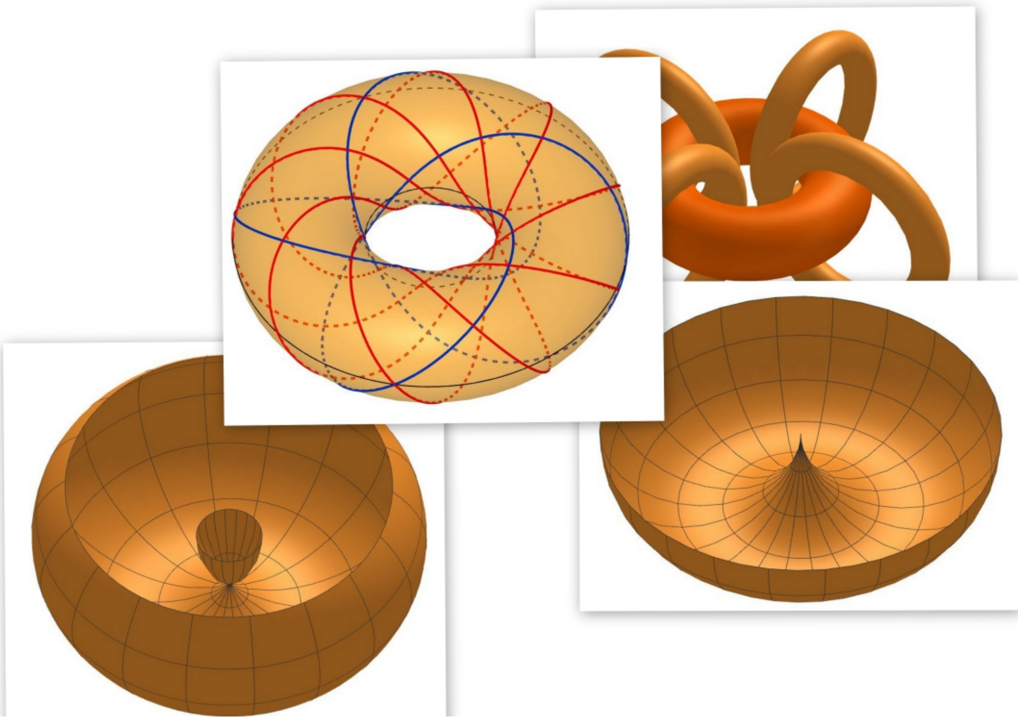
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2016
Letnik 63
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 63 • ŠT. 4 • STR 121-160 • JULIJ 2016

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2016, letnik 63, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

LOKSODROME NA KROŽNEM TORUSU

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 53A04, 53A05

V prispevku definiramo loksodrome na krožnem torusu in med njimi poiščemo sklenjene. Pokažemo, kdaj obstajata ortogonalni družini sklenjenih loksodrom na krožnem torusu.

LOXODROMES ON A RING TORUS

In this contribution we define loxodromes on a ring torus and we find closed ones among them. We show when there exist orthogonal families of closed loxodromes on a ring torus.

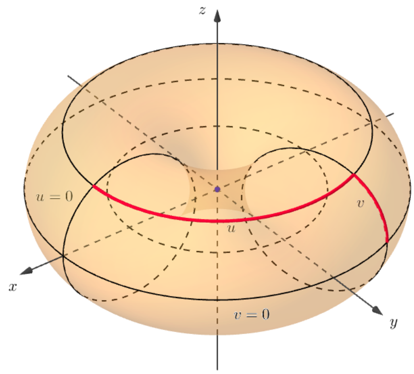
Torus

Če krožnico s polmerom $b > 0$ zavrtimo za kot 2π okoli premice v ravnini te krožnice, dobimo ploskev, ki ji rečemo *torus*. Pri tem naj središče krožnice opiše krožnico s polmerom $a > 0$. Premica, okoli katere zavrtimo krožnico, je *os torusa*. Krožnica s polmerom a, po kateri središče krožnice s polmerom b obkroži središče torusa, je *središčnica torusa*. Njeno središče je *središče torusa*. Da bomo torus lažje študirali in v zvezi z njim tudi kaj izračunali, postavimo pravokotni kartezični koordinatni sistem $Oxyz$ tako, da je središče torusa v koordinatnem izhodišču, os torusa pa je os z. Preostali dve koordinatni osi pa sta postavljeni tako, kot smo navajeni (slika 1).

Oblika torusa je še najbolj odvisna od razmerja med a in b. Če je $a > b > 0$, ima torus okoli svojega središča luknjo. Takemu torusu pravimo *krožni torus*, saj ima obliko odebeljene krožnice in je še najbolj podoben avtomobilski zračnici. Če je $a = b > 0$, se ta luknja popolnoma zapre in takrat govorimo o *rogatem torusu*. Če namreč tak torus presekamo z ravnino skozi njegovo središče pravokotno na os, vidimo v vsaki polovici v sredini nekakšen rožiček vzdolž osi. Če je $0 < a < b$, torus seka sam sebe, okoli njegovega središča pa dobimo vretenu podoben del. Zato takemu torusu rečemo *vretenasti torus*. Ker bomo v prispevku obravnavali samo krožne toruse, bomo prilastek *krožni* izpuščali.

Torus v koordinatnem sistemu $Oxyz$, v katerem je O središče torusa, os z pa os torusa, najenostavneje parametriziramo z

$$\vec{r}\,(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v),$$



Slika 1. Torus. Nekaj poldnevnikov in vzporednikov. Pomen parametrov.

pri čemer je $-\pi < u \leq \pi$, $-\pi < v \leq \pi$. Parametrizacijo najlažje razumemo, če vzamemo točko na torusu in gledamo osni presek torusa skozi to točko ter pravokotno projekcijo na ekvatorialno ravnino torusa $z = 0$.

S tem imamo na voljo analitično izražavo torusa, kar omogoča udobno računanje. Območje parametrov u in v, ki sestavljajo urejene pare (u, v), je kvadrat $\mathcal{Q} = \{(u, v) : -\pi < u \leq \pi,\ -\pi < v \leq \pi\}$. Parameter u imenujemo *zemljepisna dolžina*, v pa *zemljepisna širina* na torusu. Vsaki točki na torusu ustreza natančno en par (u, v) v kvadratu $\mathcal{Q}$. S parametrizacijo smo ustvarili koordinatni sistem na torusu, nekako tako kot na globusu.

Krivulje na torusu

Pri konstantnem u dobimo poldnevnike na torusu, pri konstantnem v pa vzporednike. Poldnevniki in vzporedniki na torusu se sekajo pod pravim kotom. Vzporednik, določen z $v = 0$, je *zunanji ekvator* torusa, vzporednik, določen z $v = \pi$, pa *notranji ekvator* torusa.

Če je $\mathcal{K}$ krivulja v kvadratu $\mathcal{Q}$, se bo le-ta s funkcijo $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ preslikala v krivuljo na torusu. Sedaj bomo poiskali na torusu tisto krivuljo, ki njegove poldnevnike seka pod enakim kotom α. Iskano krivuljo bomo imenovali *loksodroma*. Kot $\alpha \neq 0$ bomo šteli za pozitiven, če je v presečišču poldnevnika in loksodrome na njej $du/dv > 0$, in za negativen, če je $du/dv < 0$. Za kot $\alpha = 0$ dobimo kar poldnevnik, za $\alpha = \pi/2$ pa vzporednik na torusu. Ta dva primera sta nezanimiva. Zato predpostavimo, da velja $0 < |\alpha| < \pi/2$. Poiskati moramo tako povezavo med parametroma u in v, ki definira krivuljo na torusu, ki seka njegove poldnevnike pod stalnim kotom α. To bo nekaj takega, kot je v koordinatnem sistemu Oxy primerna relacija med x in y, ki definira krivuljo v tej ravnini.

Kot α med krivuljama je kot med tangentama v presečišču teh krivulj. Ker ima diferencial $\mathrm{d}\vec{r}$ krivulje isto smer kot njena tangenta, lahko kot med njima hitro izrazimo. Diferencial v zvezi s prvo krivuljo označimo z d, v zvezi z drugo pa z δ. Torej lahko izrazimo

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{|\mathrm{d}\vec{r}|\cdot|\delta\vec{r}|} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{\mathrm{d}s\cdot\delta s}.$$

Na ploskvi $\vec{r}=\vec{r}\,(u,v)$ je

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v,$$

kvadrat diferenciala loka pa

$$|\mathrm{d}\vec{r}|^2 = \mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

pri čemer so *Gaußovi koeficienti* E, F, G definirani takole (več o tem v [3]):

$$E = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \qquad F = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \qquad \text{in} \qquad G = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}.$$

S preprostim računom dobimo za torus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} &= (a+b\cos v)(-\sin u, \cos u, 0),\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} &= b(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v),\end{aligned}$$

$$E=(a+b\cos v)^2, \quad F=0, \quad G=b^2, \quad \mathrm{d}s^2=(a+b\cos v)^2\,\mathrm{d}u^2+b^2\,\mathrm{d}v^2.$$

Iskana loksodroma naj ima diferenciale označene z d, poldnevnik pa z δ. Na poldnevniku se parameter u ne spreminja, zato je $\delta u = 0$ in izrazi se poenostavijo:

$$\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r} = b^2\mathrm{d}v\delta v, \qquad \delta s^2 = b^2\delta v^2, \qquad \cos\alpha = \frac{b\,\mathrm{d}v}{\sqrt{(a+b\cos v)^2\,\mathrm{d}u^2 + b^2\mathrm{d}v^2}}.$$

Dobljeno diferencialno enačbo preoblikujemo tako, da najprej zapišemo

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 (a+b\cos v)^2,$$

iz česar dobimo preprosto diferencialno enačbo

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 (a + b\cos v)^2 = b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

ki razpade na dve diferencialni enačbi z ločljivima spremenljivkama:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(a + b\cos v) &= b \operatorname{tg}\alpha,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(a + b\cos v) &= -b \operatorname{tg}\alpha.\end{aligned}$$

Ločimo spremenljivki:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{b \operatorname{tg}\alpha}{a + b\cos v}\,\mathrm{d}v,\\ \mathrm{d}u &= \frac{b \operatorname{tg}(-\alpha)}{a + b\cos v}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Obravnavali bomo samo primer $\alpha > 0$, saj sta si rešitvi za $\alpha > 0$ in $\alpha < 0$ zrcalni glede na ravnino, ki vsebuje poldnevnik.

Za enolično rešitev dobljene diferencialne enačbe moramo poznati še začetni pogoj. Brez škode za splošnost poiščimo tisto loksodromo na torusu, ki poteka skozi točko $A(a+b, 0, 0)$; ta ustreza parametroma $u_0 = 0$ in $v_0 = 0$. Z integracijo dobimo

$$u = b \operatorname{tg}\alpha \int_0^v \frac{\mathrm{d}\nu}{a + b\cos \nu} = \frac{2b \operatorname{tg}\alpha}{c} \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}(v/2)),$$

kjer smo pri pogoju $a > b > 0$ označili

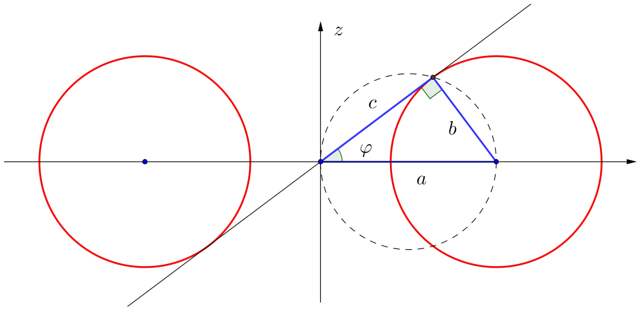
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{in} \quad \mu = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Vpeljani parameter c ima preprost geometrijski pomen. Za katerikoli torusov poldnevnik ima namreč odsek njegove tangente, ki poteka skozi središče torusa, dolžino c, merjeno od dotikališča do središča torusa (slika 2).

Funkcija

$$f : v \mapsto u = f(v) = \frac{2b \operatorname{tg}\alpha}{c} \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}(v/2)) \tag{1}$$

je definirana na intervalu $(-\pi, \pi)$, je liha in ima v krajiščih ustrezni enostranski limiti $\pm b\pi/c \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Funkcija f vpliva na obliko loksodrome na torusu. Ta je odvisna od tega, v kakšni medsebojni relaciji so a, b in α oziroma b, c in α.



Slika 2. Geometrijski pomen parametra c in kota φ.

Villarceaujeve krožnice na torusu

Najprej bomo obravnavali primer, ko graf funkcije f vključno z limitnima točkama v krajiščih intervala $(-\pi, \pi)$ poteka skozi oglišči $(-\pi, -\pi)$ in (π, π) zaprtja kvadrata $\mathcal{Q}$. Ti dve oglišči namreč dasta na torusu isto točko $(b - a, 0, 0)$ na njegovem notranjem ekvatorju, kar pomeni, da je ustrezna loksodroma sklenjena krivulja. To se zgodi pri pogoju $\operatorname{tg} \alpha = c/b$. Tedaj je

$$u = f(v) = 2 \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}(v/2)).$$

Če uporabimo znane identitete s polovičnimi koti, dobimo za loksodromo

$$\cos u = \frac{b + a \cos v}{a + b \cos v}, \qquad \sin u = \frac{c \sin v}{a + b \cos v}$$

in jo lahko zapišemo v preprosti obliki:

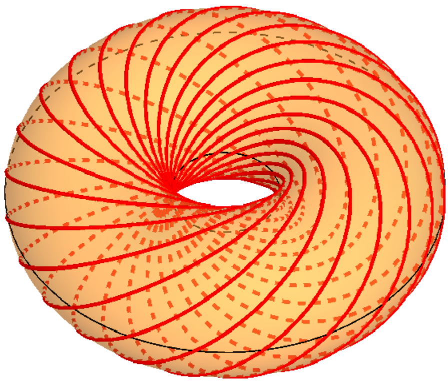
$$\vec{r}\,(v) = (b + a \cos v, c \sin v, b \sin v).$$

Dobljena krivulja očitno leži na ravnini $cz = by$, ki je vzporedna z osjo x in oklepa z ravnino $z = 0$ kot φ, za katerega je $\operatorname{tg} \varphi = b/c$ oziroma $\sin \varphi = b/a$. Kot med ravninama je seveda definiran kot kot med njunima pripadajočima normalama. Ravnina $cz = by$ seka torus še enkrat v prav taki krivulji, tako da imamo opraviti s skladnima koplanarnima krivuljama. Ker za poljuben vektor $\vec{r}\,(v)$ velja

$$|\vec{r}\,(v) - b\,\vec{i}\,| = |(a \cos v, c \sin v, b \sin v)| = a,$$

je dobljena krivulja krožnica s središčem v točki $S(b, 0, 0)$ in polmerom a. Krožnici rečemo *Villarceaujeva krožnica na torusu*. Villarceaujeva krožnica je skladna s središčnico torusa. Vse Villarceaujeve krožnice na torusu dobimo z zasuki okoli osi torusa dveh Villarceaujevih krožnic skozi točko $A(a+b,0,0)$: ena oklepa v tej točki z zunanjim ekvatorjem kot φ, druga pa $-\varphi$. Rekli bomo, da sta si tedaj Villarceaujevi krožnici *sestrski*. Slednja ima enačbo

$$\vec{r}\,(v) = (b + a\cos v, -c\sin v, b\sin v).$$



Slika 3. Villarceaujeve krožnice.

Vsako Villarceaujevo krožnico dobimo iz osnovne in njej sestrske krožnice z zasukom okoli osi torusa za neki kot, denimo ϑ. Do njene enačbe pridemo z množenjem rotacijske matrike za kot ϑ glede na os z in vektorja $\vec{r}\,(v)$, ki ga transponiramo v stolpec:

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b + a\cos v \\ \pm c\sin v \\ b\sin v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b + a\cos v)\cos\vartheta \mp c\sin v\sin\vartheta \\ (b + a\cos v)\sin\vartheta \pm c\sin v\cos\vartheta \\ b\sin v \end{bmatrix}.$$

Potem ko dobljeni stolpec transponiramo v vrstico, dobimo:

$$\vec{r}_\vartheta\,(v) = ((b+a\cos v)\cos\vartheta \mp c\sin v\sin\vartheta, (b+a\cos v)\sin\vartheta \pm c\sin v\cos\vartheta, b\sin v).$$

Slika 3 kaže družino na isto stran nagnjenih Villarceaujevih krožnic z razmikom $\Delta\vartheta = \pi/10$. Skozi vsako točko na torusu potekajo štiri krožnice, ki ležijo na torusu: poldnevnik, vzporednik in dve sestrski Villarceaujevi krožnici. Kot φ med ravnino, ki seka torus v obeh sestrskih Villarceaujevih krožnicah, in ekvatorialno ravnino torusa dobimo, če postavimo tangento skozi njegovo središče na katerikoli njegov poldnevnik (slika 2). Očitno je to v soglasju z relacijo $\sin\varphi = b/a$.

Drugačen pristop do Villarceaujevih krožnic na torusu poteka s preseki torusa z ravninami. Izkaže se, da so preseki lahko krožnice samo tedaj, ko ravnina poteka skozi središče torusa ali pa je vzporedna z njegovo ekvatorialno ravnino. V slednjem primeru dobimo vzporednike na torusu. Če presečna ravnina vsebuje os torusa, so preseki poldnevniki torusa. Kadar pa ravnina poteka skozi središče torusa in oklepa z ekvatorialno ravnino kot $\varphi = \pm \arcsin(b/a)$, so preseki Villarceaujeve krožnice.

Bolj zavozlane loksodrome na torusu

Villarceaujeve krožnice so najbolj preproste loksodrome, ki enkrat samkrat obkrožijo os torusa in enkrat njegovo središčnico. Od obeh polmerov, a in b, ter kota α pa je odvisno, ali je loksodroma sklenjena krivulja ali ne in kolikokrat obkroži os torusa in kolikokrat njegovo središčnico. V ta namen si ponovno oglejmo funkcijo (1), ki povezuje parametra u in v. Parameter v teče od $-\pi$ do π, pri čemer za $\pm\pi$ upoštevamo ustrezni limiti, za parameter u pa bomo morali sedaj dovoliti poljubno realno vrednost. S tem dopuščamo možnost, da se loksodroma večkrat ovije okoli osi torusa. Krivulja $u = f(v)$ poteka skozi točki $(\pm\pi b/c \cdot \operatorname{tg}\alpha, \pm\pi)$ v ravnini parametrov (u, v). Ti dve točki določata *osnovni pravokotnik* $\mathcal{R}$ (slika 4). Stranica v smeri osi u je dolga $2\pi b/c \cdot \operatorname{tg}\alpha$, v smeri osi v pa 2π. Pravokotnik $\mathcal{R}$ se ujema s kvadratom $\mathcal{Q}$ samo tedaj, ko je $\operatorname{tg}\alpha = c/b$. Takrat je loksodroma Villarceaujeva krožnica.

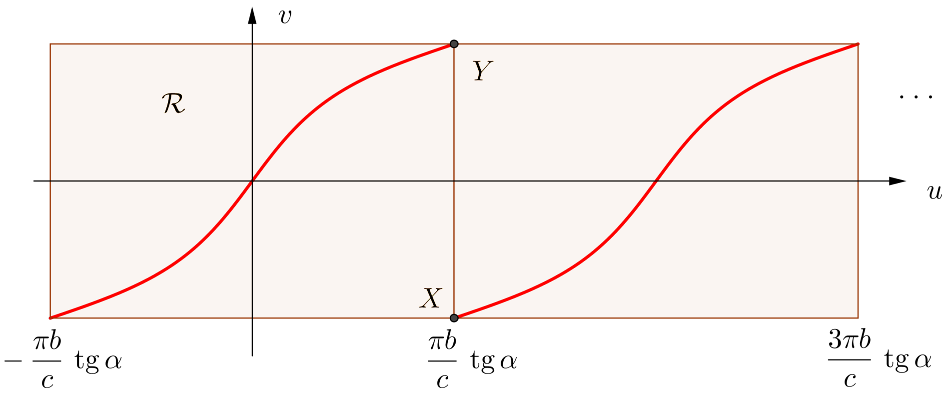
Če je $\operatorname{tg}\alpha \neq c/b$, loksodroma ni sklenjena. V tem primeru se krivulja začne in konča v različnih točkah na notranjem ekvatorju torusa. Da ohranimo sekanje poldnevnikov pod kotom α še naprej, zlepimo n osnovnih pravokotnikov s krivuljo $u = f(v)$ vred v trak vzdolž osi u in to naredimo tolikokrat, da je trak dolg nekemu celemu mnogokratniku števila 2π, denimo $m \cdot 2\pi$ (slika 4).

To se bo seveda posrečilo pri primerni relaciji med polmeroma a in b ter kotom α. Krivulja na k-ti kopiji osnovnega pravokotnika ima seveda enačbo

$$u = f(v) + k \cdot \frac{2\pi b}{c} \operatorname{tg}\alpha = \frac{2b \operatorname{tg}\alpha}{c}(\operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}(v/2)) + k\pi),$$

pri čemer izberemo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pri opisanem lepljenju osnovnih pravokotnikov v trak vedno desno zgornje oglišče pravokotnika, na primer Y, in levo spodnje oglišče X naslednjega pravokotnika na torusu očitno dasta isto točko M na notranjem ekvatorju. Lihost funkcije f pa poskrbi za gladkost loksodrome v točki M. Iz zahteve

$$n \cdot \frac{2\pi b}{c} \operatorname{tg}\alpha = m \cdot 2\pi$$



Slika 4. Nizanje osnovnih pravokotnikov.

dobimo pogoj za sklenjenost loksodrome na torusu:

$$\frac{b}{c}\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}.$$

Pri tem sta si m in n tuji naravni števili. Loksodroma tedaj n-krat obkroži središčnico torusa ter m-krat njegovo os. Oglejmo si nekaj primerov:

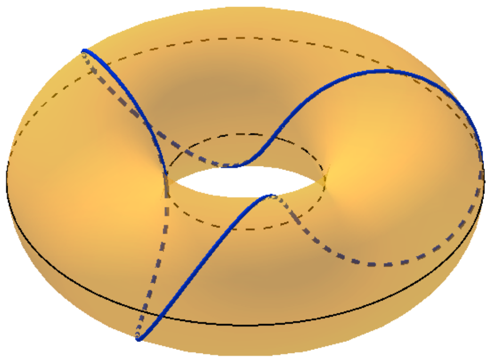
1. Vzemimo torus s polmeroma $a = 5,\ b = 3$ in na njem konstruirajmo loksodromo s kotom $\alpha = \pi/4$. Dobimo $c = 4$ in $b/c \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3/4$. Loksodroma se štirikrat ovije okoli središčnice in trikrat okoli osi torusa.

2. Oglejmo si še torus s podatkoma $a = 13,\ b = 5$ in na njem konstruirajmo loksodromo s kotom $\alpha = \pi/4$. Dobimo $c = 12$ in $b/c \cdot \operatorname{tg}\alpha = 5/12$. Loksodroma se dvanajstkrat ovije okoli središčnice in petkrat okoli osi torusa.

3. Nazadnje naj ima torus polmera $a = 2,\ b = 1$ in na njem konstruirajmo loksodromo za kot $\alpha = \pi/6$. Dobimo $c = \sqrt{3}$ in $b/c \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1/3$. Loksodroma se trikrat ovije okoli središčnice in enkrat okoli osi torusa (slika 5).

Ortogonalne sklenjene loksodrome na torusu

Dve sklenjeni loksodromi na torusu se lahko sekata. Oglejmo si, kdaj se sekata ortogonalno. Če prva seka vse poldnevnike pod kotom α, kjer vzamemo $0 < \alpha < \pi/2$, druga, ki je nanjo ortogonalna, seka poldnevnike pod



Slika 5. Loksodroma na torusu za $a = 2, b = 1, \alpha = \pi/6$.

kotom $\beta = \alpha - \pi/2$. Pri tem pa je $-\pi/2 < \beta < 0$. Pogoja sklenjenosti obeh loksodrom sta

$$\frac{b}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m}{n}, \qquad -\frac{b}{c}\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c}\,\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{m_1}{n_1}.$$

Pri tem sta si m in n ter m_1 in n_1 tuji naravni števili. Velja torej relacija:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{(a/b)^2 - 1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m_1}{n_1}.$$

Če se sklenjena loksodroma m-krat ovije okoli osi torusa in n-krat okoli njegove središčnice, pri čemer je razmerje kvadratov njegovih polmerov racionalno število in je izpolnjena zgornja relacija, potem se ortogonalna loksodroma ovije okoli osi torusa m_1-krat in okoli njegove središčnice n_1-krat.

Za $a = 2$ in $b = 1$ dobimo na primer

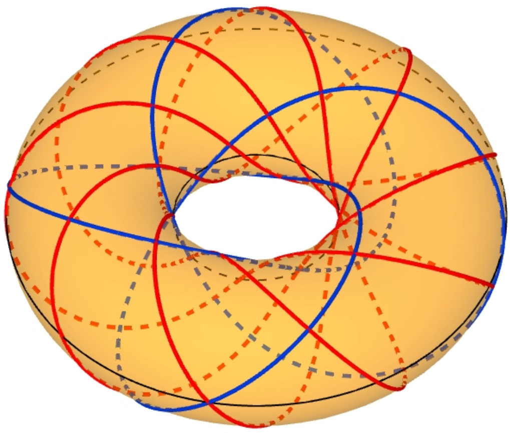
$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1}.$$

Lahko izberemo

$$\frac{b}{c}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \frac{b}{c}\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\beta = -\frac{1}{1}$$

in s tem

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \qquad \beta = -\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$



Slika 6. Ortogonalni zaključeni loksodromi na torusu.

Prva loksodroma se enkrat ovije okoli osi torusa in trikrat okoli njegove središčnice. Druga loksodroma je Villarceaujeva krožnica, ki seka ekvator torusa pod kotom $\pi/6$. Ta loksodroma se enkrat ovije okoli osi torusa in enkrat okoli njegove središčnice.

Ker za $a = 2, b = 1$ lahko zapišemo tudi

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9},$$

najdemo drugi par ortogonalnih sklenjenih loksodrom s kotoma

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad \beta = -\operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Razmere na torusu so kar pestre (slika 6). Prva loksodroma se trikrat ovije okoli osi torusa in štirikrat okoli njegove središčnice. Druga loksodroma pa se štirikrat ovije okoli osi torusa in devetkrat okoli njegove središčnice.

Nekaj pripomb

Torus so poznali že nekateri antični matematiki. Beseda *torus* je latinska. Še najlepša domača beseda zanj je *svitek*. V starih časih so ženske nosile na glavah škafe in vedra. Na glave pa so si pred tem za ublažitev pritiska namestile ravno prav trde svitke iz blaga. Tak svitek je omogočal, da so najbolj spretne nosile polno posodo, ne da bi jo držale z rokami.

Beseda *loksodroma* izhaja iz grških besed λοξός, kar med drugim pomeni v klasični grščini *poševen, poprečen*, in δρόμος, kar pa pomeni *tek, steza, pot*. Loksodromo na sferi je prvi študiral portugalski matematik, astronom in geograf Pedro Nunez (1502–1578), v latinščini Petrus Nonius. Po njem se imenuje *nonij*, ki je sestavni del kljunastega merila. Besedo *loksodroma* je skoval Willebrord Snel van Royen (1580–1626), tudi Snellius ali Snell, po katerem pogosto imenujejo lomni zakon v optiki. Loksodrome lahko definiramo na vsaki dovolj gladki rotacijski ploskvi.

Antoine François Joseph Yvon Villarceau (1813–1883), po katerem so poimenovane Villarceaujeve krožnice kot poseben primer loksodrom na torusu, je bil francoski astronom, matematik in inženir, tudi član znamenite Académie des Sciences.

Za konec

Prispevek je nastal ob branju članka [1], ki ima napačno zapisan pogoj ortogonalnih sklenjenih loksodrom. Avtor je napako popravil v [2]. Tudi njegov pogoj, da je pri tem razmerje a/b racionalno, je prehud. Očitno lahko zahtevamo, da je kvadrat razmerja a/b racionalen. Bralec lahko sam preveri, da na primer za

$$a = \sqrt{3}, \qquad b = 1, \qquad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \beta = -\operatorname{arctg} \sqrt{2}$$

dobimo par ortogonalnih loksodrom.

Glavni namen prispevka pa je pokazati lepoto torusa, okoli katerega se ovijajo loksodrome. Lahko bi študirali tudi kakšne druge krivulje na njem, na primer geodetke. Zato torus s krivuljami na njem pogosto najde svoje mesto v upodabljajoči umetnosti, kar lahko opazujemo na številnih fotografijah, objavljenih na svetovnem spletu.

Slike v prispevku so bile narejene z GeoGebro 5, ki omogoča risanje prostorskih slik. Za izris prostorskih krivulj in ploskev v GeoGebri 5 potrebujemo njihove parametrične enačbe in območja parametrov. Nato jih je treba le še pravilno vnesti v ukazni vrstici. Za prikaz krivulje na ploskvi, ki je parametrizirana s parametroma u in v, moramo poznati še relacijo med u in v in jo na primeren način vnesti v ukazni vrstici.

LITERATURA

[1] A. Emch, *Note on the loxodromic lines of the torus*, Amer. Math. Monthly **6** (1899), 136–139.

[2] A. Emch, *Errata. Note on the loxodromic lines of the torus*, Amer. Math. Monthly **6** (1899), 188.

[3] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1989.

UPORABA HALLOVEGA IZREKA

TANJA GOLOGRANC

Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 05C70

V članku z uporabo alternirajočih poti dokažemo Hallov izrek in na več primerih prikažemo njegovo uporabnost v dokazovanju. Tak primer so latinski kvadrati, kjer z uporabo Hallovega izreka dokažemo povezavo med latinskimi pravokotniki in latinskimi kvadrati.

APPLICATIONS OF HALL'S THEOREM

In the paper we prove Hall's theorem using alternating paths and we present three proofs based on Hall's theorem. One of them describes a relation between Latin rectangles and Latin squares.

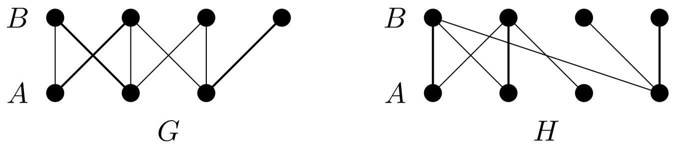
Uvod

Hallov poročni izrek je leta 1935 dokazal Philip Hall in pomeni začetek teorije prirejanj. V vsakdanjem življenju večkrat naletimo na problem, ki ga lahko prevedemo na prirejanja in ga rešimo z uporabo Hallovega izreka. Najbolj znan tak problem utemeljuje ime izreka in govori o tem, kako organizirati pare fantov in deklet tako, da bo vsako dekle dobilo fanta, ki si ga želi. Hallov izrek se uporablja tudi zunaj teorije prirejanj in celo zunaj teorije grafov. Z njim je tesno povezanih več pomembnih min-max izrekov, kot so na primer König-Egerváryjev izrek iz teorije prirejanj, Ford-Fulkersonov izrek iz teorije pretokov in Dilworthov izrek iz teorije delnih urejenosti.

Hallov poročni izrek

Za začetek vpeljimo nekaj osnovnih pojmov, ki so potrebni za razumevanje Hallovega izreka. *Dvodelni graf* $G = (V, E)$ je graf, katerega množico vozlišč lahko razbijemo na dve disjunktni množici A in B tako, da vsaka povezava iz E povezuje vozlišče iz množice A z vozliščem iz množice B. V tem primeru pišemo $G = A + B$. Množica M povezav grafa $G = (V, E)$ se imenuje *prirejanje* v grafu $G = (V, E)$, če nimata nobeni povezavi iz M skupnih krajišč. *Popolno prirejanje* v grafu G je prirejanje, v katerem krajišča povezav zajamejo vsa vozlišča množice V. V dvodelnem grafu $G = A + B$ prirejanje, v katerem so kot krajišča zajeta vsa vozlišča množice A, imenujemo *polno prirejanje* množice A. *Soseščina* množice X je množica vseh vozlišč grafa G, ki imajo kakega soseda v množici X. Označujemo jo z oznako $N(X)$. Vozlišče x grafa $G = (V, E)$ je *incidenčno* s povezavo $e \in E$ natanko tedaj, ko je x krajišče povezave e. Povezavi e_1, e_2 grafa $G = (V, E)$ sta sosednji natanko tedaj, ko imata eno skupno krajišče.

Primer 1. Na sliki 1 sta dvodelna grafa G in H. Oba grafa imata s krepkimi povezavami označeno največje prirejanje. Opazimo lahko, da v grafu G obstaja polno prirejanje množice A, v grafu H pa ne.



Slika 1. Primer grafa s polnim in brez polnega prirejanja.

Izrek 2 (Hall, 1935). *Dvodelni graf $G = A + B$ ima polno prirejanje množice A natanko tedaj, ko za vsako podmnožico $X \subseteq A$ velja*

$$|N(X)| \geq |X|.$$

Dokaz. Naj bo $G = A + B$ dvodelni graf, ki ima polno prirejanje množice A. Denimo, da obstaja $X \subseteq A$ z $|N(X)| < |X|$. Ker morajo biti povezave prirejanja paroma nesosednje, z nobenim prirejanjem ne moremo pokriti vseh vozlišč množice X, kar pripelje do protislovja.

Drugo implikacijo bomo dokazali s kontrapozicijo. Dokazali bomo naslednjo trditev. Če je največje prirejanje M v G moči $m < |A|$, potem obstaja $A' \subseteq A$ z $|N(A')| < |A|$.

Naj bo torej M največje prirejanje v G moči $m < |A|$. Za boljše razumevanje pobarvajmo povezave prirejanja M z rdečo barvo, druge povezave grafa G naj bodo črne. Ker je $m < |A|$, obstaja vozlišče $u \in A$, ki ni incidenčno z nobeno rdečo povezavo. S $\mathcal{P}$ označimo množico vseh alternirajočih poti, torej poti, na katerih alternirata črna in rdeča povezava in se začnejo v u. Naj bo $A' = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} (A \cap P)$ in $B' = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} (B \cap P)$.

Najprej dokažimo, da se nobena maksimalna pot iz $\mathcal{P}$ ne more končati v B'. Denimo, da se maksimalna pot P konča v B'. Potem je število črnih povezav na P za eno večje od števila rdečih povezav na P. Zato z zamenjavo črnih in rdečih povezav na tej poti dobimo novo prirejanje grafa G, ki je večje od M, kar je v nasprotju z izbiro M. Zato je vsako vozlišče iz B' povezano z rdečo povezavo z vozliščem iz $A' - \{u\}$.

Obratno, vsako vozlišče $v \in A' - \{u\}$ je povezano z rdečo povezavo z vozliščem iz B', in sicer z vozliščem, ki je neposredno pred v na alternirajoči poti, ki vsebuje v. Zato je M bijekcija iz $A' - \{u\}$ v B', kar pomeni, da je $|A'| = |B'| + 1$.

Naj bo $b \in B - B'$ poljubno vozlišče, ki ima soseda $a \in A'$. Povezava ab ne more biti rdeča, saj vozlišče u ni incidenčno z rdečo povezavo, za a različen od u pa obstaja tak $b' \in B'$, da je ab' rdeča, torej ab ni rdeča. Naj bo $P \in \mathcal{P}$ poljubna alternirajoča pot, ki vsebuje a. Tvorimo novo alternirajočo pot, ki vse do vozlišča a sovpada s P, nadaljevanje pa nadomestimo s povezavo ab. To pomeni, da obstaja pot v $\mathcal{P}$, ki vsebuje b. Zato je $b \in B'$, kar je v nasprotju s predpostavko. S tem smo dokazali, da vozlišča iz $B - B'$ nimajo sosedov v A', torej je $N_G(A') \subseteq B'$. Zato je $|N_G(A')| \leq |B'| = |A'| - 1$, s čimer je izrek dokazan. ■

Z naslednjim primerom bomo utemeljili, zakaj Hallovemu izreku pravimo tudi poročni izrek.

Primer 3. Naj bo $\{d_1, d_2, d_3\}$ množica deklet in $\{f_1, f_2, f_3\}$ množica fantov. Recimo, da bi se dekle d_1 želelo poročiti z enim izmed fantov f_1, f_2. Tako se je odločilo tudi dekle d_2, dekle d_3 pa bi izbiralo med f_1 in f_3. Ali lahko organiziramo poroko tako, da se vsako dekle poroči z želenim fantom?

Problem lahko prevedemo na prirejanje v dvodelnem grafu. Naj bo $G = D + F$ dvodelni graf, kjer je D množica deklet in F množica fantov. Dekle d_i povežemo s fantom f_j natanko tedaj, ko se dekle d_i želi poročiti s fantom f_j. Zanima nas, ali obstaja polno prirejanje množice D grafa G. Iz Hallovega izreka sledi, da je treba preveriti, ali je izpolnjen Hallov pogoj. Zanima nas, ali za vsako podmnožico $D' \subseteq D$ velja $|N(D')| \geq |D'|$. Ker je pogoj izpolnjen, je organizacija take poroke mogoča.

Hallov izrek je možno formulirati tudi z uporabo sistema različnih predstavnikov. Naj bo S končna množica in $A_1, \ldots, A_n$ podmnožice množice S. Zaporedju $a_1, \ldots, a_n$ pravimo *sistem različnih predstavnikov* za $A_1, \ldots, A_n$, če je $a_i \in A_i$ in $a_i \neq a_j$ za vsak $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ in $i \neq j$. Tak sistem ne obstaja vedno, npr. kadar je katera od množic A_i prazna. Hallov izrek pove, kdaj sistem različnih predstavnikov obstaja.

Izrek 4. *Družina $A_1, \ldots, A_n$ nepraznih podmnožic množice S ima sistem različnih predstavnikov natanko tedaj, ko vsaka unija katerih koli k množic, $1 \leq k \leq n$, vsebuje vsaj k elementov.*

Ekvivalentnost obeh izrekov je očitna, saj si lahko situacijo v izreku 4 predstavljamo kot dvodelni graf $G = A + B$, kjer je $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $B = S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ in je vozlišče A_i sosednje vozlišču a_j natanko tedaj, ko je $a_j \in A_i$. Potem prirejanje grafa G generira sistem različnih predstavnikov za $A_1, \ldots, A_n$ in obratno, vsak sistem različnih predstavnikov za $A_1, \ldots, A_n$ določa polno prirejanje množice A grafa G.

V primeru 3 je $A_1 = A_2 = \{f_1, f_2\}$, $A_3 = \{f_3, f_1\}$. V uniji katerih koli dveh množic sta vsaj dva fanta, v uniji vseh treh množic pa so vsi trije fantje, zato je Hallov pogoj izpolnjen.

Uporaba Hallovega izreka v dokazovanju

V tem poglavju bomo z uporabo Hallovega izreka dokazali dva rezultata iz prve polovice dvajsetega stoletja. Še pred tem vpeljimo nekaj pojmov.

Kolona matrike je vrstica ali stolpec matrike. Matriki, katere elementi so ničle in enice, pravimo *0/1 matrika*. *Permutacijska matrika* je matrika, ki jo dobimo iz enotske matrike s permutacijo vrstic ali stolpcev. Povedano drugače, to je matrika, ki ima v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko eno enico, vsi drugi elementi matrike so ničle. Elementom matrike pravimo *neodvisni*, če so v paroma različnih kolonah.

Prvi izrek, ki ga bomo dokazali, je dokazal König v začetku dvajsetega stoletja in je eden iz množice min-max izrekov. Dokazali ga bomo z uporabo Hallovega izreka, ki bistveno poenostavi prvotni Königov dokaz.

Izrek 5 (König, 1916). *Naj bo A poljubna kvadratna 0/1 matrika dimenzije n. Najmanjše število kolon, s katerimi zajamemo vse enice v A, je enako največjemu številu enic v A, ki so vse v paroma različnih kolonah.*

Dokaz. Naj bo m najmanjše število kolon, s katerimi zajamemo vse enice, in M največje število paroma neodvisnih enic. Naj bo B največja neodvisna množica enic, torej $|B| = M$. Ko s kolonami pokrivamo vse enice, je treba med drugim pokriti tudi enice iz B. Za te potrebujemo M kolon, kar pomeni, da je $m \geq M$.

Za dokaz druge neenakosti vzemimo $m = r + s$ kolon, ki pokrijejo vse enice matrike A. V teh m kolonah naj r pomeni število vrstic (omenjene vrstice označimo z R), s pa število stolpcev (omenjene stolpce označimo s S). Za lažje razumevanje vrstice in stolpce matrike A permutirajmo tako, da bo množica vrstic R pomenila prvih r vrstic, množica stolpcev S pa prvih s stolpcev v permutirani matriki A'. Naj bo a_{ij} element matrike A', ki je v vrstici i in stolpcu j. Ker z $R \cup S$ pokrijemo vse enice matrike A', je $a_{ij} = 0$ za vsak i, j, $i > r$ in $j > s$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, r\}$ definirajmo $A_i = \{j;\ j > s \text{ in } a_{ij} = 1\}$. Preverimo pogoj iz izreka 4. Denimo, da je $|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}| = l < k$ za neki k, $1 \leq k \leq r$, in za paroma različne elemente $i_1, \ldots, i_k$ množice $\{1, \ldots, r\}$. Potem bi namesto vrstic $i_1, \ldots, i_k$ izbrali l stolpcev in s tem pokrili vse enice matrike A', kar je v nasprotju z začetno izbiro kolon. Zato je pogoj iz izreka 4 izpolnjen, kar pomeni, da obstaja sistem različnih predstavnikov družine množic $A_1, \ldots, A_r$. Vsaka vrstica ima torej svojega predstavnika $j_1 \in A_1, \ldots, j_r \in A_r$, s čimer smo dobili r enic v paroma različnih kolonah (vrstice $1, \ldots, r$ in stolpci $s + 1, \ldots, n$). Enako bi z uporabo Hallovega izreka na $\{B_j;\ j = 1, \ldots, s\}$, kjer je $B_j = \{i;\ i > r \text{ in } a_{ij} = 1\}$, dobili s enic v paroma različnih kolonah (stolpci $1, \ldots, s$ in vrstice $r + 1, \ldots, n$). Skupaj dobimo $m = r + s$ enic v paroma različnih kolonah in zato $M \geq m$. ∎

Naslednji izrek, katerega dokaz je z uporabo Hallovega izreka zelo enostaven, sega v sredo dvajsetega stoletja. Govori o povezavi med določenimi kvadratnimi celoštevilskimi in permutacijskimi matrikami.

Izrek 6 (Birkhoff, 1946). *Naj bo A poljubna $n \times n$ matrika z nenegativnimi celoštevilskimi elementi, v kateri ima vsaka vrstica in vsak stolpec vsoto l. Potem je A vsota l permutacijskih matrik.*

Primer 7.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po številu l. Če je $l = 1$, potem je A kar permutacijska matrika, zato trditev velja.

Naj bo $l > 1$ in naj velja, da je vsaka $n \times n$ matrika z nenegativnimi celoštevilskimi elementi, v kateri ima vsaka vrstica in vsak stolpec vsoto $l - 1$, vsota $l - 1$ permutacijskih matrik.

Naj bo a_{ij} element matrike A, ki je v vrstici i in stolpcu j. Za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ definirajmo $A_i = \{j;\ a_{ij} > 0\}$. Naj bo $k \in \{1, \ldots, n\}$ poljuben. Poglejmo, koliko stolpcev pokrijemo z $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}$, kjer so $i_1, \ldots, i_k$ paroma različna števila iz množice $\{1, \ldots, n\}$. Vsota elementov v vrsticah $i_1, \ldots, i_k$ je natanko kl. Ker $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}$ vsebuje vse stolpce j, ki imajo v teh k vrsticah neničelne elemente, je vsota elementov po vseh stolpcih j, kjer je $j \in A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}$, vsaj kl. Seštevamo namreč po celotnih stolpcih, vsoto kl pa dobimo, če seštevamo po teh stolpcih znotraj vrstic $i_1, \ldots, i_k$. Ker je vsota elementov poljubnega stolpca enaka l, bi v primeru, da je $|A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}| = k' < k$, dobili, da je vsota po vseh stolpcih j, kjer $j \in A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k}$, enaka $k'l < kl$, kar vodi v protislovje. S tem smo dokazali, da je pogoj iz izreka 4 izpolnjen, iz česar sledi obstoj sistema različnih predstavnikov $j_1 \in A_1, \ldots, j_n \in A_n$. Naj bo I' permutacijska matrika, ki ima v vsaki vrstici $i \in \{1, \ldots, n\}$ enico v stolpcu j_i, povsod drugod so ničle. Potem je $A = I' + A'$, kjer je A' matrika z nenegativnimi celoštevilskimi elementi, v kateri ima vsaka vrstica in vsak stolpec vsoto $l - 1$. Po indukcijski predpostavki lahko A' zapišemo kot vsoto $l - 1$ permutacijskih matrik, s čimer je izrek dokazan. ∎

Latinski kvadrati

Latinski kvadrat je $n \times n$ matrika (ali tabela), napolnjena z n različnimi znaki, tako da se vsak znak pojavi v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko enkrat. V našem primeru bodo znaki naravna števila med 1 in n. *Delni latinski kvadrat* reda n dobimo tako, da zapolnimo nekatera polja $n \times n$ matrike s števili $1, 2, \ldots, n$ tako, da se vsako pojavi v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu največ enkrat. Seveda so lahko ta polja zapolnjena tako, da delnega latinskega kvadrata ne moremo dopolniti do latinskega kvadrata. Vprašanje, kdaj je to mogoče narediti, je prvi zastavil Trevor Evans leta 1960, nanj pa je odgovoril Bohdan Smetaniuk leta 1961. V tem članku se bomo omejili na dopolnjevanje posebnih primerov delnih latinskih kvadratov, tako imenovanih latinskih pravokotnikov. Za $m \leq n$ je *latinski* *pravokotnik* reda $m \times n$ delni latinski kvadrat, ki ima popolnoma izpolnjenih prvih m vrstic, preostala polja pa so prazna.

Primer 8.

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

je latinski pravokotnik, ki ga lahko razširimo do latinskega kvadrata

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Izrek 9. *Vsak latinski pravokotnik lahko razširimo do latinskega kvadrata.*

Dokaz. Zadošča dokazati, da lahko za vsak $m < n$ vsak latinski pravokotnik D reda $m \times n$ dopolnimo do latinskega pravokotnika reda $(m+1) \times n$. Naj D^j označuje stolpec j latinskega pravokotnika D. Za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ naj bo $S_i = \{j \in \{1, \ldots, n\};\ j \notin D^i\}$. Radi bi poiskali $(m+1)$-vo vrstico, ki bo skupaj z D tvorila latinski pravokotnik. Ker sistem različnih predstavnikov množic $S_1, \ldots, S_n$ vrne ustrezno $(m+1)$-vo vrstico, je treba dokazati pogoj iz izreka 4. Vsaka množica S_i ima $n - m$ elementov. Vsak element se v D pojavi natanko m-krat, torej v m različnih stolpcih. Posledično se vsak element nahaja v natanko $n-m$ množicah S_i. Izberimo poljubnih k množic $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ in označimo njihovo unijo s S. Potem je

$$k \cdot (n-m) = \sum_{j \in \{1,\ldots,k\}} |S_{i_j}| = \sum_{j \in \{1,\ldots,k\}} \sum_{\substack{x \in S: \\ x \in S_{i_j}}} 1 = \sum_{x \in S} \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,k\}: \\ x \in S_{i_j}}} 1 \leq$$

$$\leq \sum_{x \in S} (n-m) = |S| \cdot (n-m),$$

od koder sledi, da je $k \leq |S|$. ∎

LITERATURA

[1] J. H. van Lint in R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, New York, 1998.

[2] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.

TRIINDVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Kot že nekaj let zapored je v Blagoevgradu v Bolgariji tudi letos od 25. do 31. julija potekalo 23. tekmovanje študentov matematike. Iz Slovenije sta se ga udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Lenart Treven iz prvega letnika, Juš Kosmač iz drugega letnika, Rok Havlas in Teo Kukuljan iz tretjega letnika ter Veno Mramor iz prvega letnika druge stopnje študija. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem pa so zastopali študenti Mirza Krbezlija iz prvega letnika ter Marko Palangetić in Roman Solodukhin iz tretjega letnika. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.

V dvodnevnem reševanju desetih nalog se je pomerilo 320 študentov, razvrščenih v 72 ekip iz 48 držav. Običajno univerzitetno ekipo sestavlja od tri do šest študentov, se pa na tekmovanje lahko prijavi vsak študent, tudi če njegova univerza ne sodeluje. V ekipni razvrstitvi so univerze rangirane po formuli »vsota najboljših treh tekmovalcev plus povprečje vseh«.

Slika 1. Vodje ekip med ocenjevanjem nalog.

Naši ekipi sta bili tudi tokrat zelo uspešni. Prve nagrade sicer ni osvojil nihče, so pa Teo Kukuljan, Veno Mramor, Marko Palangetić in Juš Kosmač osvojili drugo nagrado, Roman Solodukhin tretjo nagrado, Mirza Krbezlija, Lenart Treven in Rok Havlas pa pohvalo.

Ekipno smo dosegli devetindvajseto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter šestinštirideseto mesto (ekipa Famnit).

Slika 2. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko na izletu v Melnik.

Slika 3. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko na podelitvi nagrad.

Študenti imajo po prihodu na tekmovanje en dan počitka, da vodje ekip določijo tekmovalne naloge. Sledita dva tekmovalna dneva, ko je vsak dan na razpolago pet ur za reševanje petih nalog. Popoldne in pozno v noč pa sledi delo za vodje ekip, ki morajo oceniti študentske izdelke. Po končanem drugem reševalnem dnevu je delo študentov opravljeno, tako da običajno sledi en dan za oglede lokalnih znamenitosti, naslednji dan pa je na vrsti podelitev nagrad. Pred tem je treba še uskladiti ocene komisije s pričakovanji študentov, tako da je na rezultatski lestvici običajno kar nekaj sprememb. Letos je bilo nenavadno veliko število študentov, ki so se pritožili, da so dobili preveč točk. Vsem štirim je komisija ustrezno znižala rezultat, poleg tega pa so dobili posebne nagrade za fair play.

Ker je od konca drugega tekmovalnega dne do podelitve nagrad več kot 52 ur, je to več kot dovolj časa tudi za druženje. Ta del je v pravilih še

Slika 4. Ekipa Fakultete za matematiko in fiziko po podelitvi nagrad.

posebej poudarjen, se ga pa vedno manj upošteva. Tako letos ni bilo skoraj nič organiziranih dejavnosti, niti športnih niti zabavnih. Se je pa povprečen čas spanja tekmovalcev v zadnjih letih zagotovo močno povečal. Za bralce z dobrim spominom naj omenim, da je od tradicionalnih ritualov ostala bikova glava, narejena iz izdolbene lubenice (le da so organizacijo Španci predali Američanu).

Oglejmo si še štiri naloge s tekmovanja ter njihove rešitve. Prvi dve naj bi bili zelo lahki, tretja srednje težavnosti in četrta še malo težja.

Naloga 1. Naj bo $x_1, x_2, \ldots$ zaporedje nenegativnih realnih števil, za katero velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Dokažite, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leq 2\,.$$

Rešitev. Dvojna vsota običajno pomeni, da bo treba zamenjati vrstni red seštevanja. Tako dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Sedaj pa opazimo

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1/4} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k - 1/2} - \frac{1}{k + 1/2} \right) = \frac{1}{n - 1/2}\,.$$

Slika 5. Slavnostna večerja.

Nalogo smo rešili, saj imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{k^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n-1/2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2n-1}\,.$$

Dokazali smo še več, namreč strogo neenakost, saj je $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{2}{2n-1}$ za vsak n, vsi x_n pa ne morejo biti enaki 0.

Ocene, ki smo jih uporabili v prejšnji nalogi, se morda res ponujajo kar same od sebe, a študenti, ki so jih malo drugače zastavili, so imeli težave dokazati trditev. Recimo, poskusite oceniti vsoto recipročnih kvadratov z integralom ustrezne funkcije. Naslednja naloga je prav tako zavedla kar nekaj študentov, da so spregledali pomemben del rešitve.

Naloga 2. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_k$ realne $n\times n$ matrike, za katere velja $A_i^2\neq 0$ za vsak $1\leq i\leq k$ in $A_iA_j=0$ za vsaka različna $1\leq i,j\leq k$. Dokažite, da je $k\leq n$ in pokažite, da je možno $k=n$.

Rešitev. Primer, ko je $k=n$, je nabor matrik, kjer ima matrika A_i število 1 v i-ti vrstici in i-tem stolpcu, vsi drugi elementi pa so enaki 0.

Naj bodo matrike A_i take kot v nalogi. Prvi pogoj pomeni, da obstajajo taki vektorji e_i, da je $A_i^2e_i\neq 0$. Pokazali bomo, da so vektorji A_ie_i linearno neodvisni. Recimo torej, da velja $\sum_{i=1}^{k}c_iA_ie_i=0$. Ko to enakost pomnožimo (z leve) z A_j, dobimo $\sum_{i=1}^{k}A_jc_iA_ie_i=0$ oziroma (po drugi lastnosti) $c_jA_j^2e_j=0$, od koder pa sledi, da je $c_j=0$ in vektorji so linearno neodvisni. To pa pomeni, da jih ni več kot n, torej $k\leq n$.

Le redki študenti so se dokopali do tako elegantne rešitve. Večinoma so operirali z lastnimi podprostori in Jordanovimi kletkami, vendar pa jih je potem večina spregledala, da bi bile kakšne izmed matrik načeloma lahko nilpotentne.

Naloga 3. Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_n$ realna števila, za katera velja $a_i + b_i > 0$, $0 \leq i \leq n$. Dokažite

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)}\,.$$

Rešitev. Ker velja $\frac{\alpha\beta - \beta^2}{\alpha+\beta} = \beta - 2\frac{\beta^2}{\alpha+\beta}$, je treba dokazati

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} \leq \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}\,,$$

kar je ekvivalentno neenakosti

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}\,,$$

ki zlahka sledi iz Cauchy-Schwarzeve neenakosti.

Naloga 4. Naj bo A $n \times n$ kompleksna matrika, katere lastne vrednosti so po absolutni vrednosti manjše ali enake 1. Dokažite, da velja

$$||A^n|| \leq \frac{n}{\ln 2}||A||^{n-1}\,.$$

Za rešitve te naloge so ocenjevalci podelili enemu študentu 10 točk (kar je najvišja možna ocena), enemu 9 in še štirim po eno točko. Preostalih 314 ni dobilo nobene točke. In to kljub temu, da pravzaprav velja strožja ocena, namreč

$$||A^n|| \leq n||A||^{n-1}\,.$$

Kogar zanima rešitev te naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na uradni strani `www.imc-math.org.uk`. Tam pa ne bo našel nalog, ki so bile predlagane, a ne izbrane. Takih je bilo okoli 50, nekaj med njimi prav zanimivih. Recimo, poskusite lahko poiskati polinom, ki ima tudi negativne koeficiente, vse njegove višje potence pa imajo le nenegativne koeficiente. Ali pa tako konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^3$ ni konvergenta. Če pa se raje ukvarjate s kotnimi funkcijami, določite $\limsup_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} (\sin n)^n$ in $\limsup_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} (\sin n)^{n^2}$ (to vrednost sporočite članom ekipe FMF).

Gregor Šega

STROKOVNO SREČANJE IN 68. OBČNI ZBOR DMFA, MARIBOR, 14. IN 15. 10. 2016

Po dveh desetletjih in pol sta bila strokovno srečanje in občni zbor zopet v Mariboru, in sicer na Fakulteti za naravoslovje in matematiko (FNM). Matematični del strokovnega srečanja je potekal skupno s posodobitvenim seminarjem za učitelje matematike *Matematika: temelji, izkušnje, novosti*, ki ga je na FNM organiziral dr. Bojan Hvala. Za vsebino fizikalnega dela strokovnega srečanja pa je poskrbel dr. Robert Repnik, prav tako s FNM.

Prijava na seminar je potekala po treh poteh. Tisti udeleženci, ki so želeli dobiti točke, so se prijavili prek KATIS-a, drugi pa so se lahko prijavili po DMFA strežniku oziroma na samem srečanju.

Povzetke in razporede predavanj smo že v začetku septembra objavili na domači strani društva. Prav tako je bil predhodno objavljen tudi urnik.

V biltenu, ki smo ga tudi letos izdali v elektronski obliki, smo objavili poročila o delu društva in povzetke predavanj. Nekaj strani pa smo namenili tudi spominu trem umrlim častnim članom društva: dr. Ivanu Vidavu, dr. Josipu Grasselliju in dr. Janezu Strnadu.

Ker so povzetki predavanj objavljeni tudi na spletni strani društva, naj navedemo le predavatelje in naslove predavanj v enakem vrstnem redu, kot so se zvrstili:

Petek, 14. oktobra 2016

Prvo predavanje Matjaža Perca, *Fizika socioloških sistemov*, je bilo skupno, potem pa so predavanja potekala v dveh skupinah.

Fizika:

- Mojca Čepič, Bernarda Urankar: *Model varilskih očal kot primer sodobne aplikacije v pouku fizike*
- Rok Capuder: *Dijaški projekti iz fizike*
- Mitja Rosina: *Razmisli in poskusi – kako bi animirali dijake?*
- Simon Ülen: *Učenje v globino oziroma konceptualni pristop kot pomemben dejavnik v učnem procesu priprave dijakov na splošno maturo iz fizike in pri poučevanju fizike nasploh*
- Tine Golež: *Ohlajanje*
- Samo Kralj: *Tekoči kristali: poligon kozmologije in fizike delcev*
- Andrej Guštin: *Opazovanje Sonca s filtrom H-alfa*
- Nada Razpet: *Zrcala*
- Robert Repnik, Miro Jaušovec, Marko Jagodič: *Primerjava maturitetnih nalog iz fizike na splošni in mednarodni maturi v Sloveniji ter splošni maturi na Hrvaškem*

Matematika:

- Boštjan Brešar: *Teorija grafov: Od diskretnih razdalj do načrtovanja porok*
- Dominik Benkovič: *Dva paradoksa iz verjetnosti in statistike*
- Uroš Milutinović: *Napaka kot učna metoda*
- Bojan Hvala: *Fermatova točka: preseženi mit in posplošitev*
- Marko Razpet: *Kovinska razmerja*
- Klara Pugelj, Aleš Toman, Tomaž Košir: *Predstavitev tekmovanja iz statistike in finančne matematike*

Ob 16.00 se je pričel občni zbor. Ker je bilo ob 16.00 prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, se je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije pričel ob 16.30. V tem vmesnem času nam je Andrej Guštin predstavil tekmovanja iz astronomije, ki se jih udeležujejo naši tekmovalci.

Sobota, 15. oktobra 2016

Začeli smo z vabljenim predavanjem Vladimirja Batagelja: *Omrežja*, potem pa smo se zopet razdelili na dva dela.

Fizika:

- Andreja Gomboc: (vabljeno predavanje) *Zadnji trenutki v življenju zvezd*
- Rene Markovič: *Uporabnost fizike kompleksnih mrež*
- Boris Kham: *Križna palica*
- Mitja Slavinec: *Raziskovalno delo mladih*
- Milan Ambrožič: *Keplerjevi zakoni nekoliko drugače*
- Vladimir Grubelnik: *Uporaba tabličnega računalnika pri pouku fizike v osnovni šoli*

Matematika:

- Aleksander Vesel: *Težki algoritmični problemi*
- Iztok Banič: *Matematika in matura*
- Daniel Eremita: *O praštevilskih dvojčkih*
- Samo Repolusk, Jože Senekovič: *Mentorstvo pri matematičnih raziskovalnih nalogah*

68. občni zbor DMFA

Občnega zbora, ki se je pričel ob 16. uri, se je udeležilo 41 članov DMFA Slovenije (od tega 11 članov upravnega odbora DMFA Slovenije). Imel je naslednji dnevni red:

1. Otvoritev
2. Izvolitev delovnega predsedstva
3. Društvena priznanja
4. Poročila o delu društva
5. Razprava o poročilih
6. Vprašanja in pobude
7. Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2015
8. Dopolnitve in spremembe Pravil DMFA Slovenije
9. Razrešitve in volitve
10. Razno

Ad 1. Ker je ob 16.00 prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, se prične občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije ob 16.30. Med čakanjem Andrej Guštin predstavi tekmovanja iz znanja astronomije.

Ad 2. V delovno predsedstvo so izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Marko Razpet in Robert Repnik, zapisnikar Janez Krušič. Overovatelja zapisnika sta Milan Hladnik in Matjaž Željko.

Z minuto molka se občni zbor pokloni spominu na preminule častne člane Ivana Vidava, Janeza Strnada in Josipa Grassellija. O njihovem življenju in delu spregovorita Milan Hladnik in Aleš Mohorič.

Ad 3. Društveno priznanje prejme Bojana Dvoržak, profesorica matematike na Gimnaziji Bežigrad v Ljubljani. Utemeljitve prebere Boštjan Kuzman.

Ad 4. Poročila o delu društva so objavljena v biltenu 68. občnega zbora, ki je objavljen na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si/ODrustvu/Dokumenti/OZ2016-bilten.pdf`. (Udeleženci občnega zbora so ga dobili tudi v tiskani obliki.) Dodatnih poročil ni.

Ad 5. Poročila so sprejeta brez dodatnih razprav.

Ad 6. Potrjen je sklep upravnega odbora, da se prijavnina za udeležbo na tekmovanjih v šolskem letu 2016/2017 ne spremeni, če se ne bodo bistveno spremenili pogoji sofinanciranja. Za tekmovanja, ki se končajo z mednarodno olimpijado (MaSŠ-A, FiSŠ, astronomija SŠ), je prijavnina na najnižji stopnji 2,50 EUR, za vsa druga tekmovanja v organizaciji DMFA Slovenije pa 1,50 EUR. Za udeležbo na višjih stopnjah tekmovanja prijavnine ni. Dana je pobuda, da bi društveni statut (Pravila DMFA Slovenije) jezikovno v celoti dopolnili (8. točka dnevnega reda) enakopravno tudi za ženski spol. Prevladalo je mnenje, da naj to ureja preambula, členi pravil pa naj ostanejo zapisani v moški slovnični obliki.

Ad 7. O sklepih nadzornega odbora je poročal Janez Krušič:

1. pravilnost finančnega poslovanja za leto 2015 je nadzorni odbor ugotovil na svoji seji 22. 3. 2016,
2. z delom upravnega odbora je nadzorni odbor vseskozi seznanjen, bodisi s prisotnostjo na sejah bodisi z zapisniki sej upravnega odbora,
3. v delu upravnega odbora do občnega zbora nadzorni odbor ni zaznal nepravilnosti niti v tekočem letu in ne vidi ovir za njegovo razrešitev ob koncu mandata.

Podatki iz bilance stanja in izkaza poslovnega izida za leto 2015:

Prihodki:	300.857 EUR
Stroški	294.718 EUR
Poslovni izid	**6.139** EUR
Saldo 31. 12. 2015	**92.267** EUR

Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2015 je soglasno sprejeto.

Ad 8. Predlog sprememb in dopolnitev Pravil DMFA Slovenije (v prilogi) je pripravila statutarna komisija v sestavi Janez Krušič, Maja Remškar in Matjaž Željko. O predlaganih spremembah poroča Janez Krušič.

Ad 9. Na predlog delovnega predsednika občni zbor razreši dosedanji upravni odbor, nadzorni odbor in častno razsodišče.

Mitja Rosina se članom razrešenih organov zahvali za njihovo uspešno delo, občnemu zboru pa predlaga naslednjo kandidatno listo za voljene organe DMFA Slovenije za obdobje 2016–2018:

I. UPRAVNI ODBOR:

Predsednik DMFA Slovenije	Dragan Mihailović
Podpredsednica DMFA Slovenije	Nada Razpet
Tajnik DMFA Slovenije	Janez Krušič

1. Tajniki stalnih komisij DMFA Slovenije za:	
popularizacijo matematike v osnovni šoli	Aljoša Brlogar
popularizacijo matematike v srednji šoli	Sandra Cigula
popularizacijo fizike v osnovni šoli	Barbara Rovšek
popularizacijo fizike v srednji šoli	Jurij Bajc
popularizacijo astronomije	Andrej Guštin
Mednarodni matematični kenguru	Gregor Dolinar
pedagoško dejavnost	Robert Repnik
informacijsko tehnologijo	Matjaž Željko
upravne in administrativne zadeve	Ciril Dominko

2. Predsedniki stalnih strokovnih odborov:	
Slovenskega odbora za matematiko	Boštjan Kuzman
Slovenskega odbora za fiziko	Maja Remškar
Slovenskega odbora za astronomijo	Andreja Gomboc
3. Predstavnik študentske sekcije DMFA Slovenije	Vesna Iršič

II. NADZORNI ODBOR: Matej Brešar,
Andrej Likar,
Janez Seliger.

III. ČASTNO RAZSODIŠČE: Marija Vencelj,
Anton Suhadolc,
Zvonko Trontelj.

Vsi predlagani kandidati so soglasno izvoljeni.

Za izkazano zaupanje se udeležencem občnega zbora zahvali predsednik Dragan Mihailović. Pove, da se bo trudil obdržati vse oblike dejavnosti društva vsaj na dosedanji ravni, posebna pozornost pa bo posvečena povezanosti z raziskovalno sfero.

Delovni predsednik seznani občni zbor s predlogom sestave drugih društvenih organov, ki jih imenuje upravni odbor.

Komisija za častne člane:	predsednik	Dragan Mihailović
	člana:	Zvonko Trontelj,
		Peter Vencelj

Komisija za društvena priznanja:	predsednik	Dragan Mihailović
	člana:	Boštjan Kuzman,
		Barbara Rovšek

Poverjenica za gospodarjenje s Plemljevo vilo je Mihaela Voskobojnik.
Računovodkinja in knjigovodkinja je Andreja Jaklič.

Ad 10. Mitja Rosina povabi k boljšemu izkoristku Plemljeve vile za društvene dejavnosti. Vse, ki se zanimajo za društvene strokovne ekskurzije, pa prosi, da mu to javijo po elelektronski pošti na naslov `mitja.rosina@ijs.si`

Občni zbor se je končal ob 18. uri in 10 minut.

Nada Razpet in Janez Krušič

BOJANA DVORŽAK, PREJEMNICA PRIZNANJA DMFA SLOVENIJE

Bojana Dvoržak je diplomirala na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani, in sicer na Pedagoški smeri z diplomsko nalogo *Konstrukcije z ravnilom in šestilom*. Najprej se je zaposlila kot profesorica matematike na Gimnaziji Poljane, od leta 1985 pa je zaposlena na Gimnaziji Bežigrad. Ima naziv svetnica.

Bojana Dvoržak poučuje matematiko v programu gimnazije, mednarodne šole in mednarodne mature, in to na zelo različnih nivojih. Na mednarodni šoli se mora ukvarjati predvsem s tem, kako motivirati učence, v programu mednarodne mature, kjer poučuje matematiko na višjem nivoju, pa mora poleg svojih pedagoških sposobnosti pokazati tudi svoje izredno matematično znanje. Veliko učencev na mednarodni maturi pod njenim mentorstvom izdela raziskovalno delo *Extended essay* in njihovi izdelki so vselej zelo dobro ocenjeni. Njen cilj ni samo dijake naučiti matematike, ampak jim vedno hoče pokazati tudi njeno uporabnost in jo učencem priljubiti. Pri vsem tem je zelo uspešna.

Bojana Dvoržak je avtorica priročnikov *Matematika na maturi* (2000, 2001 in 2013), *Matematika na poklicni maturi* (2003) in *Matematika na splošni maturi* (2014). Je tudi soavtorica uspešne zbirke učbenikov za gimnazije in pripadajočih zbirk nalog, ki izhajajo od leta 2009. Učbeniki in zbirke nalog so bili prevedeni tudi v italijanščino.

Izkušnje iz poučevanja v mednarodni šoli posreduje tudi drugim učiteljem matematike, med drugim na strokovnem posvetovanju v Mariboru decembra 2011, dvakrat pa je vodila tudi seminar za tuje učitelje matematike v Mostarju.

Bojana Dvoržak je izredno požrtvovalna profesorica. Vedno je pripravljena pomagati, tudi zunaj rednih ur, in toliko časa vztrajati, da dijaki usvojijo potrebna znanja. Pri tem išče izvirne pedagoške prijeme, ki jih posreduje drugim članom aktiva.

Poznajo jo tudi študenti pedagoške matematike, saj pri njej opravljajo hospitacije. Bila je mentorica pripravnici in mentorica dvema tujima študentoma. Imela je več vzorčnih ur za tuje učitelje in goste šole.

Na podlagi predloga pripravila Nada Razpet

IZZIVI MATEMATIČNE SKUPNOSTI

Matematično izobraževanje

Ob petindvajsetletnici ustanovitve Evropskega matematičnega društva (EMS) so organizirali okroglo mizo o izzivih za matematike. Po članku [1] v reviji *Newsletter of the EMS* bom na kratko povzel nekatere zanimivosti s tega srečanja in dodal še kako svojo misel.

Finec Ari Laptev je govoril o matematičnem izobraževanju. V osnovni in srednji šoli je po njegovem težava v tem, da je izobraževanje izredno spolitizirano. Odgovorni na ministrstvih niso zmeraj kompetentni, pa vseeno odločajo o pouku matematike.

Laptev je učil na univerzah v Angliji, Švedski in Rusiji. Ugotavlja, da so razlike velikanske. Angleški profesorji imajo bistveno manjše učne obveznosti. Sam uči na Imperial College London in ima malo časa na razpolago za predavanja iz Analize, tako da se morajo večino snovi študenti naučiti sami. Pri tem jim sicer pomaga tutorski sistem, a Laptev nad poukom matematike na angleških univerzah ni navdušen. Nekatere evropske države so kljub bolonjskemu sistemu na srečo obdržale svoje odlične štiriletne inženirske programe. Laptev hvali take programe v Nemčiji, Franciji in Švici.

Kako matematiki raziskujejo, objavljajo in obveščajo druge o svojem delu

Italijan Roberto Natalini pravi, da zadnje čase matematiki bolj posegajo tudi na druga področja znanosti ali pa probleme drugih strok uporabljajo kot motivacijo. Več je tudi uporabe računalniških metod. Tako se je meja med uporabno in čisto matematiko precej zameglila.

Kljub temu pa ne moremo biti zadovoljni s podobo matematike v javnosti. Raziskave so pokazale, da javnost daleč najbolj zanimajo raziskave v medicini in okoljski znanosti. Matematika je v socialnih omrežjih in medijih tudi bistveno manj zastopana kot recimo fizika ali biologija. Tolažba je, da so po splošnem prepričanju standardi za objavljanje znanstvenih člankov v matematiki višji kot v drugih disciplinah. Matematični članki so večinoma napisani jasno in objektivno prikazujejo dosežke avtorjev. Seveda pa so tudi izjeme: pritisk na zaposlene na univerzah, da veliko objavljajo, je privedel tudi na matematičnem področju do nastanka sumljivih in »roparskih« revij, ki proti plačilu objavijo marsikaj ... Za pomanjkljivo podobo v javnosti smo deloma krivi tudi matematiki sami. Pogosto podcenjujemo napor, potreben recimo za izdelavo dobrega filma o matematiki ... Včasih podcenjujemo tudi publiko, ki je pokazala presenetljiv interes za nekatere filme o matematičnih osebnostih. Pozitiven dosežek na področju popularizacije pa je interaktivni portal Imaginary, o katerem sem v tej reviji že pisal. Javnost tudi ne ve, da diplomanti z dobrim znanjem matematike porabijo najmanj časa za pridobitev službe. Velik vpliv matematike v ekonomiji prav tako ni dovolj znan.

Matematika in svet

Maria J. Esteban pravi, da so do konca 19. stoletja pomembni dosežki v matematiki pogosto bili motivirani z reševanjem problemov v drugih strokah. V dvajsetem stoletju pa za precejšen del matematičnega raziskovanja zunanja spodbuda ni bila več potrebna; matematika je postala bolj zaprta vase.

Raziskave v Združenem kraljestvu, Nizozemski in Franciji so pokazale, da pomemben del gospodarstva sloni na uporabi zahtevne matematike (s katero pa se ne ukvarjajo le matematiki, ampak tudi fiziki, inženirji ...). V Franciji naj bi 15 odstotkov bruto domačega proizvoda in 9 odstotkov delovnih mest bilo odvisnih od zahtevne matematike. Podobno je v drugih dveh omenjenih državah. V Franciji približno 10 odstotkov matematikov dela v podjetjih ali pa rešuje družbene probleme. Ocenjujejo, da se bo v desetih letih to število podvojilo. Kje dobiti te ljudi? V akademskih krogih uporabna matematika ni posebno cenjena; ukvarjanje z njo lahko včasih ogrozi kariero. »Čisti« matematiki pogosto ne vedo, da je njihovo znanje lahko uporabno tudi zunaj stroke.

Dobra novica je ustanovitev evropskega omrežja, ki naj bi povezovalo matematike in industrijo. Podobna omrežja že dalj časa obstajajo v Nemčiji, Nizozemski ... Na EU-MATHS-IN imamo vseevropsko ponudbo zaposlitev na področju uporabe matematike.

Matematika, statistika, veda o podatkih

Peter Bühlmann in Andrew M. Stuart obravnavata izzive v statistiki in *vedi o podatkih* (*data science*, tudi *podatkovna znanost*). Veda o podatkih se je razvila iz dolgo znane analize podatkov, ko so vanjo vstopili računalnikarji. Skuša iz množice podatkov izvleči kar se da veliko informacij, tudi v primeru, ko so ti podatki zajeti na razne načine in z raznimi metodami. Tudi moderna in močna orodja, kot je strojno učenje, potrebujejo matematično in statistično ogrodje za svoje delovanje. Treba je poznati omejitve uporabljene metode, oceniti možne napake. Predvsem pa je treba najti in preučiti algoritme za vse te naloge.

Matematični modeli so lahko zasnovani na trdi znanosti, kot recimo v meteorologiji. Tu gre za milijarde spremenljivk in milijone meritev v rednih časovnih presledkih. Z uporabo fizikalnih zakonov skušamo od tod napovedovati vreme. Drug ekstrem je globoko učenje prepoznavanja obrazov, ki je bolj ali manj zasnovano le na podatkih – slikah. Širjenje epidemij in prometni tokovi so nekje vmes, preučevani z modeli, ki pa niso tako omejujoči kot fizikalni zakoni. Strojno učenje nam bo morda omogočilo nove vpoglede in nove matematične modele za nekatere pojave.

»Visoke dimenzije« so nova udarna beseda. Nanašajo se tako na velikosti množice podatkov kot na velikosti modelov, denimo razsežnosti vektorjev in matrik, ki nastopajo v modelih. Pomemben koncept je *razpršenost*, angleško *sparsity*, ki je osnova zelo živih raziskav t. i. *strnjenega (stisnjenega) vzorčenja (snemanja, zajemanja)*. Angleški original za to je *compressed sensing* ali *compressive sampling*. O tem nameravam več povedati v posebnem prispevku. Naslednji primer so raziskave povezav med genskim zapisom in boleznimi. Tu imamo zdaj milijone biomarkerjev in velike baze podatkov o ljudeh in njihovih boleznih. To nas privede do naslednjega problema:

Prej omenjene velike baze podatkov so večinoma zelo heterogene. V meteorologiji imamo podatke zemeljskih postaj, vremenskih balonov, satelitov itd. Vse to je treba uskladiti. V zdravstvu velike baze večinoma niso rezultat dobro premišljenih eksperimentov. Izziv je, kako iz vsega tega izluščiti dobre informacije.

LITERATURA

[1] Panel, *Challenges for the Mathematicians*, Newsletter of the EMS 100, junij 2016, 25–30.

Matura v švicarskih gimnazijah

Zanimiva oddaja na švicarskem radiu SRF je pred kratkim problematizirala znanje matematike pri švicarskih maturantih. Poskusil jo bom povzeti, seveda pa je še bolje poslušati original [1].

V predzadnji PISA študiji (2012) so bili švicarski petnajstletniki po znanju matematike v Evropi prav na vrhu. V Švici zadnja leta v gimnazijo pride kakih 20 odstotkov tistih, ki so končali osnovno šolo. Pritiski na povečanje tega deleža so veliki, posebno s strani priseljencev iz Nemčije, ki niso vajeni take selektivnosti. Kljub tako ozkemu izboru gimnazijcev švicarske univerze niso zadovoljne z znanjem matematike (večinoma devetnajstletnih) maturantov. Vzrok je med drugim, da je sistem ocenjevanja zadnji dve desetletji bolj liberalen. Mimogrede, dijaki iz mestnih predelov, kjer je delež uspešnih na sprejemnih izpitih za gimnazijo tudi 60 odstotkov, se v povprečju slabše odrežejo pri študiju.

Švica pozna ocene od 1 do 6. Ocene od 4 naprej veljajo kot zadovoljive. Precej splošno sprejeta formula za ocenjevanje pisnih izdelkov je $1 + 5a/b$, kjer je a število doseženih, b pa maksimalno mogoče število točk. Rezultat zaokrožijo na najbližjo polovično oceno. Rezultati pod 55 odstotkov torej veljajo kot nezadovoljivi. Matematika je sicer obvezen predmet v gimnaziji, a je mogoče končati gimnazijo in opraviti maturo tudi z zelo nizko oceno iz matematike, če si dovolj dober pri drugih predmetih. Skoraj polovica maturantov dobi pri matematiki oceno pod 4. Odstopanja od 4 navzdol pri vsakem od 13 izbranih predmetov dobijo utež 2, odstopanja navzgor utež 1. Vsota tako uteženih odstopanj mora biti nenegativna. Pol rezultata na maturi prinesejo ocene zadnjega letnika, pol maturitetni izpit iz petih predmetov. (Obvezni na maturi so matematika in dva uradna švicarska jezika. Matura je stvar gimnazij, mogoče pa je delati tudi zvezno maturo.) Mnogi dijaki se odločijo, da z matematiko ne bodo izgubljali preveč časa. Petina maturantov ima na maturi oceno iz matematike 2,5 ali manj. Kasneje pa, kot bomo videli, se zanemarjanje matematike pogosto izkaže kot zelo zgrešeno.

Profesorji matematike na švicarskih gimnazijah se večinoma posvečajo boljšim in bolj zainteresiranim dijakom. Tako preostali proti koncu gimnazije včasih ne sledijo pouku (ki seže dalj od našega programa).

Uspešno opravljena matura omogoča vpis na vse smeri univerze, razen na medicino. Vendar je osip na univerzi velik, morda še večji kot pri nas. Tudi družboslovni študiji namreč pogosto vsebujejo matematiko kot predmet. V oddaji je naveden primer študija politologije, pri katerem na prvem izpitu iz matematike »pogrne« 35–40 odstotkov študentov. Na enem od študijev ekonomije osip v prvem letniku znaša polovico vpisanih, precej na račun neznanja matematike. Matematično modeliranje in znanje statistike postajata pomembna v mnogih usmeritvah, ki prej tega niso poudarjale. Zanemarjanje matematike v srednji šoli se tako številnim mladim ljudem maščuje. Na univerzah (kot pri nas) opažajo celo neznanje osnov, kot so računanje z ulomki, manipuliranje algebraičnih izrazov, preprosti besedni problemi, procentni račun ...

Nekatere švicarske gimnazije so se odločile, da ne bodo več dopustile ignoriranja matematike. Deloma so sledile zgledu nekaterih uspešnih azijskih držav (Južna Koreja, Singapur ...), ki predpostavljajo, da ob določenem trudu lahko skoraj vsak dijak obvlada osnovna matematična znanja. Seveda pa so te švicarske gimnazije poskrbele tudi za pomoč dijakom. Organizirale so popoldanske matematične delavnice. V njih kot tutorji starejši dijaki ali maturanti (za 20 švicarskih frankov na uro) ponavljajo snov in dajejo zastonj inštrukcije. Zmeraj pa je prisoten tudi kak profesor matematike.

Druga ideja je katalog osnovnih matematičnih znanj, ki naj bi bil ožji od sedanjega zahtevnega gimnazijskega programa, a bi še zmeraj pokril potrebe večine univerzitetnih študijev. Seveda pa je slišati tudi opozorila, da je preveč sprememb v kratkem času lahko problematično.

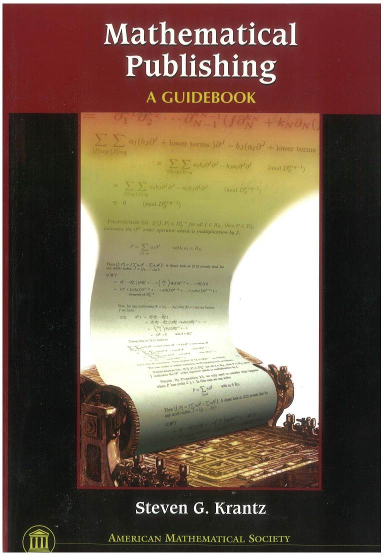
LITERATURA

[1] O. Frey, A. Vonmont in H. Wick, *Knacknuss Mathe am Gymnasium*, dostopno na: `http://www.srf.ch/sendungen/wissenschaftsmagazin/knacknuss-mathe-am-gymnasium-2`.

[2] Neue Zuercher Zeitung, 26. 2. 2012, Du musst da rein!, dostopno na: `http://www.nzz.ch/du-musstda-rein-1.15284726`.

Peter Legiša

Stephen G. Krantz, Mathematical Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2005, 297 strani.



Izvrstno napisan priročnik za preživetje v džungli matematičnega objavljanja, rezultat avtorjevih bogatih prvoosebnih izkušenj, namenjen predvsem ameriškim bralcem (zlasti v 6. poglavju, ki natančno obravnava pravne zadeve v zvezi s pravicami in obveznostmi avtorjev, lastništvom copyrighta, distribucijskimi pravicami itd.), bo zagotovo našel hvaležno občinstvo tudi v Sloveniji, saj so pravila igre objavljanja v mednarodnih revijah iz leta v leto zahtevnejša, njihovo dobro poznavanje in upoštevanje pa lahko ob vse številnejši konkurenci briljantnih umov pomeni odločilno prednost pri polaganju temeljev za lastno uspešno akademsko kariero ter vzpenjanje po akademski hierarhiji, ki zvesto kaže posameznikovo sposobnost prevzemanja vse zahtevnejših vlog, od avtorskih do recenzentskih in uredniških.

Matematika kot raziskovalna in znanstvena dejavnost danes ne obsega le natančnega formuliranja definicij, dokazovanja izrekov in reševanja problemov na podlagi temeljitega preučevanja dela drugih matematikov preteklosti in sedanjosti, ampak tudi pisanje in objavljanje kar se da kakovostnih in kar se da številnih znanstvenih in strokovnih tekstov, od člankov in recenzij do učbenikov in monografij za kar se da visoko rangirane matematične revije, pa tudi za kar se da prestižne založbe, ki objavljajo matematične knjige[1].

[1] Takšnih založb je potem, ko se je sredi XX. stoletja sesul sistem naročanja knjig po matematičnih knjižnicah daleč po svetu, iz finančnih razlogov vse manj – monografije s področja čiste matematike objavljajo takorekoč le še American Mathematical Society, Springer, Marcel Dekker, Elsevier in Society for Industrial and Applied Mathematics ter univerzitetne založbe, kot npr. Priceton University Press ali Oxford University Press). Kako uskladiti medsebojno nasprotujoča si postulata *kakovosti* in *kvantitete* v objavljanju, je gordijski vozel moderne matematike, s katerim se vsakodnevno muči vsakdo, ki se kot matematik šele uveljavlja.

Kot pravi Krantz, se je moderna ideja recenzirane znanstvene revije rodila šele leta 1665, ko je bila osnovana revija *Philosophical Transactions of the Roal Socety of London.* Še v času Fermata so matematiki tako na Zahodu kot na Vzhodu »objavljali« svoja odkritja predvsem v pismih kolegom (in to pogosto le v obliki idej, hipotez, formul ali trditev brez dokazov, kot izzive drugim matematikom: »*Reši to, če znaš!*«

Prve matematične revije, ki so matematikom dodobra otežile objavljanje (oziroma zagrenile življenje!), so se v kratki zgodovini matematike pojavile šele razmeroma nedavno! Formuliranje rezultatov raziskovalnega dela v obliki zaključene celote, ki se mora pokoravati določenim pravilom igre (besedila morajo biti oblikovana po določenih standardnih aksiomih, slike pa po postulatih posameznih revij, navajanje referenc tistih, ki obravnavanega problema dotlej niso rešili, mora biti čim popolnejše itd.) je izum matematikov moderne dobe, ali bolje, urednikov matematičnih revij XX. stoletja, ko je število matematičnih revij začelo strmo naraščati.

Danes je v svetu že več kot 1800 matematičnih revij, globalna hiperprodukcija matematičnih člankov ob vse natančneje določenih pravilih oziroma protokolih za njihovo pisanje pa postaja že resen problem, saj vpliva negativno tako na njihovo kvaliteto kot tudi na njihovo »biotsko raznovrstnost«– tako se npr. vsebinska in oblikovna izvirnost ceni veliko manj kot hoja po utečenih poteh predhodnikov ob zvestem upoštevanju vseh formalnih zahtev konkretne revije[2]. Neizprosna gladiatorska maksima *Objavljaj ali odjadraj!* (angl. *Publish or perish!*), ki jo je leta 1942 formuliral sociolog Logan Wilson v knjigi *The Academic Man: A Study in the Sociology of a Profession*), je zavladala v matematiki nekje od sredine XX. stoletja dalje; nekdanjo kraljico znanosti je spremenila v globalno resničnostno igro zbiranja točk iz objav in citiranosti člankov v uglednih matematičnih revijah; te točke

[2]Mnogi matematiki, ki se jim upira takšno prokrustovsko uniformiranje znanstvene kreativnosti, zato uporabljajo tudi različne možnosti nerecenziranih objav svojega dela na spletu (npr. z utemeljitvijo, da bo zgodovina tako ali tako ločila zrno od plev). Krantz, ki sicer zagovarja že uveljavljeni sistem recenzij in urednikov kot nekakšen osnovni mehanizem za zagotavljanje kakovosti člankov, zainteresiranega bralca opozarja na spletno stran `http://info.lib.uh.edu/sepb/sepb.html`, na kateri je poleg mnogih drugih stvari mogoče dobiti tudi *Scholarly Electronic Publishing Bibliography Charlesa W. Baileya*, 185 strani dolg dokument o elektronskem založništvu oziroma objavljanju člankov, knjig in drugih dokumentov.

naj bi predstavljale objektivni, znanstveni, kvantitativni kriterij, s katerim lahko matematiki v tekmi za akademske nazive dokazujejo svojo posebnost in kvaliteto ter se potegujejo za finančna sredstva najrazličnejših razpisov za znanstvene in raziskovalne projekte. Da pa lahko ta obsežna matematična »založniška industrija« sploh nemoteno funkcionira, je treba poleg avtorskega dela (ki danes kot samoumeven predpogoj, da se ga sploh obravnava, vključuje že tudi postavitev besedila v Tex-u tako rekoč skoraj v dokončni obliki, od avtorjev pa pogosto zahteva tudi plačilo stroškov objave!) zagotoviti tudi veliko dobro organiziranega recenzentskega in uredniškega dela.

Knjiga, ki obravnava vse vidike objavljanja matematičnih besedil, napisana iz zornega kota izkušenega dolgoletnega urednika in avtorja prav takšnih besedil, je poučno branje za vse matematike, ki se morajo prej ali slej dobro orientirati tudi v tem uredniško-recenzentskem labirintu. Tudi če že imamo s tem vidikom matematične dejavnosti določene izkušnje iz prve roke, ni odveč prebrati vsaj nekaterih ključnih poglavij takšnega priročnika, kjer so natančno predstavljena pravila igre objavljanja[3].

Vsakdo, ki so mu kdaj (bodisi po krivici bodisi po pravici) zavrnili kakšen članek, pa tudi tisti, ki se pripravljajo na pisanje svojega prvega matematičnega članka (ali morda celo knjige!), bo v tem zelo koristnem priročniku našel marsikakšen uporaben nasvet ali navodilo, ki mu bo pomagalo odpraviti to ali ono pomanjkljivost v lastnem delu, na katero morda prej ni bil pozoren. Komur pa je izobrazba že sama po sebi zelo pomembna vrednota, ki presega pragmatično profesionalno fokusiranje na svoj matematični fevd, ta bo problematiko matematičnega pisanja in objavljanja v vseh njenih mnogoterih vidikih (npr. kako izbrati primeren naslov, kako strukturirati besedilo, kako

[3]Njene definicije, aksiomi, postulati in protokoli obsegajo ne samo standarde glede pričakovane strukture in kakovosti člankov (ki lahko variirajo od revije do revije), ampak tudi etiko komuniciranja, ki temelji na načelu zaupanja in medsebojnega spoštovanja. Urednikova dolžnost je sprejeti odločitev na podlagi poročil enega ali več recenzentov, katerih mnenja pa se lahko tudi razlikujejo. Recenzentova dolžnost pa je, da uredniku v dogovorjenem roku jasno poroča vsaj o tem, ali so rezultati danega članka pravilni, novi in zanimivi, ali je članek razmeroma dobro napisan, ali citira vse prave vire, in ali je vreden objave v tej konkretni reviji. Pri daljšem članku z ambicioznejšo vsebino je zaželeno še podrobnejše in še bolj kritično poročilo, npr. o tem, ali je avtor uporabil najboljši možni pristop, ali vsebina in bistvo članka upravičujeta njegov obseg, ali je članek dobro organiziran in lahko berljiv itd. Avtor sprejetega članka pa je med drugim dolžan upoštevati recenzentove popravke in razmeroma hitro opraviti zadnje korekture.

napisati povzetek, kako formulirati definicijo ali izrek, kako izbrati primerno revijo, koliko in kje objavljati, kako je s copyrightom in drugimi pravnimi zadevami itd.) preštudiral enako pozorno kot kakšno temeljno matematično knjigo. Pisanje, pa tudi objavljanje člankov, ki vključuje tudi komuniciranje z uredniki in recenzenti, ki predlagajo določene popravke, je veščina, ki se je velja naučiti podobno skrbno, kot se npr. pripravljamo na vozniški izpit: celo povsem trivialne tiskovne napake se namreč ne opraščajo, še več, mečejo slabo luč na celotno avtorjevo delo do te mere, da recenzent po principu halo efekta praviloma omalovažujoče oceni tudi vsebino oziroma tehtnost članka, ki jo je sicer veliko težje objektivno ovrednotiti[4].

Poleg tega čisto utilitarnega vidika, s katerim si lahko pomagamo pri lastnem avtorskem delu, pa je pomembno, da knjiga predstavi uredniško (in recenzentsko) delo kot vrednoto, ki pomembno prispeva h kvaliteti besedil, pa tudi k njihovi prepoznavnosti (tj. možnosti, da jih bodo prebrali tisti, ki so jim namenjena). Avtor argumentirano polemizira s tezo, da dandanes, ko lahko vsakdo objavi rezultate svojega dela na spletu, matematične revije, ne klasične ne elektronske, niso več potrebne. Prav nasprotno, samo objava v recenzirani in ugledni reviji prepreči, da avtorjevo delo ostane neopaženo v poplavi milijonov člankov (in neštetih drugih informacij) na spletu!

Pogled v zakulisje matematičnega objavljanja je podobno zanimiv kot pogled v zaodrje gledališča. Pomaga nam razumeti, da matematika ne temelji le na individualnem delu, ampak tudi na sodelovanju mnogih. Boljše poznavanje dela urednikov in recenzentov je dragoceno že samo po sebi (tako kot velja to za vse znanje!), lahko pa pripomore tudi k boljši komunikaciji med avtorji, uredniki in recenzenti. Poleg nekaterih elementarnih stvari o samem pisanju matematičnih besedil (npr. kako naj bo strukturiran članek, kako izbrati ustrezen naslov, kaj sodi in kaj ne sodi v kakovostne recenzije

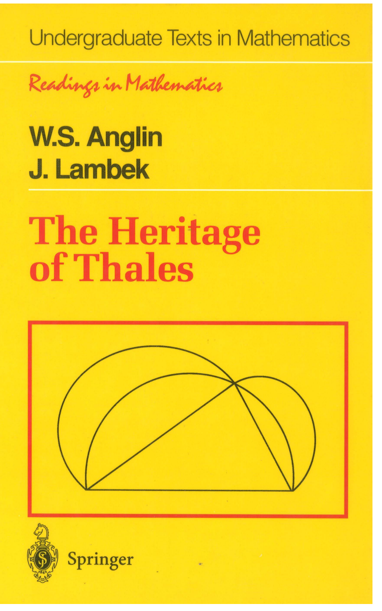
[4]Če nekoliko karikiramo, danes so formalne zahteve, ki jih revije in založbe postavljajo matematikom, takšne, da npr. Galois (ki je svoja izredno pomembna odkritja zapustil v pismu, v naglici načečkanem dan pred tem, ko je umrl v dvoboju, in so jih dešifrirali še nekaj let, preden so spoznali njihovo pravilnost in pomembnost) nikakor ne bi izpolnjeval osnovnih formalnih kriterijev, da bi se njegov prispevek sploh obravnaval. Že to, da (zaradi nekonformistične narave mladega genija) zagotovo ne bi bil vzorno do zadnje črke napisan v Tex-u, bi povzročilo, da avtorju (ki je, resnici na ljubo, imel podobne težave z omejenimi umi že v svojem času!) sploh ne bi dali možnosti, da se uveljavi s svojim delom!

itd.), bodo za zahtevnejše bralce zanimiva tudi avtorjeva razmišljanja, izkušnje in nasveti v zvezi s pisanjem lastne matematične knjige. To je projekt za zrele matematike, ki se ga ne gre lotiti zlahka, ne gre pa se mu tudi a priori izogibati, čeprav ne prinaša neposrednih akademskih priznanj (npr. v obliki točk za članke v uglednih revijah, ki so pomembne pri izvolitvah v nazive). Knjiga ostane v obtoku daljši čas, z njo lahko posamezen matematik bolje predstavi svoje stališče in rezimira delo drugih ter s svojim osebnim, neponovljivim pristopom pomembno zaznamuje določeno matematično področje. Nekatere najboljše knjige so v svoji vsebinski in oblikovni dovršenosti in dorečenosti tako uspešne, da dobesedno »ubijejo« oziroma izčrpajo določeno tematiko (kar avtorji takih knjig včasih celo eksplicitno izjavijo!). Takšne knjige so seveda sanje vsakega založnika, ki ga, drugače od urednika, ki bedi nad kakovostjo prispevkov, mora skrbeti le finančni vidik igre objavljanja.

Ker po znanem Petrovem načelu (istoimensko knjigo imamo prevedeno tudi v slovenščino) vzpenjanje po vsakršni hierarhiji naposled vsakogar privede na položaj, ki mu ni več kos (in na katerem dela samo še škodo ali pa v najboljšem primeru od njega ni nobene koristi), morda velja tudi gornjo knjigo prebrati le na hitro, saj sicer tvegamo, da bomo v igri objavljanja predobri, s tem pa bomo poželi samo zavist in obrambne reakcije kolegov, ki bodo v našem hitrem in nezadržnem prodiranju navzgor po hierarhiji zbranih točk (ki naj bi služila objektivnejšemu ocenjevanju kakovosti znanstvenega in raziskovalnega dela) videli nezaslišano nesramnost. Kljub morebitnim pomislekom o smiselnosti vztrajanja v takšni komediji pa velja – tudi za nekoga, ki je že spregledal praznino igre objavljanja kot ene od različic igre dokazovanja lastne posebnosti, ki so jo matematiki izpopolnili in prignali do absurda – stara dobra maksima: *Beri in piši!*, pa ne zato, da boš deležen kakšnega posebnega priznanja, ampak kljub temu, da ga morda ne boš, iz same ljubezni do matematike. Ta je namreč edino, kar na dolgi rok v resnici šteje.

Jurij Kovič

W. S. Anglick, J. Lambek, The Heritage of Thales, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 327 strani.



Knjiga, namenjena predvsem dodiplomskim študentom, na kratko predstavi zgodovino matematike oziroma nekaj izbranih mejnikov v njenem razvoju, osvetli pa tudi njeno filozofijo. Posamezna poglavja, ki bolj ilustrativno kot sistematično obravnavajo pomembne teme, ideje, metode in odkritja v zgodovini matematike, se končajo z zanimivimi nalogami, ki zainteresiranemu bralcu omogočijo, da se bolje (kot bi se samo z branjem) vživi v način razmišljanja matematikov v preteklosti. Naj gre za povsem matematično nalogo (npr. za reševanje enačb tretje stopnje z uporabo Cardanovih formul) ali za pisanje eseja (npr. o tem, ali sme matematik v svoji knjigi objaviti pomembne rezultate kakega drugega matematika, ki mu jih je le-ta zaupal pod pogojem, da jih nikomur ne izda, ali pa je to etično sporno, četudi je pravilno navedel in priznal njegovo avtorstvo), takšne naloge lahko obogatijo študentovo razumevanje matematike (in so po svoje dobra priprava na kasnejša pisna dela (seminarske naloge, diplomsko delo itd.), v katerih je treba poleg matematičnega znanja in sposobnosti (reševanja problemov, računanja, dokazovanja itd.) pokazati tudi jezikovno spretnost in urediti misli o določeni temi v smiselno celoto.

Knjiga je nastala na podlagi izkušenj avtorjev, ki sta vrsto let poučevala prav takšen predmet. Zato je lahko dobra osnova za predavanja iz zgodovine matematike, vendar ne na preveč zahtevni ravni in pod pogojem, da predavatelj takšnega predmeta že iz drugih virov ve neprimerno več o zgodovini in filozofiji matematike, kot je zapisano v tej knjigi. Vprašanje je tudi, ali je smiselno pričakovati, da bodo bralci lahko samostojno rešili nekatere zahtevnejše matematične naloge, potem ko so jim bili le na kratko predstavljeni osnovni koncepti, definicije in metode neke matematične teorije. Čeprav je res, da se je na podoben način naučil matematike Euler (ki ga je npr. v teorijo števil pritegnilo delo Fermata, ki za svoje trditve in hipoteze praviloma ni podajal dokazov), pa je res tudi, da takšen način dela zahteva izjemno nadarjenost, samostojnost in prodornost, tako torej ni primeren za vsakogar.

Knjiga je razdeljena na dva dela: I. Zgodovina in filozofija matematike, in II. Temelji matematike. Prvi del obravnava poleg zahodne matematike (egipčanske, sumersko-babilonske, grške, renesančne ter matematike 17. in 18. stoletja) in nekaterih njenih najslavnejših rezultatov, pojmov in problemov (kot so npr. Pitagorov izrek, praštevila, pravilni poliedri, popolna števila, problem nesoizmerljivih količin, konstrukcije z ravnilom in šestilom, reševanje kubičnih in kvartičnih enačb) ter matematikov (kot so npr. Pitagora, Evklid, Arhimed, Leibniz itd.) tudi matematiko Kitajske, Indije in arabskih dežel. Drugi del obravnava različne vrste števil (naravna, cela, racionalna, realna, kompleksna, kvaternione) ter poglavja, za katera ni povsem jasno, po kakšnem kriteriju so bila izbrana in kako so lahko sploh obravnavana skupaj v okviru istega predmeta (npr. verižne ulomke, Hilbertov deseti problem, lambda račun, intuistično logiko, Gödlove izreke, kategorije itd.). Marsikateri matematik bo tem poglavjem morda zameril prav to – da niso obravnavana v bolj standardnih okvirih področij in predmetov, kamor naravno sodijo.

Po drugi strani pa bo bralec v knjigi našel veliko zgodovinskih podrobnosti in zanimivosti (npr. verze matematika Omarja Hajama, odlomek iz Platonovih dialogov, dobeseden prevod odlomka iz Rhindovega papirusa itd.) ter filozofskih komentarjev, ki jih v večini drugih, bolj sistematičnih knjigah o zgodovini matematike ni.

Knjiga je torej bolj prepričljiva v smislu motivacije za študij zgodovine matematike kot pa v prikazu same matematične tematike. Zasnova (pa tudi sama izvedba) knjige o zgodovini in filozofiji matematike v obliki učbenika z nalogami je po eni strani privlačna, po drugi pa problematična, ima svoje dobre, pa tudi slabe strani. Tehtanje, katere od njih prevladajo, naj bo prepuščeno njenim bralcem, ki se že zavedajo, da je svoje mnenje o delu drugih treba argumentirati, obenem pa dopuščati tudi možnost, da v svojih ocenah in sodbah nismo nezmotljivi.

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2016
Letnik 63, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Kolaž dopolnjuje članek *Loksodrome na krožnem torusu* na straneh 121–131. Na njem sta pogleda v rogati in vretenasti torus ter na krožni torus, ki poteka skozi štiri manjše krožne toruse. V ospredju je krožni torus, na katerem sta v različnih barvah narisani med seboj ortogonalni sklenjeni loksodromi (slika 6, stran 130). Posamezne slike so narejene z računalniškim programom GeoGebra 5, kolaž pa je iz njih samodejno sestavila Picasa 3.