PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 156–158

Vilko Domajnko:

ALI LAHKO MANJŠINA ZMAGA NA VOLITVAH?

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

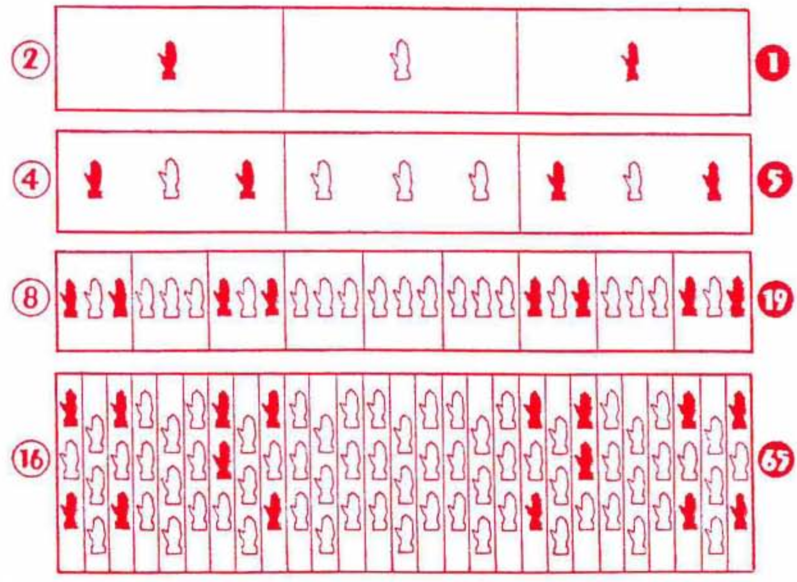
Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1036-Domajnko-volitve.pdf

ALI LAHKO MANJŠINA ZMAGA NA VOLITVAH?

"Ah, tak dajte, no! Popoln nesmisel," bo najbrž pomislil bralec, ki se vsaj malo spozna na zakone aritmetike. Tisti, ki je poleg eksaktnih znanosti vešč še umetnosti politike, pa bi bil morebiti že nekoliko opreznejši: *"Hm, nikdar se ne ve. Morda pa le ..."*

Pa si oglejmo zanimiv model volilnega postopka, v katerem uspe manjšina zanesljivo premagati večino. Vzemimo, da na volitvah v začetku sodeluje $3^k (k \in \mathbb{N})$ volilcev, ki so porazdeljeni v trojice (predstavljamo si lahko, da takšno porazdelitev narekuje, recimo, regijska razdelitev volilcev v deželi). Volitve naj bodo organizirane v k zaporednih krogih in pri tem se naj v vsakem krogu volitev prebije naprej predstavnik tiste skupine v vsaki izmed trojic, ki ima v tej trojici večinski interes (glej ilustracijo).

Konkretneje – vzemimo 3^4 začetnih volilcev, med katerimi modri na začetku predstavljajo manjšino v primerjavi z belimi. Razmerje moči naj bo 16:65 v korist belih, razporeditev enih in drugih pa takšna, kot jo vidimo na sliki (beremo jo od spodaj navzgor). Vzemimo, da predstavniki modrih volijo zmeraj le modre in predstavniki belih zmeraj le bele. Zdi se, da je v tem primeru že na prvi pogled prav vse jasno. Beli pač premočno zmagajo in tudi



v naslednji krog volitev gredo kot izrazita večina. Vendar pa modrim njihova premetena razporeditev po trojicah omogoča zanesljive in obenem kar najbolj varčne zmage povsod tam, kjer se sploh pojavijo. To pa ni niti najmanj zanemarljivo! Njihov delež se je namreč iz približno 20% v prvem krogu že povzpel na skorajda 30% v drugem krogu (8 jih je med 27-imi). Kljub temu pa se še zmeraj zdi, da belim zaradi njihove očitne številčne premoči modri ne morejo do živega.

Toda uspeh modrih v volitvah je iz kroga v krog vse bolj in bolj oprazen. In tako v poslednjem krogu volitev modri, ob najbrž močno zaprepaščenih pogledih belih, celo odnesejo zmago!

In kaj je modrim, tem spočetka tako očitnim outsiderjem, omogočilo njihovo presenetljivo zmago? Dvoje: večkrožni volilni postopek (v nadaljnem bomo rekli raje večstopenjske volitve) in hkrati še njihova modra strategija oziroma optimalna razporeditev v trojicah.

Nadalje je najbrž zanimivo tudi vprašanje - kolikšno je najmanjše število predstavnikov manjšine, ki v k-stopenjskem volilnem postopku še lahko računajo na zmago nad začetno večino? Če so volitve organizirane tako, kakor kaže naš model (po trojicah), potem nam odgovor na to vprašanje ponudi naslednja ugotovitev:

Vseh volilcev v volitvah naj bo $3^k (k \in \mathbb{N})$. *Če manjšina med njimi šteje vsaj* 2^k *volilcev, ima še zmeraj možnosti za zmago.*

Izrek lahko dokažemo s popolno indukcijo.

Pri $k = 1$ je veljavnost trditve povsem očitna (saj v tem primeru manjšina sploh ni to, za kar jo označuje njeno ime).

Predpostavimo, da izrek velja pri poljubno izbranem naravnem številu k.

Poglejmo naposled še primer, ko je vseh volilcev 3^{k+1}, predstavnikov manjšine med njimi pa vsaj 2^{k+1}. Vseh volilcev je torej trikrat po 3^k, predstavnikov manjšine pa je vsaj dvakrat po 2^k. "Manjšinke" zatem razporedimo tako, da jih bo med prvimi 3^k volilci 2^k, med drugimi 3^k volilci spet 2^k, med poslednjimi 3^k volilci pa naj bodo vsi preostali "manjšinski".

3^k volilcev (med njimi je 2^k "manjšinskih")	3^k volilcev (med njimi je 2^k "manjšinskih")	3^k volilcev (med njimi je morebiti tudi kakšen "manjšinski")

Po indukcijski predpostavki lahko v prvih dveh skupinah s po 3^k volilci "manjšinskih" zmagajo. Kar pa že pomeni, da lahko zmagajo tudi med vsemi

3^{k+1} volilci, saj bi imeli v primeru, ko bi jim v prvih dveh skupinah šlo vse kot po maslu, v poslednjem krogu volitev med tremi kar dva svoja.

Izrek torej velja pri poljubnem naravnem številu k.

Zaključimo razmislek ob tem nenavadnem volitvenem modelu z naslednjim problemom:

Volitve naj bodo organizirane tako, da so volilci razdeljeni v deseterice in ne v trojice, kakor smo brali doslej. Sicer pa naj bolitve potekajo po enakem principu - iz vsake deseterice se naj v naslednji krog prebije predstavnik večine v tej deseterici.

Kolikšno je potem najmanjše število predstavnikov manjšine, ki imajo ob izbiri optimalne strategije svojega volilnega nastopa še možnosti za **zanesljivo** zmago, če je na začetku vseh volilcev natanko milijon?

Vilko Domajnko

Literatura: *Nauka i žizna*, 1989, *No* 9