Ali je $\frac{1}{\pi}$ ulomek?

Is $\frac{1}{\pi}$ a Fraction?

Zlatan Magajna
Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Σ Povzetek

V prispevku obravnavamo pomen izraza *ulomek* in zapisa $\frac{a}{b}$. Čeprav je ulomek eden najosnovnejših matematičnih pojmov in je oznaka zanj vsem poznana, ju učenci, dijaki in tudi učitelji matematike različno razumejo. V prispevku predstavljamo različna pojmovanja in razumevanja izraza *ulomek* in zapisa z ulomkovo črto ter vzroke za raznolikost v njihovem razumevanju. Ulomek je primer matematičnega pojma, ki ga uporabljamo tako v formalnem, izvornem pomenu, pa tudi manj formalno v drugih pomenih, zato je predvsem pomembno razlikovati različne pomene in se jih zavedati.

Σ Abstract

The paper discusses the meaning of the term fraction and of the notation $\frac{a}{b}$. Even though the fraction is one of the most basic mathematical concepts and the symbol for it is known by all, primary school students, secondary school students and mathematics teachers understand it differently. The paper presents various concepts and understandings of the term fraction and of the notation with a fraction line, and the reasons for such differences in understanding. The fraction is an example of a mathematical concept which is being used in the formal, original meaning, and less formally in other meanings; it is therefore important that we distinguish among the different meanings and are aware of them.

α Uvod

Pričujoči prispevek je nastal kot odgovor na razmišljanje bralke, v katerem se slikovito sprašuje: *Ali je* $\frac{1}{\pi}$ *ulomek*? Vsi poznamo rek »Dva pravnika – tri pravniška mnenja.« Kot nasprotje pravniškim raznolikim interpretacijam istih zakonov postavljamo za zgled matematiko, kjer naj bi bili pojmi in dejstva nedvoumni in naj bi jih vsi enako razumeli. Razmišljanje bralke pa kaže, da ni tako. Na vprašanji *Kaj je ulomek?* in *Ali je* $\frac{1}{\pi}$ *ulomek?* bi dobili zelo raznolike odgovore celo pri učiteljih matematike in drugih matematikih, kaj šele pri učencih, dijakih. Še večja raznolikost bi prišla na dan, če bi raziskali, kako razumemo pojem ulomek.

Razlogov za razlike v razumevanju ulomkov in nasploh matematičnih pojmov je več, predvsem pa se pojavljajo na različnih ravneh. Na *konceptualni ravni* govorimo o različnih pojmovanjih ulomka, npr. ulomek kot del celote ni enak pojem kot ulomek v pomenu razmerja. Na *terminološki ravni* so razlike v interpretaciji izraza *ulomek* in interpretaciji zapisa $\frac{a}{b}$. Na *didaktični ravni* prihaja do razlik zaradi didaktičnih poenostavitev: avtorji oz. učitelji želijo uvesti pojme, povezane z ulomki, na enostaven ali celo poenostavljen način, včasih zato tudi zožijo obravnavane pojme (npr. v učbenikih srečamo vsebinsko različne opredelitve algebrskih ulomkov). V učnem kontekstu pa ne moremo mimo dejstva, da je ulomek, kot ga razume posameznik, *subjektiven konstrukt* – tako kot tudi vsak matematičen pojem. Tudi če je nek pojem enotno opredeljen, posameznik sam zgradi in oblikuje razumevanje pojma, v skladu s svojimi izkušnjami in predhodnim znanjem. Za nekatere mora, na primer, biti ulomek (ne glede na kdaj naučeno definicijo) nujno pozitiven. Pri običajnem delu individualne razlike v razumevanju usvojenih matematičnih pojmov ne povzročajo nesporazumov in se jih zato niti ne zavedamo.

V prispevku se bomo omejili na *terminološko raven*, saj se nanjo nanaša zapis bralke. Torej: *Kaj označuje izraz 'ulomek'*? *Kdaj zapisu oblike* $\frac{a}{b}$ *lahko rečemo ulomek*?

β Pomeni izraza *ulomek* in zapisa $\frac{a}{b}$

Vsi se strinjamo, da $\frac{2}{7}$ predstavlja ulomek. Vendar zapis, da je $\frac{2}{7}$ ulomek, lahko interpretiramo na različne načine. Predstavili bomo tri značilne.

1. ***Ulomek je simbolni zapis racionalnega števila.*** V tovrstnem zapisu sta števec in imenovalec nujno celi števili, pri čemer je imenovalec različen od 0. Po tej interpretaciji sta $\frac{2}{7}$ in $\frac{2}{14}$ različna ulomka, torej različna simbolna zapisa istega racionalnega števila. Isto racionalno število lahko torej predstavimo z več različnimi ulomki (kot simbolnimi zapisi racionalnih števil). Kot včasih rečemo, imajo lahko različni ulomki enako vrednost oz. predstavljajo isto racionalno število. V tem pomenu v zapisu $\frac{2}{7}$ ne gre za deljenje – v množici celih števil se to deljenje ne izide – temveč za označitev racionalnega števila z navedbo dveh celih števil.
   Ko govorimo o števcu in imenovalcu ulomka, se to nanaša na ulomek v pomenu simbolnega zapisa racionalnega števila. In ko rečemo, da ulomek razširimo ali pa krajšamo, prav tako mislimo na ulomek v smislu simbolnega zapisa: dani simbolni zapis racionalnega števila (ulomek) nadomestimo z drugačnim za-

pisom istega racionalnega števila (razširjeni oz. krajšani ulomek).

2. ***Ulomek je racionalno število***. Zapis $\frac{2}{7}$ predstavlja neko racionalno število, ki mu pogosto tudi pravimo ulomek. V zapisu $\frac{2}{7} + \frac{1}{5}$ nastopata dva ulomka. Ta ulomka predstavljata racionalni števili, saj seveda seštevamo racionalni števili. Zapisa $\frac{2}{7}$ oz. $\frac{1}{5}$ v omenjenem izrazu interpretiramo kot racionalni števili, predstavljeni s paroma celih števil 2 in 7 oz. 1 in 5. Če v tem kontekstu uporabimo izraz *ulomek*, torej mislimo na racionalno število in ne na simbolni zapis. Zapisov namreč ne moremo seštevati, seštevamo lahko le števila. Kadar uporabimo izraz *ulomek* v pomenu racionalnega števila, ne moremo govoriti o imenovalcu ulomka ali števcu ulomka, saj zapis racionalnega števila s parom celih števil ni enoličen.

   Videli smo, da $\frac{a}{b}$ in s tem povezan izraz *ulomek* lahko pomeni včasih simbolni zapis racionalnega števila ali pa racionalno število, ki ga zapis predstavlja. Pri naravnih številih je drugače, saj uporabljamo različna izraza za zapis in za to, na kar se zapis nanaša, torej za označevalca in označeno. Š*tevilka* se nanaša na označevalca (zapis števila), število pa na označeno. Številka je simbolni zapis števila.

3. ***Ulomek je računski izraz (deljenje dveh celih števil)***. Zapis $\frac{2}{7}$ lahko interpretiramo še drugače. Števec in imenovalec obravnavam kot *celi števili v obsegu racionalnih števil (ali tudi realnih števil)*. V obsegu lahko vedno delimo z neničelnim elementom. Kvocient števca in imenovalca (kot racionalni števili) je racionalno število, ki ga simbolno predstavimo s parom celih števil – ta par sta lahko kar števec in imenovalec ali pa kak drug ustrezen par. V našem primeru lahko izraz $\frac{2}{7}$ razumem kot deljenje racionalnega števila 2 z racionalnim številom 7, rezultat je racionalno število, ki ga simbolno zapišemo kot npr. kot $\frac{2}{7}$ ali $\frac{4}{14}$ in seveda še drugače. To je torej tretja interpretacija zapisa $\frac{2}{7}$. V tem pomenu zapis $\frac{a}{b}$ uporabim v pomenu kvocienta $a : b$ v obsegu racionalnih števil, pri čemer sta a in b celi števili in je b različen od 0.

Doslej smo na zapleten način povedali to, kar tako ali drugače piše v učbenikih matematike. Ulomek je izraz $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b celi števili in b ni 0. Racionalna števila lahko zapišemo z ulomkom. V množici racionalnih števil je kvocient celih števil a in b enak ulomku $\frac{a}{b}$.

B Matematično in didaktično ozadje

Na ulomke bomo pogledali še z dveh zornih kotov. Najprej bomo predstavili matematično ozadje ulomkov in ulomkom podobnih objektov, pri katerih števec in imenovalec nista nujno celi števili. Na ulomke pa bomo pogledali tudi z vidika učenja matematike, kjer je treba učečim se predstaviti ulomke na bolj ali manj poenostavljen, a korekten način. Pri eni in drugi obravnavi se bomo naslonili na avtoritativne in lahko dostopne vire z našega prostora.

Do racionalnih števil lahko pridemo iz celih števil s konstrukcijo, ki je splošna in je opisana v vsakem učbeniku abstraktne algebre (Vidav, 1989). Vsak cel komutativen kolobar je namreč mogoče vložiti v najmanjši komutativen obseg. Iz kolobarja

celih števil tako dobimo obseg racionalnih števil, iz kolobarja polinomov s celimi koeficienti dobimo obseg racionalnih funkcij itd. Pri tej konstrukciji najprej tvorimo množico parov (a, b) elementov kolobarja, pri čemer $b \neq 0$. Če v to množico parov uvedemo ekvivalenčno relacijo
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$ in v množici ekvivalenčnih razredov ustrezno definiramo operaciji seštevanja in množenja, dobimo komutativen obseg. Torej lahko vsak element nastalega obsega predstavimo **s parom elementov izhodiščnega kolobarja**, pri čemer za par (a, b) in/ali ekvivalenčni razred $[(a, b)]$ tega para običajno uporabljamo zapis $\frac{a}{b}$. Če gre za konstrukcijo racionalnih števil iz celih števil, potem je v pomenu simbolnega zapisa ulomek $\frac{2}{7}$ dogovorjeni zapis urejenega para (2, 7), v pomenu racionalnega števila pa ulomek $\frac{2}{7}$ pomeni ekvivalenčni razred urejenih parov, kamor sodi par (2, 7).

Če izhajamo iz kolobarja celih števil, predstavljajo ulomki racionalna števila oz. zapise racionalnih števil s parom celih števil. Takim ulomkom pravimo tudi ***številski ulomki.*** Če izhajamo iz kolobarja polinomov s celoštevilskimi koeficienti, predstavljajo ulomki ***racionalne funkcije*** oz. zapise racionalnih funkcij s parom polinomov s celoštevilskimi koeficienti. Če izhajamo iz kolobarja celih kompleksnih števil, predstavljajo ulomki ***racionalna kompleksna števila.*** Primerov je seveda še več.

V osnovnošolskih in srednješolskih učbenikih so racionalna števila uvedena na zgoraj opisan način, seveda ustrezno poenostavljen. Legiša (1996, str. 75) opredeli ulomek kot »izraz oblike $\frac{m}{n}$, kjer sta m in n celi števili in $n \neq 0$.« Nato uvede ekvivalentnost ulomkov in zapiše: »Dogovorimo se, da bomo ekvivalentne ulomke izenačili, npr. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$.«. V nadaljevanju torej uporablja izraz *ulomek* tako v pomenu simbolnega zapisa kot v pomenu racionalnega števila. V zahtevnejših učbenikih zasledimo tudi drugačno pot do množice racionalnih števil. Vidav (1981) in Prijatelj (1980) izhajata iz obsega realnih števil in podmnožice množice celih števil v njem. Oba uvedeta ulomek $\frac{a}{b}$ v pomenu zapisa kvocienta $a \cdot b^{-1}$, kjer sta a in $b \neq 0$ celi števili v obsegu realnih števil. »Racionalna števila so potemtakem natanko tista realna števila, ki so izrazljiva z ulomkom.« (Prijatelj, 1980, str. 99). Načeloma oba avtorja torej uporabljata izraz ulomek v pomenu zapisa izraza in ne v pomenu vrednosti izraza.

Mnoge (a ne vse!) postopke in pravila za računanje s številskimi ulomki je enostavno razširiti na primere, kjer sta števec in imenovalec poljubna izraza, ulomkova črta pa pomeni deljenje števca z imenovalcem. Kot pravi Venceljeva (1999, str. 99) ob obravnavi ulomkov s celoštevilskimi števci in imenovalci: »Iz pomena ulomka kot količnika med števcem in imenovalcem izhaja tudi navada, da **namesto znaka za deljenje enakovredno uporabljamo ulomkovo črto tudi v primerih, ko ne gre za ulomke**.« (poudarek je avtoričin). Če torej uporabljamo ulomkovo črto, še ne pomeni, da gre za ulomek v smislu racionalnega števila ali njegovega zapisa, temveč gre lahko le za zapis kvocienta dveh izrazov oz. za vrednost kvocienta. A ne le, da pogosto zapisu kvocienta dveh izrazov rečemo ulomek, temveč se – po analogiji s številskim ulomkom – na deljenec in delitelj sklicujemo kot na števec in imenovalec (kar lahko ni najbolj posrečeno). Nekatere zapise, kjer z ulomkovo črto označujemo deljenje, srečamo pogosto, in ker so povezani s specifičnimi postopki, jih tudi posebej poimenujemo. Če sta v zapisu $\frac{a}{b}$ števec in/ali imenovalec ulomka, govorimo o ***dvojnem ulomku***; zapisu $\frac{a}{b}$, kjer sta a in/ali b izraz z ulomki, pravimo ***sestavljeni ulomek*** (angl. *complex fraction*); posebna vrsta sestavljenih ulomkov so ***verižni ulomki***. Če gre v zapisu $\frac{a}{b}$ za kvocient algebrskih izrazov (t.j. izrazov, v katerih nastopajo cela števila, spremenljivke, štiri osnovne operacije in potence z racionalnimi eksponenti), govorimo ***algebrskih ulomkih***. Za posamezne vrste ulomkov so pomembni specifični postopki: dvojne ulomke in sestavljene ulomke lahko pretvorimo v številske ulomke, algebrske ulomke skušamo racionalizirati ipd.

γ Kaj je torej ulomek?

Izraz *ulomek* uporabljamo v različnih pomenih. V matematiki je pomembno, da so definicije, s katerimi vpeljujemo nove pojme, natančne in nedvoumne. K nedvoumnosti sporočanja pripomore tudi nedvoumnost v poimenovanju in simbolizaciji pojmov, ki naj bi oba bila nedvoumna. To zagotovo velja za poimenovanja *kvocient, racionalno število, številski izraz*. Vendar pa prizadevanje, da bi v sporočanju za vsak pojem uporabljali svoje ime in oznako, včasih vodi k nepreglednosti, okornosti in nerazumljivosti. Zato se avtorji matematičnih besedil in tudi učitelji zatekajo k nečemu, kar v angleščini poimenujemo *abuse of terminology* in *abuse of notation* (zloraba terminologije, zloraba označevanja). Gre za to, da se za doseganje boljše razumljivosti in preglednosti izrazimo na način, ki formalno ni povsem natančen. Torej ne gre za napako v izražanju ali nepravilnost v sami trditvi, temveč za to, da raje kot formalno pravilno in bralcu/poslušalcu težko razumljivo formulacijo uporabimo sicer ne povsem natančno formulacijo, ki pa predvidoma bralca/poslušalca napelje k pravilnemu razumevanju obravnavanega dejstva. Goldova v zvezi s tem zapiše:

> *Matematiki so znani po tem, da se zatekajo k zlorabi označevanja (abuse of notation). Pogosto uporabljamo enako oznako v mnogih različnih kontekstih (s širjenjem pomena oznake). Na primer: (a, b) označuje točko v ravnini, element kateregakoli kartezičnega produkta itd. Spremenljivke uporabljamo na zelo različne načine, pri čemer pričakujemo, da bodo dijaki sami iz konteksta razbrali, kako naj jih uporabljajo v posameznem kontekstu.* (Gold, 2012, str. 159)

Nekateri avtorji tako formalno opredelijo ulomek kot simbolni zapis $\frac{a}{b}$ para števil, kjer sta a in b celi števili in $b \neq 0$. Nato pa izraz »ulomek« uporabljajo tudi v pomenu vrednosti ulomka, t.j. racionalnega števila oz. ekvivalenčnega razreda parov celih števil, ki so v enakem razmerju. Drugi avtorji formalno opredelijo ulomek kot racionalno število, a uporabljajo izraz »ulomek« tudi v pomenu simbolnega zapisa racionalnega števila s parom celih števil. In pogosto, posebej pri delu v razredu, uporabimo izraz »ulomek« tudi za kvocient dveh kakršnihkoli izrazov, kjer deljenje označeno z ulomkovo črto. Če se, na primer, pri delu v razredu rečemo »Imenovalec ulomka $\frac{2+\sqrt{3}}{1+\pi}$«, bodo vsi dijaki razumeli, da mislimo na izraz $(1 + \pi)$, in nas bodo bolje razumeli, kot če rečemo »Delitelj v izrazu, kjer je deljenje zapisano z ulomkovo črto«.

Ali je torej $\frac{1}{\pi}$ ulomek? V pravem, izvornem pomenu besede ni ulomek, saj v zapisu števec in imenovalec nista oba celi števili. Gre pač za zapis kvocienta dveh realnih števil z ulomkovo črto. Ali je $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ulomek? Zagotovo ni običajen (številski) ulomek, lahko pa nanj gledamo kot na algebrski ulomek. Medtem ko izraz *racionalno število* praviloma uporabljamo v enem samem pomenu, pa je uporaba izraza *ulomek* izmuzljiva. V istem stavku lahko pomeni racionalno število in simbolni zapis racionalnega števila. Izraz *ulomek* je tudi povezan s specifičnimi zapisi, ki pa imajo posebna poimenovanja. Formalna opredelitev ulomka kot z ulomkovo črto zapisanega kvocienta poljubnega realnega števila z neničelnim realnim številom bi vodila v težave in nesporazume. Da se pri tovrstnem izrazu sklicujemo kot na ulomek, pa je sprejemljiv *abuse of terminology.* Pomembno je, da se zavedamo, da uporabljamo izraz *ulomek* v različnih pomenih, ne vedno formalno povsem točnih. In pomembno je, da te pomene razlikujemo in da jih v kontekstu prepoznamo. Če jih ne razlikujemo ali jih ne prepoznamo, bo lahko $\pi = \frac{\pi}{1}$ postalo racionalno število, skušali bomo okrajšati ulomek $\frac{\sqrt{3}}{5}$, iskali bomo najmanjši skupni imenovalec ulomkov $\frac{1}{\pi}$ in $\frac{1}{e}$.

δ Viri

1. Gold, B. (2012) How Your Philosophy of Mathematics Impacts your Teaching. V: Mircea, P. (ed.). The Best Writing in Mathematics 2012. Str. 149-162. Princeton: Princeton University Press.
2. Legiša, P. (1996) Matematika I. Realna števila in linearna funkcija. Ljubljana: DZS.
3. Prijatelj, N. (1980) Uvod v matematično analizo. Del I. Ljubljana: DZS.
4. Vencelj, M. (1999) Matematike za triletne poklicne šole, 1. zvezek, Ljubljana: DZS.
5. Vidav, I. (1981) Višja matematika I. Ljubljana: DZS.
6. Vidav, I. (1989) Algebra. Ljubljana: DMFA.