RAZPOREDITVE HIPERRAVNIN

MATJAŽ KONVALINKA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 52C35

Razporeditev hiperravnin je končna množica hiperravnin (afinih podprostorov kodimenzije 1) v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. V tem preglednem članku definiramo osnovni algebrski strukturi, povezani z razporeditvami: delno urejeno množico presekov in karakteristični polinom. Videli bomo, kako uporabiti karakteristični polinom za izračun števila območij, na katera razporeditev razkosa prostor, in pokazali nekaj metod za iskanje karakterističnega polinoma.

HYPERPLANE ARRANGEMENTS

A hyperplane arrangement is a finite set of hyperplanes (affine subspaces of codimension 1) in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. In this survey we define two basic structures: the intersection poset and the characteristic polynomial. We see how to use the characteristic polynomial to compute the number of regions created by the hyperplanes, and show some methods for finding the characteristic polynomial.

Osnovne definicije in primeri

Iz srednješolske matematike vsi poznamo premico v ravnini in ravnino v prostoru. Vemo, da ima vsaka premica enačbo oblike

$$ax + by = c,$$

kjer so a, b, c poljubna realna števila; pri tem ne sme veljati $a = b = 0$. Premica gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $c = 0$. Podobno ima ravnina v prostoru enačbo

$$ax + by + cz = d,$$

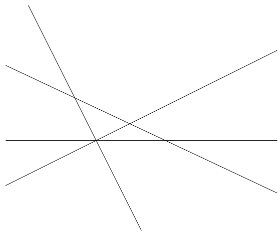
kjer so a, b, c, d poljubna realna števila, za katera ne velja $a = b = c = 0$. Ravnina gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $d = 0$.

Posplošitev premice v ravnini in ravnine v prostoru je *hiperravnina*: množica točk $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, za katere velja

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kjer je $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in $b \in \mathbb{R}$. Hiperravnina je *afin podprostor* vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ (premaknjen linearni podprostor) dimenzije $n - 1$ in gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $b = 0$.

Zanimale nas bodo *končne razporeditve hiperravnin v* $\mathbb{R}^n$ (angl. *hyperplane arrangements*), se pravi končne množice hiperravnin v $\mathbb{R}^n$. Naš glavni vir in izvrsten uvod v široko področje kombinatorike razporeditev je [3]. Tam lahko bralec najde tiste dokaze, ki so v našem pregledu izpuščeni. Za nekatere lastnosti razporeditev, ki jih tu ne bomo obravnavali, denimo maksimalno število incidenc, največja možna kombinatorna obsežnost itd., glej [1]. Za razporeditve hiperravnin bomo uporabljali pisane velike črke, torej $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ itd. V nadaljevanju bomo končnim razporeditvam hiperravnin rekli preprosto *razporeditve.* Na sliki 1 je primer razporeditve (premic) v $\mathbb{R}^2$.



Slika 1. Primer razporeditve v $\mathbb{R}^2$.

Na prvi pogled je očitno, da razporeditev razdeli prostor $\mathbb{R}^n$ na več *območij.* Na primer, razporeditev na sliki 1 razdeli ravnino na 10 območij. Prav tako je očitno, da je število območij lahko občutljivo za majhne spremembe: če malo premaknemo eno od treh premic, ki se sekajo v isti točki, bo število območij naraslo na 11.

Strogo definiramo območje razporeditve $\mathcal{A}$ kot povezano komponento prostora

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Ni težko videti, da je območij končno mnogo, da je vsako od njih odprta konveksna množica in zato homeomorfno notranjosti krogle. Število območij označimo z $r(\mathcal{A})$.

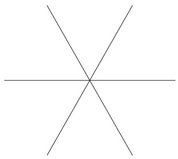
Primer 1. Denimo, da imamo razporeditev $\mathcal{A}_m$ v ravnini, ki vsebuje m premic v splošni legi: to pomeni, da se vsaki dve premici sekata v natanko eni točki in da nobene tri premice nimajo skupne točke. Trdimo, da je $r(\mathcal{A}_m) = (m^2 + m + 2)/2$. To je očitno res, če je $m = 0$: imamo samo eno območje (celo ravnino). Predpostavimo, da trditev velja za $m - 1$, torej da ima razporeditev $\mathcal{A}_{m-1}$ natanko $(m^2 - m + 2)/2$ območij. Dodamo novo premico; predstavljamo si, da potujemo po njej od enega konca do drugega. Vsakič, ko presekamo drugo premico, se ustvari novo območje; eno območje pa se ustvari še na koncu. Ker nova premica po predpostavki seka vsako od starih premic v drugi točki, smo dodali m območij, tako da je $r(\mathcal{A}_m) = r(\mathcal{A}_{m-1}) + m = (m^2 - m + 2)/2 + m = (m^2 + m + 2)/2$. $\diamondsuit$

Primer 2. Oglejmo si *koordinatno razporeditev* $\mathcal{K}_n$, ki je definirana s koordinatnimi hiperravninami $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Območja za $n = 2$ ustrezajo kvadrantom, za $n = 3$ pa oktantom. Za splošen n je območij 2^n: da je točka $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{K}_n} H$, mora veljati $x_i \neq 0$ za vsak i; lahko je videti, da je območje določeno z izborom $x_i > 0$ ali $x_i < 0$ za vsak i, možnosti je očitno 2^n. $\diamondsuit$

Opazimo še, da ima družina vseh hiperravnin koordinatne razporeditve neprazen presek. Takim razporeditvam rečemo *centralne*; se pravi, razporeditev $\mathcal{A}$ je centralna, če velja $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$.

Primer 3. *Kitkasta razporeditev* (angl. *braid arrangement*) $\mathcal{B}_n$ je definirana z $\binom{n}{2}$ hiperravninami $x_i - x_j = 0$ za $1 \leq i < j \leq n$. Območje je določeno s tem, da izberemo, ali velja $x_i < x_j$ ali $x_i > x_j$ za vsaka i, j, $i < j$. To pomeni, da je območje določeno s tem, da določimo, kateri od x_i-jev je najmanjši, kateri je drugi najmanjši itd., se pravi z neko permutacijo koordinat $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zatorej velja $r(\mathcal{B}_n) = n!$. Na primer, razporeditev $\mathcal{B}_3$, prikazana na sliki 2, razdeli prostor na šest območij, določenih z $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1 < x_3 < x_2$, $x_2 < x_1 < x_3$, $x_2 < x_3 < x_1$, $x_3 < x_1 < x_2$ in $x_3 < x_2 < x_1$.

Opazimo, da je tudi kitkasta razporeditev centralna: presek je premica $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. $\diamondsuit$



Slika 2. Kitkasta razporeditev $\mathcal{B}_3$, presekana z ravnino $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Kitkasta razporeditev ima kar nekaj zanimivih „deformacij“, na primer naslednje tri.

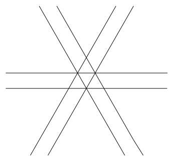
Primer 4. Denimo, da imamo dan graf $G = (V, E)$, kjer je množica vozlišč $V = \{1, \ldots, n\}$. Definirajmo *grafično razporeditev* $\mathcal{A}_G$ s hiperravninami $x_i - x_j = 0$ za $ij \in E$. Kitkasta razporeditev ustreza polnemu grafu K_n. Enostavno se da dokazati, da je število območij enako številu *acikličnih usmeritev* grafa G, se pravi številu takih izbir usmeritev vseh povezav grafa, za katere dobljeni usmerjeni graf nima ciklov.

Shijevo razporeditev $\mathcal{S}_n$ definirajo hiperravnine $x_i - x_j = 0, 1$ za $i < j$. *Catalanovo razporeditev* $\mathcal{C}_n$ definirajo hiperravnine $x_i - x_j = -1, 0, 1$ za $i < j$. Kasneje bomo videli, da je $r(\mathcal{S}_n) = (n+1)^{n-1}$ in $r(\mathcal{C}_n) = (2n)!/(n+$

1)! = $(n+2)(n+3)\cdots(2n)$. Obe števili sta zanimivi s kombinatoričnega stališča: število $(n+1)^{n-1}$ je (med drugim) enako številu označenih dreves na $n+1$ točkah (se pravi številu povezanih grafov na $\{1,2,\ldots,n+1\}$ z n povezavami), drugo pa je enako $n!C_n$, kjer je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ *Catalanovo število*. Catalanova števila so izjemno pomembna v enumerativni kombinatoriki, štejejo na primer:

- triangulacije $(n+2)$-kotnika;
- pravilne postavitve n oklepajev in n zaklepajev;
- poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$ z dovoljenima korakoma $(1,1)$ in $(1,-1)$, ki se ne spustijo pod os x.

Slika 3 prikazuje razporeditev $\mathcal{S}_3$. ♢



Slika 3. Shijeva razporeditev $\mathcal{S}_3$, presekana z ravnino $x_1+x_2+x_3=0$.

Delno urejena množica presekov, Möbiusova funkcija in karakteristični polinom

Izkaže se, da lahko veliko pomembnih lastnosti razporeditve razberemo iz presekov hiperravnin. V tem razdelku bomo definirali dva ključna objekta: delno urejeno množico presekov in njen karakteristični polinom. V zadnjem razdelku bomo potem spoznali različne načine računanja karakterističnega polinoma. Veliko rezultatov bomo navedli brez dokaza ali pa bomo dokaz samo skicirali.

Spomnimo se, da je množica P z dvomestno relacijo $\leq$ *delno urejena*, če velja:

1. refleksivnost: za vsak $x \in P$ je $x \leq x$;
2. antisimetričnost: če velja $x \leq y$ in $y \leq x$, je $x = y$;
3. tranzitivnost: če velja $x \leq y$ in $y \leq z$, je tudi $x \leq z$.

Če je $x \leq y$ in $x \neq y$, pišemo $x < y$. Če velja $x < y$, ne obstaja pa z, za katerega bi veljalo $x < z < y$, pravimo, da y *pokriva* x. Delno urejena množica P je *stopničasta*, če obstaja funkcija rang: $P \to \mathbb{N}$, za katero velja $\operatorname{rang}(y) = \operatorname{rang}(x) + 1$, kadar y pokriva x.

Spomnimo se, da (končne) delno urejene množice pogosto predstavimo s Hassejevim diagramom: grafom, katerega točke so elementi množice P, povezani pa so tisti pari (x, y), za katere y pokriva x. Hassejev diagram običajno narišemo tako, da je x pod y, če je $x < y$. Če je delno urejena množica stopničasta, vse elemente z istim rangom narišemo na isti višini.

Definicija 1. Naj bo $\mathcal{A}$ razporeditev hiperravnin v $\mathbb{R}^n$. Označimo z $L(\mathcal{A})$ množico vseh *nepraznih* presekov hiperravnin iz $\mathcal{A}$, vključno s prostorom $\mathbb{R}^n$ (ki je presek prazne družine hiperravnin). V $L(\mathcal{A})$ uvedemo dvomestno relacijo $\leq$ *obratne vsebovanosti*: definirajmo, da je $x \leq y$, če je $x \supseteq y$. To je relacija delne urejenosti, množici $L(\mathcal{A})$ z relacijo $\leq$ pravimo *delno urejena množica presekov* (angl. *intersection poset*).

Primer 5. Oglejmo si delno urejeno množico presekov za kitkasto razporeditev $\mathcal{B}_3$. Prazni presek $\mathbb{R}^3$ je manjši od vseh preostalih (to se pravi: vsebuje vse preostale preseke kot podmnožice). Takoj nad $\mathbb{R}^3$ v Hassejevem diagramu pridejo preseki enoelementnih družin hiperravnin, se pravi hiperravnine same. Ker se vse tri hiperravnine sekajo v premici $x_1 = x_2 = x_3$, je v $L(\mathcal{B}_3)$ samo še en element, ki je večji od vseh preostalih (se pravi: je vsebovan v vseh preostalih presekih). Glej sliko 4, levo. Vzemimo še dve vzporedni premici v $\mathbb{R}^2$. Imamo najmanjši element in dva elementa (premici), ki ga pokrivata. Ker se premici ne sekata, drugih elementov ni. Glej sliko 4, desno. $\diamondsuit$

Slika 4. Hassejev diagram delno urejene množice presekov za kitkasto razporeditev $\mathcal{B}_3$ in razporeditev dveh vzporednih premic.

Takoj opazimo, da velja naslednje: $L(\mathcal{A})$ ima vedno minimalni element (torej element $\hat{0}$, za katerega velja $\hat{0} \leq x$ za vse $x \in L(\mathcal{A})$); to je $\mathbb{R}^n$, presek prazne družine hiperravnin. Elementi, ki pokrivajo $\hat{0}$, so kar hiperravnine same. Velja še, da ima $L(\mathcal{A})$ maksimalni element (torej element $\hat{1}$, za katerega velja $x \leq \hat{1}$ za vse $x \in L(\mathcal{A})$) natanko tedaj, kadar je $\mathcal{A}$ centralna razporeditev: maksimalni element je v tem primeru kar $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$. Delno urejena množica presekov je stopničasta: preveriti se da, da je primerna funkcija

$$\operatorname{rang}(x) = n - \dim x,$$

kjer je x običajna (afina) dimenzija elementa x (ki je presek hiperravnin in zato premaknjen vektorski podprostor). Na primer, za kitkasto razporeditev $\mathcal{B}_3$ imamo ves prostor $\mathbb{R}^3$ z rangom $3-3=0$, tri ravnine z rangom $3-2=1$ in premico $x_1=x_2=x_3$ z rangom $3-1=2$. Rang se res poveča za 1, ko se premaknemo navzgor po Hassejevem diagramu.

V teoriji delno urejenih množic ima pomembno mesto *Möbiusova funkcija.* Tu bomo predstavili njeno nekoliko poenostavljeno različico. Predpostavimo, da je P končna delno urejena množica z minimalnim elementom $\hat{0}$. Potem definiramo Möbiusovo funkcijo $\mu_P\colon P \to \mathbb{Z}$ takole: definiramo $\mu_P(\hat{0})=1$, za $x>\hat{0}$ pa potem vzamemo

$$\mu_P(x) = -\sum_{y<x} \mu_P(y).$$

Definicijo lahko zapišemo še drugače: velja

$$\sum_{y\leq x} \mu_P(y) = \begin{cases} 1 & : \quad x=\hat{0} \\ 0 & : \quad x\neq\hat{0} \end{cases} .$$

Kadar je jasno, o kateri delno urejeni množici govorimo, pišemo namesto μ_P samo μ.

Primer 6. Vzemimo naravno število n in definirajmo D_n kot množico vseh deliteljev števila n, urejeno z relacijo $|$ (deli). Lahko je preveriti, da je $(D_n,|)$ delno urejena množica. Preveriti se da, da je

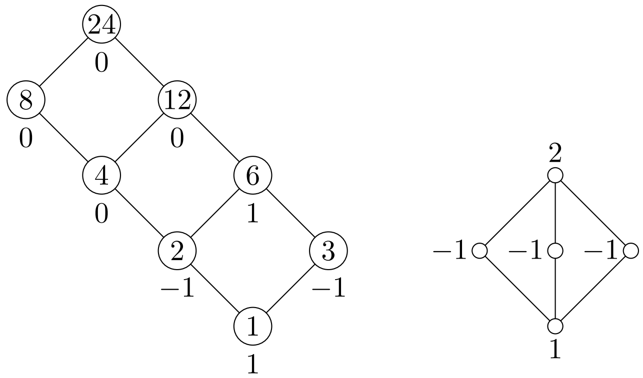
$$\mu(d) = \begin{cases} 0 & : \ d \text{ je deljiv s kvadratom nekega praštevila,} \\ (-1)^k & : \ d=p_1p_2\cdots p_k, \text{ kjer so } p_1,p_2,\ldots,p_k \text{ različna praštevila} \end{cases}$$

Möbiusova funkcija v D_n. Tej funkciji pravimo tudi *klasična Möbiusova funkcija*, ki je pomembna v teoriji števil, glej [2]. Hassejev diagram D_{24}, skupaj z vrednostmi $\mu(d)$, je na sliki 5, levo. Slika 5, desno, prikazuje Möbiusovo funkcijo za $L(\mathcal{B}_3)$. $\diamondsuit$

Izkaže se, da lahko večino pomembnih lastnosti delno urejene množice presekov in s tem razporeditve hiperravnin preberemo iz polinoma, ki izhaja neposredno iz Möbiusove funkcije delno urejene množice presekov.

Definicija 2. Naj bo $\mathcal{A}$ razporeditev. Vemo, da je njena delno urejena množica presekov $L(\mathcal{A})$ končna in ima minimalen element, zato imamo na voljo Möbiusovo funkcijo μ. Definiramo *karakteristični polinom delno urejene množice presekov* s formulo

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x\in L(\mathcal{A})} \mu(x)t^{\dim x}.$$



Slika 5. Hassejev diagram in vrednosti Möbiusove funkcije za D_{24} in za $L(\mathcal{B}_3)$.

Primer 7. Za kitkasto razporeditev $\mathcal{B}_3$ imamo (glej sliko 5, desno)

$$\chi_{\mathcal{B}_3}(t) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2).$$

V naslednjem razdelku bomo dokazali, da velja splošna formula

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1). \qquad \diamondsuit$$

Element $\hat{0} = \mathbb{R}^n \in L(\mathcal{A})$ ima dimenzijo n. Za vsako hiperravnino imamo en element x dimenzije $n-1$, ki pokriva $\hat{0}$ in ima zato $\mu(x) = -1$. To pomeni, da velja

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n - |\mathcal{A}|t^{n-1} + \dots$$

Tu $|\mathcal{A}|$ označuje moč množice $\mathcal{A}$, se pravi število hiperravnin v razporeditvi $\mathcal{A}$.

Pomembnost karakterističnega polinoma najlepše predstavi naslednji izrek, ki ga bomo navedli brez dokaza.

Izrek 1 (Zaslavsky, 1975). *Za poljubno razporeditev $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ velja $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$.*

Na primer, za kitkasto razporeditev $\mathcal{B}_n$ po izreku Zaslavskega in prejšnjem primeru dobimo

$$r(\mathcal{B}_n) = (-1)^n(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-n+1) = n!,$$

kar se ujema z našim direktnim izračunom.

„Naivna“ metoda za izračun karakterističnega polinoma je, da na roko izračunamo vse neprazne preseke hiperravnin, narišemo Hassejev diagram delno urejene množice, z rekurzivno zvezo izračunamo vrednost Möbiusove funkcije za vse njene elemente in zapišemo karakteristični polinom. Za razporeditve z veliko elementi in za neskončne družine razporeditev (npr. za kitkasto razporeditev, Catalanovo razporeditev) ta metoda običajno ni smiselna. V zadnjem razdelku bomo predstavili nekaj neočitnih metod za izračun karakterističnega polinoma.

Računanje karakterističnega polinoma

Whitneyjev izrek

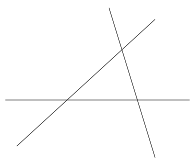
Spomnimo, da je razporeditev $\mathcal{A}$ centralna, če je $\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H \neq \emptyset$. Za centralno razporeditev $\mathcal{A}$ lahko definiramo $\dim \mathcal{A} = \dim \bigcap_{H\in\mathcal{A}} H$.

Če je razporeditev $\mathcal{A}$ centralna, je centralna tudi vsaka njena podrazporeditev $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ (vključno s prazno podrazporeditvijo), saj je

$$\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \supseteq \bigcap_{H\in\mathcal{A}} H.$$

Če razporeditev ni centralna, so nekatere podrazporeditve centralne, nekatere pa ne. Označimo s $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ množico vseh centralnih podrazporeditev razporeditve $\mathcal{A}$.

Primer 8. Razporeditev premic $\mathcal{A}$ v ravnini na sliki 6 ni centralna, saj se premice ne sekajo v isti točki. So pa centralne vse njene podrazporeditve, ki ne vsebujejo vseh treh premic. Tako ima $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ sedem elementov. $\diamondsuit$



Slika 6. Necentralna razporeditev s sedmimi centralnimi podrazporeditvami.

Izrek 2 (Whitneyjev izrek, 1932). *Za razporeditev $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ velja*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\mathcal{B}\in\mathcal{C}(\mathcal{A})} (-1)^{|\mathcal{B}|} t^{\dim \mathcal{B}}.$$

Izreka ne bomo dokazovali. Omenimo samo, da dokaz uporabi pomembno dejstvo, da je delno urejena množica presekov *polmreža za stik* (angl. *meet-semilattice*), torej da imata vsaka dva elementa stik (največjo skupno spodnjo mejo), ter da je *mreža* (angl. *lattice*), torej da imata vsaka dva elementa spoj (najmanjšo skupno zgornjo mejo), natanko tedaj, ko je razporeditev centralna. V mreži pa imamo za računanje Möbiusove funkcije posebno formulo, ki se pri razporeditvah poenostavi v Whitneyjev izrek.

Primer 9. Izračunajmo karakteristični polinom koordinatne razporeditve. Ker je koordinatna razporeditev centralna, je centralna tudi vsaka njena podrazporeditev. Za vsako podmnožico I množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ je presek ravnin $x_i = 0$, $i \in I$, podprostor dimenzije $n - |I|$. Po Whitneyjevem izreku je torej

$$\chi_{\mathcal{K}_n}(t) = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} t^{n-|I|} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{n-k} = (t-1)^n.$$

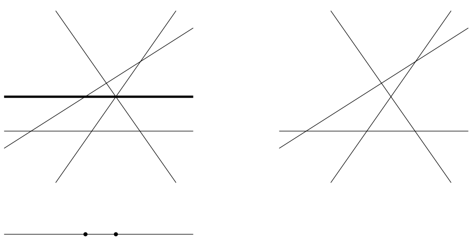
Tu smo uporabili dve dejstvi: prvič, da je število podmnožic moči k množice z n elementi enako binomskemu koeficientu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, in drugič, da velja binomski izrek $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Velja tudi $r(\mathcal{K}_n) = (-1)^n (-1-1)^n = 2^n$, kar smo že izračunali neposredno iz definicije. $\diamondsuit$

Rekurzivna zveza

Dana je razporeditev $\mathcal{A}$. Izberimo poljubno hiperravnino $H_0 \in \mathcal{A}$. Označimo z $\mathcal{A}'$ podrazporeditev $\mathcal{A} \setminus \{H_0\}$, se pravi razporeditev $\mathcal{A}$, ki ji odstranimo hiperravnino H_0. Označimo z $\mathcal{A}''$ razporeditev, ki jo dobimo, če vse hiperravnine v $\mathcal{A}'$, ki imajo neprazen presek s H_0, presekamo s H_0. Natančneje,

$$\mathcal{A}'' = \{x \cap H_0 \colon x \in \mathcal{A}, x \neq H_0, x \cap H_0 \neq \emptyset\}.$$

Primer 10. Na sliki 7, levo zgoraj, je prikazana razporeditev $\mathcal{A}$ premic v ravnini; premica H_0 je odebeljena. Desno zgoraj je razporeditev $\mathcal{A}'$, se pravi $\mathcal{A}$ brez H_0. Spodaj je prikazana razporeditev $\mathcal{A}''$ (v $\mathbb{R}$) presekov s H_0. $\diamondsuit$



Slika 7. Razporeditve $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}''$.

Opazimo, da sta $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}''$ „manjši“ razporeditvi kot $\mathcal{A}$; obe imata manjše število elementov, $\mathcal{A}''$ pa je poleg tega tudi razporeditev v manjši dimenziji.

Izrek 3. *Naj bodo $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ kot zgoraj. Potem velja*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t).$$

Izrek je dokaj enostavna posledica Whitneyjevega izreka (ima pa tudi druge neodvisne dokaze).

Primer 11. Naj bo $G = (V, E)$ graf (brez zank). *Barvanje grafa G s t barvami* je izbira ene od t barv za vsako vozlišče, tako da povezani vozlišči nista pobarvani z isto barvo. Se pravi, barvanje je preslikava $c\colon V \to \{1, \ldots, t\}$, za katero velja $ij \in E \Rightarrow c(i) \neq c(j)$. Definirajmo $P_G(t)$ kot število barvanj grafa G s t barvanji. Izkaže se, da je $P_G(t)$ polinom stopnje $|V|$, imenujemo ga *kromatični polinom grafa G*. Na primer, če je $G = K_n$ (poln graf na n vozliščih), imamo za prvo vozlišče na voljo t barv, za drugo samo še $t-1$ barv itd. Torej je $P_{K_n}(t) = t(t-1)\cdots(t-n+1)$.

Kromatični polinom ustreza preprosti rekurzivni zvezi. Izberimo poljubno povezavo $e = ij$ grafa G in označimo z G' graf G brez povezave e, z G'' pa graf, kjer vozlišči i in j identificiramo, se pravi, ju nadomestimo z novim vozliščem, ki je povezano z vsemi vozlišči grafa $G \setminus \{i, j\}$, ki so v grafu G povezana z i ali j. Izberimo poljubno barvanje c grafa G'. Če sta vozlišči i in j pobarvani z različnima barvama, je c tudi barvanje grafa G. Če pa sta pobarvani z istima barvama, potem ju identificiramo in dobimo barvanje c'' grafa G''. Dokazali smo

$$P_G(t) = P_{G'}(t) - P_{G''}(t).$$

Ta formula nas spominja na rekurzivno formulo za karakteristični polinom razporeditve. Dokažimo, da je za grafično razporeditev $\mathcal{A}_G$ karakteristični polinom kar kromatični polinom grafa G, torej da velja $\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = P_G(t)$. Trditev očitno velja za prazni graf na n vozliščih, saj sta oba polinoma enaka t^n. Predpostavimo, da trditev velja za vse grafe z manj kot m povezavami, in naj bo $|E(G)| = m$. Izberimo povezavo $e = ij$ grafa G in označimo hiperravnino $x_i = x_j$ s H_0. Če odstranimo H_0, očitno dobimo razporeditev, ki pripada grafu G'; se pravi, velja $(\mathcal{A}_G)' = \mathcal{A}_{G'}$. Po indukciji je $\chi_{(\mathcal{A}_G)'}(t) = P_{G'}(t)$. Če pa vsako hiperravnino presekamo s hiperravnino $x_i = x_j$, je učinek isti, kot če bi identificirali vozlišči i in j v grafu G; se pravi, velja $(\mathcal{A}_G)'' = \mathcal{A}_{G''}$. Po indukciji je $\chi_{(\mathcal{A}_G)''}(t) = P_{G''}(t)$. Torej je

$$\chi_{\mathcal{A}_G}(t) = \chi_{(\mathcal{A}_G)'}(t) - \chi_{(\mathcal{A}_G)''}(t) = P_{G'}(t) - P_{G''}(t) = P_G(t).$$

V posebnem je za kitkasto razporeditev

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = P_{K_n}(t) = t(t-1)\cdots(t-n+1). \qquad \diamondsuit$$

Metoda končnih obsegov

V tem podrazdelku bomo predstavili morda najbolj presenetljivo metodo za računanje karakterističnega polinoma, ki jo je v tej obliki zapisal Athanasiadis. Spomnimo se najprej, da obstaja končni obseg velikosti q natanko tedaj, ko je $q = p^k$ potenca praštevila. Vsi obsegi iste moči so izomorfni; označimo s $\mathbb{F}_q$ (do izomorfizma določeni) obseg moči q. Karakteristika obsega $\mathbb{F}_q$ je p: to pomeni, da v $\mathbb{F}_q$ velja $p = 0$. Za $q = p$ je $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$, obseg ostankov pri deljenju s p.

Predpostavimo, da so vse hiperravnine podane nad obsegom racionalnih števil. Če vse enačbe pomnožimo s skupnim večkratnikom imenovalcev, dobimo enačbe s celimi koeficienti. Če vse koeficiente vzamemo po praštevilskem modulu p, dobimo enačbo nad končnim obsegom $\mathbb{F}_q$ za $q = p^k$ za vsak k. Označimo dobljeno razporeditev nad obsegom $\mathbb{F}_q$ z $\mathcal{A}_q$.

Lahko se zgodi, da je nova razporeditev bistveno drugačna od prvotne. Na primer, če začnemo s premicama $x = 0$ in $x = 2y$, ima $L(\mathcal{A})$ štiri elemente: $\mathbb{R}^2$, obe premici in njun presek (izhodišče). Če pa vzamemo vse koeficiente modulo 2, dobimo samo eno premico $x = 0$, zato ima $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{2^k})$ samo dva elementa.

Ni pa težko dokazati, da velja $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_{p^k})$ (se pravi, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_{p^k}$ imata – do izomorfizma – isto delno urejeno množico presekov) za vse razen za končno mnogo praštevil p. Glavna prednost nove razporeditve je, da so vse hiperravnine zdaj *končne* množice (kot podmnožice končne množice $\mathbb{F}_q^n$), zato lahko računamo z njihovimi močmi. Naslednji izrek je tako dokaj preprost (uporabi samo neko osnovno lastnost Möbiusove funkcije, ki je v tem pregledu nismo omenili). Spomnimo, da H^C pomeni komplement množice H.

Izrek 4 (Athanasiadis, 1996). *Naj bo $\mathcal{A}$ razporeditev v $\mathbb{Q}^n$ in naj velja $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ za q, ki je potenca praštevila. Potem je*

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = q^n - \Big| \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \Big| = \Big| \bigcap_{H \in \mathcal{A}_q} H^C \Big|.$$

Primer 12. Oglejmo si, kako preprosto je z metodo končnih obsegov izračunati karakteristični polinom grafične razporeditve. Pišimo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$. Naj bo p dovolj velik, da je $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ za $q = p^k$. Če je H v $\mathcal{A}$ podana z $x_i = x_j$, je H^C v $\mathcal{A}_q$ množica točk $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n$, za katere velja $\alpha_i \neq \alpha_j$. Potem je

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(q) &= \Big| \bigcap_{H \in \mathcal{A}_q} H^C \Big| \\ &= \big| \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n \colon \alpha_i \neq \alpha_j \text{ za vsako povezavo } ij \in E(G)\} \big|.\end{aligned}$$

Zadnji izraz pa je po definiciji enak $P_G(q)$. Torej sta $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ in $P_G(t)$ polinoma, ki imata enako vrednost za neskončno mnogo vrednosti t, kar pomeni, da sta enaka. $\diamondsuit$

Primer 13. Oglejmo si Shijevo razporeditev $\mathcal{S}_n$, ki je podana z $x_i - x_j = 0, 1$ za $i < j$. Za dovolj veliko praštevilo p velja

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(p) = \left|\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n \colon i < j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \text{ in } \alpha_i \neq \alpha_j + 1\}\right|.$$

Denimo, da imamo tako n-terico $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Narišimo $0, 1, \dots, p-1$ kot točke na krožnici, ki naraščajo v smeri urinega kazalca. Označimo točko α_1 z 1, točko α_2 z 2 itd. Ker je $\alpha_i \neq \alpha_j$ za $i \neq j$, ima vsaka točka največ eno oznako. Ker iz $\alpha_i = \alpha_j + 1$ sledi $i > j$, so zaporedne (v smeri urinega kazalca) oznake naraščajoče. Glej sliko 8 za $p = 11$, $n = 6$ in $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = (6, 1, 2, 7, 9, 3)$. Naj bo B_1 množica zaporednih oznak, ki se začnejo z 1; v našem primeru je to $\{1, 4\}$. Preskočimo eno točko in vzemimo za B_2 (lahko prazno) množico zaporednih oznak, ki se začnejo v naslednji točki; nadaljujemo. V našem primeru dobimo $B_1 = \{1, 4\}, B_2 = \{5\}, B_3 = \emptyset, B_4 = \{2, 3, 6\}, B_5 = \emptyset$. Ker vsaki množici B_i pripada natanko ena neoznačena točka, smo dobili $p - n$ disjunktnih množic $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$. Konstrukcija se da tudi obrniti: za dane disjunktne množice $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$, in izbrani $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p$ naredimo naslednje. Označimo točko α_1 z 1, naslednje točke označimo s preostalimi elementi B_1. Preskočimo eno točko, označimo točke z elementi B_2; nadaljujemo. Za α_i potem vzamemo točko, katere oznaka je i.

Torej je $\chi_{\mathcal{S}_n}(p)$ enak številu izbir α_1 in disjunktnih množic $(B_1, B_2, \dots, B_{p-n})$, $1 \in B_1$, katerih unija je $\{1, 2, \dots, n\}$. Ker lahko α_1 izberemo na p načinov in ker imamo za $2, \dots, n$ na voljo $p - n$ množic B_i, kamor jih lahko damo, je možnosti $p(p-n)^{n-1}$. Torej je

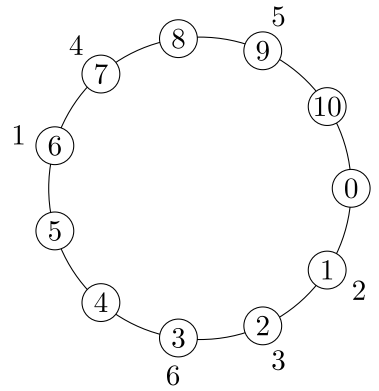
$$\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t-n)^{n-1}.$$

Iz tega takoj sledi, da je $r(\mathcal{S}_n) = (-1)^n \chi_{\mathcal{S}_n}(-1) = (n+1)^{n-1}$. $\diamondsuit$

Primer 14. Izračun za Catalanovo razporeditev $\mathcal{C}_n$, podano z $x_i - x_j = 0, 1, -1$ za $i < j$, je zelo podoben. Za dovolj velik p velja

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(p) = \left|\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n \colon i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j \text{ in } \alpha_i \neq \alpha_j \pm 1\}\right|.$$

Torej imamo enak preštevalni problem kot v prejšnjem primeru, le da zdaj dve sosednji točki ne smeta biti označeni. To pomeni, da bodo množice $B_1, \dots, B_{p-n}$, definirane kot zgoraj, imele največ en element. Za α_1 imamo



Slika 8. Računanje karakterističnega polinoma Shijeve razporeditve z metodo končnih obsegov.

spet p izbir, potem imamo $p-n-1$ izbir, v katero od množic $B_2, \dots, B_{p-n}$ damo element 2, $p-n-2$ izbir, kam damo element 3, itd. Dobimo torej

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(t) = t(t-n-1)(t-n-2)\cdots(t-2n+1)$$

in $r(\mathcal{C}_n) = n!C_n$. $\diamondsuit$

LITERATURA

[1] M. Juvan, *Kombinatorne lastnosti razporeditev*, magistrsko delo, 105 strani, Ljubljana, 1993

[2] E. Weisstein, *Möbius function*, MathWorld, dostopno na http://mathworld.wolfram.com/MoebiusFunction.html

[3] R. Stanley, *An introduction to hyperplane arrangements*, Geometric combinatorics, 389–496, IAS/Park City Math. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN 64. OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE – VABILO K SODELOVANJU

Spoštovani člani DMFA Slovenije, učitelji, raziskovalci in vsi ljubitelji matematike, fizike in astronomije. Vljudno vas vabimo k sodelovanju na našem vsakoletnem srečanju, ki bo tokrat potekalo **v Rimskih Toplicah 19. in 20. oktobra 2012**. Tam bomo predstavili sedanjo dejavnost društva, k pripravi predavanj povabili nekaj uglednih slovenskih matematikov in fizikov, prisluhnili različnim strokovnim prispevkom naših članov in pripravili