Petindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Kot že nekaj let zapored je v Blagoevgradu v Bolgariji tudi letos od 22. do 28. julija potekalo 25. tekmovanje študentov matematike. Iz Slovenije sta se ga udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Lenart Treven, Tea Štrekelj, Luka Lodrant in Nejc Černe iz tretjega letnika ter Severin Mejak iz prvega letnika druge stopnje študija. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem pa so zastopali študenti Arbër Avdullahu, Daniil Baldouski in Đorđe Mitrović. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.

V dvodnevnem reševanju desetih nalog se je pomerilo 351 študentov, razvrščenih v 70 ekip iz okrog 42 držav. Običajno univerzitetno ekipo sestavlja od tri do šest študentov, se pa na tekmovanje lahko prijavi vsak študent, tudi če njegova univerza ne sodeluje. Letos je bilo takih študentov kar precej, kar pomeni dodatno delo za vodje ekip. V ekipni razvrstitvi so univerze rangirane po formuli »vsota najboljših treh tekmovalcev plus povprečje vseh«.

Naši ekipi sta bili tudi tokrat zelo uspešni. Drugo nagrado je osvojil Lenart Treven, tretjo so osvojili Tea Štrekelj, Luka Lodrant, Severin Mejak, Arbër Avdullahu in Daniil Baldouski. Pohvalo sta si zaslužila Nejc Černe in Đorđe Mitrović.

Ekipno smo dosegli petinštirideseto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter šestinpetdeseto mesto (ekipa Famnit).

Slika 1. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko na izletu v samostan Rila.

Slika 2. Študenti na začetku prvega tekmovalnega dne.

Študenti imajo po prihodu na mesto tekmovanja en dan počitka, v katerem vodje ekip določijo tekmovalne naloge. Sledita dva tekmovalna dneva, ko je vsak dan na razpolago pet ur za reševanje petih nalog. Popoldne in pozno v noč pa sledi delo za vodje ekip, ki morajo oceniti študentske izdelke. Po končanem drugem reševalnem dnevu je delo študentov opravljeno, tako da običajno sledi en dan za oglede lokalnih znamenitosti, naslednji dan pa je na vrsti podelitev nagrad. Vmes vodje ekip preverijo, ali so njihovi študenti dobili res ustrezno število točk glede na to, koliko so rešili. Tako nekateri študenti dobijo kakšno dodatno točko, včasih pa kdo kakšno točko tudi izgubi. Vsota vseh sprememb števila točk študentov ene ekipe se šteje kot uspeh vodje ekipe. Prejšnja leta so uspešni vodje ekip lahko zbrali tudi 50 in več točk, letos pa je zmagovalec te kategorije dobil le 26 točk. Razlog najverjetneje tiči v tem, da so popravljalci nalog svojo nalogo letos res kvalitetno opravili. Splet naključij pa je tokrat v tem točkovanju avtorja zapisa prinesel na odlično tretje mesto.

Študenti imajo od konca drugega tekmovalnega dne do podelitve nagrad precej časa, ki ga delno porabijo tudi za druženje. Od športnih aktivnosti naj omenim, da je hrvaška reprezentanca v finalu nogometnega prvenstva proti združeni ekipi preostalega sveta močno izgubila. V družabnih igrah so bili tradicionalno močni Nemci, tekma v vaterpolu pa je zaradi premalo prijavljenih žal odpadla. Opazovanje popolnega luninega mrka je bilo le delno uspešno, saj je luna večino časa mrknila za gostimi oblaki, kronanje z bikovo glavo (v obliki lubenice) pa je bilo sicer izvedeno, a manj obiskano kot v preteklih letih.

Slika 3. Zapolnjen avditorij med podelitvijo nagrad.

Slika 4. Del ekipe Fakultete za matematiko in fiziko po podelitvi nagrad.

Še en zanimiv podatek je treba omeniti. Na pobudo nekaterih vodij ekip je predsednik tekmovanja na zaključni prireditvi tekmovalce vprašal, kdo od njih ne študira matematike. Namreč, bila je postavljena hipoteza, da vedno več dobrih matematikov izbere študij kakega drugega področja. O razlogih za to seveda lahko poteka razprava. Odziv je bil presenetljiv: več kot tretjina udeležencev je dvignila roko. Seveda bi bilo zanimivo videti, kako so se ti tekmovalci odrezali. Na prvi pogled nič slabše, tako da je verjetno to res trend. Kar pomeni, da se bodo morale matematične fakultete še bolj potruditi za svoje (bodoče) študente.

Oglejmo si še štiri naloge s tekmovanja ter nekaj njihovih rešitev. Začeli bomo z malce težjo nalogo, nato pa rešili še dve razmeroma lahki.

Pri zmerno težki nalogi omenimo nekaj ozadja. Iz analize se spomnimo Lagrangeevega izreka: za dovolj lepo funkcijo na intervalu $[a,b]$ obstaja točka c, da velja $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. Vprašamo se lahko, za katere funkcije je točka c določena kot neka funkcija krajišč a in b. Komu je morda poznan primer, ko je c aritmetična sredina, torej $c=\frac{a+b}{2}$, omenjena naloga pa je spraševala po funkcijah, kjer je c geometrična sredina. Tako dobimo nalogo, ki je mešanica diferencialne in funkcijske enačbe:

Naloga 1. Poiščite vse funkcije f, za katere velja

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\sqrt{ab}\right)$$

za vse $a,b>0$.

Rešitev. Verjetno hitro opazimo, da linearne funkcije ustrezajo pogoju. Morda malo presenetljivo pa to niso vse. Do še več ustreznih funkcij pridemo z odvajanjem izraza iz naloge. Če smo malo bolj spretni, za a in b izberemo novi spremenljivki, kot recimo $a=e^{x+h}, b=e^{x-h}$ ali pa $b=c^2a^{-1}$, lahko pa kar zgornji izraz odvajamo po a (ker je leva stran izraza odvedljiva, je tudi desna, tak argument uporabimo tudi za obstoj višjih odvodov). Dobimo

$$-f'(a)=-f'\left(\sqrt{ab}\right)+(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\,.$$

Če v dobljeni izraz vstavimo $a=b$, dobimo $-f'(a)=-f'(a)$ (torej nič novega). A dobljeni izraz lahko še enkrat odvajamo (po a):

$$\begin{aligned}-f''(a)=-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}+&\\ (b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}-(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}&\,,\end{aligned}$$

oziroma

$$f''(a)=f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}+(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}\,.$$

Spet vstavimo $a=b$, da dobimo $f''(a)=f''(a)$, oziroma še vedno nič novega. A ne obupamo in zgornji (že kar malo neprijazen) izraz odvajamo še enkrat.

$$\begin{aligned}f'''(a)=f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{2a}-f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a^3}}+f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a}-&\\ (b-a)f''''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b\sqrt{b}}{8a\sqrt{a}}+(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{4a^2}-&\end{aligned}$$

$$f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{b}}{4\sqrt{a^3}}+(b-a)f'''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{b}{8a^2}-(b-a)f''\left(\sqrt{ab}\right)\frac{3\sqrt{b}}{8\sqrt{a^5}}\,.$$

Sedaj že znamo, vstavimo $a=b$ in dobimo

$$f'''(a)=\frac{1}{2}f'''(a)-\frac{1}{2a}f''(a)+\frac{1}{4}f'''(a)-\frac{1}{4a}f''(a)$$

oziroma

$$\frac{1}{4}f'''(a)=\frac{-3}{4a}f''(a)\,,$$

kar pa je nekaj novega, namreč diferencialna enačba. Zapišemo jo v bolj pregledni obliki

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)}=\frac{-3}{x}\,,$$

od koder z enim integriranjem dobimo $f''(x)=Dx^{-3}$. Po še dveh integriranjih dobimo, da mora biti funkcija f oblike $f(x)=\frac{A}{x}+Bx+C$. Hitro lahko preverimo, da vse take funkcije ustrezajo pogoju iz naloge. Poleg linearnega dela, ki smo ga lahko uganili, nastopa torej še funkcija $\frac{1}{x}$.

Seveda smo navajeni, da ima kakšna naloga več rešitev. Tole je rešitev brez odvajanja: namesto a in b vstavimo pare $(2x,2/x)$, $(2/x,x/2)$ in $(2x,x/2)$:

$$\begin{aligned}f(2x)-f(2/x)&=(2x-2/x)f'(2)\,,\\ f(2/x)-f(x/2)&=(2/x-x/2)f'(1)\,,\\ f(2x)-f(x/2)&=3/2xf'(x)\,.\end{aligned}$$

Ko prvi dve enačbi seštejemo, dobimo na levi strani isto kot v tretji, torej velja

$$(2x-2/x)f'(2)+(2/x-x/2)f'(1)=3/2xf'(x)\,,$$

kar pomeni, da za ustrezni konstanti A, B velja

$$f'(x)=-\frac{A}{x^2}+B\,,$$

od koder z enim integralom dobimo

$$f(x)=\frac{A}{x}+Bx+C\,.$$

Obstaja seveda še več možnosti, ena (med študenti dokaj pogosta) je bila, da uganemo triparametrično družino rešitev in dokažemo, da ne obstaja nobena druga. To recimo naredimo tako, da funkciji f, ki ustreza pogoju, prištejemo tako linearno kombinacijo baznih funkcij, da dobimo funkcijo $g(x)$, za katero velja

$$g(x) = f(x) + \frac{A}{x} + Bx + C\,, g(1) = g(2) = g(3) = 0\,.$$

od tod lahko pokažemo (z uporabo pogoja iz naloge), da mora biti g konstantno enaka 0.

Opomba. Bralec, ki ga še vedno zanima, katere funkcije dobimo, če za srednjo točko vzamemo aritmetično sredino krajišč, bo z zgoraj opisanimi metodami lahko našel rešitev. Kaj pa za harmonično sredino?

Dovolj diferencialnih in funkcijskih enačb, poglejmo si še nekaj res lahke algebre.

Naloga 2. Naj bo k naravno število. Koliko najmanj mora biti n, da bo v $\mathbb{R}^n$ obstajalo k vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, za katere bo veljalo, da sta v_i in v_j ortogonalna, če je $|i - j| > 1$?

Rešitev. Izberimo najprej n tako, da velja $2n + 1 \leq k$. Zaradi pogoja v nalogi bi moralo biti $n + 1$ vektorjev $v_1, v_3, \ldots, v_{2n+1}$ paroma ortogonalnih, to pa v $\mathbb{R}^n$ ni mogoče. Torej mora biti $2n \geq k$, oziroma $n \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Sedaj je naša naloga, da za $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ najdemo vektorje, ki ustrezajo pogoju iz naloge. To so recimo podvojeni bazni vektorji, torej e_1, e_1, e_2, $e_2, \ldots$, e_n, e_n, in ker jih je $2\lceil \frac{k}{2} \rceil \geq k$, vidimo, da obstaja k vektorjev, ki ustrezajo pogoju.

Opomba. Naloga se kar zakomplicira, če v pogoj zapišemo, da morata biti vektorja v_i in v_j ortogonalna natanko takrat, ko je $|i - j| > 1$. Vabljeni k reševanju!

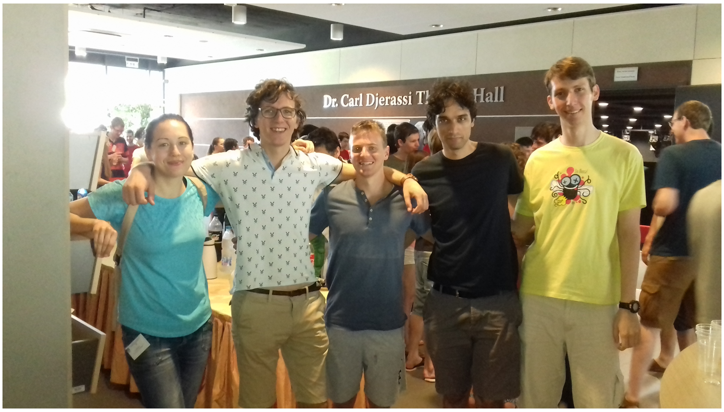
Poglejmo še lahko analitično nalogo:

Naloga 3. Za zaporedji pozitivnih števil $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dokažite ekvivalenco naslednjih dveh trditev:

1. Obstaja zaporedje pozitivnih števil $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, za katero konvergirata vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$.

2. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ konvergira.

Namig. Ker je naloga res lahka, le dva majhna namiga, za vsako smer dokaza eden. Tako bi bilo zanimivo pogledati zaporedje $c_n = \sqrt{a_n b_n}$. In pa,



Slika 5. Ekipa FMF pred slavnostno otvoritvijo.

velja $\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{c_n}\frac{c_n}{b_n}}$. Spomnimo pa se tudi razmerja med aritmetično in geometrično sredino, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Za konec pa še najtežja naloga letošnjega tekmovanja. Rešil (za vseh deset točk) jo je le en tekmovalec. Če vam bo delala preglavice in vam nikakor ne bo uspelo dobiti rezultata $-\pi \log 2$, dva namiga. Prvi je ta, da lahko uporabite simetrijo in seštevate le po pozitivnih (oziroma nenegativnih) a, b. Drugi namig pa je ta, da dvojno vsoto $\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2}$ sešteje Mathematica.

Naloga 4. Za $R > 1$ definiramo množico $D_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2; 0 < a^2+b^2 < R\}$. Izračunajte

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{(a,b)\in D_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2}\,.$$

Kogar zanima uradna rešitev te naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na internetni strani tekmovanja `www.imc-math.org.uk`. Tam si lahko ogleda tudi zgodovino tega tekmovanja, vse naloge, ki so bile zastavljene v zadnjih 25 letih, ter tudi vse rezultate. Podatki o udeležbi, ki se tičejo ekipe FMF, so naslednji: v 25 tekmovanjih smo sodelovali 24-krat, skupaj smo zbrali 103 nastope, v katerih smo dosegli 7 prvih, 39 drugih in 37 tretjih nagrad, 19 pohval in eno potrdilo.

Gregor Šega