



Razvoj matematičnih kompetenc

Development of Mathematical Competences

Tina Bregant
Univerzitetni
rehabilitacijski inštitut
RS – Soča

Σ Povzetek

Beseda matematika izhaja iz antike in pomeni znanost, učenje in celo ljubezen do učenja. Razumemo jo kot znanstveno vedo, ki raziskuje vzorce in pri tem zahteva poznavanje abstraktnih lastnosti množin, struktur, sprememb in prostora. Za obvladovanje tovrstnih informacij je ključno, da posedujemo matematične kompetence. Nekatere so nam vrojene – biološko dane, druge pa razvijemo pod vplivi okolja.

V članku predstavimo definicijo matematičnih kompetenc in njihov pomen za vsakdanje življenje. Obvladovanje matematike namreč pomeni v današnjem svetu možnost akademskega udejstvovanja, boljši zaslužek in celo višji BDP na nacionalnem nivoju. Pomeni lahko celo razliko med življenjem in boleznijo.

Pri procesiranju informacij, ki so ključne za obvladovanje matematičnih kompetenc, sodelujejo specifični, posebej temu namenjeni predeli možganov. V članku jih na kratko predstavimo.

V članku razpravljamo o vplivih razvoja na sposobnost matematičnega mišljenja. Matematične kompetence povežemo z zgodnjimi zaznavnimi in gibalnimi izkušnjami, telesno shemo in celo s socialno-čustvenimi kompetencami, ki smo jih razvili v otroštvu znotraj družine. Ocenjevanje številčnosti neke skupine, primerjanje dveh vrednosti ali količin ter osnovno dodajanje ali odzemanje so biološko določene sposobnosti, ki so prirojene ljudem in nekaterim živalim. Kas-

neje v razvoju občutek za količino nadgradimo pod vplivom okolja, zlasti formalnega učenja, z uporabo števk, simboličnim učenjem in učenjem algoritmov.

Razumevanje temeljnih principov osvajanja matematičnih veščin nam pomaga otrokom približati matematiko na načine, ki so skladni z njihovim razvojem in delovanjem možganov.

Ključne besede: aproksimacija količine, aritmetika, matematične veščine, telesna shema

Σ Abstract

The word 'mathematics' comes from Antiquity and means science, learning, and even the love of learning. It is understood as a scientific discipline, which studies patterns and requires knowledge of the abstract properties of quantities, structures, changes, and space. In order to master such information, we must possess mathematical competences. Some of them are innate – biologically given, whereas others are developed under the influence of the environment.

The article presents the definition of mathematical competences and their importance in everyday life. In today's world, the mastery of mathematics provides the opportunity to be academically active, have a higher income, and even a higher GDP at the national level. It can even mean the difference between life and illness.

When processing information that is crucial for mastering mathematical competences, specific areas of the brain are involved, which are intended for this purpose. The article briefly describes them.

The article discusses the impact of development on the ability to think mathematically. Mathematical competences are connected with early sensory and movement experiences, with the body scheme, and even with the social and emotional competences that we developed within our family during childhood. Estimating the numbers within a group, comparing two values or quantities, and basic addition or subtraction are biologically determined abilities, which are innate to humans and certain animals. In our subsequent development, we upgrade our sense of quantity under the influence of the environment, especially

of formal learning, by using digits, symbolic learning, and the learning of algorithms.

The understanding of the basic principles of learning mathematical skills helps us to present mathematics to children in ways that are suitable for their stage of development and brain function.

Key words: *approximation of quantity, arithmetic, mathematical skills, body scheme*

α Uvod

Matematika (starogrško μαθηματικά: mathēmátiká iz izraza μάθημα: máthēma - thematos - znanost, znanje, učenje, študij; μαθηματικός: mathematikos - ljubezen do učenja) je znanstvena veda, ki raziskuje vzorce. Razumevanje matematike in njena uporaba zahteva poznavanje abstraktnih lastnosti množin, struktur, sprememb in prostora. Matematična logika je temeljna matematična panoga, ki obravnava in formalizira neprotislovno sklepanje. Matematika lahko tudi vidimo kot znanost nujnih sklepov.

β Matematične kompetence

Matematike kot znanstvene vede raziskovanja vzorcev, ki vsebuje veliko abstraktnih pojmov, se moramo priučiti. Matematične kompetence nam omogočajo razumeti matematiko in matematične pojme. Matematične kompetence so temeljne kognitivne sposobnosti, ki jih večinoma pridobimo skozi formalno šolanje (1). Razumemo jih kot osrednjo komponento človekovega uma, ki pomembno določa izobrazbo in poklicne dosežke (2). Lahko jih definiramo skozi pedagoško prizmo kot sposobnosti,

ki nam omogočajo reševanje vsakdanjih problemov z matematičnim mišljenjem in zajemajo poleg občutka za količino in računanja tudi veščine logičnega mišljenja, prostorske predstave in sposobnost abstrakcije, ki se kaže v razumevanju formul, modelov, konstruktov, grafov in razpredelnic (3).

V življenju srečamo veliko informacij, ki so numerične oziroma povezane s količino. Nanje se odzovemo z razmislekom, ki vsebuje matematično analizo, ki nam pomaga informacijo ustrezno uporabiti (4). Zanimivo je, da je veliko informacij, povezanih z zdravjem, matematičnih. Nekdo, ki ima slabe matematične kompetence, tako zaradi slabega obvladovanja tovrstnih podatkov ravna za svoje zdravje škodljivo, kar vodi celo v večjo obolevnost in lahko tudi poviša smrtnost (5). Lahko bi celo rekli, da znanje matematike pomembno vpliva na zdravje in preživetje. Matematične kompetence gradimo skozi razvoj in jih mojestrimo; kasneje v nevrodegenerativnih procesih pa te kompetence tudi izgublamo. Najprej izgubimo sposobnost zelo kompleksnih operacij, kasneje pa npr. pri demenci lahko izgubimo tudi zelo osnovne sposobnosti zaznave količin (6).

K matematičnim kompetencam sodi intuitivno znanje matematike, ki je vrojeno – genetsko dano. Najbolj raziskano je zazna-

vanje količine. Gre za vrojene, evolucijsko starejše sposobnosti, ki smo jih podedovali od naših prednikov in si jih delimo z nekaterimi živalskimi vrstami (7, 8). Na te vrojene sposobnosti najtežje vplivamo, saj so genetsko – biološko določene (7). Vrojene sposobnosti lahko nadgradimo z izkušnjami zlasti iz predšolskega, manj iz šolskega obdobja. Predšolsko obdobje je namreč obdobje, ko so kritična obdobja za razvoj marsikaterih veščin, tudi matematičnih, široko odprta in omogočajo hitrejšo, robustnejšo učenje z manjšim vložkom energije, saj so možgani pripravljeni na tovrstne izkušnje (9). Za celotno otroštvo je namreč značilno izjemno hitro in učinkovito učenje, ki je zvezano z občutljivimi obdobji, ki so časovno širša kot kritična obdobja. V občutljivem obdobju, ki ga uravnavajo posebne molekule, vezane na biološko notranjo uro, izkušnje nepovratno vplivajo na razvoj določenih predelov živčevja (9). Vrojene sposobnosti v kombinaciji s priučenimi lastnostmi in veščinami pa pomembno vplivajo na naš kasnejši, akademski uspeh, hkrati pa celo določajo višino naše plače in vplivajo na ekonomsko uspešnost države (10).

γ Pomen matematike

Zadnji izsledki OECD-jeve raziskave PISA, ki ocenjuje znanje in veščine petnajstletnikov, segajo v december 2013, po analizi rezultatov pridobljenih v letu 2012 (11). V raziskavo je bilo takrat vključenih približno 510000 dijakov iz 65 različnih držav širom po svetu. Raziskovalci so preučevali znanje na področju matematike, branja in znanstvenih veščin – naravoslovja. Raziskava PISA se je v letu 2015 osredotočila na naravoslovno pismenost in je vključila približno 70 držav. Rezultate raziskav PISA

in TIMSS pričakujemo šele decembra 2016. V letu 2012 se je raziskava osredotočila na matematične veščine. Glavni argument je bil, da izurjenost v matematičnih veščinah določa uspehe v kasnejšem, torej univerzitetnem izobraževanju, ter vpliva na višino zaslužka. Najvišje uvrščeni dijaki v znanju matematike so bili iz Šanghaja in Singapura, zelo visoko tudi iz ostalih azijskih držav (Hongkong, Taipei, Koreja, Japonska) pa tudi iz evropskih držav – Liechtenstein, Švica, Nizozemska in Finska. Slovenija se je v matematičnih veščinah uvrstila sorazmerno visoko, za Avstrijo, na 20. mesto (11).

V analizi rezultatov raziskave PISA so ugotavljali, da če se v procesu izobraževanja osredotočimo na pridobivanje znanja in jasno definirane učne cilje, potem lahko dosežemo boljše rezultate. To dokazujejo države, ki izboljšujejo povprečne rezultate na področju matematike in se posvetijo doseganju višjih minimalnih standardov, npr. Italija, Poljska in Portugalska; pa tudi države, ki izboljšujejo že tako nadpovprečne rezultate: Šanghaj in Singapur. Temu tudi služi raziskava PISA, saj naj bi nudila povratno informacijo načrtovalcem obveznega šolanja. Zato v teh raziskavah preizkušajo predvsem spretnosti, ki pridejo prav v vsakdanjem življenju. Minimalni standardi so zato določeni kot nivo znanja, ki omogoča dijakom živeti aktivno in produktivno (12). Glede na nivoje znanja, ki jih ima PISA šest, je kot minimalni standard definiran drugi nivo.

V raziskavi OECD leta 2012 so poudarili pomen dati priložnosti za uspeh vsakemu otroku, saj prav osnovne matematične veščine omogočajo nadaljevanje šolanja, boljše plačane službe in kasneje višje dohodke tudi na nivoju države. Matematika v slovenski šoli v predmetniku poleg slovenšči-

ne zavzame največ ur na teden, večinoma do štiri, največ pa pet ur tedensko. Pomena matematike in matematičnih kompetenc za kasnejši uspeh v življenju se torej v šolstvu zavedamo. Morda se v Sloveniji najmanj zavedamo pomena znanja. Sicer stremimo k vedno višjim povprečnim ocenam, a to ne pomeni nujno tudi stremjenja k odličnosti in znanju. Prav matematika je predmet, pri katerem dobivajo učenci izmed vseh predmetov najpogosteje negativne ocene; po njihovih navedkih je teh kar ena tretjina (13, 14).

Slovenski osnovnošolci sprejemajo in razumejo matematiko zelo različno. Nekaterim je najljubši predmet, mnogim vzbuja strah in marsikdo se bojuje z negativno oceno (15). Nekateri slovenski učenci v matematiki ne uživajo in se v njej ne počutijo domače (16). Zanimivo je sicer, da tudi v tujini poročajo o strahu pred matematiko, ki se pojavi približno v drugi triadi, kar sovpade z uvedbo ocen (17). Strah je pomembno čustvo, ki vpliva na naše spoznavne sposobnosti in spomin ter na ta način hromi usvajanje matematičnih veščin. Nekateri akademiki so sicer mnenja, da je strah posledica napačnega pristopa poučevanja, kar pa ni nujno edini razlog. Ne nazadnje smo danes priča velikim pritiskom staršev na učitelje in učence, pri čemer so pritiski na otroke uničujoči zlasti z osebnega vidika. Želja staršev, da naj se otrok »le uči, za ostalo bodo poskrbeli starši«, namreč otrokom nalaga breme učne uspešnosti, hkrati pa otroku ne omogoča potrjevanja uspešnosti na drugih področjih življenja. Zlasti je breme učne uspešnosti težko za otroke, ki akademskih želja niti nimajo, imajo pa druge lastnosti, kot so umetniški in športni talenti, estetski čut, smisel za sočloveka, občutek za naravo: živali in rastline ipd. Te

lastnosti praviloma zaživijo v neformalnih, ustvarjalnih okoljih, ki niso tako strogo strukturirana kot akademski svet, so pa za zadovoljstvo v življenju in tudi uresničevanje v poklicu, ki ga kasneje opravljamo, zelo pomembni.

Na vprašanje, zakaj bi se sploh učili matematike, je meni najljubši »klasični« odgovor, zapisan kar v dokumentu »The Common Core«, ki mu sledijo vrtci in šole ZDA v 42 državah in okrožju Columbia (18). Smernice in implementacija le-teh zagotavlja solidno znanje tistim, ki po končani srednji šoli bodisi vstopajo na trg dela bodisi vstopajo v visokošolske programe preko kolidžev. V dokumentu je zapisano, da se učimo matematike zato, ker:

1. Je čudovit in osupljiv človekov dosežek.
2. Zaradi nje same.
3. Nas pripravlja na kolidž in bodoče karierne izzive, zlasti v naravoslovju: znanosti, tehnologiji, inženirstvu in matematiki (t. i. področje STEMI – angl. Science, Technology, Engineering, Mathematics, Informatics).

V »klasični« razlagi matematiko razumemo v luči antike, ki vključuje ljubezen do učenja in vidi v razvrščanjih in prepoznavi vzorcev dodano vrednost ter hkrati ceni pravila logike in človekov um. Danes se zdi, da to ni dovolj, oziroma da je ljudi, ki bi jim ta razlaga zadoščala, zelo malo. Za abstrakcije in ideje žal večina ni dostopna oziroma jim ne zadostujejo. Tem lahko ponudimo zelo praktične argumente:

- Preko matematike spoznavamo raznolikost človekovega mišljenja, še zlasti če jo gledamo v luči kulturne raznolikosti in zgodovinske perspektive.
- Matematiko uporabljamo v vsakodnev-
nih dejavnostih.

- Preko matematike lahko izpeljemo analize, kritike in razumevanje sodobnega sveta; celo sociološke in politične fenomene lahko opredelimo in analiziramo.

8 Matematika kot funkcija delovanja možganov

Pri proučevanju možganov smo se včasih zanašali na anatomijo in patologijo. Sodobne metode, kot je npr. preiskava z magnetno resonanco ali magnetoencefalografija, pa nam omogočajo preučevanje procesov, ki se odvijajo v možganih. Možgane prvenstveno razumemo kot kompleksen procesor informacij. Nevroni se, povezani v kompleksno mrežje, s serijo mehaničnih, električnih in kemičnih procesov odzovejo na informacijo, jo pretvorijo oziroma procesirajo, oddajo naprej ter se nanjo prilagodijo. Mrežje se organizira in spremeni – to imenujemo plastičnost. Podlaga za plastičnost je specifično delovanje sinaps. Procesi na sinapsah namreč omogočajo obdelavo informacij v otroštvu, kar imenujemo razvojna plastičnost, omogočajo pa tudi učenje in pomnjenje še pozno v starost, kar imenujemo plastičnost učenja in spomina; ter nadomestitev izgube funkcije ob poškodbi, kar imenujemo plastičnost, ki jo vzpodbudi poškodba. Možgani nam tako vse življenje omogočajo obdelavo informacij, učenje in pomnjenje (9).

Preiskave s funkcijskim magnetno-resonančnim slikanjem (slikanje s fMR) so omogočile prepoznavo možganskih struktur, ki omogočajo osnovno količinsko pa tudi matematično procesiranje. V luči prejšnjega odstavka procesiranje pomeni odzive nevronov na informacijo. Če gre za procesiranje številčnih podatkov, npr.

arabskih števk, potem gre v možganih za procesiranje simbolne informacije, zapisane s specifičnimi simboli. Če gre za količinsko procesiranje, gre za procesiranje informacije, za katero simboli niso potrebni, zadostuje sistem zaznave in sledenja objektu. Ker so možgani izjemno ekonomični, poteka procesiranje organizirano. Tako obstajajo področja v možganih – posebni sistemi, ki so specializirani npr. za simbolno procesiranje in sistemi, kjer je pomembno le sledenje objektu.

Matematična intuicija

Vsa človeška bitja, pa tudi nekatere živali, so sposobna prepoznave količine. Tako se vsi ljudje in nekatere živali specifično odzovejo pri analizi nesimbolnih dražljajev, npr. skupine madežev ali zaporedja tonov (8, 19). Odziv nam omogoča sistem za osnovno prepoznavanje količine; imenujemo ga tudi sistem aproksimacije (angl. Approximate Number System - ANS) (19). Sistem ni odvisen od uporabe jezika (govora) ali simbolov, pač pa deluje kot kognitivni sistem sledenja objektu. Prisoten je že ob rojstvu in nato z zorenjem doseže vedno večjo natančnost in sposobnost razpoznave tako večjih količin kot manjših razlik, tako da odrasla oseba brez preštevanja oziroma štetja zmore razločiti skupino 100 predmetov od 115 (20). Če pri malčku ugotavljamo dobro delujočo in zrelejši sistem aproksimacije kot pri vrstnikih, je velika verjetnost, da bo otroku v šoli pri matematiki dobro šlo in da bo pri matematiki uspešnejši od vrstnikov (21).

Dojenčki že kmalu po rojstvu, večinoma pri treh mesecih, postanejo pozorni na številčnost niza predmetov. Pri šestih mesecih vizualno ločijo skupini z osmimi in šestnaj-

stimi elementi, pri enajstih mesecih pa že izražajo poznavanje ordinalnosti (22). Ta občutek za količino imenujemo tudi matematična intuicija, saj so te presoje hitre, avtomatične in brez introspekcije (23). Intuicija ne zajema kompleksnih matematičnih operacij in kognitivno zahtevnih konceptov kot so ulomki, koreni, negativna in realna števila. Slednje razvijemo in razumemo šele z izobraževanjem oziroma se jih priučimo. Pri matematični intuiciji gre torej zgolj za osnovno razumevanje števil, ki je prisotno celotno življenjsko obdobje (z izjemo stanj, kot je npr. demenca) in ga poznajo tudi nekatere živalske vrste (24).

Matematično procesiranje

Matematično procesiranje, ki vključuje računsko prakso, uporabo jezika in kognitivno zahtevnejših konceptov, kot so iracionalna in negativna števila, je bolj kompleksno. Zahteva simbolno mišljenje, ki je kasneje nadgrajeno s sposobnostjo abstrakcije in obvladovanje jezika - govora. Numerična kognicija je osnovna, bazična sposobnost procesiranja numerične oziroma številčne informacije. Za reševanje kompleksnejših matematičnih problemov pa je treba numerično kognicijo nadgraditi z aritmetičnim procesiranjem, saj je števila treba povezati z besedami in s količinsko predstavo, izbrati je treba najbolj ustrezno metodo za reševanje določenega problema, algoritmom je treba dati pomen in razumevanje. Poleg razumevanja aritmetičnih nalog je za uspešnost pri matematičnih nalogah – torej za brezhrebno matematično procesiranje, zelo pomembno prepoznavanje numerične informacije iz diagramov, tabel in enačb. Gre za sposobnost razbiranja numeričnih informacij iz različnih formatov. Podatki iz raziskav nakazujejo, da so matematično

»sposobnejši« posamezniki boljši ne toliko v priklicu aritmetičnih znanj, pač pa v delovanju višjih, kognitivnih procesov, zlasti pri procesiranju matematičnih simbolov (19, 24).

ε Predeli v možganih, ki so aktivni med matematičnim procesiranjem

Anatomsko možgane ločimo na možganski hemisferi ali polobli, male možgane in možgansko deblo s podaljšano hrbtenjačo. Poloble delimo na režnje. Spredej je čelni reženj, ki je ključnega pomena za razmišljanje, načrtovanje, reševanje problemov, čustvene odzive, osebnostne značilnosti, gibanje in delno govor. Temenski reženj ima pomembno vlogo pri natančni zaznavi in ločevanju dražljajev, kot so pritisk, dotik, temperatura in bolečina ter sodeluje pri gibanju in zaznavi informacij, tudi objektov. V tem predelu zbiramo pomembne informacije iz okolja. Senčnični reženj je pomemben za zaznavo in prepoznavo slušnih dražljajev, govor ter pomnjenje. Zatilni reženj ima pomembno vlogo pri vidu. Del možganov so tudi mali možgani, ki sodelujejo pri izvrševanju gibov in nadzoru drže, pomembni so tudi za izvedbo miselnih procesov. Iz možganov navzdol v hrbtenjačo poteka možgansko deblo, kjer so pomembni predeli za uravnavanje osnovnih življenjskih funkcij, kot je uravnavanje dihanja in bitja srca. Razdelitev možganov na dve funkcionalno različni polobli in na funkcijske enote (režnje), ki pa so med seboj povezani, povezani pa so tudi z ostalimi, evolucijsko starejšimi predeli možganov, šele omogoča kompleksno delovanje možganov in telesa.

Procesiranje tako količinske kot numerične informacije povezujemo z aktivacijo temenskih režnjev. Temensko področje se aktivira ob predstavitvi informacije, ki je tako v obliki vzorca pik kot v simbolni obliki arabskih števk. Če se količina ali način predstavitve v predstavljenem vzorcu spremeni, pride do ponovne aktivacije in ojačitve v tem predelu, kar lahko z vidika delovanja možganov razumemo kot procesiranje numerične informacije. Bolj ko se količina razlikuje, bolj izrazita je sprememba (25). V študiji so med numeričnim procesiranjem zaznali tudi razlike v obeh hemisferah. Leva hemisfera je bila bolj aktivna med abstraktnimi numeričnimi reprezentacijami, medtem ko je bila desna aktivnejša med primerjanjem in poimenovanjem števil. Razlike med hemisferama so bile najbolj očitne pri primerjavi števil in pri računanju. Med primerjanjem dveh števil je intraparietalna in prefrontalna dejavnost močnejša v desni hemisferi, pri množenju v levi hemisferi, pri odštevanju pa je aktivnost prisotna obojestransko. Verjetno za primerjavo števil zadoštuje le aktivna desna hemisfera, čeprav sta pri primerjanju števil običajno aktivni obe. Pri poimenovanju in računanju pa se praviloma aktivira le leva hemisfera (26).

Intraparietalni sulcus (IPS), še posebej njegov horizontalni del (hIPS), je stranski del temenskega režnja. Je ključen za osnovno določanje količine in je aktiven pri vseh številskih nalogah in pri vseh predstavitvah količine, ne glede na zapis količine in modalnost (24). Osnovno numerično procesiranje povezujemo z aktivacijo horizontalnega segmenta intraparietalnega sulkusa (angl. horizontal segment of the intraparietal sulcus – hIPS) (27), ki ga edinega tudi povezujemo zgolj s številčnimi informacijami, neodvisno od konteksta (28), medtem

ko je za kompleksnejše matematične procese ali procesiranje zahtevnejših konceptov, kot so negativne vrednosti, nujno usklajeno delovanje več področij (1, 29).

Prvi predlagani model numeričnega procesiranja sta predstavila v študijah Dehaene in Cohen, in velja še danes, z nekaterimi dopolnili. Za numerično procesiranje so ključni trije predeli:

1. Bilateralni predeli ob intraparietalnem sulku (IPS) med procesiranjem numerične količine, torej katera števka je večja.
2. Temensko področje, predvsem levo, ki ga imenujemo angularni girus (AG), med preprostim računanjem (seštevanje/odštevanje; množenje/deljenje).
3. Bilateralni zgornji predeli temenske skorje, ki jih povezujemo s pozornostjo in vidno-prostorskimi zaznavami, ki so potrebne med numeričnim ali matematičnim procesiranjem. Ob tem prihaja do aktivacije predelov, kjer se vrši vidna predstava količine – senčnični predel; ob izreki oz. poimenovanju tudi artikulacijska zanka in govorni predel; za priklic in prepoznavo aritmetičnih dejstev so ključne globoke možganske strukture – bazalni gangliji in talamus. Pri izbiri strategije in načrtovanju računske operacije/reševanje matematičnega problema je nujno tudi aktiviranje prefrontalne skorje. Pomembnejši predeli pri tem so medialni in superiorni girusi čelnega režnja, ki omogočajo načrtovanje, stopenjsko reševanje problema; srednji girusi čelnega režnja za zahtevnejše, večstopenjske probleme, in spodnji del čelnega režnja, kjer se vrši nadzor nad preprostimi problemi (24).

Ker je procesiranje matematičnih problemov izjemno kompleksno in zahteva usklajeno in brezhibno delovanje različnih

predelov možganov, lahko razumemo, zakaj je včasih stereotipno veljalo, da je nekdo, ki obvlada matematiko, zares bister. Tudi podatki iz raziskav nakazujejo, da so matematično »spodobnejši« posamezniki boljše ne toliko v priklicu aritmetičnih znanj, torej delovanju spomina, pač pa v delovanju višjih, kognitivnih procesov, zlasti to velja pri procesiranju matematičnih simbolov. Pri dobrih matematikih se ti procesi zelo aktivno odvijajo v levem angularnem girusu, ki je pri njih bolj dejaven kot pri slabih matematikih. Lahko celo sklepamo, da je delovanje višjih kognitivnih procesov biološka danost, ki pa nato preko urjenja večšin postane tudi subspecializacija določenega predela možganov.

Velja tudi opazanje, da nekdo, ki je govorno spreten, ni nujno spreten tudi v obvladanju matematičnih veščin. Matematične sposobnosti se namreč ne povezujejo s sposobnostjo in hitrostjo poimenovanja in izražanja, ki so tudi eno od meril kognitivnega razvoja. Iz nevrološkega vidika matematika tudi ni jezik. Uporablja simbole, podobno kot jezik, vendar pa za uspešno reševanje matematičnih problemov uporablja povsem drugo, vendar pa podobno zapleteno nevronske mreže kot jezik.

ζ Povezava med možgani in telesom določa intuitivno razumevanje matematike

Prostorske in količinske predstave otrok prične usvajati zelo zgodaj, takrat ko pričene uporabljati svoje telo. Takrat tudi prične z oblikovanjem lastne telesne sheme. Telesna shema je miselni konstrukt, ki opisuje, kako si predstavljamo svoje telo v prostoru, kar vključuje postavitev našega telesa v prostor, dolžino in meje naših udov glede na prostor, razmerja delov telesa, razpo-

reditev in razmerja med deli telesa in ob ustreznem treningu tudi podaljške našega telesa, kot npr. palica ali violina. Ko dojenček leži na hrbtu, okoli tretjega meseca starosti namensko poseže po predmetu. Sprva je njegov poseg v prostor negotov: premočan ali prešibak, nenatančno usmerjen na predmet, a sčasoma se dojenček izuri in s spoznavanjem svojega telesa poseže ne le z roko po predmetu pač pa tudi s telesom v prostor: prične s kotaljenjem, plazenjem, kobacanjem in okoli prvega rojstnega dne tudi shodi. S celim telesom otrok spoznava, kaj je daleč in kaj blizu; kaj je več in kaj manj. Njegovo telo mu omogoča razumeti osnovne koncepte: več-manj, močno-šibko, daleč-blizu, ostro-topo, ravno-ukriviljeno itd. Prve koračnice otroku omogočijo novo modalnost: matematične količine spoznava preko glasbe, s celim telesom občuti zaporedje in ritem. Matematiko tako pričenjamo razumeti v tem obdobju intuitivno.



[Slika 1] Otroci, ki se učijo igranja na instrument, so v veliki prednosti pri osvajanju matematičnih kompetenc. Urijo svoje prste, ki so ključni za številčne predstave. Preko celotnega telesa spoznavaajo ritem, melodijo in s spoznavanjem not celo telesno občutijo, kaj so ulomki: celinka, polovinka, četrtinka. Ulomki so za njihovo trenutno mišljenje pri npr. šestih letih, sicer preveč zahtevni, a jih zmorejo razumeti telesno. Najstniki pa preko instrumenta spoznavaajo zakone akustike. Vir slike: arhiv avtorice.

Štetje na prste in uporabo desetiškega sistema pri večini kultur razlagamo s teorijo povezave med telesom in umom (30). Ob uporabi prstov se pri preiskovancih, ki sicer kulturološko uporabljajo desetiški sistem, aktivirajo ista področja kot ob preprostem računanju z arabskimi števki. Uporaba prstov in manipulacije z njimi služijo kot konkretna podlaga za abstraktne pojme. Reprezentacija prstov v naših možganov se kaže podobno kot naše miselno-abstraktne predstave o količinah in manipulaciji z njimi, z aktivacijo istih področij v možganih. Lahko sklepamo, da prsti kasneje s treningom preštevanja in štetja ter razvojem logičnega mišljenja, postanejo tudi abstraktni pojmi. Računanje na prste tako predstavlja prelomnico med intuitivnim in konkretnim mišljenjem (30).

S teorijo povezave med telesom in umom lahko razložimo tudi nekatere druge miselne predstave. Lakoff in Nunez sta uporabila sistem metafor (teorijo kognitivnih ali konceptualnih metafor), v kateri predlagata aritmetiko kot način zbiranja predmetov oziroma aritmetiko kot gibanje vzdolž osi (31). Če ste desnični, kar velja za večino populacije, in uporabljate evropski način pisanja, od leve proti desni, potem je za vas vse, kar je večje, boljše in prihodnje, umeščeno na vašo desno. Zahodnoevropejci smo znani po linearnem razmišljanju, z numerično osjo, ki se pričinja na levi in po velikosti raste proti desni (32). Pri poskusih s številčnimi vrednostmi na ekranih smo pri pritisku na gumb kot reaktivnem času prepoznavne vrednosti pri večjih količinah hitrejši z desnico kot levico. Podobno za nas velja pri vertikalni številčni osi, kjer višje za nas pomeni tudi večje. Tako preiskovanci pri generiranju števil ob premikih telesa navzgor, generirajo večje vrednos-

ti, kot če se premikajo navzdol (33). Če so preiskovanci kimali navzgor, so generirali višje vrednosti, kot če so kimali z glavo navzdol (34). Naši možgani poleg tega enačijo modalnosti. Tako razumemo večje napisano število tudi kot količinsko večjo od drobno napisane in količino pikic precenimo, če prekrivajo večjo površino (35). Povezavo med telesom in umom nevroznanstveniki utemeljujejo z aktivacijo istih možganskih predelov ob gibalni ali miselni nalogi, saj se ob procesiranju števil in količin v možganih aktivira predel temenskega režnja, pri čemer je aktivacija podobna kot pri procesiranju prostorskih informacij ob gibanju, kjer navzgor pomeni več, navzdol manj; levo manj, desno več ipd. (36).

η Problem modalnosti

Pri preučevanju delovanja možganov se srečamo s problemom modalnosti. Modalnost je posledica sposobnosti osrednjega živčevja, ki je najbolj kompleksna prav pri sesalcih in omogoča preko različnih zaznavnih sistemov, vidnega, slušnega in somato-senzoričnega, prepoznavo istega dražljaja na različne načine. Ob tem prihaja do aktivacije različnih predelov možganske skorje. Možgani modalnosti enačijo, kar pomeni da kljub različni pojavnosti in aktivaciji različnih možganskih predelov, možgani »prepoznajo«, da gre za opis iste vsebine. Modalnost pri matematičnem dražljaju bi morda najboljše opisali kot obliko pojavnosti, ki je lahko različna, čeprav vsebina, v tem primeru količina, ostaja enaka.

Tako ste, ko ste vzeli v roke revijo, prebrali, kdaj je izšla in kako je številčno označena. Če ste se odločili za branje točno določenega prispevka, ste morali prepoznati število strani, na kateri se nahaja, in revijo

prelistati. Če imate v rokah septembrsko številko, ali ste pomislili, da gre za 9. številko? Morda IX? Beseda september je tudi zelo drugačna od besede devet. Poleg tega prepoznava govora aktivira druga področja kot prepoznavanje količin.

Številke so abstraktni simboli, ki lahko pomenijo različne stvari: količino kot npr. trije članki ali pa zaporedje: npr. tretji, ki je lahko tudi zadnji, članek ali pa zgolj simbol – npr. za Radensko – tri srca. Številke lahko zapišemo že samo simbolično na več načinov: tri ali 3 ali III ali pa nesimbolično, npr. tri pike ali ooo. Lahko bi tudi trikrat plosknili, trikrat zatrobili, trikrat utripnili z lučjo itd. in na ta način spremenili modalnost iz vidnega dražljaja v zvočnega. Prav vsi zapisi, ne glede na modalnost, pa pomenijo enako količino (24).

Danes menimo, da za razumevanje količine ni treba imeti razvitega govora, pač pa imamo nekatere sisteme vrojene. Empirični dokazi iz skupnosti otrok Aboriginov, ki štejejo brez števk, saj poznajo le besede ena, dve, malo in veliko, so pokazale, da so ti otroci povsem primerljivi v določanju količine in tudi pri preprostih oblikovanjih enako velikih skupin (torej seštevanju/odštevanju), enako starim angleško govorečim otrokom (8). Poleg tega danes menimo, da nam možgani omogočajo »začutiti« količino. Količino prepoznamo amodalno - torej ne glede na modalnost. Ljudje imamo vrojena dva sistema reprezentacije števil. Prvi sistem je ocena (aproksimacija) števila elementov v skupini. Seveda je določanje številčnosti netočno, a se natančnost z zrelostjo možganov izboljšuje. Aproksimacija ni omejena le na vidne (vizualne) objekte, temveč velja tudi za slušne dražljaje. Drugi sistem je sistem določanja natančne vrednosti količine oz. števila objektov. Otroci in

odrasli lahko natančno število elementov določijo le, če teh ni veliko. Dojenčki dojamajo številčnost elementov, če je število objektov največ tri, in ne glede na diskretne ali kontinuirane vrednosti (npr. število piškotov, količina soka), oziroma vizualne ali avditorne dogodke (npr. skoki lutke, zvočni signali) (19).

θ Prepoznavanje količin in števil

Že v predšolskem obdobju prepoznavanje različnih količin in snovanje števil, prilagojeno potrebam in zmožnostim posameznika, vpliva na razvoj in izboljšanje matematičnih sposobnosti. Dobro poznavanje količine in intuitivne številske predstave so namreč predpogoj za uspešno razumevanje matematike in kasneje, v šolskem obdobju, korelirajo z matematičnimi sposobnostmi osnovnošolcev. Novejše raziskave so pokazale, da razvoj aritmetičnih sposobnosti ne temelji zgolj na pridobivanju izkušenj in učenju, temveč so nam nekatere aritmetične sposobnosti, predvsem občutek za količino, vrojene (19).

Sposobnost določanja količine ni vrojena le ljudem, pač pa jo poznajo tudi živali. Živali sicer zelo verjetno ne štejejo v lingvističnem pomenu štetja. Torej živali ne štejejo ena, dve, tri ... pač pa imajo vrojeno sposobnost določanja in razločevanja količine. Gre najverjetneje za evolucijsko prednost teritorialnih živali, ki jim ta sposobnost omogoča določiti teritorij, kjer je več hrane za celotno skupino. Presoja, kje bo taščica našla več črvov ali presoja levinje, v kateri čredi antilop je možnost ulova največja, je živalim vrojena, saj je pomembna za obstoj vrste (8).

Sistem za določanje količine je razvit tako pri ljudeh kot pri živalih. Gre za nekakšen vmesnik med vidom in mišljenjem, ki omogoča »videti« male količine. Zato lahko »vidimo« količino do 5 predmetov, ne da bi jih prešteli. Vrojena sposobnost »videti« količino se oblikuje iz interakcij med količino predmetov in številko, ki jih predstavlja. Težave pri količinski zaznavi naraščajo s številčnostjo elementov pa tudi z velikostjo same količine. Manjša ko je številčnost elementov, bolj smo točni pri oceni. Bolj ko je količina majhna, lažje in večkrat si jo zmoremo predstavljati.

Že dojenčki so sposobni razlikovati množici z različnimi elementi, številčnost pa dojemajo amodalno. Pri šestih mesecih ločijo množici, katerih število elementov je v razmerju 1 : 2, s starostjo pa se to razmerje hitro izboljšuje. Petletni otroci že ločijo skupini, katerih število elementov je v razmerju 7 : 8. Sposobnost primerjanja dveh količin se začne razvijati šele po 15. mesecu starosti, preštevanja pa se otroci naučijo spontano, z učenjem jezika (19).

Govor otroku omogoči, da števila dobijo abstrakten, simbolni pomen, s tem pa se odpre pot k simbolni aritmetiki. Zanimivo pa je, da za preštevanje ni potrebno znanje jezika, saj so osnovni numerični koncepti vrojeni in niso odvisni od razvoja govora oziroma jezika. Do tretjega leta starosti štejejo brez težav do 10, tri in pol letni otrok zazna napako v preštevanju, do četrtega leta pa usvoji osnovni princip preštevanja, t.j. da je vsak predmet štet le enkrat in da si števila morajo slediti zaporedno. Domnevamo, da gre za vrojeno sposobnost, ki je posledica sposobnosti spontanega učenja jezika. Šele po četrtem letu starosti otroci praviloma začnejo razumeti, čemu je preštevanje namenjeno, t.j. da končno število predstavlja

število vseh elementov v skupini (10). Otroci se najprej naučijo prešteti tri medvede in ne zgolj število tri. Ker učenje temelji na predvidevanju, torej kaj naši možgani pričakujejo, da sledi, je sosledje konceptov zelo pomembno. Otroci si lažje zapomnijo in usvojijo koncept števila, če jim najprej predstavimo predmete – torej medvede, in šele nato njihovo količino – torej tri medvede. Z navodilom: »Poglej medvede, trije so!« si otroci zapomnijo količino kar za 30 % bolje, kot če rečemo: »Poglej, trije medvedi!«



[Slika 2, 3] Otroci med petim in sedmim letom spontano pričenejo z opisnim jevanjem. V to vkljuujejo tudi številke. Zelo radi ustvarjajo vzorce, razvrščajo simbole, tudi številke, kar je razvidno iz slike 5-letnice, kjer so številke še zapisane zrcalno. Leto dni kasneje, pri šestih letih, je v zgodbo v obliki stripa že vključena beseda, ki odgovarja na vprašanje »Koliko?« »Za tri piškote. Za celo vrečo.« Vir slike: arhiv avtorice.

☞ Uspešnost učencev in spodbude pri usvajanju matematičnih veščin

Na uspešnost učencev pri usvajanju matematičnih veščin ima velik vpliv biološka danost. So otroci, ki so resnično bolj nadarjeni za matematiko in jim usvajanje matematičnih konceptov ne predstavlja večjih ovir. To so praviloma otroci, ki tudi kasneje v poznem najstništvu posegajo po akademskih dosežkih, saj so njihove kognitivne sposobnosti, zlasti sposobnosti abstraktnega mišljenja, nadpovprečne.

Poleg genetske predispozicije ima velik vpliv tudi zgodnje otroštvo. Gibanje in oblikovanje telesne sheme je najbolj izrazito v predšolskem obdobju. Večina otrok usvoji odrasle, zrele gibalne vzorce ob vstopu v šolo. Kasneje le z velikim naporom oziroma profesionalnim treningom vplivajo nanje. Telesna shema vpliva zlasti na naše intuitivno razumevanje matematike, ki je ključno v vsakdanjem življenju.

Ker pa ljudje nismo samo biološka in telesna bitja, pač pa smo vpeti v družbo, nas oblikujejo tudi medosebni odnosi. Recipročnost odnosov med šolo in domom je tako pomembna, da so otroci bolj osredotočeni na šolske naloge, in zanimivo, hkrati tudi bolj uspešni pri matematiki, če njihovi starši mislijo, da so njihovi otroci uspešni (37). Ravno obratno pa nezaupanje v otrokove sposobnosti vodi v splošno slabšo učno uspešnost in tudi slabše matematične kompetence. Starši, zlasti očetje, s trajanjem šolanja povečujejo zaupanje v sinove matematične kompetence, medtem ko jih za hčere zmanjšujejo. Kako matere razumejo otrokove matematične sposobnosti, pa določa formalno in neformalno matematično

znanje ter tudi uspešnost, pri čemer je materino znanje matematike tisto, ki določa formalni nivo znanja otroka (38).

Predšolske izkušnje in spodbudno predšolsko okolje je tisto, ki vpliva na kasnejše uspehe pri matematiki (39). Učinki obogatenih materialov, dejavnosti in interakcij med vzgojitelji-učitelji in učenci v najzgodnejših letih učenja se kažejo še štiri leta po učinkoviti intervenciji, usmerjeni v matematiko (40). Še bolj zanimivi kot pričakovani uspehi pri matematiki, so drugi učinki spodbud učenja matematike, ki segajo od uravnavanja in zmanjšanja težavnih vedenj, večsamonadzora in pripadnosti šoli in učenju ter večja pogostost pozitivnih socialno-čustvenih vedenj, kar pa je najverjetneje povezano z otrokovo dobro samopodobo.

└ Zaključek

S prispevkom sem poskusila osvetliti nekatere vidike osvajanja matematičnih kompetenc, ki lahko pridejo prav učiteljem pri delu z učenci. Zakonitosti delovanja možganov in naše biološke danosti so dejstva, ki jih včasih ni enostavno sprejeti. Kot učitelji tako pri nadarjenih za matematiko nimamo posebnih zaslug za njihove uspehe, prav tako kot nismo »krivi«, če otrok, pri katerem že intuitivno zaznavanje matematičnih količin pomeni doseganje meja njegovih kompetenc, ne zmore dlje od osnov aritmetike. Drži pa, da s formalnim načinom učenja vplivamo na matematične kompetence.

Snovanje števil, prilagojeno potrebam in možnostim malčka, z začetkom že v predšolskem obdobju, vpliva na izboljšanje matematičnih sposobnosti. Dobro poznavanje količin in razumevanje števil je namreč predpogoj za uspešno razumevanje

matematike. Predšolski otroci imajo dobro razvito matematično intuicijo, znajo oceniti številčnost skupine, preštevajo, seštevajo in odštevajo, seveda na svoj intuitiven način. V šoli jim z učenjem algoritmov intuicijo zameglimo, kar povzroči, da postane mate-

matika težka in manj priljubljena. Učencem moramo zato omogočiti, da uporabljajo matematično intuicijo tudi v šolskih klo-
peh, saj ima le-ta ključni pomen za razume-
vanje matematike in za razvoj matematič-
nih kompetenc.

K Literatura

1. Grabner R.H., Reishofer G., Koschutnig K. in Ebner F. (2011). Brain correlates of mathematical competence in processing mathematical representations. *Front Hum Neurosci*. Dostopno na: <http://dx.doi.org/10.3389/fn-hum.2011.00130> (20. 6. 2016).
2. Schmidt, F. L. in Hunter, J. E. (1998). The validity and utility of selection methods in personnel psychology: practical and theoretical implications of 85 years of research findings. *Psychol. Bull.* 124, 262–274.
3. KEYCONET. (2006). Mathematical competence and basic competences in science and technology. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on Key Competences for Lifelong Learning (2006/962/EC): Mathematical competence. Dostopno na: <http://keyconet.eun.org/math-science-tech> (20. 6. 2016).
4. Parsons, S. in Bynner, J. (2005). Does Numeracy Matter More? London: National Research and Development Centre for adult literacy and numeracy.
5. Reyna, V. F., Nelson, W. L., Han, P. K. in Dieckmann, N. F. (2009). How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. *Psychol. Bull.* 135, 943–973.
6. Gurd J.M., Kischka U. in Marshall J.C. (2010). *Handbook of Clinical Neuropsychology*. Oxford university Press, New York; 2010.
7. Libertus M.E., Feigenson L. in Halberda J. (2011). Pre-school acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science*; 14 (6): 1292–1300.
8. Bregant, T. (2013). Ali je matematika doma le v človekovih možganih?. *Proteus*; 75 (5): 209-216.
9. Bregant, T. (2012) Razvoj, rast in zorenje možganov. *Psihološka obzorja*, letn. 21, (št. 2), str. 51-60. Dostopno na: http://psiholoska-obzorja.si/arhiv_clanki/2012_2/bregant.pdf.

10. Bregant, T. (2004). Ali malček spozna matematiko že v vrtcu?. V: Vrbovšek B. (ur.). Spodbujanje matematičnega mišljenja v vrtcu. Ljubljana: Supra, str. 12-17.
11. OECD. Programme for International Student Assessment (PISA). Dostopno na: <http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/> (29.1. 2016).
12. OECD. Programme for International Student Assessment (PISA). About PISA. FAQ. Dostopno na: <https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/pisafaq.htm> (20. 6. 2016).
13. Peklaj, C. (2012). Učenci z učnimi težavami v šoli in kaj lahko stori učitelj. Ljubljana: Znanstvena založba Filozofske fakultete.
14. Kavčič, R. A. (2005). Učenje z gibanjem pri matematiki. Priročnik gibalnih aktivnosti za učenje in poučevanje matematike v 2. razredu devetletke. Ljubljana: Bravo.
15. Kavkler, M., Žerdin, T. in Magajna, L. (1991). Brati, pisati, računati. Murska Sobota: Pomurska založba.
16. Zajc, I. in Koželj, M. (2001). Matematika v srcu umetnosti. Ljubljana: Jutro.
17. Forgasz, H. in Rivera, F. (2012). Towards Equity in Mathematics Education: Gender, Culture, and Diversity. San Jose: Springer.
18. Common Core State Standards for Mathematics (CCSS-M). Common Core. States Standards Initiative. Preparing America's students for success. <http://www.corestandards.org/> (29. 1. 2016).
19. Levstek, T., Bregant, T. in Podlesek, A. (2013). Razvoj aritmetičnih sposobnosti. Psihološka obzorja, letn. 22, str. 115-121. http://psy.ff.uni-lj.si/psiholoska_obzorja/arhiv_clanki/2013/levstek_et_al.pdf (29. 1. 2016).
20. Sousa, D. (2010). Mind, Brain, and Education: Neuroscience Implications for the Classroom. Solution Tree Press.
21. Mazzocco, M.M.M., Feigenson, L. in Halberda, J. (2011). »Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance«. PLoS ONE 6(9): e23749. doi:10.1371/journal.pone.0023749. (29. 1. 2016).
22. Dehaene, S. (2009). Origins of Mathematical Intuitions. The Case of Arithmetic. The Year in Cognitive Neuroscience 2009: Annual NewYork Academy of Science, letn. 1156, str. 232-259, dostopno na doi: 10.1111/j.1749-6632.2009.04469.x
23. Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. in Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. Current Opinion in Neurobiology, letn.14, str. 218-224.

24. Bregant, T. (2012). Nevrokognitivne osnove numeričnega procesiranja = Brain mechanisms underlying numerical processing. *Psihološka obzorja*, letn. 21, št. 3/4, str. 69-74. http://psy.ff.uni-lj.si/psiholoska_obzorja/arhiv_clanki/2012_3/bregant.pdf (29. 1. 2016).
25. Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D. in Dehaene, S. (2007). A Magnitude Code Common to Numerosities and Number Symbols in Human Intraparietal Cortex. *Neuron*, letn. 53, str. 293-305.
26. Chochon, F., Cohen, L., Moortele, P. F. in Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, letn. 11, str. 617-630.
27. Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. in Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, letn. 20 (3/4/5/6), str. 487-506.
28. Thioux, M., Pesenti, M., De Volder, A., in Seron, X. (2002). Category-specific representation and processing of numbers and animal names across semantic tasks: A PET study. *NeuroImage*, letn. 13, št. 6 suppl. 2/2, str. S617.
29. Blair, K.P., Rosenberg-Lee, M., Tsang, J.M., Schwartz, D.L. in Menon, V. (2012) Beyond natural numbers: negative number representation in parietal cortex. *Frontiers in Human Neuroscience*, letn. 6, št. 7. <http://10.3389/fnhum.2012.00007> (29. 1. 2016).
30. Krinzinger, H., Koten, J.W., Horoufchin, H., Kohn, N. in Amdt, D. (2011). The role of finger representations and saccades for number processing: an fMRI study in children. *Frontiers in psychology*, letn. 2, str. 56-67.
31. Lakoff, G. in Nunez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from*, New York: Basic Books.
32. Dehaene, S., Bossini, S., in Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude, *Journal of Experimental Psychology: General*, letn. 122, str. 371- 396.
33. Hartmann, M., Grabherr, L., in Last, F.W. (2012). Moving along the mental number line: Interactions between whole-body motion and numerical cognition, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, letn. 38, št. 6, str. 1416-1427.
34. Winter, B. in Matlock, T. (2013). More is up... and right: Random number generation along two axes, V: Knauff, M., Pauen, M., Sebanz, N., Wachsmuth, I. (ur.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Austin, TX: Cognitive Science Society, str. 3789-3974.

35. Hurewitz, F., Gelman, R. in Schnitzer, B. (2006). Sometimes area counts more than number. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, letn. 103, str. 599– 604.
36. Bregant, T. (2016). Matematične sposobnosti pri otrocih : nekaj vrojenega, nekaj pridobljenega, a vedno lahko vir zadovoljstva. *Obzornik za matematiko in fiziko*, let. 63, št. 1, str. 18-24.
37. Aunola, K., Nurmi, J.E., Lerkkanen, K. in Rasku-Puttonen, K. (2003). The role of achievement-related behaviors and parental beliefs in children's mathematical performance. *Educational Psychology*, letn. 23, št. 4, str. 403-421.
38. Blevins-Knabe, B., Whiteside-Mansell, L. in Selig, J. (2007). Parenting and mathematical development. *Academic Exchange Quarterly*, letn. 11, št. 2, str. 76-80.
39. Brooks-Gunn, J., Fuligni, A.S. in Berlin, L.J. (2003). *Early child development in the 21st Century: Profiles of current research initiatives*, New York: Teachers College Press.
40. Preisner-Feinberg, E.S., Burchinal, M.R. in Clifford, R.M. (2001). The relation of preschool child-care quality to children's cognitive and social developmental trajectories through second grade. *Child Development*, letn. 72, št. 5, str. 1534-1553.