\frac{3}{8}$ und noch 1 $\frac{1}{2}$ %, B $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{2}$ % und C den Rest bekommen; wie viel wird jeder erhalten?

77.* Zu einem Geschäft gibt A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$ und C den Rest des erforderlichen Fonds. Sie gewinnen zusammen 720 fl.; wie viel erhält jeder?

78. In einem Geschäft gewannen A und B zusammen 5950 fl. Wie war diese Summe zu vertheilen, wenn sich ihre Einlagen wie 2 : 3 verhielten, A aber für die Leitung des Geschäftes noch $\frac{1}{3}$ mehr erhalten sollte, als ihm nach seiner Einlage zufiel?

79. Die Einlagen dreier Kaufleute verhalten sich zu einander wie $\frac{3}{5} : \frac{7}{10} : \frac{11}{20}$. Wie viel erhält jeder von dem 3311 fl. betragenden Gewinne, wenn die Zeitdauer der Betheiligung im Verhältnis 6 : 7 : 8 steht?

80.* In welchem Verhältnisse muß man Spiritus à 60 Grad und à 45 Grad mischen, um Spiritus à 50 Grad zu erhalten?

81. Wie viel Wasser muß man zu Spiritus à 56 Grad setzen, damit der Gehalt um 6 Grad fällt?

82. Man will aus Weizen und Korn ein Gemenge von 27 Hektoliter machen, wovon das Hektoliter 76 Kg. wiegt; wie viel von jeder Getreideart ist dazu zu nehmen, wenn 1 Hektoliter Weizen 78, 1 Hektol. Korn 72 Kg. wiegt?

$$83. \begin{aligned} 27x + 16y &= 452, \\ 18x &= 88 + 16y. \end{aligned}$$

$$84. \begin{aligned} x + \frac{1}{2}y &= 30 - 16z, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{8} &= 12z + \frac{3}{8}x, \end{aligned}$$

$$85. \begin{aligned} a(x - y) + b(x + y) &= 0. \\ (x + y)(a^2 - b^2) &= 2a. \end{aligned}$$

$$\frac{x + y}{4} = x - 8z.$$

86. Die Altersjahre des Großvaters und Vaters sind zusammen 112, des Vaters und Sohnes 46, des Großvaters und Sohnes 82. Wie alt ist jeder?

87. Es sollen drei Zahlen von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die zweite durch die erste dividiert 2 zum Quotienten und 7 zum Reste, die dritte durch die zweite dividiert 2 zum Quotienten und 1 zum Reste gibt und daß die Summe der drei Zahlen 85 ist.

88. A und B legen zu einem Geschäfte eine Summe Geldes ein. Hätte A 5000 fl. mehr gegeben, so wären ihre Einlagen gleich gewesen; hätte B 5000 fl. mehr gegeben, so wäre seine Einlage doppelt so groß gewesen als die des A. Wie groß ist die Einlage eines jeden?

89. Ein Capital wächst in $3\frac{1}{5}$ Jahren mit den einfachen Zinsen auf 2814.24 fl. an; in 5 Jahren würde dasselbe auf 3013.5 fl. anwachsen. Wie groß ist das Capital und zu wie viel % ist es angelegt?

90. Jemand hat zwei Sorten Silber. Legiert er $7\frac{1}{2}$ Kg. der ersten und $2\frac{1}{2}$ Kg. der zweiten Sorte, so erhält er Silber von 880 Tausendtheilen Gehalt; legiert er aber $4\frac{1}{2}$ Kg. der ersten und $5\frac{1}{2}$ Kg. der zweiten Sorte, so wird die Mischung 850haltig. Welchen Gehalt hat jede Sorte?

91. Ein Zug legt in einer bestimmten Zeit eine gewisse Strecke zurück. Würde er in jeder Stunde $3\frac{1}{3}$ Kilometer mehr zurücklegen, so brauchte er für dieselbe Strecke $\frac{1}{2}$ Stunde weniger; würde er aber in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ Kilometer weniger zurücklegen, so brauchte er $\frac{1}{3}$ Stunde mehr. Wie lang ist die Strecke, und in welcher Zeit legt der Zug dieselbe zurück?

92. Am 18. Juni wurden bei der Nationalbank folgende Wechsel à 5% discountiert:

985 fl. pr. ultimo Juni;

556 „ pr. medio Juli;

1320 „ ausgestellt 28. April 3 Monate a dato;

1084 „ 31 Tage nach Sicht, acceptiert am 8. Juni;

welcher Betrag wurde dafür bezahlt?

93. Ein Wiener hat in London 425 Pfund Sterl. zu zahlen und will dafür Wechsel auf Amsterdam remittieren, die er zu 96 (100 fl. holl. = 96 fl. ö. W.) kaufen kann und die ihm in London zu 11 fl. 17 Cents pr. Pfund Sterl. gutgeschrieben werden. Wie hoch kommt obige Schuld?

94. Am 13. Jänner werden 3500 fl. Pfandbriefe der n. ö. Sparcasse à 100 $\frac{3}{4}$ gekauft; wie viel muß man dafür zahlen, wenn die Zinsen à 5 $\frac{1}{2}$ % seit 1. November rückständig sind?

95. Die Münzordnung des Kaisers Ferdinand I. vom Jahre 1529 bestimmte, daß aus einer kölnischen Mark (= 233·855 Gramm) Gold, 18 $\frac{1}{2}$ Karat fein, 72 Goldgulden geprägt werden sollten; wie viel neue Achtguldenstücke sind 100 solcher Goldgulden wert, da ein Achtguldenstück $\frac{9}{10}$ fein ist und auf ein halbes Kilogr. rauh 77 $\frac{1}{2}$ gehen?

96. $2x^2 - 9x = 35$.

97. $15x^2 - 22x = 152$.

98. $\frac{x+3}{x-3} = \frac{12+x}{12-x}$.

99. $\frac{cx}{a+b} = \frac{a-b}{cx-2b}$.

100. $\frac{x}{x-6} + 1 = \frac{60}{x+4}$.

101. $\frac{(x-a)^2}{2ax} + \frac{3a^2 - b^2}{2ax} = 1$.

102. Jemand verkauft eine Ware mit eben so viel % Gewinn, als ihm die Ware Gulden gekostet hat. Wie theuer hat er die Ware eingekauft, wenn er 4 fl. gewinnt?

103. Zwei Röhren füllen zusammen einen Teich in 3 Stunden; die erste allein braucht dazu 3 $\frac{1}{5}$ Stunden weniger als die zweite. In wie viel Stunden füllt jede Röhre allein den Teich?

104. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit 180 Meter senkrecht in die Höhe geworfen, 5 Secunden später wird ein zweiter Körper mit der Geschwindigkeit 250 Meter in die Höhe geworfen. Nach wie viel Secunden erreicht dieser mit dem ersten Körper die gleiche Höhe? (Fallraum eines Körpers in der ersten Secunde = 4·9 Meter).

105. Wie lautet das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn man statt der Zahlen 180, 5, 250, 4·9 allgemein c , t , c' , $\frac{c}{2}$ setzt?

106. Bei einem Falliment erhalten die Gläubiger 60%, und zwar sollen 15% sogleich, 15% nach 6 Monaten, 15% nach 9 Monaten und 15% nach 1 Jahre gezahlt werden. Welches ist die mittlere Verfallszeit, und wie viel % verliert jeder Gläubiger, wenn 6% Zinsen gerechnet werden?

107. Jemand hat 2000 fl. nach 2 Monaten, 1500 fl. nach 5 Monaten, 2400 fl. nach 1 Jahre, 2500 fl. nach 1 Jahre 3 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

108. Eine Stadt hatte im Jahre 1850 35846 Einwohner; wie groß ist die Bevölkerung derselben im Jahre 1875 bei einer jährlichen Zunahme von 2 $\frac{1}{2}$ %?

109. In wie viel Zeit wird ein Capital zu 4% Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung auf das Dreifache anwachsen?

110. Der Bestand eines Waldes hat sich in 12 Jahren von 27000 Cub.-Meter auf 35000 Cub.-Meter erhöht; wie viel % beträgt der jährliche Zuwachs?

111. Zu wie viel % muß man 2525 fl. auf Zinsezzinsen anlegen, um nach 10 Jahren dieselbe Summe zu erhalten, zu welcher 2518 fl. nach 12 Jahren bei 5% Zinsezzins anwachsen?

112. Von einer Schuld von 10000 fl. werden nach 3 Jahren 2500 fl., nach 6 Jahren 1000 fl. bezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach 10 Jahren, wenn 5% Zinsezzinsen gerechnet werden?

113. A hat an B, so lang dieser lebt, eine jährliche Rente von 320 fl. zu bezahlen, B wünscht aber sogleich den Betrag aller Renten bar zu empfangen; wie viel muß ihm A geben, wenn wahrscheinliche Lebensdauer des B mit 12 Jahren angenommen wird; und wenn man ganzjährig 6% Zinsezzins rechnet? (Mit Hilfe der Tabelle in §. 146.)

Berechne mit Hilfe der Logarithmen:

$$114. \sqrt[5]{15}. \quad 115. \sqrt[10]{1.25}. \quad 116. \sqrt[7]{7\frac{1}{7}}.$$

$$117. \sqrt[3]{\frac{59}{85}} \cdot \sqrt[3]{\frac{481}{592}}. \quad 118. \left(\frac{2109}{1934}\right)^{0.03} \cdot \left(\frac{1245}{2456}\right)^{0.07}$$

$$119. \frac{\sqrt[4]{1.357^3} \sqrt[3]{8.25^2}}{6.8315}. \quad 120. \sqrt[5]{\frac{5076}{7381}} \sqrt[3]{183}.$$

$$121. \sqrt[3]{100 - 10 \sqrt{10}}. \quad 122. \sqrt[7]{\left\{ \frac{\sqrt{0.92} + \sqrt[3]{0.35}}{0.78} \right\}}.$$

123. A bezieht aus Lyon 350 Meter Seidenstoffe zu $4\frac{3}{4}$ Franks pr. Meter mit 2% Sconto. An Zoll hat er 20% des Wertes, an Fracht und Spesen 4% zu zahlen. Zu wie viel fl. muß er 1 Meter verkaufen, wenn er 20% gewinnen will, und wenn 100 Franks = 44 fl. gerechnet werden?

124. Ein Wiener Kaufmann erhält aus Triest 12 Säcke Mailänder Reis, 2110 Kg. Brutto, 15 Kg. Tara, zu $24\frac{1}{2}$ fl. pr. 100 Kg. Netto. Spesen in Triest fl. 5 „ 25, Provision 2%, Fracht $2\frac{3}{4}$ fl. pr. 100 Kg., Einfuhrzoll 80 kr. Silber pr. 50 Kg. Brutto, Spesen in Wien fl. 7 „ 47. Wie hoch calculieren sich 100 Kg. Netto in Wien, wenn das Silberagio 3% beträgt?

A n h a n g.

Grundzüge der einfachen Buchführung.

Allgemeine Erklärungen.

§. 1. Kaufleute und Gewerbetreibende müssen, um den Gang ihres Geschäftes, den Stand ihrer Forderungen und Schulden sowie die Lage ihres ganzen Vermögens zu jeder Zeit vollständig überblicken zu können, alles, was auf das Geschäftsvermögen und die damit vorgehenden Veränderungen Bezug hat, in dazu bestimmte Bücher aufschreiben. Diese Aufzeichnungen nennt man die Buchführung oder Buchhaltung.

§. 2. Jede Buchführung erfordert zunächst die Kenntniss des am Anfange des Geschäftszeitraumes vorhandenen Vermögens.

Unter Vermögen im weitern Sinne sind nicht nur die im Eigenthume einer Person befindlichen beweglichen und unbeweglichen Güter, sondern auch die aus diesem Besitze hervorgehenden noch nicht erfüllten Verpflichtungen zu verstehen; im engern Sinne unterscheidet man ein dreifaches Vermögen, das Activ-, das Passiv- und das reine Vermögen.

Unter dem Activ-Vermögen einer Person versteht man das, was sie an Geld oder andern Gegenständen, die Geldeswert haben, besitzt oder von andern zu fordern hat, ohne Rücksicht, ob diese Güter ihr freies, vollkommenes Eigenthum sind, oder ob darauf Verpflichtungen gegen andere Personen lasten. Das Activ-Vermögen des Geschäftsmannes besteht in Geld, Staatspapieren, in Waren, in einzucassierenden Wechseln, in Forderungen an andere (Activschulden), Mobilien (Möbel, Hausgeräthe, Werkzeuge u. dgl.) und Immobilien (Gebäude, Grundstücke u. dgl.).

Unter dem Passiv-Vermögen einer Person versteht man die Verpflichtungen, die sie gegen andere zu erfüllen hat. Dahin gehören die Wechsel- und andere Schulden, die sie zu bezahlen hat (Passivschulden).

Subtrahiert man von dem Activ-Vermögen das Passiv-Vermögen, so zeigt der Rest das reine Vermögen an.

Die Verzeichnung und Wertangabe sämmtlicher Bestandtheile des Activ- und Passiv-Vermögens, wie dieselben zu einer bestimmten Zeit durch Zählen, Abwägen oder Messen vorgefunden werden, heißt die Inventur oder das Inventar.

§. 3. Jedes Vorkommnis, das in den Bestandtheilen des Geschäftsvermögens eine Veränderung bewirkt, heißt ein Geschäftsfall. Werden z. B. Waren gegen bare Bezahlung verkauft, so ist dies ein Geschäftsfall, da sich dadurch der Warenvorrath vermindert, dagegen das Barvermögen vermehrt.

Zur richtigen Eintragung der Geschäftsfälle in die einzelnen Bücher ist vor allem die genaue Unterscheidung des Schuldners und des Gläubigers erforderlich. Jeder, der von dem Geschäft etwas empfängt, ohne einen Gegenwert zu leisten, wird Schuldner (Debitor). Jeder, der dem Geschäft etwas gibt, ohne einen Gegenwert zu empfangen, wird Gläubiger (Creditor). Der Schuldner wird in der Buchhaltung durch „Soll“ oder „Debet“, der Gläubiger durch „Haben“ oder „Credit“ bezeichnet. Jemand zum Debitor erklären, heißt auch: ihn debilitieren, ihn belasten; jemand zum Creditor erklären, heißt auch: ihn creditieren, ihm gutschreiben.

Bei Wechselzahlungen gilt Folgendes:

Jeder, der einen Wechsel trassiert, wird für die Wechselsumme Schuldner des Trassanten. Jeder, der einen Wechsel acceptiert, wird Gläubiger des Trassanten. Jeder, der uns einen Wechsel sendet (remittiert), wird Gläubiger für den Wechselbetrag. Jeder, der eine Remesse empfängt, wird Schuldner des Remittenten.

§. 4. Die Geschäftsfälle werden in die verschiedenen Bücher entweder nach der Zeitfolge, oder mit Rücksicht auf das Gleichartige, worin sie übereinstimmen, nach gewissen Abtheilungen geordnet eingetragen.

Das Buch, welches die ersten Aufzeichnungen aller Geschäftsfälle, welche nicht gegen bare Bezahlung stattfinden, nach der Ordnung ihres Vorkommens aufnimmt, heißt Journal (Tagebuch) oder Prima=Nota.

In das Cassabuch kommen die Einnahmen und Ausgaben in barem Gelde, ebenfalls nach der Zeitfolge geordnet.

Das Buch, welches die Schulden und Forderungen unserer Geschäftsfreunde, nach Personen geordnet, enthält, heißt Hauptbuch.

Die Bücher, welche Geschäftsfälle, die im Journal nur kurz berührt werden, ausführlicher darstellen, oder Eingang und Ausgang von Gegenständen, die im Cassa- und Hauptbuche nur mittelbar verrechnet werden, ersichtlich machen, heißen Neben- oder Hilfsbücher. Ihre Zahl hängt von der Art und dem Umfange des Geschäftes ab. Die vorzüglichsten dieser Bücher sind: das Briefcopierbuch, das Facturenbuch, die Scontrobücher und zwar insbesondere das Waren=Scontro oder Warenbuch, das Wechsel=Scontro und das Effecten=Scontro, endlich das Verfallsbuch.

§. 5. Eine Rechnung, in welche alle Geschäftsfälle, die eine bestimmte Person oder Sache betreffen, eingetragen werden, heißt ein

Conto. Man unterscheidet hiernach Personen=Conti und Sach=Conti; erstere werden für die Rechnungsverhältnisse mit Personen, letztere für die Rechnungsverhältnisse von leblosen Vermögensbestandtheilen aufgestellt.

Ein Conto nimmt zwei einander gegenüberstehende Blattseiten ein. Auf die linke Seite, welche mit „Soll“ oder „Debet“ bezeichnet wird, kommen jene Posten zu stehen, für welche die Person oder Sache Debitor des Geschäftes wird; auf die rechte mit „Haben“ oder „Credit“ überschriebene Seite diejenigen Posten, für welche die Person oder Sache Creditor des Geschäftes wird.

§. 6. Um aus den Büchern nicht bloß den Stand der Forderungen und Schulden, sondern auch den Gewinn oder Verlust bei jeder Gattung der gemachten Geschäfte zu sehen und zugleich eine Controle über die richtige Buchung zu erhalten, wird jeder Posten doppelt, nämlich in das Soll des einen und zugleich in das Haben eines andern Conto eingetragen, so daß sich Soll und Haben der verschiedenen Conti stets das Gleichgewicht halten. Diese Art der Verbuchung heißt die doppelte Buchführung.

Werden dagegen die Geschäftsfälle in die Bücher derart eingetragen, daß sich daraus zunächst die Rechnungsverhältnisse mit den Geschäftsfreunden ergeben, so heißt die Verbuchungsweise die einfache Buchführung. Man kann übrigens auch mittelst der einfachen Buchhaltung durch Zuhilfenahme von Nebenbüchern den Geschäftserfolg im Allgemeinen ausmitteln.

Die einfache Buchführung eignet sich vorzugsweise für kaufmännische Geschäfte von geringem Umfange, für Gewerbe und kleinere Industrien.

In diesem Buche soll nur von der einfachen Buchführung die Rede sein.

§. 7. Die Führung der einzelnen Geschäftsbücher beruht theils auf gesetzlichen Bestimmungen, theils auf allgemeinen Grundsätzen und Formen, die sich im geschäftlichen Verkehr im Laufe der Zeit herausgebildet haben.

In ersterer Beziehung enthält das allgemeine Handelsgesetzbuch vom 17. December 1862 folgende Bestimmungen:

Art. 28: „Jeder Kaufmann ist verpflichtet, Bücher zu führen, aus welchen seine Handelsgeschäfte und die Lage seines Vermögens vollständig zu sehen sind.

Er ist verpflichtet, die empfangenen Handelsbriefe aufzubewahren und eine Abschrift (Copie oder Abdruck) der abgesandten Handelsbriefe zurückzubehalten und nach der Zeitfolge in ein Copierbuch einzutragen.“

Art. 29: „Jeder Kaufmann hat bei dem Beginne seines Gewerbes seine Grundstücke, seine Forderungen und Schulden, den Betrag seines baren Geldes und seine anderen Vermögensstücke genau zu verzeichnen, dabei den Wert der Vermögensstücke anzugeben und einen das Verhältnis des Vermögens und der Schulden darstellenden Abschluß zu machen; er

hat demnächst in jedem Jahre ein solches Inventar und eine solche Bilanz seines Vermögens anzufertigen“.

Art. 30: „Das Inventar und die Bilanz sind von dem Kaufmanne zu unterzeichnen. Sind mehrere persönlich haftende Gesellschafter vorhanden, so haben sie alle zu unterzeichnen.

Das Inventar und die Bilanz können in ein dazu bestimmtes Buch eingeschrieben oder jedesmal besonders aufgestellt werden. Im letzteren Falle sind dieselben zu sammeln und in zusammenhängender Reihenfolge geordnet aufzubewahren“.

Art. 31: „Bei der Aufnahme des Inventars und der Bilanz sind sämtliche Vermögensstücke und Forderungen nach dem Werte anzusetzen, welcher ihnen zur Zeit der Aufnahme beizulegen ist.

Zweifelhafte Forderungen sind nach ihrem wahrscheinlichen Werte anzusetzen, uneinbringliche Forderungen aber abzuschreiben.

Art. 32: „Bei der Führung der Handelsbücher und bei den übrigen erforderlichen Aufzeichnungen muß sich der Kaufmann einer lebenden Sprache und der Schriftzeichen einer solchen bedienen.

Die Bücher müssen gebunden und jedes von ihnen muß Blatt für Blatt mit fortlaufenden Zahlen versehen sein.

An Stellen, welche der Regel nach zu beschreiben sind, dürfen keine leeren Zwischenräume gelassen werden. Der ursprüngliche Inhalt einer Eintragung darf nicht durch Durchstreichen oder auf andere Weise unleserlich gemacht, es darf nichts radiert, noch dürfen solche Veränderungen vorgenommen werden, bei deren Beschaffenheit es ungewiß ist, ob sie bei der ursprünglichen Eintragung oder erst später gemacht worden sind“.

Art. 33: „Die Kaufleute sind verpflichtet, ihre Handelsbücher während zehn Jahren, von dem Tage der in dieselben geschehenen letzten Eintragung an gerechnet, aufzubewahren.

Dasselbe gilt in Ansehung der empfangenen Handelsbriefe, sowie in Ansehung der Inventare und Bilanzen“.

Art. 34: „Ordnungsmäßig geführte Handelsbücher liefern bei Streitigkeiten über Handelsfachen bei Kaufleuten in der Regel einen unvollständigen Beweis, welcher durch den Eid oder durch andere Beweismittel ergänzt werden kann“.

Art. 35: „Handelsbücher, bei deren Führung Unregelmäßigkeiten vorgefallen sind, können als Beweismittel nur insoweit berücksichtigt werden, als dieses nach der Art und Bedeutung der Unregelmäßigkeit, sowie nach der Lage der Sache geeignet erscheint“.

Art. 36: „Die Eintragungen in die Handelsbücher können, unbeschadet ihrer Beweiskraft, durch Handlungsgehilfen bewirkt werden“.

I. Die einfache kaufmännische Buchführung.

1. Wesentliche Bücher.

§. 8. Zu den wesentlichen Büchern der einfachen kaufmännischen Buchführung gehören: Das Inventarbuch, wenn nicht die Inventuren besonders aufgestellt und aufbewahrt werden, das Journal, das Cassabuch und das Hauptbuch.

Die Inventur.

Bei der Aufnahme der Inventur (§. 2) werden zuerst die Activa aufgeführt. Man beginnt dabei mit dem baren Gelde, welches abgezählt wird. Dann werden die Effecten und die Wechsel auf fremde Plätze inventiert und bei deren Wertbestimmung der Tagescours zu Grunde gelegt. Sodann bestimmt man den Wert der einzucassierenden Platzwechsel, indem man in der Regel den Discont in Abzug bringt. Hierauf schreitet man zur Inventur des Warenlagers; die Waren werden wirklich gewogen, gemessen, gezählt, und gewöhnlich zu dem Einkaufspreise berechnet. Sind noch andere zur Handlung gehörige bewegliche oder unbewegliche Vermögenstheile da, so werden auch diese abgeschätzt und ihre Werte eingestellt. Endlich führt man noch die Schuldner einzeln an; sie werden aus dem Hauptbuche entnommen. Addiert man alle bisher aufgestellten Beträge, so zeigt die Summe das Activ-Vermögen an.

Nun werden die Passiva angeführt. Dazu gehören erstlich die einzulösenden Tratten, bei denen in der Regel der Discont in Abrechnung gebracht wird. Hierauf werden die Gläubiger mit ihren Forderungen einzeln angeführt. Durch Summierung der einzelnen Passiva erhält man das ganze Passiv-Vermögen.

Subtrahiert man dann von dem Activ-Vermögen das Passiv-Vermögen, so zeigt die Differenz das reine Vermögen an.

Wenn man nun am Schlusse des Rechnungszeitraumes wieder inventiert und das reine Vermögen der anfänglichen Inventur mit dem reinen Vermögen der Schlus-Inventur (Bilanz) vergleicht, so gibt die Differenz zwischen beiden den während dieser Periode erzielten Gewinn oder Verlust an, je nachdem das schließliche Vermögen größer oder kleiner ist als das anfängliche.

Die nähere Einrichtung der Inventur ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

Inventur

aufgenommen am 30. Juni 1878.

Post		fl.	fr.	fl.	fr.
	Activa.				
1.	Bares Geld			2580	—
2.	Effecten:				
	4000 fl. Papierrente à 68	2720	—		
	Zinsen seit 1. Februar	70	—	2790	—
3.	Platzwechsel:				
	Auf C. Schmidt hier pr. 25. Juli . . .	875	—		
	" G. Roth in Baden pr. 15. August . .	622	58		
	" F. Wiese hier pr. 20. August . . .	730	—	2227	58
4.	Waren:				
	Laut Warenbuch			10780	—
5.	Mobilien mit 5% Abzug			855	—
6.	Buchforderungen:				
	Von M. Sachse hier	587	50		
	" H. Lumbe hier	705	—		
	" A. Frisch in Vöslau	844	20		
	" E. Moos in W. Neustadt	280	—	2416	70
	Summa der Activa			21649	28
	Passiva.				
1.	Tratten:				
	Ordre C. J. Geist pr. 10. Juli	850	—		
	" S. Trost pr. 31. Juli	485	80		
	" E. Link pr. 10. August	592	—	1927	80
2.	Buchschulden:				
	An F. Tropeani in Triest	972	35		
	" T. Hahn hier	615	—		
	" R. Kunze hier	1330	—	2917	35
	Summa der Passiva			4845	15
	Recapitulation.				
	Activa			21649	28
	Passiva			4845	15
	Reines Vermögen am 30. Juni 1878. . .			16804	13
	Wien, am 30. Juni 1878.				
	Friedrich Gross, m. p.				

Das Journal.

§. 9. Das Journal oder Tagebuch hat die Bestimmung, die erste Verzeichnung derjenigen Geschäftsfälle, welche eine Schuld oder Forderung begründen, in der Ordnung, in welcher sie stattfinden, bestimmt und deutlich abgefaßt aufzunehmen.

Das Journal wird paginiert, d. i. die Seiten werden mit den in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen versehen.

Jeder Posten enthält das Datum, den Namen und Wohnort des Geschäftsfreundes nebst einer kurzen und klaren Angabe des Geschäftes, durch welches er unser Schuldner oder Gläubiger geworden ist; endlich den Geldbetrag, welcher bei Schuldnern in die mit „Soll“ und bei Gläubigern in die mit „Haben“ überschriebene Colonne gesetzt wird. Das Journal wird mit der Eintragung der in der Inventur angeführten Forderungs- und Schuldposten eröffnet.

Zum besseren Verständnisse diene folgendes Beispiel:

Journal.

1

Juli 1878.

Soll Haben

			fl.	fr.	fl.	fr.
H. 1	1.	M. Sachse hier für den Saldo laut Inventur	587	50		
H. 2	1	H. Lumbe hier für den Saldo laut Inventur	705	—		
H. 3	1.	A. Frisch in Vöslau für den Saldo laut Inventur	844	20		
H. 4	1.	E. Moos in W. Neustadt für den Saldo laut Inventur	280			
H. 5	1.	F. Tropeani in Triest für den Saldo laut Inventur			972	35
H. 6	1.	T. Hahn hier für den Saldo laut Inventur			615	—
H. 7	1.	R. Kunze hier für den Saldo laut Inventur			1330	—
H. 8	2.	J. Alt in Baden sandte ihm auf 2 Monate Zeit: 2 Fässer Rio-Kaffee Nr. 54, 55 Netto 520 Kg. à 135 702 „ — 2 Fässer Melis Nr. 30, 31 Netto 915 Kg. à 43 393 „ 45	1095	45		
H. 2	3.	H. Lumbe hier für seine Remesse auf C. Glanz hier pr. 20. Juli			600	—

Juli 1878.

Soll

Haben

			fl.	fr.	fl.	fr.
H. 5	3.	F. Tropeani in Triest für seine Tratte Ordre V. Leiner hier pr. 31. Juli	960	—		
H. 9	4.	E. Süß hier kaufte von ihm 4 Fässer Raffinad Nr. 1 2 3 4 Brutto 474, 478, 482, 485 Kg. Tara 23, 26, 26, 27 " Netto 451, 452, 456, 358 Kg. 1817 Kg. à 44			799	48
H. 1	6.	J. Sachse hier verkaufte ihm 528 Kg. Rio-Kaffee à 135	712	80		
H. 1	6.	J. Sachse hier für sein Accept pr. 5. August			950	—
H. 5	7.	F. Tropeani in Triest sandte mir mit Eisenbahn 4 Ballen Rio-Kaffee und 1 Faß Tafelöl laut Facturenbuch			923	70
H. 5	7.	F. Tropeani in Triest remittierte ihm auf C. Porenta 2 Monate a dato	850	—		
H. 3	9.	A. Frisch in Vöslau erhielt von ihm pr. Eisenbahn 5 Hektoliter Spiritus à 39			195	—
H. 4	10.	E. Moos in W. Neustadt sandte ihm pr. Eisenbahn 2 Ballen Rio-Kaffee, 502 Kg. à 135 . . .	677	70		
H. 7	12.	R. Kunze hier für mein Accept pr. 25. Juli	1000	—		
H. 1	14.	J. Sachse hier lieferte ihm 375 Kg. Melis à 43 161 " 25 100 Kg. Weinbeeren à 30 . . . 30 " —	191	25		

Das Cassabuch.

§. 10. In das Cassabuch werden alle Geldeinnahmen und Geldausgaben, und zwar täglich eingetragen.

Das Cassabuch wird foliiert, d. h. es werden je zwei gegenüberliegende Blattseiten (ein Folium) mit derselben Zahl bezeichnet. Auf der linken Seite erhält es die Überschrift Soll oder Eingang, auf der rechten Haben oder Ausgang. Auf der linken Seite werden die eingegangenen, auf der rechten die ausgegebenen Gelder verzeichnet. Jeder Posten enthält: 1. Jahr, Monat und Tag; 2. eine kurze Erklärung, von wem und wofür das Geld empfangen, oder an wen und wofür es ausgegeben wurde; 3. die Geldsumme.

Wenn eine Blattseite vollgeschrieben ist, so werden die Summen der Einnahmen und der Ausgaben gebildet, und auf die nächsten zwei Blattseiten transportiert.

Cassa-

1

Soll

Juli

			fl.	fr.
H. 3	1.	Bares Geld laut Inventur	2580	—
	2.	Für Barzahlung von A. Frisch in Vöslau	750	—
	5.	" verkaufte Rimesse auf F. Wiese . . . fl. 730 " — ab 6% Discout bis 20. Aug. . . " 5 " 60	724	40
H. 8	16.	" Barzahlung von J. Alt in Baden	500	—
	20.	" an J. Ott hier verkauften Zucker	168	28
	20.	" Incasso der Rimesse auf C. Glanz	600	—
	25.	" Incasso der Rimesse auf C. Schmidt	875	—
H. 4	28.	" Barzahlung von E. Moos in W. Neustadt	800	—
H. 1	30.	" Barzahlung von M. Sachse hier	350	—
			7347	68
August 1878.				
	1.	Cassabestand vom vorigen Monate	3070	29

Am Ende eines jeden Monates wird das Cassabuch abgeschlossen, indem man die Einnahmen und die Ausgaben addiert, die Summe der letzteren von der Summe der ersteren subtrahiert und den Unterschied, welcher Saldo heißt, als Cassabestand auf die Ausgabenseite einstellt, wodurch sich beiderseits gleiche Summen ergeben. Diese Summen werden, nachdem man früher in den Betragscolumnen in gleicher Höhe Linien gezogen hat, darunter geschrieben, worauf etwas tiefer noch die Abschlusslinien zu stehen kommen. Zuletzt wird, um den wahren Cassastand wieder herzustellen, der Saldo unter dem ersten des nächsten Monates als Eingang auf weitere Rechnung vorgetragen.

Hier folgt das Schema eines Cassabuches.

Buch.

1

1878.

Haben

			fl.	fr.
H. 6	1.	Für die Haushaltung	160	—
	2.	" meine Barzahlung an T. Hahn hier	600	—
	3.	" diverse Handlungskosten	48	60
	7.	" Fracht und Spesen auf Sendung des F. Tropeani in Triest	128	82
	10.	" Einlösung der Tratte Ordre Geist	850	—
	15.	" Erwerbssteuer	50	—
	20.	" Fracht und Spesen auf Sendung des F. Tropeani in Triest	98	37
	25.	" Einlösung meines heute fälligen Acceptes	1000	—
H. 9	27.	" meine Barzahlung an E. Süß hier	650	—
H. 3	30.	" meine Barzahlung an A. Frisch in Vöslau	100	80
	31.	" Einlösung der Tratte Ordre S. Trost	485	80
	31.	" Zahlung an das Handelspersonale	105	—
	31.	Saldo (Cassabestand)	3070	29
			<u>7347</u>	<u>68</u>

Das Hauptbuch.

§. 11. Das Hauptbuch dient zur Darstellung des Rechnungsverhältnisses mit unseren Geschäftsfreunden; es soll ersichtlich machen, was uns jede Person, mit der wir in Geschäftsverbindung stehen, schuldig ist und was sie an uns zu fordern hat. In demselben wird jedem Geschäftsfreunde ein Conto eröffnet, der zwei gegenüberstehende mit derselben Foliozahl versehene Blattseiten einnimmt und den Namen und Wohnort des Geschäftsfreundes als Überschrift enthält. Auf die linke mit „Soll“ überschriebene Seite trägt man jene Posten ein, für welche der Geschäftsfreund unser Schuldner wird, auf die rechte mit „Haben“ überschriebene Seite dagegen die Posten, für welche er unser Gläubiger wird.

Es ist nicht nothwendig, jedem Conto ein Folium zu geben; man kann zur Ersparung des Raumes auch zwei oder drei solcher Conti, welche voraussichtlich wenig Posten enthalten werden, auf ein Folium bringen.

Am Ende bekommt das Hauptbuch ein alphabetisches Namensregister aller Personen, denen Conti eröffnet wurden, worin neben jedem Namen auch das Folium bemerkt ist, auf welchem der betreffende Conto vorkommt.

Das Hauptbuch entnimmt seine Posten aus dem Journal und aus dem Cassabuche.

Aus dem Journal müssen sämtliche Posten, da sie ohne Ausnahme nur solche Geschäftsfälle enthalten, welche eine Schuld oder eine Forderung begründen, in das Hauptbuch übertragen, und zwar auf die Soll- oder Haben-Seite des betreffenden Conto, je nachdem sie in der Colonne Soll oder Haben des Journals vorkommen.

Aus dem Cassabuche dagegen werden nur diejenigen Posten, welche sich auf eine Einnahme zur Bedeckung oder Abschlagzahlung einer Forderung oder auf eine Ausgabe zur Bedeckung oder Abschlagzahlung einer Schuld beziehen, auf die entsprechenden Conti des Hauptbuches übertragen. Auch mit der Art der Übertragung verhält es sich hier anders als bei dem Journal. Die Einnahmen stehen im Cassabuche auf der Soll-Seite; da sie aber dem Zahler gutzuschreiben sind, müssen sie auf dem Conto desselben im Hauptbuche auf der Haben-Seite erscheinen. Umgekehrt müssen die Ausgaben, welche im Haben des Cassabuches stehen, dem Empfänger derselben zur Last geschrieben werden, also auf dessen Conto im Hauptbuche auf der Soll-Seite erscheinen.

Bei dem Übertragen der Posten auf einen Conto des Hauptbuches schreibt man auf die entsprechende Seite 1. das Datum, 2. die Seitenzahl des Journals oder Cassabuches, auf welcher der übertragene Posten erscheint, 3. eine bündige Angabe des Geschäftes, wodurch die Person Debitor oder Creditor geworden ist, und 4. den Betrag. — Jeder Posten im Hauptbuche nimmt eine Zeile ein; die Zeilen sollen, damit kein Posten eingeschoben werden könne, in gleicher Entfernung stehen.

Zum Zeichen der geschehenen Übertragung schreibt man in der Bezugscolonne des Journals oder Cassabuches vor dem übertragenen Posten das Folium des Hauptbuches.

§. 12. Um das Hauptbuch am Ende eines bestimmten Zeitraumes abzuschließen, addirt man in jedem Conto die Beträge im Soll und jene im Haben, und zieht die kleinere Summe von der größern ab, der Unterschied wird Saldo genannt. Ist die Summe der Beträge im Soll größer als die Betragssumme im Haben, so ist uns die Person, auf welche sich der Conto bezieht, mehr schuldig als sie von uns zu fordern hat; also ist sie unser wirklicher Schuldner, und der Saldo zeigt an, wie viel sie uns schuldig ist. Wenn dagegen im Haben eine größere Summe zum Vorschein kommt als im Soll, so hat die Person im ganzen an uns zu fordern, und der Saldo zeigt an, wie viel sie zu fordern hat.

Wird der Saldo auf diejenige Seite, wo man die kleinere Summe erhielt, eingestellt, so werden die Summen beider Seiten gleich sein. Man zieht dann auf beiden Seiten in gleicher Höhe unter den gleichen Summen die Abschlusslinien. Leere Räume werden diagonal durchschnitten. Kommt, nachdem schon der Saldo eingestellt wurde, auf jeder Seite nur ein Posten vor, so braucht man weiter nichts zu thun, als die Abschlusslinien zu ziehen.

Da der Saldo nur wegen der Ausgleichung der beiden Summen auf die schwächere Seite eingestellt wurde, so muß man, um den frühern wahren Stand der Rechnungen wieder herzustellen, diesen nämlichen Saldo in der neuen Rechnung auf die entgegengesetzte Seite vortragen. Indem der Saldo einmal im Soll und einmal im Haben des Conto eingestellt wurde, hat sich der Rechnungsstand nicht geändert; man hat aber dadurch erzielt, daß sich die frühere Rechnung ausgeglichen hat, und daß in dem Saldo, so wie er auf die neue Rechnung vorgetragen wird, das wahre Resultat der vorigen Rechnung ausgedrückt erscheint.

Zum besseren Verständnisse werden nachstehend drei Conten eines Hauptbuches zusammengestellt.

Haupt-

1

Soll

M. Sachse

1878					fl.	fr.
Juli	1.	S. 1	Für den Saldo von voriger Rechnung		857	50
"	6.	S. 2	" ihm verkauften Kaffee		712	80
"	14.	S. 2	" ihm gelieferte Waren		191	25
					<u>1761</u>	<u>55</u>
August	1.		Für den Saldo von voriger Rechnung		461	55

3

Soll

A. Frisch

1878					fl.	fr.
Juli	1.	S. 1	Für den Saldo von voriger Rechnung		844	20
"	30.	C. 1	" meine Barzahlung		100	80
					<u>945</u>	<u>—</u>

5

Soll

F. Tropeani

1878					fl.	fr.
Juli	3.	S. 1	Für seine Tratte Ordre V. Leiner		960	—
"	7.	S. 2	" meine Kasse auf C. Porenta		850	—
"	31.		" den Saldo auf neue Rechnung		842	28
					<u>2652</u>	<u>28</u>

Buch.

1

hier.

Haben

1878				fl.	kr.
Juli	6.	J. 2	Für sein Accept	950	—
"	30.	C. 1	" seine Barzahlung	350	—
"	31.		" den Saldo auf neue Rechnung	461	55
				<u>1761</u>	<u>55</u>

3

in Vöslau.

Haben

1878				fl.	kr.
Juli	2.	C. 2	Für seine Barzahlung	750	—
"	9.	J. 2	" von ihm erhaltenen Spiritus	195	—
				<u>945</u>	<u>—</u>

5

in Triest.

Haben

1878				fl.	kr.
Juli	1.	J. 1	Für den Saldo von voriger Rechnung	972	35
"	7.	J. 2	" von ihm erhaltene Waren	923	70
"	20.	J. 3	" von ihm erhaltenen Kaffee	756	23
				<u>2652</u>	<u>28</u>
August	1.		Für den Saldo von voriger Rechnung	842	28

2. Neben- und Hilfsbücher.

Das Brief-Copierbuch.

§. 13. Das Buch, in welches die Geschäftsbriefe, die ein Kaufmann an seine Handelsfreunde schreibt, rein abgeschrieben werden, heißt das Brief-Copierbuch.

Das Copierbuch wird paginiert. Bei jeder Copie setzt man links den Ort, wohin der Brief gerichtet ist; weiterhin den Namen des Geschäftsfreundes, dem wir schreiben, und ganz zur Rechten das Datum. Hierauf fängt in der zweiten Zeile die wörtliche Abschrift des Briefes an. Das Schlußcompliment wird als unwesentlich weggelassen. Unter die Copie des Briefes wird noch eine Querlinie gezogen.

Das Copierbuch hat am Ende ein alphabetisches Namensverzeichnis der Freunde, an welche die copierten Briefe geschrieben wurden; in dieses Register muß sogleich nach geschehener Copierung die Pagina der Copie eingetragen werden.

Das Facturenbuch.

§. 14. In dieses Buch werden die Facturen, die man von auswärtigen Handelsfreunden empfängt, wörtlich eingetragen; zugleich setzt man darunter die Fracht- und andere Spesen. Meistens wird einer solchen Factura sogleich auch die Calculation beigelegt.

Für Einkäufe am Platze, so wie für Verkäufe braucht, wenn die sie betreffenden Rechnungen vollständig im Journal und im Cassabuche vorkommen, kein besonderes Nebenbuch aufgestellt zu werden.

Die Scontro-Bücher.

§. 15. Jene Bücher, in denen der Eingang oder Ausgang bestimmter Gegenstände eingetragen wird, heißen Scontro-Bücher.

In einem Scontro wird jedem Gegenstande ein besonderer Conto auf einem Folium errichtet, dessen linke Seite die Überschrift Soll oder Eingang, die rechte Haben oder Ausgang, und die Mitte die Bezeichnung des Gegenstandes enthält. Jeder Empfang dieses Gegenstandes wird mit den wesentlichen Umständen und dem Geldbetrage auf die linke, jedes Weggeben eben so auf die rechte Seite eingetragen.

Die vorzüglichsten Scontri sind:

1. Das Waren-Scontro oder Warenbuch. Dasselbe macht nicht nur unseren jedesmaligen Warenvorrath ersichtlich, sondern weist auch insbesondere aus, wann, was und wie theuer wir gekauft oder verkauft, von wem wir gekauft oder an wen wir verkauft haben, und zeigt endlich auch den Gewinn oder Verlust bei jedem Waren-Artikel an.

Jedem Warenartikel oder auch nur jeder Gattung von Waren wird ein Conto eröffnet, welcher folgende Posten enthält: 1. Jahr, Monat und

Tag, 2. den Namen des Verkäufers oder Käufers, 3. Maß und Gewicht, 4. den Preis, 5. den ganzen Betrag.

2. Das Wechsel=Scontro. In dieses Buch werden jene Wechsel, die wir empfangen und am Verfallstage einzucassieren oder sonst darüber zu verfügen haben, nach allen Einzelheiten, als Betrag und Verfallszeit, Ort und Datum der Ausstellung, Acceptant, Ordre u. s. w. eingetragen.

Ist ein Wechsel eingelöst oder verkauft worden, so wird dieses in der zu diesem Zwecke eingerichteten Colonne bemerkt, der Betrag und Verfallstag aber durchstrichen.

3. Das Effecten=Scontro wird über die ein- und ausgehenden Effecten geführt.

Jeder Gattung von Effecten widmet man einen eigenen Conto, und zwar enthält darin jeder Posten 1. Jahr, Monat und Tag, 2. den Namen des Verkäufers oder Käufers, 3. die Nummern der Obligationen, 4. den Nominalwert, 5. den Cours, 6. den Betrag.

Wenn man mit Staatspapieren nur geringe Geschäfte macht, so ist es nicht nöthig, dafür ein eigenes Scontro aufzustellen, sondern man eröffnet die betreffenden Conti sogleich im Warenbuche.

§. 16. Um einen Conto im Waren- oder Effecten=Scontro abzuschließen, stellt man den laut Inventur sich ergebenden Vorrath sammt Preis und Betrag in die Ausgabs-Colonne, als wenn die Ware verkauft worden wäre. Dann addirt man die Beträge einer jeden Seite; die Summe auf der linken Seite gibt an, was man für den Empfang des Gegenstandes ausgelegt hat; die Summe der rechten Seite zeigt, was man für das Weggeben des Gegenstandes eingenommen hat, und für den Vorrath einnehmen würde. Zieht man beide Summen von einander ab, so bedeutet der Rest Gewinn, wenn die Summe im Ausgang größer ist als jene im Eingang, im entgegengesetzten Falle Verlust. Zur Ausgleichung der Rechnung wird der Rest als Gewinn in den Eingang, als Verlust in den Ausgang eingestellt.

Unter den Summen der Gewichte und Geldbeträge, welche im Eingang und Ausgang gleich sein müssen, werden sodann die Abschlusslinien gezogen. Endlich wird noch der Vorrath sammt Preis und Betrag auf der Eingang=Seite auf neue Rechnung gebracht.

Das Wechsel=Scontro bedarf keines Abschlusses; der Vorrath wird einfach auf neue Rechnung vorgetragen.

Nachstehend wird zur besseren Beleuchtung ein Conto aus dem Warenbuche als Beispiel angeführt.

Eingang

Zucker

1878			Kg.	à	fl.	fr.
Juli	1.	Vorrath: 4 Fässer Raffinad	1835	44	807	40
		7 Fässer Melis	3080	40	1232	—
"	4.	Von E. Süß hier gekauft:				
		4 Fässer Raffinad	1817	44	799	48
"	15.	Von E. Süß hier				
		3 Fässer Raffinad	1348	44	593	12
		8 Fässer Melis	3653	40	1461	20
"	28.	Von R. Kunze hier				
		5 Fässer Melis	2275	40	910	—
"	31.	Gewinn			257	41
			14008		6060	61
Aug.	1.	Vorrath: 5 Fässer Raffinad	2215	44	974	60
		9 Fässer Melis	4141	40	1656	40

Das Verfallsbuch.

§. 17. Das Verfallsbuch, auch Scadenzbuch, soll dem Kaufmanne zu jeder Zeit die Übersicht gewähren, was für Wechsel und wann er sie zu zahlen, für welche Wechsel und wann er Zahlung zu empfangen hat; damit er im ersten Falle mit dem zur Zahlung erforderlichen Gelde sich versehen, im zweiten Falle über die zu empfangende Summe vorhinein verfügen kann.

In diesem Buche wird jedem Monate ein Folium gewidmet; die linke Blattseite nimmt die Rimessen, die rechte die Tratten auf.

Das Expeditionsbuch.

§. 18. In dieses Buch werden alle Frachtstücke, die man zur Weiterbeförderung erhält, eingeschrieben.

Buch.

1

Conto.

Ausgang.

1878			Kg.	à	fl.	fr.
Juli	2.	An J. Alt in Baden				
		2 Fässer Melis	915	45	393	45
"	14.	An J. Sachse hier				
		1 Faß Melis	375	43	161	25
"	16.	An E. Moos in W. Neustadt				
		1 Faß Raffinad	445	48	213	60
"		2 Fässer Melis	914	43	393	2
"	21.	An H. Lumbe hier				
		3 Fässer Melis	1328	43	571	4
"	26.	An G. Sommer in Döbling				
		2 Fässer Raffinad	992	48	476	16
"		3 Fässer Melis	1335	43	574	5
"	27.	An C. Hirsch hier				
		3 Fässer Raffinad	1348	48	647	4
"	31.	Borrath:				
		5 Fässer Raffinad	2215	44	974	60
		9 Fässer Melis	4141	40	1656	40
			14008	—	6060	61

Das Speditionsbuch wird auf zwei Blattseiten geführt; auf die linke trägt man den Empfang der Frachtstücke, auf die rechte die Weiter- sendung derselben ein. Es kommt demnach auf die linke Seite der Name und Wohnort des Übergebers oder Einsenders, Tag des Aviso, Name des Weiterbeförderers nebst Angabe der Frachtgelegenheit, Lieferzeit und Fracht, Name und Wohnort desjenigen, für welchen die Frachtstücke bestimmt sind, und die Art der Spesenbezahlung, ob sie nämlich nachzunehmen, oder dem Übersender zur Last zu schreiben sind; endlich fügt man den Tag des Empfanges der Güter, und die beim Empfang und bis zur Weiter- beförderung gehaltenen Auslagen bei. Auf die rechte Blattseite kommt der Name dessen, an den die Frachtstücke gesendet wurden, der Name des Frächters, Lieferzeit und Fracht, die Angabe der Frachtstücke und die Spesen-Nota; endlich der Beisatz, ob man die Spesen nachgenommen hat oder wer dafür debitiert wurde.

3. Erfolgs-Nachweisung bei der einfachen Buchhaltung.

§. 19. Aus dem Abschlusse des Hauptbuches ergibt sich der Vermögensstand des Geschäftsmannes in Bezug auf Forderungen und Schulden. Um das Resultat des ganzen Geschäftes zu erhalten, muß man inventieren, und zu den Inventurs-Vermögensstheilen die Forderungen und Schulden, wie sich dieselben in den Saldi des Hauptbuches darstellen, hinzufügen. Daraus läßt sich das schließliche reine Vermögen, und durch dessen Vergleichung mit dem anfänglichen reinen Vermögen der Gewinn oder Verlust während des Rechnungszeitraumes bestimmen.

Zur Probe für die Richtigkeit des auf diese Art ausgemittelten Erfolges kann man die einzelnen Gewinne oder Verluste im Laufe des Geschäftes theils aus den Scontro-Büchern, nachdem diese abgeschlossen wurden, theils aus dem Journal ausziehen und auf einem eigenen Verzeichnisse darstellen. Bildet man nun die Summe aller Gewinne, dann die Summe aller Verluste, und zieht die kleinere Summe von der größern ab, so muß der sich ergebende Erfolg mit dem in der Inventur nachgewiesenen übereinstimmen.

II. Die einfache gewerbliche Buchführung.

1. Für größere Gewerbe.

§. 20. Bei größeren Gewerben werden die Bücher auf gleiche Art wie bei der kaufmännischen Buchhaltung eingerichtet und geführt. Das Inventarbuch, das Journal, das Cassabuch und das Hauptbuch treten auch hier als wesentliche Bücher auf, während man als Nebenbücher das Briefcopierbuch, ein Facturabuch, ein Materialienbuch, ein Waren- oder Lagerbuch, ein Bestellungsbuch, das Wechsel-Scontro und das Verfallsbuch führen kann.

In das Inventarbuch werden die Inventuren (§. 8) übertragen.

Das Journal (§. 9) nimmt die Geschäfte nach der Zeitfolge geordnet auf, und zwar nur diejenigen, welche auf Zeit abgeschlossen werden.

Im Cassabuche (§. 10) kommen die Geldeinnahmen und Geldausgaben zur Verrechnung, indem man die Einnahmen auf die linke, und die Ausgaben auf die rechte Seite stellt. Das Eintragen in das Cassabuch geschieht täglich, und der Abschluss desselben monatlich.

Über die Einrichtung des Hauptbuches und das Eintragen in dasselbe gilt das in §§. 11 und 12 Gesagte. Wenn das Cassabuch und das Journal die Geschäftsfälle ausführlich aufnehmen, so brauchen dieselben im Hauptbuche nur kurz angedeutet zu werden, indem man unter der in der Bezugscolonne stehenden Pagina jener Bücher über jeden Geschäftsfall nähern Aufschluß finden kann.

Das Facturenbuch wird geführt, wenn der Gewerbsmann seine Materialien von fremden Plätzen bestellt und darüber Rechnung erhält.

In ausgedehnten Geschäften hält man ein eigenes Materialienbuch, in welches auf der Eingangsseite die gekauften, auf der Ausgangsseite die in die Werkstätte verabsfolgten Materialien einzutragen sind. Auch kann man bei solchen Geschäften ein besonderes Lagerbuch führen, welches eine ähnliche Einrichtung hat wie das Warenbuch bei der kaufmännischen Buchführung; kommt eine fertige Arbeit in die Niederlage, so wird sie auf der linken Blattseite zu dem Erzeugungspreise eingetragen; beim Verkaufe wird sie dann auf der rechten Seite zu dem dafür empfangenen Werte wieder in Ausgang gebracht.

Über bestellte Arbeiten wird das Bestellungsbuch geführt, dem man folgende Columnen geben kann: 1. für das Datum der Bestellung, 2. für den Namen und die Wohnung des Bestellers, 3. für die genaue Angabe der bestellten Gegenstände, endlich 4. für die Vormerkung der stattgefundenen Versorgung.

In Geschäften, welche nur einen sehr unbedeutenden Verkehr mit Wechseln haben, kann das Wechsel= Scontro ganz unterbleiben, und die wenigen vorkommenden Wechsel werden dann nur in das Verfallsbuch eingetragen.

2. Für kleinere Gewerbe.

§. 21. Die kaufmännische Buchführungsweise kann wohl nur in größeren Gewerben volle Anwendung finden. Der Kleingewerbsmann hat nicht Zeit zu langwierigen Verbuchungen, er will durch seine Aufzeichnungen nur einen leichten Überblick dessen gewinnen, was auf den gedeihlichen Gang seines Geschäftes von wesentlichem Einflusse ist. Dabei muß er jedoch immer auch darauf Bedacht nehmen, daß er sich durch seine Buchführung für Streitfälle ein wichtiges Beweismittel sichert.

Damit nach §. 121 der allgemeinen Gerichts=Ordnung die Bücher des Handwerkers vor Gericht die Kraft des halben Beweises haben, muß derselbe ein ordentliches Tagebuch halten, in welches er alles, was ihm zur Last und zu Guten kommt, einzutragen und in welchem er Jahr und Tag, wie auch die Personen, denen und durch welche die Arbeit geliefert worden ist, klar auszudrücken hat.

Um dieser gesetzlichen Bestimmung zu genügen und zugleich den Stand des Vermögens zu jeder Zeit übersehen zu können, muß der Gewerbsmann zunächst ein Journal oder Tagebuch führen und in dasselbe nach der Zeitfolge sämtliche Geschäftsfälle, sowohl solche, die gegen bare Bezahlung, als auch diejenigen, welche auf Credit stattfinden, klar und bündig eintragen.

Das Journal erhält drei Hauptcolumnen. In der ersten Colonne wird das Datum, in der zweiten das Geschäft selbst mit Angabe aller wesentlichen Umstände, in der dritten der Geldbetrag angeführt. Bei

Forderungs- und Schuldposten setzt man in die zweite Colonne zuerst den Vor- und Zunamen und den Wohnort der Person, mit welcher das Geschäft gemacht wird, sammt der Angabe, ob sie gegen uns Schuldner oder Gläubiger geworden ist, was man durch den Beisatz Soll oder Haben andeutet; dann erst wird das Geschäft näher angegeben, durch welches jene Person unser Schuldner oder Gläubiger geworden ist.

Aus dem so geführten Journal kann der Gewerbsmann am Ende eines jeden Zeitraumes ein Verzeichnis seiner Forderungen und Schulden aufstellen. Um den Gesamterfolg des Geschäftes zu erhalten, muß er das bare Geld abzählen (die Barschaft muß mit der Differenz der im Journal verzeichneten Bareinnahmen und Barausgaben übereinstimmen), den Wert der vorrätigen Stoffe und fertigen Arbeiten abschätzen und sodann die Inventur zusammenstellen. Aus der Vergleichung der schließlichen Inventur mit der anfänglichen ergibt sich der während des betreffenden Zeitraumes erzielte Gewinn oder Verlust.

Über die an die Kunden abgelieferten Arbeiten hat der Gewerbsmann entweder gleich bei der Zustellung dieser Arbeiten oder am Ende eines gewissen Zeitraumes Rechnungen, Notizen oder Conti zu übersenden, in denen die einzelnen Stücke mit Angabe der dazu verwendeten Stoffe und ihrer Beträge, sowie des Arbeitslohnes, detaillirt anzuführen sind. Zu diesem Ende muß der Gewerbsmann außer dem Journal auch ein Kundenbuch oder Conto-Buch halten, dessen Auszüge eben jene Notizen bilden. Im Kundenbuche wird jeder Kundschaft eine Rechnung eröffnet, und zwar weil Ausgleichungen zwischen Soll und Haben selten vorkommen, nur einseitig, und darin alles eingetragen, was in der auszufertigenden Note anzuführen kommt. Wenn eine Rechnung von den betreffenden Kunden bezahlt wird, so setzt man darunter die Bemerkung „bezahlt“ mit dem Betrage, welchen man dafür empfangen hat.

III. Entwurf eines einmonatlichen Geschäftes zur Übung im praktischen Durchführen der einfachen Buchhaltung.

Leopold Seehofer in Wien legt am 1. Juli 1878 auf Grund einer vorgenommenen Inventur seiner Handlung neue Bücher an.

Geschäftsgang im Monate Juli 1878.

1. Juli. Laut Inventur wurden meine Activa und Passiva, wie folgt, vorgefunden:

1) Bares Geld 1992 fl.

2) Rimeissen:

720 fl.	auf A. Ruderer	pr.	12. Juli,
490 "	" B. Lerch	"	15. Juli,
1260 "	" M. Schabl	"	10. August.

3) Waren:

Java-Kaffee	1256 Kg.	à 178,
Rio-Kaffee	1470 "	à 164,
Raffinad-Zucker	875 "	à 46,
Melis-Zucker	1613 "	à 42,
Tafelöl	428 "	à 84,
Weinbeeren	315 "	à 25,
Reis	528 "	à 24.

4) Waren-Vorräthe im Kleinverkaufsgewölbe:

Laut Gewölbsinventur im Werte von 476 fl.
Ausstehende Forderungen 178 fl. mit 3% Abzug.

5) Mobilien und Utensilien 960 fl.

6) Buchforderungen:

bei G. Moritz	in Hainburg	760 fl.
" R. Reiner	" Mödling	450 "
" N. Spanner	" Krems	816 "
" C. Huber	" Lundenburg	210 "
" K. Lechner	hier	270 "

7) Tratten:

674 fl. Ordre	C. Fritz	pr. 9. Juli
880 " "	O. Lampl	" 15. Juli,
519 " "	J. Gräfe	" 25. August.

8) Buchschulden:

an A. Passini	in Triest	850 fl.,
" C. Fünk	" Brünn	726 "
" M. Richter	hier	535 "

Ich gebe für Haushaltungskosten 180 fl. und zahle an Gehalten für das Handlungspersonale 120 fl.

Die Tageslosung des Kleingewölbes beträgt 95 fl.

3. Juli. Übergebe an das Gewölbe zum Kleinverkaufe:

150 Kg. Java	à 178,	300 Kg. Rio	à 164,
100 " Raffinad	à 46,	400 " Melis	à 42,
100 " Tafelöl	à 74,	50 " Weinbeeren	à 24 und
100 " Reis	à 24.		

G. Moritz in Hainburg sendet 300 fl. bar und 410 fl. in einer Rineffe auf M. Hart pr. 10. Juli, und empfängt auf Zeit:

200 Kg. Java	à 180,	350 Kg. Rio	à 168,
150 " Raffinad	à 47,	500 " Melis	à 43.

Ich rechne 18 fl. 50 kr. Verpackungspesen.

Die Tageslosung beträgt 81 fl.

4. Juli. Ich löse die Tratte Ordre C. Fritz, 674 fl. pr. 9. Juli, mit 6% Discout ein.

Ich kaufe von M. Richter hier gegen mein Accept pr. 20. Juli 680 Kg. Melis à 40.

Tageslosung 67 fl.

5. Juli. Sende in Folge eines Auftrages an R. Reiner in Mödling.

120 Kg. Java à 180, 100 Kg. Raffinad à 47,
350 " Melis à 43, 50 Kg. Tafelöl à 82.

Tageslosung 102 fl.

6. Juli. Erhalte von N. Spanner in Krems eine Barzahlung von 600 fl. und verkaufe ihm auf Zeit:

100 Kg. Java à 180, 100 Kg. Raffinad à 47,
200 " Melis à 43, 100 " Reis à 25.

Tageslosung 81 fl.

7. Juli. Kaufe einen Wechsel auf J. Haas in Triest, 800 fl. pr. 31. Juli, mit 6% Discout, und giriere denselben an A. Passini in Triest.

Tageslosung 78 fl.

8. Juli. Erhalte ich in Folge Bestellung von C. Fünk in Brünn auf 2 Monate Zeit:

1 Faß Raffinad, Brutto 435 Kg., Tara 24 Kg., à 43,
3 Fässer Melis, " 1336 " " 73 " à 39,

und zahle an Fracht und Spesen 16 fl. 38 fr.

Tageslosung 93 fl.

10. Juli. Ich cassiere die Rimesse auf M. Hart mit 410 fl. ein. Verkaufe an C. Huber in Lundenburg

200 Kg. Rio à 168 und 300 Kg. Melis à 43.

Tageslosung 88 fl.

11. Juli. Erhalte von K. Lechner hier eine Barzahlung von 250 fl. und liefere ihm

100 Kg. Raffinad à 47 und 200 Kg. Melis à 43.

Kaufe und remittiere an C. Fünk in Brünn einen Wechsel über 1000 fl. auf A. Müller in Brünn pr. 10. August.

Tageslosung 80 fl.

12. Juli. A. Passini in Triest übersendet in Folge meines Auftrages Factura über

2 Fässer Java, Brutto 497 Kg., Tara 38 Kg., à 147,
3 " Rio, " 728 " " 52 " à 123,
2 " Tafelöl, " 532 " " 65 " à 60,
1 Kiste Weinbeeren, " 271 " " 27 " à 18.

Für Verpackungspesen rechnet er 28 fl. 50 fr. und entnimmt auf mich den Waren- und Spesenbetrag Ordre A. Worm pr. 12. September.

Ich cassiere die Rimesse auf A. Ruderer mit 720 fl. ein.

Tageslosung 112 fl.

13. Juli. Verkaufe ich an B. Göth hier gegen dessen einmonatliches Accept:

200 Kg. Java à 180, 200 Kg. Raffinad à 47,
100 " Tafelöl à 82, 50 " Weinbeeren à 27.

Tageslosung 74 fl.

14. Juli. Ich kaufe von M. Haller hier gegen bar:

350 Kg. Reis à 23.

Tageslosung 70 fl.

15. Juli. Cassiere ich die Rimesse auf B. Lerch mit 490 fl. ein.
Zahle die heute fällige Tratte Ordre O. Lampl mit 880 fl.

Tageslosung 95 fl.

17. Juli. Kommt die avisierte Sendung von A. Passini in Triest an und ich zahle an Einfuhrzoll, Fracht und kleinen Spesen 282 fl. 35 fr., wovon auf Netto 456 Kg. Java 91 fl. 80 fr., auf Netto 676 Kg. Rio 135 fl. 20 fr., auf Netto 497 Kg. Tafelöl 36 fl. 23 fr., und auf Netto 244 Kg. Weinbeeren 19 fl. 12 fr. entfallen.

Tageslosung 78 fl.

18. Juli. Übergebe an das Kleingewölbe:

100 Kg. Java à 188, 420 Kg. Rio à 164,

150 " Raffinad à 46, 500 " Melis à 42,

150 " Tafelöl à 74, 100 " Weinbeeren à 24 und

200 " Reis à 24.

Tageslosung 91 fl.

19. Juli. R. Reiner in Mödling sendet eine Rimesse von 750 fl. auf A. Kugler in Brunn pr. 20. August, und empfängt auf Zeit:

200 Kg. Rio à 168, 250 Kg. Melis à 43,

100 " Tafelöl à 82, 100 " Weinbeeren à 27.

Tageslosung 85 fl.

20. Juli. Löse mein heute fälliges Accept mit 265 fl. 20 fr. ein.
Tageslosung 78 fl.

21. Juli. Erhalte von C. Fünk in Brunn:

1 Faß Raffinad, Brutto 412 Kg., Tara 23 Kg., à 44,

2 Fässer Melis 883 " 47 " à 39,

und girierte an ihn meine Rimesse von 750 fl. auf A. Kugler in Brunn pr. 20. August.

An Spesen für die Sendung zahle ich 9 fl. 20 fr.

Tageslosung 83 fl.

22. Juli. Leiste an M. Richter hier eine Barzahlung von 500 fl. und empfangen von ihm:

200 Kg. Raffinad à 44 und 500 Kg. Melis à 40 fl.

Tageslosung 98 fl.

24. Juli. C. Huber in Lundenburg sendet eine Barzahlung von 450 fl.

Tageslosung 86 fl.

25. Juli. Liefere an K. Lechner hier auf Zeit:

100 Kg. Raffinad à 47 und 200 Kg. Melis à 44.

Tageslosung 87 fl.

26. Juli. Verfaufe an J. Sachs hier gegen bar:

50 Kg. Java à 178, 100 Kg. Tafelöl à 84,
100 " Reis à 24 50 " Weinbeeren à 27.

Tageslosung 116 fl.

27. Juli. Löse die am 25. August fällige Tratte Ordre J. Gräfe pr. 519 fl. mit 6% Discout ein.

Tageslosung 84 fl.

28. Juli. A. Passini in Triest sendet mir in Folge meines Auftrages, Ziel 2 Monate:

2 Fässer Java, Brutto 478 Kg., Tara 39 Kg., à 147

3 " Rio, 725 " 51 " à 123.

An Fracht, Eingangszoll und anderen Spefen zahle ich 256 fl. 40 fr. Tageslosung 93 fl.

29. Juli. G. Moritz in Hainburg sendet 100 Stück kais. Ducaten ein, welche für seine Rechnung à 5 fl. 28 fr. verkauft werden; Senfarie $\frac{1}{2}\%$.

Tageslosung 133 fl.

30. Juli. Für kleine Gewölbspefen im Monate Juli 28 fl. Das Gewölbe führt die Losung von 98 fl. ab und weist nach:

Warenvorräthe im Werte von 539 fl.

Kleine Gewölbsschulden 205 fl. mit 3% Abzug.

Am 31. Juli schreitet man zum Abschlusse der Bücher und zur Aufstellung der Inventur, wobei wir annehmen wollen, daß der Cassabestand mit dem Saldo des Cassabuches übereinstimmt, und daß die Waren so vorgefunden werden, wie sie das Warenbuch ausweist. Die Mobilien und Utensilien sollen zu dem anfänglichen Werte mit 1% Abzug in Rechnung gebracht werden.

a) Wie groß ist das schließliche Activ-, Passiv- und das reine Vermögen?

b) Wie groß ist der in dem einmonatlichen Geschäfte erzielte Erfolg?



Inhalts-Verzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
Erster Abschnitt. Die vier Grundrechnungsarten mit besonderen und allgemeinen ganzen Zahlen	4
I. Dekadisches Zahlensystem	4
II. Addition	6
III. Subtraction	10
IV. Multiplication	18
V. Division	28
VI. Wiederholungsaufgaben	37
Zweiter Abschnitt. Die vier Grundrechnungsarten mit algebraischen ganzen Zahlen	38
1. Negative Zahlen	38
2. Addition und Subtraction algebraischer Zahlen	40
3. Multiplication und Division algebraischer Zahlen	43
4. Wiederholungsaufgaben	45
Dritter Abschnitt. Theilbarkeit der Zahlen	47
1. Allgemeine Sätze	47
2. Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen	49
3. Zerlegung in Factoren	51
4. Vom größten gemeinschaftlichen Maße	53
5. Vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen	55
6. Wiederholungsaufgaben	57
Vierter Abschnitt. Die vier Grundrechnungsarten mit gebrochenen Zahlen	58
I. Gemeine Brüche	59
II. Decimalbrüche	71
III. Wiederholungsaufgaben	81
Fünfter Abschnitt. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbe- kannten	83
1. Auflösung der Gleichungen	84
2. Anwendung der Gleichungen	87
3. Wiederholungsaufgaben	95
Sechster Abschnitt. Verhältnisse und Proportionen	97
1. Verhältnisse	97
2. Proportionen	99
3. Anwendung der Proportionen	104
4. Wiederholungsaufgaben	111

Siebenter Abschnitt.	Die wichtigsten Verhältnissrechnungen des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens	113
I.	Die Procentrechnung	113
II.	Die Zinsrechnung	123
1.	Einfache Zinsrechnung	123
2.	Discontrechnung	128
3.	Terminrechnung	130
4.	Zinsezinsrechnung	133
III.	Die Theilregel	138
IV.	Die Mischungsrechnung	142
V.	Die Kettenrechnung	144
VI.	Die Münzrechnung	147
VII.	Die Wechselrechnung	151
VIII.	Berechnung der Staatspapiere und Actien	156
IX.	Wiederholungsaufgaben	159
Achter Abschnitt.	Potenzen und Wurzeln	163
I.	Potenzieren	163
II.	Wurzelanziehen	174
III.	Wiederholungsaufgaben	191
Neunter Abschnitt.	Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten	194
I.	Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten	194
II.	Auflösung der Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten	198
III.	Anwendung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten	202
IV.	Wiederholungsaufgaben	207
Zehnter Abschnitt.	Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten	211
I.	Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades	211
II.	Anwendung der Gleichungen des zweiten Grades	217
III.	Wiederholungsaufgaben	220
Elfster Abschnitt.	Logarithmen	226
I.	Von den Logarithmen überhaupt	226
II.	Von den Briggs'schen Logarithmen	230
III.	Wiederholungsaufgaben	239
Anhang.	Grundzüge der einfachen Buchführung	246
	Allgemeine Erklärungen	246
I.	Die einfache kaufmännische Buchführung	250
II.	Die einfache gewerbliche Buchführung	264
III.	Entwurf eines einmonatlichen Geschäftes zur Übung in der praktischen Durchführung	266



L e h r b u c h

der

besonderen und allgemeinen Arithmetik für Lehrerinnenbildungsanstalten.

Von Dr. Franz Ritter von Močnik.

gr. 8°. 246 Seiten.

Die Unterklasse.

Eine Anleitung zur Behandlung des Unterrichtes in der Fibelklasse.

Von Franz Herrmann.

Preis geb. 50 fr.

A n l e i t u n g

zur

Behandlung der sogenannten russischen Rechenmaschine.

gr. 4°. Preis geh. 16 fr.

Der Rechenunterricht in der Volksschule.

Eine Anleitung für Lehrer zum Gebrauche der Rechenbücher für Volksschulen.

Von Dr. Franz Ritter von Močnik.

Zweite, nach den neuen Lehrplänen umgearbeitete Auflage. Preis gebunden 95 fr.

Handbuch für den Rechenunterricht.

Mit zahlreichen Aufgaben für das mündliche Rechnen an Volks- u. Bürgerschulen.

Von Bürgerschuldirector Johann Nagel.

Erster Band. 1. Abtheilung. (I. und II. Stufe.) gr. 8°. Preis geh. 25 fr.

2. Abtheilung. (III. und IV. Stufe.) gr. 8°. Preis geh. 40 fr.

Zweiter Band. (V., VI. und VII. Stufe.) gr. 8°. Preis geh. 50 fr.

Die geometrische Formenlehre

in der Volksschule.

Eine Anleitung für Lehrer zur Ertheilung des geometrischen Unterrichtes.

Von Dr. Franz Ritter von Močnik.

Preis geh. 35 fr.

Belehrung über die Landwirtschaft.

Von A. W. Freiherrn von Babo,

Director der Wein- und Obstbaumschule in Klosterneuburg.

Preis geh. 30 fr.

P r a k t i s c h e O r g e l s c h u l e.

Für Präparanden.

Von Johann Friedrich Kittl.

gr. 4°. Preis geh. 60 fr.

Verlag von F. Tempsky in Prag.



NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIZNICA

COBISS ©



00000492121

