PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **32** (2004/2005)
Številka 6
Strani 5–6

Drago Bajc:

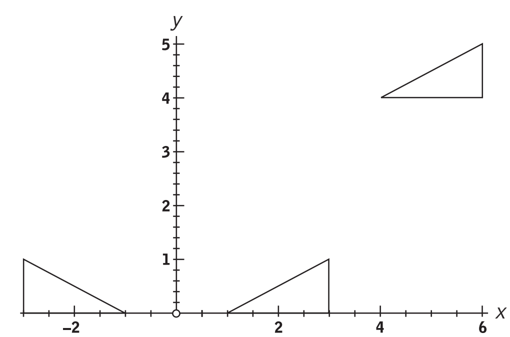
ELIPSA V TRIKOTNIKU

Ključne besede: matematika, ravninska geometrija, trikotnik, včrtana elipsa.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/32/1605-Bajc.pdf

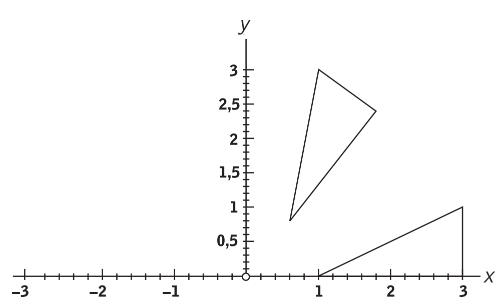
1. Elipsa v trikotniku

Ali trikotniku lahko včrtamo elipso? Prav gotovo. Vsakokrat, ko včrtamo trikotniku krog (in to je vedno mogoče), včrtamo že tudi elipso, saj je krog vendar poseben primer elipse. Zato moramo vprašanje zasukati drugače. Recimo takole: koliko elips lahko včrtamo danemu trikotniku? Glede na to, da ima elipsa dve poljubno dolgi osi, krog pa samo en polmer, slutimo, da je rešitev neskončno. S tem se ne bomo obremenjevali, pač pa bomo od elipse včrtane trikotniku, zahtevali, da izpolni še en pogoj, in sicer tega, da se dotika treh trikotnikovih stranic v njihovih razpoloviščih. Naloga je s tem postala dovolj težka, da je tudi zanimiva. Pa je za poljuben trikotnik rešljiva? In je rešitev, če obstaja, ena sama?



Slika 1.

Slika 2.



Za zelo poseben trikotnik, enakostranični trikotnik, rešitev obstaja, saj se posebna elipsa – krog, včrtan enakostraničnemu trikotniku, dotika stranic prav v njihovih razpoloviščih. Kako lepo bi bilo, če bi mogli to sliko preoblikovati, transformirati tako, da bi iz enakostraničnega trikotnika nastal drug trikotnik, in to poljubno vnaprej izbran, pri čemer bi razpolovišča stranic postala razpolovišča novih stranic in bi dotikajoči se krog postal dotikajoča se elipsa.

Nekaj preslikav (transformacij) v ravnini poznamo. Na sliki 1 sta prikazana premik (translacija)

- $x' = x + 3$
- $y' = y + 4$

in zrcaljenje

- $x' = -x$
- $y' = y,$

na sliki 2 pa zasuk ali rotacija

- $x' = 0.6 \cdot x - 0.8 \cdot y$
- $y' = 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y.$

In končno nam slika 3 ponazarja razteg

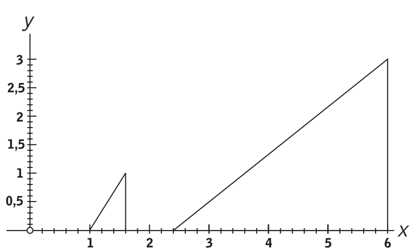
- $x' = 3x$
- $y' = 3y.$

Vse te preslikave so zanimive, naše naloge pa ne morejo rešiti, saj se koti pri vseh ohranjajo (pri prvih treh preslikavah se ohranjajo tudi razdalje), mi pa moramo na splošno kot spremeniti. Namig iz naštetih preslikav pa le dobimo. Vse so namreč linearne transformacije (vse črke spremenljivk so prve stopnje), skratka oblike:

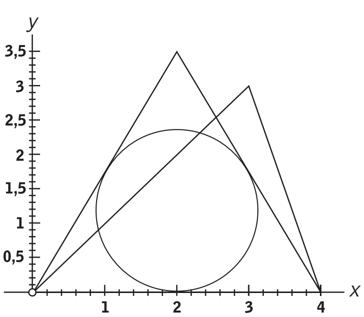
$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f. \qquad (1)$$

Tako je za premik $a=1$, $b=0$, $c=3$, $d=0$, $e=1$, $f=4$. Kar pa je s tem v zvezi najvažnejše, prej naštete transformacije ne izčrpajo vseh možnosti, ki jih posplošitev enačbe (1) nudi (že primer $x'=x$ in $y'=3y$ je nekaj, česar omenjene štiri transformacije ne krijejo: ni premik ne zrcaljenje ne zasuk ne razteg). Ostalo nam je torej še nekaj manevrskega prostora. Bo ta dovolj velik za to, kar želimo doseči?

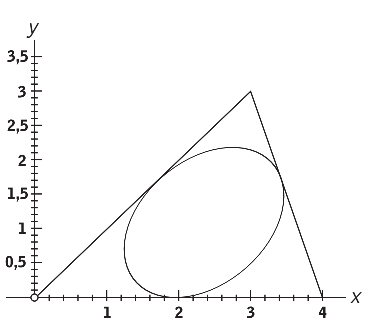
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



Kaj bi bilo sedaj treba storiti? Vzeti bi morali tri oglišča trikotnika v poljubni legi, podana v koordinatnem sistemu s tremi pari števil, dalje tri oglišča enakostraničnega trikotnika, nato dokazati, da se stranice enakostraničnega trikotnika preslikajo v stranice prvega trikotnika, da se enako zgodi z razpolovišči stranic, ki naj se tudi znajdejo v razpoloviščih stranic in da pri tem krog postane elipsa. Vse to za primerne koeficiente $a,\dots,f$ iz enačbe (1). Pravimo »bi«, saj bomo za oglišča vzeli konkretne številske vrednosti. Bralcu bo tako lažje, vseeno pa naj bi – tako upamo – uvideli, kako bi potekal postopek tudi v splošnem primeru.

Naj bo torej dan trikotnik z oglišči v točkah $(0,0)$, $(4,0)$ in $(3,3)$. Ob njem narišimo (slika 4) še enakostranični trikotnik z oglišči v točkah $(0,0)$, $(4,0)$ in $(2,2\sqrt{3})$ z včrtanim krogom. Ker hočemo s preslikavo doseči $(0,0)\to(0,0)$, $(4,0)\to(4,0)$ in $(2,2\sqrt{3})\to(3,3)$, nam vstavljanje v enačbo (1) podari vseh šest koeficientov $a,\dots,f$, pri čemer transformacija (1) postane

$$x' = x + \sqrt{3}/6\ y$$
$$y' = \sqrt{3}/2\ y, \qquad (2)$$

Bralec naj to izpelje ali vsaj naredi preizkus!

Dokažimo, da transformacija (2) preslika premice v premice. V kaj se na primer preslika premica $y=mx$ (m=konst.)? Vstavimo v (2) in dobimo

$$x' = (1+\sqrt{3}/6\ m)x$$
$$y' = \sqrt{3}/2\ mx.$$

Po deljenju nam to da x'/y'=konst., kar je seveda enačba premice. Bralec je naprošen, da dokaže, da se tudi splošnejša premica $y=mx+n$ preslika v premico. In prav tako premica $x=k$, ki ni zajeta v tej zadnji enačbi.

Razpolovišče $(2,0)$ se tudi preslika v razpolovišče $(2,0)$ in isto velja za ostali dve razpolovišči $(1,\sqrt{3})$ in $(3,\sqrt{3})$, ki se preslikata v razpolovišči $(1.5,\ 1.5)$ in $(3.5,\ 1.5)$. Oboje naj bralec preveri sam.

V kaj se preslika krog, katerega enačba je

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}\ ? \qquad (3)$$

Dovolj je izraziti x in y z x' in y' ter vstaviti v (3), pa dobimo iskano enačbo. Ta je

$$\left(x'-\frac{1}{3}y'-2\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}.$$

Enačba je, čeprav je nismo niti preuredili, očitno druge stopnje, zato je stožnica. Ta ne more biti krog, ker sta koeficienta pri x'^2 in y'^2 različna. Pa tudi hiperbola ali parabola ne, ker iz končnih točk (x,y) lahko iz enačb (2) dobimo le končne točke (x',y'), hiperbola in parabola pa imata tudi točke, ki so poljubno, neskončno daleč. Preostaja le elipsa, tista elipsa, ki smo jo iskali (slika 5). Ker smo tako pri računanju koeficientov kot povsod drugje dobili eno samo rešitev, je tudi dobljena elipsa edina z zahtevanimi lastnostmi. Naloga je torej popolnoma rešena.

Pripis. V enačbah (1) so koeficienti $a,\dots,f$ poljubna realna števila z edino izjemo: $ae-bd$ ne sme biti enako 0. Če se to zgodi, enačbi (1) preslikata celo ravnino v premico. Govorimo o izrojeni linearni transformaciji.

Drago Bajc