PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 6
Strani 328–329

Ivan Vidav:

KOLIKO JE URA?

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1151-Vidav.pdf

KOLIKO JE URA?

Pred kratkim je Gerald Weinstein v časopisu American Mathematical Monthly postavil tole vprašanje: Ali lahko ugotovimo točen čas, če poznamo lego obeh kazalcev na uri, ne vemo pa, kateri kaže ure in kateri minute? [1])

Odgovor se glasi: Ne vedno. Obstaja končno število leg kazalcev, pri katerih ne moremo določiti časa. To vidimo takole: Naj bo prvi kazalec med številkama a in $a+1$, in sicer naj bo njegova natančna lega $a+u, 0 \leq u < 1$. (Dolžino med dvema zaporednima številkama na uri označimo torej z 1.) Lega drugega kazalca pa naj bo $b+v, 0 \leq v < 1$. (Kadar je prvi (oz. drugi) kazalec med 12 in 1, vzamemo $a=0$ (oz. $b=0$).) Denimo, da prvi kazalec kaže ure. V času, ko je prišel od a do $a+u$, je drugi kazalec pretekel pot od številke 12 do $b+v$. Ker je hitrost drugega 12-krat večja, mora biti $12u = b+v$. Kadar ta enakost ni izpolnjena, prvi kazalec ne kaže ur temveč minute. Če pa je izpolnjena, nismo gotovi, da je urni kazalec. Poglejmo še drugi kazalec. Kakor pri prvem ugotovimo, da drugi ne kaže ur, kadar ni izpolnjena enakost $12v = a+u$. Na vprašanje, kateri je urni in kateri minutni kazalec, lahko odgovorimo, če ena od omenjenih enakosti ni izpolnjena. V dvomu pa smo tedaj, kadar sta izpolnjeni obe, kadar je torej

$$12u - v = b \quad \text{in} \quad -u + 12v = a.$$

Izračunajmo od tod u in v:

$$u = \frac{a+12b}{143}, \quad v = \frac{12a+b}{143}. \qquad (*)$$

Če je $a = b$, je tudi $u = v$; tedaj oba kazalca sovpadata in čas je določen. Koliko je ura, ne moremo ugotoviti le v primeru, ko je $a \neq b$ in se u in v izražata z (*). Lahko je namreč a ur in $5(b+v)$ minut ali pa b ur in $5(a+u)$ minut. Ker imamo za a dvanajst možnosti ($a = 0, 1, \ldots, 11$) in pri izbranem a enajst možnosti za b (ker je $a \neq b$), je vseh leg $12 \times 11 = 132$. V teh primerih ne vemo, kateri je urni in kateri minutni kazalec; zato je različnih leg polovico manj, torej $132 : 2 = 66$.

Weinstein je postavil še dodatno vprašanje: Kaj pa, če poznamo lego sekundnega kazalca, morda je tedaj čas vselej določen?

---

[1]) Amer. Math. Monthly, V. 99, 1992, str. 873, Naloga 10260.

Denimo, da prvi kazalec kaže minute. Razmak med dvema številkama na uri pomeni 5 minut. Torej je preteklo $5u$ minut od trenutka, ko je bil ta kazalec usmerjen proti a. Število $5u$ ni nujno celo. Presežek nad celim številom pokaže sekundni kazalec (presežek je treba pomnožiti s 60). Če se presežek ne sklada z lego sekundnega kazalca, potem prvi kazalec ne kaže minut temveč ure. Prav tako ugotovimo, da drugi kazalec ni minutni, kadar se z lego sekundnega kazalca ne ujema presežek števila $5v$ nad celim številom. V dvomu bi ostali tedaj, kadar bi bila oba presežka v skladu z lego sekundnega kazalca. V tem primeru pa bi morala biti oba presežka enaka in zato $5v-5u$ celo število. Od prej vemo, da prideta v poštev le u in v, ki se izražata z (*). Od tod izračunamo

$$5v - 5u = \frac{5 \cdot 11(a-b)}{143} = \frac{5(a-b)}{13}.$$

Desna stran je celo število le tedaj, če je razlika $a-b$ deljiva s 13. Ker sta a in b manjša od 12, mora biti $a-b=0$, se pravi $a=b$. V tem primeru pa se kazalca na uri ujemata in lahko razberemo, koliko je ura.

Tako smo ugotovili: Če poznamo lego obeh (velikih) kazalcev na uri in lego sekundnega kazalca, lahko določimo čas, čeprav ne vemo, kateri od kazalcev kaže ure in kateri minute.

Ivan Vidav