

36997

Das Horizontalpendel in seiner Verwendung als Erdbebenmesser.

Von P. Raffaelle Stiattessi.

Sonderabdruck aus der Monatsschrift „Die Erdbebenwarte“, 1903,
Nr. 11 und 12, II. Jahrgang.



Laibach 1903

~~~~~ Druck von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg. ~~~~~

030041373



## Das Horizontalpendel in seiner Verwendung als Erdbebenmesser.\*

Von P. Raffaele Stiattessi.

In der «Rivista di fisica, Matematica e Scienze Naturali», herausgegeben in Pavia (Jahrgang II, Heft 24) hat der Verfasser bereits eine Abhandlung unter dem gleichen Titel veröffentlicht. Dort wurde auch angedeutet, daß gelegentlich in einer Fachzeitschrift eine eingehende Untersuchung nach der mathematischen Seite hin veröffentlicht werden wird. Nachdem auf diesem Gebiete von anderer Seite nichts weiter unternommen worden ist, soll nun hier als Fortsetzung und zur Illustrierung der angeführten Abhandlung die mathematische Seite näher beleuchtet werden.

Mit Horizontalpendel bezeichnet man jenen Apparat, der in seiner Hauptsache aus einem Gewichte besteht, das in einem Punkte aufgehängt und in einem zweiten, nicht in der gleichen Vertikale liegenden, jedoch mit dem ersteren steif verbundenen Punkte unterstützt ist.

Das Horizontalpendel in seiner typischen Form nach Rebeur von Paschwitz eignet sich zum bezeichneten Studium sehr gut und ist (Fig. 1) aus einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  gebildet, das beim Scheitel  $C$  mit einem Gewichte  $D$  beschwert, mit der Basis  $AB$  in  $A$  aufgehängt und in  $B$  gestützt ist. Das System kann somit nur um die Basis  $AB$  schwingen.

Wäre die Basis  $AB$  vertikal, so würde sich das Pendel im indifferenten Gleichgewicht befinden. Ist die Basis  $AB$  aus der Vertikalen gegen  $D$  geneigt, was auch in unserem Falle angenommen wird,\*\* so kann sich das Pendel nur in einer einzigen Ebene in Ruhe befinden.

Wie schon bemerkt, kann das Gewicht  $D$  bei den in der Astronomie und als Erdbebenmesser in Verwendung stehenden Horizontalpendeln nur in einer beinahe und anscheinend horizontalen Ebene schwingen, denn  $AB$  ist meistens nur unbedeutend gegen die Horizontalebene geneigt. Die Bezeichnung «Horizontalpendel» trifft somit nicht vollkommen zu.

---

\* Originalabhandlung italienisch, die Übersetzung in die deutsche Sprache besorgten die Herren V. Bračić und Prof. Häring.

\*\* Der Zeichner hat dies in Fig. 1 leider nicht zum Ausdruck gebracht.



So zahlreich die Formen sein können, die man diesen Pendeln gibt, in den Hauptumrissen lassen sich doch alle auf die Type Rebeur-Paschwitz zurückführen. Wir wollen uns daher nur mit dieser letzteren befassen.

Soll sich ein Horizontalpendel im Gleichgewichte befinden, so ist es notwendig und hinreichend, daß sich die Dreiecksebene, die das Pendel bildet, in der Vertikalebene der Basis  $AB$  befindet.

Das Dreieck, welches das Pendel bildet, ist bestimmt durch den Aufhängepunkt  $A$ , den Unterstützungspunkt  $B$  und den Schwergewichtspunkt  $C$  des Systems (Fig. II). Da die Schwermasse bei  $C$  verhältnismäßig bedeutend ist, kann man ruhig den Schwerpunkt in derselben liegend annehmen. Diese Annahme findet sofort ihre Bestätigung, wenn man beachtet, daß der virtuelle Aufhängepunkt des Pendels, wenn es sich in der einzigen Gleichgewichtsebene befindet, nur in der Verlängerung der durch den Punkt  $C$  gezogenen Vertikalen  $EC$  liegen kann; in Wirklichkeit ist aber das Pendelsystem in  $A$  aufgehängt und in  $B$  unterstützt, der virtuelle Aufhängepunkt kann sich somit nur in der Verlängerung von  $BA$  befinden. Ein Gleichgewicht findet also nur dann statt, wenn  $BA$  die Verlängerung von  $EC$  trifft.  $EC$  muß also in der Ebene von  $BA$  liegen, in der gleichen Ebene muß auch  $BD$ , das mit  $EC$  parallel ist, liegen.

Daraus geht hervor, daß in der Gleichgewichtslage das System einem einfachen Vertikalpendel entspricht, das in  $H$  den Aufhängepunkt besitzt. Die Schwingung von  $C$  durch den Ruhepunkt wird ebenso erfolgen, wie bei einem Pendel mit der Länge  $HC$ ; nur wird hiebei ein Bogen beschrieben, dessen Sehne senkrecht auf  $AB$  steht, während sie beim Vertikalpendel senkrecht auf  $HC$  sein wird.

Soll die Länge  $HC$  des einfachen Vertikalpendels, das dem Horizontalpendel entsprechen soll, gefunden werden, so setze man  $\angle DBA = \varphi$  und fälle das Lot  $CF = \delta$ . Man hat sodann im rechtwinkligen Dreieck  $HFC$

$$HC = \frac{\delta}{\sin \varphi} = \delta \operatorname{cosec} \varphi.$$

Man sieht aus dieser Formel, daß die Länge des Pendels und daher auch das Quadrat der Schwingungsdauer mit der Distanz  $CF = \delta$  und mit der Kosekante des Winkels  $DBA$ , der Abweichung von der Vertikalen, gerade proportioniert ist. In den Grenzen von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  nimmt die Kosekante mit dem Wachsen des Winkels ab, die Dauer der Schwingungsperiode wächst daher mit der Abnahme des Neigungswinkels  $DBA$ .

Was die Empfindlichkeit des Apparates anbelangt, so weiß man, daß ein kurzes Pendel infolge seiner Kürze Erschütterungen und Stöße von kurzer Periode leicht empfindet; horizontale Pendel werden daher auf Stöße von solchen Erschütterungen beinahe gar nicht reagieren, weil sie langen Pendeln entsprechen, werden aber für Abweichungen von der Vertikalen eher empfänglich sein und dieselben besser wiedergeben.



Die Länge von  $AB$  hat auf die Länge des korrespondierenden Vertikalpendels keinen Einfluß; hingegen hängt die Schwingungsweite des Punktes  $C$ , wenn die Ebene, zu der die beiden Punkte  $AB$  gehören, sich neigt, wohl von der Distanz der Punkte  $A$  und  $B$  ab.

Man sehe einmal, wie sich der Apparat verhält, wenn sich die Stütze neigt. Die Neigung kann man in zwei rechtwinklige Koordinaten zerlegen, von denen die eine parallel zur Ruheebene, die andere senkrecht darauf steht.

Untersucht man nunmehr den Effekt jeder einzelnen Verschiebung getrennt, so findet man folgendes:

Es sei  $ABC$  (Fig. III) ein Horizontalpendel mit der Ruhelage in der Vertikalebene  $DE$ . Dieses Pendel neige man so in der Vertikalebene  $DE$ , daß der Winkel  $DBA$  mit der Vertikalen  $DB$  entweder größer oder kleiner wird, z. B. so weit, daß  $BA$  die Lage von  $BA'$  einnimmt; dann befindet sich das Pendel in der Position  $A'BC'$  in Ruhe, liegt noch in der gleichen Vertikalebene  $DE$  und hat noch keine Schwingung vollzogen. Nur der Neigungswinkel von der Vertikalen hat sich geändert. Es wird daher der virtuelle Aufhängepunkt des korrespondierenden einfachen Vertikalpendels näher an  $C$  fallen, wenn, wie in unserem Falle, der Neigungswinkel zugenommen hat, dagegen sich von  $C$  entfernen, wenn dieser Winkel abnimmt.

Im ersteren Falle wird die Schwingung in kürzerer Zeit vollzogen sein und, da die Horizontalpendel hauptsächlich bei der Untersuchung von Schwingungen mit langer Periode Anwendung finden, wird man sagen, die Empfindlichkeit des Pendels hat abgenommen; das Gegenteil im zweiten Falle, d. h. wenn die Schwingungsperiode eine längere Zeitdauer benötigt.

Dann fassen wir den Vorgang ins Auge, wenn die Neigung des Pendels aus der ursprünglichen Gleichgewichtsebene seitlich erfolgt.

Das Pendel  $ABC$  (Fig. IV) hat den Bogen  $AA'$  seitlich zur Ruhelage  $DE$  zurückgelegt und hat die Stellung  $A'BC'$  eingenommen. Ziehen wir auf die Ebene  $MN$ , die auf der Ebene  $DE$  senkrecht steht, die Vertikalen  $AQ$  und  $A'R$ , so wird die Ebene  $AR$  auf  $BE$  gleichfalls senkrecht stehen und folglich auch  $QR$  auf  $BE$ , der Projektion von  $AC$ , senkrecht stehen.

$RQ$  ist daher der Sinus von  $AA'$ , bezogen auf den Radius  $QA = QA'$ , und  $A'R$  ist der Kosinus hiezu.

Ferner ist  $EBE'$  der Neigungswinkel der beiden Ebenen  $ABC$  und  $A'BC'$ ;  $BD$  ist parallel zu  $A'R$  und liegt gleichfalls in der Ebene  $A'BC'$ . Das heißt,  $DB$  ist immer die Schnittlinie der beiden Gleichgewichtsebenen, was soviel sagen will, als daß das System um  $BD$  rotiert, wobei sich der Punkt  $D'$ , der in der von  $A'$  auf  $BD$  gefällten Senkrechten liegt (denn  $A'D'$  muß parallel zu  $RB$  sein), auf dieser Geraden hebt oder senkt. Es wird  $BD'$  der Kosinus des Rotationswinkels  $AA'$  und  $D'D'$  die Funktion  $1 - \cos AA'$  sein. Dies beweist, daß sich ein beliebiger Punkt wie  $A$ , der mit  $B$



steif verbunden ist, bei der Rotation senkt oder hebt, und zwar um ein Stück, dessen vertikale Projektion jener Funktion des Rotationsbogens entspricht.

Dieses Prinzip läßt sich beim Schwerpunkt  $C$  nicht anwenden. Zu bemerken ist auch, daß, wenn man den Weg, den der Punkt  $C$  zurücklegt, auf einer zu  $MN$  parallelen und infolgedessen im gleichen Bogen rotierenden Ebene darstellt, der Weg von  $C$  auf dieser Ebene nicht ein auf einer Horizontalebene, sondern auf einer geneigten Ebene beschriebener Kreisbogen sein wird.

Vom Winkel  $CBC'$ , der durch den soeben beschriebenen Bogen gemessen wird, kann man auf den Winkel  $EBE'$  und von diesem auf den Rotationswinkel  $ABA'$  schließen.

Jetzt wollen wir die Beziehungen der trigonometrischen Funktionen des Winkels  $ABA'$  zu jenen des Winkels  $EBE'$  und  $CBC'$  untersuchen.

Man setze  $\sphericalangle AQA' = \alpha$ , d. h.  $\text{arc } AA' = \alpha$   
 $\sphericalangle D''BA = BAQ = \varphi$  und  
 $\sphericalangle EBE' = \vartheta$ , ferner  
 $BA = t$

Wir haben dann  $BQ = t \sin \varphi$   
 $AQ = t \cos \varphi$  und  
 $QR = QA \sin \alpha = t \cos \varphi \sin \alpha$

Aber  $\text{tg } EBE' = \text{tg } QBR = \frac{QR}{BQ}$  (weil  $\sphericalangle BQR$  ein rechter Winkel ist), daher

$$\text{tg } \vartheta = \frac{t \cos \varphi \sin \alpha}{t \sin \varphi} = \sin \alpha \cot \varphi \quad \text{und} \\ \sin \alpha = \text{tg } \vartheta \text{tg } \varphi \dots \dots \dots (I)$$

Bezeichnen wir nun den Winkel  $DBC = \psi$  und  $\text{arc } CC' = \beta$  und betrachten das Dreikant, das wir durch Erweiterung der Ebenen  $ABC$  und  $A'BC'$ , die die Schnittlinie  $BD$  haben, erhalten, so kennen wir den Winkel  $DBC$  und den Keil  $C(D''B)C'$ , welcher den Winkel  $EBE'$  zum Maß hat; wir haben dann

$$\begin{aligned} \cos CBC' &= \cos D''BC \cos D'BC' - \sin D''BC \sin D'BC' \cos EBE' \\ \cos \beta &= \cos \psi \cos \psi' - \sin \psi \sin \psi' \cos \vartheta \end{aligned}$$

es erübrigt noch  $D'BC'$ , das wir mit  $\psi'$  bezeichnet haben, zu berechnen.

Das Dreieck  $D'BA'$  ist in  $D'$  rechtwinklig, daher ist

$$\begin{aligned} \cos D'BA' &= \frac{BD'}{BA'} \\ BD' &= A'R = AQ \cos \alpha \\ AQ &= t \cos \varphi, \quad BA' = t, \quad \text{daher ist} \\ \cos D'BA' &= \cos \alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

Wenn  $D'BA' = \varphi'$ , so wird

$$\cos \varphi' = \cos \alpha \cos \varphi$$

ein Wert, der in unsere Gleichung (I) eingelegt folgendes ergibt:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi}, \text{ das hei\u00dft}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \varphi'} \sin \varphi \quad \text{und} \quad \cos \varphi' = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \alpha} \sin \varphi$$

Oder, wenn man statt (I)

$$\sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \varphi$$

und statt  $\cos \varphi' = \cos \alpha \cos \varphi$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi} \text{ schreibt,}$$

wird man haben

$$1 = \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi'}{\cos^2 \varphi} \quad \text{und auch}$$

$$\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi' = \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad \text{und}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{\cos^2 \varphi'}{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Mit diesen Formeln ist einigerma\u00dfen schwer zu rechnen, da  $\varphi'$  von  $\varphi$  samt dem unbekannten  $\alpha$  abh\u00e4ngt, ebenso  $\psi'$  von  $\psi$ ; es empfiehlt sich daher anzunehmen, da\u00df  $\vartheta$  durch  $\beta$  gegeben ist, oder besser, da\u00df der zwischen  $CC'$  beschriebene Bogen gleich jenem von  $EBE'$  ist; bei dieser Annahme bleibt uns die einzige Formel

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (1)$$

Wenn wir nunmehr annehmen, da\u00df sich die Ebene  $MN$  um den Winkel  $\gamma$  aus den beiden zu den Ruhelagen senkrechten Ebenen neigt, so k\u00f6nnen wir die beiden Komponenten mit  $\alpha$  und  $\alpha'$  bezeichnen.

In Hinsicht auf die Komponente  $\alpha$  erhalten wir die Formel

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} (\varphi \pm \alpha') \dots \dots \dots (2)$$

und mit Bezug auf die andere Komponente

$$\sin \alpha' = \operatorname{tg} \vartheta' \operatorname{tg} (\varphi \pm \alpha) \dots \dots \dots (3)$$

weil der Winkel  $\varphi$  von der anderen Komponente modifiziert wird.

Um  $\alpha$  und  $\alpha'$  zu finden, entwickle man das zweite Glied der Gleichung (2).

Man hat dann 
$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \vartheta \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{tg} \alpha'}{1 \pm \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha'}$$



und setzt man

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha'}{2}}$$

so hat man

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha'}{2}\right) \pm 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha'}{2} \mp 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \vartheta$$

Der Einfachheit halber können wir die Ausdrücke, in welchen  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  zum Quadrat erhoben vorkommt, unberücksichtigt lassen; da  $\alpha$  ein unbedeutender Bogen ist, ist  $\frac{\alpha}{2}$  um so kleiner.

Es bleibt uns daher  $\sin \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  und

$$\operatorname{tg} \alpha' = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}$$

Unsere Gleichung lautet dann:

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \vartheta \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}}{1 \mp 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \varphi}$$

Aus der Entwicklung erhalten wir

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \mp 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta \pm 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \vartheta$$

Lassen wir den zweiten Ausdruck aus den bereits angeführten Gründen unberücksichtigt, so haben wir

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta \pm 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \vartheta \dots \dots \dots (4)$$

Ebenso reduzieren wir die Gleichung (3) auf

$$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta' \pm 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \vartheta' \dots \dots \dots (5)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (4) mit  $\operatorname{tg} \vartheta'$  und die Gleichung (5) mit  $\operatorname{tg} \vartheta$ , so erhalten wir durch Subtraktion

$$2 \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \vartheta' - \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \vartheta \right) = 2 \left( \pm \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta' \mp \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \vartheta' \operatorname{tg} \vartheta \right)$$

und nach der Reduktion

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \vartheta' (1 \pm \operatorname{tg} \vartheta) = \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tg} \vartheta (1 \pm \operatorname{tg} \vartheta')$$



und weiters

$$\frac{tg \frac{\alpha}{2}}{tg \frac{\alpha'}{2}} = \frac{tg \vartheta}{tg \vartheta'} \left( \frac{1 \pm tg \vartheta'}{1 \pm tg \vartheta} \right) \dots \dots \dots (6)$$

Zur Bestimmung von  $\frac{\alpha}{2}$  und  $\frac{\alpha'}{2}$  setzen wir den Wert von  $2tg \frac{\alpha'}{2}$  aus (5) in die Gleichung (4) ein, dann haben wir

$$2tg \frac{\alpha}{2} = tg \varphi tg \vartheta \pm tg \varphi tg \vartheta' tg \vartheta \pm tg \vartheta (\pm 2tg \frac{\alpha}{2} tg \vartheta')$$

daher wird

$$\pm 2tg \frac{\alpha}{2} (1 \pm tg \vartheta tg \vartheta') = tg \varphi tg \vartheta (1 \pm tg \vartheta')$$

Da auch  $\vartheta$  und  $\vartheta'$  kleine Bogen sind, können wir annehmen:

$$\pm 2tg \frac{\alpha}{2} = tg \varphi tg \vartheta (1 \pm tg \vartheta')$$

und ebenso

$$\pm 2tg \frac{\alpha'}{2} = tg \varphi tg \vartheta' (1 \pm tg \vartheta)$$

Bei den obigen Betrachtungen ist angenommen worden, daß der Stützpunkt der Horizontalpendel im Raume unverändert verbleibt. Die Formeln würden daher für  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Bogen angeben, um welche der Aufhängepunkt mit Rücksicht auf den Stützpunkt abweicht. Zweifelsohne kann man die Angelegenheit auch darauf zurückleiten.

In Wirklichkeit wird aber der Stützpunkt zugleich mit dem Aufhängepunkt verschoben.

Es dürfte daher nicht ganz zwecklos sein, das Problem auch unter diesem Gesichtspunkte zu erörtern.

Nehmen wir in diesem Falle an, daß das Rotationszentrum sehr weit entfernt ist, so bleibt die Gerade, die den Stützpunkt mit dem Aufhängepunkt verbindet, zu sich selbst parallel oder nahezu parallel. Dies trifft, sobald Rotationen am Horizontalpendel während eines Erdbebens beobachtet werden, nicht zu. Würde die Verbindungsgerade zu sich selbst parallel bleiben, so würde sich die Stellung der Gleichgewichtsebene nicht ändern. Da sich auch die Ebene, auf welcher das Diagramm registriert wird, verschieben müßte, so würde keinerlei Aufzeichnung ersichtlich werden.

Wenn also die Horizontalpendel während einer Bodenbewegung wirklich rotieren, muß man dies als Rotation des Aufhängepunktes um den Unterstützungspunkt auffassen und das Bewegungszentrum darf nicht allzuferne angenommen werden.

Es ist in der Tat von vielen die Beobachtung gemacht worden, daß die Erdoberfläche während seismischer Bewegungen sich kräuselt und sich

wie die Oberfläche des bewegten Meeres verhält, mit faktischen Wellen, die allerdings sehr lang sind. Der Bogen dieser Wellenbewegungen hat gewiß einen sehr begrenzten Radius.

Es sei sohin zum Beispiel  $O$  (Fig. V) das Rotationszentrum und das Pendel  $ABC$  habe nach  $A'B'C'$  rotiert. Die beiden Bogen  $BB'$  und  $AA'$  nehmen wir senkrecht auf die Fläche  $ABC$  an, da wir noch annehmen müssen, daß die Bewegung aus zwei Komponenten zusammengesetzt ist, von denen die eine parallel zur Fläche  $BAC$  ist und das Diagramm des Pendels nicht alteriert.

Ziehen wir  $OH$  senkrecht auf den Horizont und infolgedessen parallel zu  $BD$ , so ist es augenscheinlich, daß die beiden Dreiecke  $OAC$  und  $OA'C'$  dieselben Voraussetzungen wie das Dreieck  $BAC$ ,  $B'A'C'$  der vorherigen Betrachtungen haben. Die Folgerungen werden daher die gleichen sein und für  $\alpha$  und  $\alpha'$  werden wir also die Rotationen um das Schütterzentrum  $O$  ermitteln.

Es ist richtig, daß das Resultat unsicher erscheinen wird, denn das Zentrum kennen wir nicht und es ändert sich bei jedem Beben. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß sich das Zentrum  $O$  kaum in einem besonders großen Gebiete bewegen wird, denn die Begrenzung der Erdbebenwellen dürfte allem Anscheine nach eine enge sein. Anderseits hängt die Rotation des Pendels auch von der Tiefe des Impulses ab, oder mit anderen Worten, die Größe des Winkels ist der Distanz vom Zentrum gerade proportioniert.

Um die Bedingungen der Empfindlichkeit des Instrumentes festzustellen, wollen wir nunmehr zur Erörterung der Vergrößerung, die ein gegebenes Horizontalpendel liefern kann, übergehen.

Die Proportion (6), die auch für zwei Stellungen desselben Pendels gültig ist, lautet:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} \left( \frac{1 \pm \operatorname{tg} \vartheta'}{1 \pm \operatorname{tg} \vartheta} \right)$$

Wenn wir diese auf die einfachere Formel

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'}$$

bringen und berücksichtigen, daß man an Stelle der Verhältnisse der Tangenten kleiner Bogen auch die Verhältnisse der Sinus, sogar der doppelten Winkel setzen kann, und dafür schreiben

$$\sin \alpha : \sin \vartheta = \sin \alpha' : \sin \vartheta' \text{ und auch} \\ \alpha : \vartheta = \alpha' : \vartheta'$$

so liegt der Schluß nahe, daß die Länge des Bogens  $\vartheta$  und  $\alpha$  von der Distanz der Punkte  $A$  und  $C$  von der Vertikalen  $BD$  des Ortes abhängig ist.



Im allgemeinen dient diese Proportion zur Bestimmung der Vergrößerung von Horizontalpendeln. Doch muß man wohl vor Augen halten, daß ein solcher Ausdruck nicht vollkommen zutrifft und nur dann aufgestellt werden kann, wenn man gelten läßt, daß die Bogen  $AA'$  und  $CC'$  in parallelen Ebenen liegen, was ja nicht ganz zutrifft.

Eine genauere Proportion erhalten wir, wenn wir die Formel (6)

$$\frac{tg \frac{\alpha}{2}}{tg \frac{\alpha'}{2}} = \frac{tg \vartheta}{tg \vartheta'} \left( \frac{1 \pm tg \vartheta'}{1 \pm tg \vartheta} \right)$$

umwandeln und für

$$1 \pm tg \vartheta = tg 45^\circ \pm tg \vartheta = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ \pm \vartheta)}{\cos \vartheta}$$

setzen; dann können wir schreiben

$$tg \frac{\alpha}{2} : tg \frac{\alpha'}{2} = \frac{\sin \vartheta}{\sin(45^\circ \pm \vartheta)} : \frac{\sin \vartheta'}{\sin(45^\circ \pm \vartheta')}$$

Bringen wir bei dieser Formel das Pendel um z. B. den Bogen  $\alpha = 1''$  aus der Ruhelage und berechnen  $\vartheta$ , so finden wir das Verhältnis

$$tg \frac{\alpha}{2} : \frac{\sin \vartheta}{\sin(45^\circ \pm \vartheta)}$$

Dies kann als das Verhältnis zur Ermittlung der Vergrößerung angesehen werden.

Das doppelte Vorzeichen im Ausdruck  $\sin(45^\circ \pm \vartheta)$  läßt ersehen, daß die Vergrößerung verschieden ausfällt, je nachdem  $\vartheta$  mit dem positiven Vorzeichen genommen wird, d. h. wenn die Abweichung  $\alpha$  in der einen Richtung, oder  $\vartheta$  mit dem negativen Vorzeichen genommen wird, d. h. wenn die Abweichung  $\alpha$  in der anderen Richtung erfolgt.

Mit zwei Horizontalpendeln allein kann man somit den Wert der Bodenneigung nicht ermitteln. Man erreicht dies leicht mit vier Pendeln, von denen zwei und zwei gegeneinander gestellt sind. In diesem Falle lauten die vier Formeln, wenn wir die Abweichung der Instrumente von der Vertikalen mit  $\varphi$  bezeichnen:

$$\begin{array}{ll} (a) \sin \alpha = tg \vartheta tg(\varphi + \alpha') & (c) \sin \alpha = tg \vartheta'' tg(\varphi - \alpha') \\ (b) \sin \alpha' = tg \vartheta' tg(\varphi + \alpha) & (d) \sin \alpha' = tg \vartheta''' tg(\varphi - \alpha) \end{array}$$

Dividieren wir die Formeln (a) und (c) durcheinander, so erhalten wir

$$1 = \frac{tg \vartheta}{tg \vartheta''} \frac{tg(\varphi + \alpha')}{tg(\varphi - \alpha')}$$

was wir reduzieren können auf

$$1 = \frac{tg \vartheta}{tg \vartheta''} \frac{\sin 2\varphi + \sin 2\alpha'}{\sin 2\varphi - \sin 2\alpha'}$$

und daraus bekommen wir

$$\operatorname{tg} \vartheta'' \sin 2\varphi - \operatorname{tg} \vartheta'' \sin 2\alpha' = \operatorname{tg} \vartheta \sin 2\varphi + \operatorname{tg} \vartheta \sin 2\alpha'$$

und hieraus

$$(\operatorname{tg} \vartheta'' - \operatorname{tg} \vartheta) \sin 2\varphi = (\operatorname{tg} \vartheta'' + \operatorname{tg} \vartheta) \sin 2\alpha' \text{ und}$$

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\varphi \frac{\operatorname{tg} \vartheta'' - \operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'' + \operatorname{tg} \vartheta} \text{ und auch}$$

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\varphi \frac{\sin (\vartheta'' - \vartheta)}{\sin (\vartheta'' + \vartheta)}$$

Ebenso erhält man aus den Formeln (b) und (d)

$$\sin 2\alpha = \sin 2\varphi \frac{\sin (\vartheta''' - \vartheta')}{\sin (\vartheta''' + \vartheta')}$$


---



# Das Horizontalpendel

von R. Stiattesi.

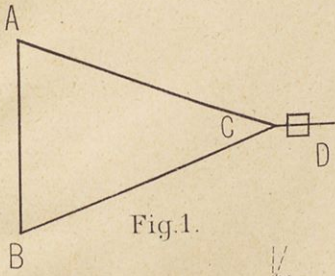


Fig. 1.

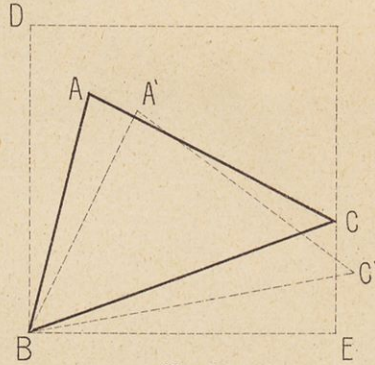


Fig. 3.

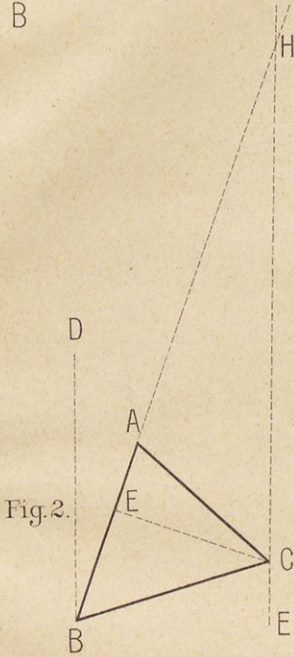


Fig. 2.

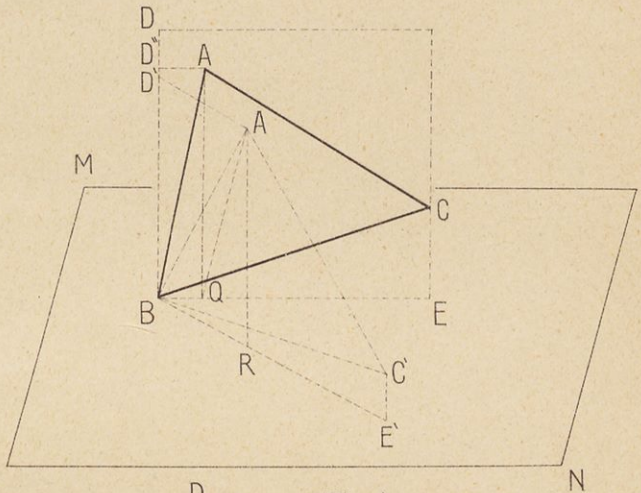


Fig. 4.

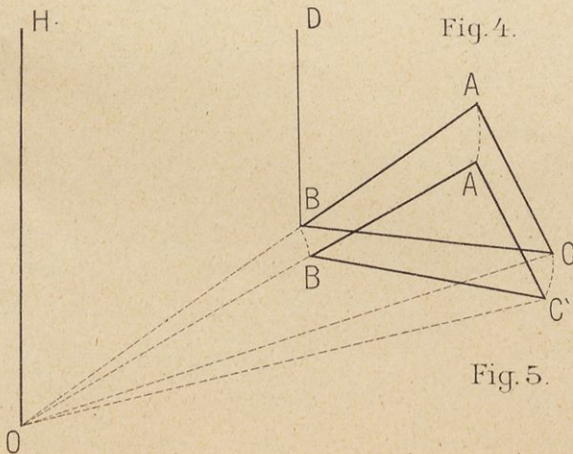


Fig. 5.

NARODNA IN UNIVERZITETNA  
KNJIŽNICA

COBISS



00000500203



