UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO
ODSEK ZA MATEMATIKO

Gabrijel Tomšič

HOMOGENI OPERATORJI IN HOMOGENE SPEKTRALNE MERE

DISERTACIJA

LJUBLJANA, november 1971

Izdelavo tega dela mi je omogočil moj učitelj profesor dr.Ivan Vidav. Iskreno se mu zahvaljujem za idejo in dragoceno vodstvo. Rad bi se še zahvalil docentu dr.Antonu Suhadolcu, ki je bil vedno pripravljen delo spremljati in mi svetovati.

Gabrijel Tomšič

VSEBINA

0. UVOD

Leta 1964 je prof.I.Vidav na predavanju v okviru podiplomskega seminarja podal definicijo homogenosti za operatorje in spektralne mere, pokazal eksistenco in nekaj lastnosti homogenih operatorjev in homogenih spektralnih mer, kar bomo v tem delu tudi navedli. Glavni namen tega dela je dobiti kakšno karakterizacijo za homogene operatorje in homogene spektralne mere.

V razdelku 1 bomo navedli definicijo homogenosti in formulacijo problema in to najprej za sebi adjungirane operatorje v Hilbertovem prostoru. Seveda lahko razširimo definicijo homogenosti tudi na normalne in unitarne operatorje. Težišče dela pa je na sebi adjungiranih operatorjih, za katere je uspelo dobiti nekaj karakterizacij; homogene sebi adjungirane operatorje obravnavamo v razdelku 4.

Za homogene unitarne operatorje se da po analogni poti dobiti skoraj iste rezultate kakor za homogene sebi adjungirane operatorje in zato homogene unitarne operatorje le na kratko obravnavamo v razdelku 5. Nekaj lastnosti homogenih normalnih operatorjev pokažemo v razdelku 6, vendar take karakterizacije za homogene normalne operatorje, kakor jo dobimo za sebi adjungirane operatorje, ni uspelo dobiti, ker za neomejene normalne operatorje ni izdelana teorija o urejeni spektralni reprezentaciji.

Pojem homogenosti se da posplošiti še na spektralne mere in o homogenih spektralnih merah govorimo v razdelku 7.

V delu uporabljamo sredstva funkcionalne analize in teorije mere, zato navajamo v razdelku 2 nekaj pojmov in izrekov iz teorije mere, realne in funkcionalne analize in teorije spektralne in urejene reprezentacije glede na sebi adjungirane operatorje.

Za obdelavo homogenih spektralnih mer tudi potrebujemo teorijo o spektralni in urejeni reprezentaciji za spektralne mere, ki še ni bila izdelana, temelji pa na taki teoriji za omejene normalne operatorje. Navajamo jo v razdelku 3.

1. FORMULACIJA PROBLEMA

Namen tega dela je, da bi dobili karakterizacijo za homogene operatorje in kasneje še za homogene spektralne mere. Navedimo najprej definicijo homogenosti za operatorje in začnimo s sebi adjungiranimi operatorji iz separabilnega Hilbertovega prostora.

<u>*DEFINICIJA*</u> : *Sebi adjungiran operator A, ki bodi definiran v nekem separabilnem Hilbertovem prostoru, imenujmo homogen, če je ekvivalenten razliki $A - \lambda I$ pri poljubnem realnem številu λ.*

Če je torej operator A homogen, po definiciji pomeni, da eksistira za vsak $\lambda \varepsilon R$ tak unitaren operator $U(\lambda)$, da je

$$A - \lambda I = U(\lambda) A U^*(\lambda). \tag{1}$$

Poglejmo kakšne lastnosti ima tako definiran homogen operator. Znano je, da imajo ekvivalentni operatorji isti spekter. Operatorja A in $A - \lambda I$ imata za λ vzporedno premaknjen spekter. Če je točka λ_o v spektru operatorja A, tedaj ja za vsak $\lambda \varepsilon R$ tudi točka $\lambda_o + \lambda$ v spektru operatorja A. Spekter tako obsega vso realno premico R in homogen operator je očitno neomejen. Zaradi neomejenosti operatorjev $A - \lambda I$ in A moramo enačbo (1) razumeti tako, da imata leva in desna stran isto definicijsko območje. Tako je za neki x, ki je v definicijskem območju operatorja A, $x \varepsilon D(A)$, tudi $U^*(\lambda)x$ iz definicijskega območja operatorja A.

Nadaljna lastnost, ki sledi iz definicije homogenosti je, da homogen operator v separabilnem Hilbertovem prostoru nima lastnih vrednosti. Če bi bila na primer λ_o lastna vrednost homogenega operatorja A z lastnim vektorjem e, $\|e\| = 1$, bi bila tudi $\lambda_o + \lambda$ za vsak $\lambda \varepsilon R$ lastna vrednost, ki ji pripada lastni vektor $U(\lambda)e$. Zaznamujmo $U(\lambda)e = f$ in ker velja $Ae = \lambda_o e$, imamo

$$(A - \lambda I)(U(\lambda)e) = U(\lambda)AU^*(\lambda)U(\lambda)e =$$
$$= U(\lambda)Ae = U(\lambda)\lambda_o e = \lambda_o(U(\lambda)e) = \lambda_o f,$$

odtod je $(A - \lambda I)f = \lambda_o f$ oziroma $Af = (\lambda_o+\lambda)f$, torej je $\lambda_o+\lambda$ lastna vrednost operatorja A in to za vsak $\lambda\varepsilon R$. Tako bi imel homogen operator neštevno lastnih vrednosti. V separabilnem Hilbertovem prostoru sebi adjungiran ali normalen operator ne more imeti neštevno lastnih vrednosti. Od tod sledi še ena pomembna lastnost: homogen sebi adjungiran operator ima le zvezni spekter, vsa realna premica R leži v zveznem spektru.

Ali kak homogen operator sploh eksistira? Pokažimo primer homogenega operatorja. Naj bo $L_2(-\infty,\infty)$ prostor vseh funkcij $x(t)$, ki so na intervalu $(-\infty,\infty)$ merljive po Lebsgu, kvadrat njihove absolutne vrednosti pa je integrabilen. Potem je operator množenja z neodvisno spremenljivko t

$$Ax(t) = tx(t)$$

homogen operator. Hitro se prepričamo, da za pripadajoče unitarne operatorje $U(\lambda)$ lahko vzamemo na primer

$$U(\lambda)x(t) = x(t-\lambda).$$

Operator $U^*(\lambda)$ deluje takole

$$U^*(\lambda)x(t) = x(t+\lambda).$$

Tako definiran operator U ohranja skalarni produkt, poglejmo

$$(Uf,Ug) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\lambda)\overline{g(t-\lambda)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\overline{g(t')}\,dt' = (f,g).$$

Pokažimo, da operator množenja izpolnjuje pogoje homogenosti.

$$(U(\lambda)AU^*(\lambda))x(t) = (U(\lambda)Ax(t+\lambda) = U(\lambda)tx(t+\lambda) =$$
$$= (t-\lambda)x(t) = (A - \lambda I)x(t).$$

Tako smo ugotovili, da je v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$ operator množenja z neodvisno spremenljivko homogen operator v smislu postavljene definicije in homogeni operatorji eksistirajo.

Sedaj, ko smo vpeljali pojem homogenega operatorja in ko smo hoteli pokazati eksistenco takega operatorja, smo ugotovili, da je na primer homogen operator kar operator množenja v prostoru L_2. Postavimo osrednje vprašanje: *ali je morda vsak homogen sebi adjungiran operator ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru L_2?*

Odøgovor na postavljeno vprašanje bomo dali najprej za sebi adjungirane operatorje. Posrečilo se je pokazati, da je vsak homogen sebi adjungiran operator v separabilnem Hilbertovem prostoru ekvivalenten operatorju množenja v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.

Na zgornje vprašanje bomo skušali odgovoriti tudi za homogene unitarne in homogene normalne operatorje.

Pojavi se še vprašanje, kdaj je v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$ homogen operator množenja z zvezno funkcijo, oziroma množenja s poljubnim homeomorfizmom na številski premici?

Ostalo je odprto vprašanje,ali eksistirajo še kakšni drugi homogeni operatorji, ki bi bili različni od operatorja množenja.

Pojem homogenosti se da razširiti na spektralne mere in za homogene spektralne mere postavimo podobno vprašanje, kot za homogene operatorje: *ali je vsaka homogena spektralna mera $E(e)$ v separabilnem Hilbertovem prostoru ekvivalentna operatorju množenja s karakteristično funkcijo množice e v prostoru $L_2(m,R^k)$, to je prostoru vseh po Lebesgu merljivih s kvadratom integrabilnih funkcij v prostoru R^k?*

2. SREDSTVA IZ FUNKCIONALNE ANALIZE IN TEORIJE MERE

V tem delu uporabljamo sredstva funkcionalne analize in teorije mere, zato navedimo najbolj pogoste pojme iz teorije mere in nekaj izrekov realne in funkcionalne analize ([14], [7], [3]).

Naj bo X poljubna množica. Družino podmnožic $\mathfrak{M} \subset P(X)$ naj sestavlja σ-algebro v X. Množice $M \varepsilon \mathfrak{M}$ imenujemo merljive množice in X imenujemo merljivi prostor, če v X eksistira kaka σ-algebra $\mathfrak{M}$.

Naj bo X topološki prostor. Najmanjšo σ-algebro v X, ki vsebuje vse odprte množice, zaznamujmo z $\mathcal{B}$. Družino množic iz $\mathcal{B}$ imenujemo Borelove množice iz X. Iz definicije σ-algebre sledi, da so tudi zaprte množice Borelove množice in tudi vse števne unije zaprtih množic in števni preseki odprtih množic. Torej je $\mathcal{B}$ neka σ-algebra v X in imamo X za merljivi prostor, kjer so merljive množice Borelove množice.

Pozitivna mera μ je funkcija, definirana na σ-algebri $\mathfrak{M}$, z zalogo vrednosti na intervalu $[0,\infty]$ in števno aditivna. Mero μ , ki je definirana na σ-algebri vseh Borelovih množic v lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X, imenujemo Borelovo mero.

Merljivi prostor, ki ima pozitivno mero μ definirano na σ-algebri $\mathfrak{M}$ merljivih množic označimo kot trojico $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Pozitivno Borelovo mero μ , definirano na σ-algebri $\mathfrak{M} \supset \mathcal{B}$, ki ima lastnosti

a) $\mu(E) = \inf \{\mu(V) : E \subset V$, V odprta množica za vsak $E \varepsilon \mathfrak{M}\}$

in

b) $\mu(E) = \sup \{\mu(K) : K \subset E$, K kompaktna množica, za vsako odprto množico E in $\mu(E) < \infty \}$,

imenujemo regularno mero.

Pri ugotavljanju regularnosti mer bomo uporabljali ta izrek ([14],Th.2.18):

Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor, v katerem je vsaka odprta množica σ-kompaktna. Naj bo μ pozitivna Borelova mera na X in taka, da je $\mu(K)<\infty$ za vsako kompaktno množico K. Potem je μ regularna mera.

Množica E v danem merskem prostoru z mero μ ima σ-končno mero, če je E števna unija množic E_i, da je $\mu(E_i)<\infty$ za vsak i.

Naj bo μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ in λ poljubna pozitivna mera na $\mathfrak{M}$. Pravimo, da je mera λ absolutno zvezna glede na mero μ, kar zapišemo takole

$$\lambda \ll \mu,$$

če je $\lambda(E) = 0$ za vsako množico $E \in \mathfrak{M}$, za katero je $\mu(E)=0$. Če za meri μ in λ velja

$$\mu \ll \lambda \quad \text{in} \quad \lambda \ll \mu,$$

potem pravimo, da sta meri μ in λ ekvivalentni, to je absolutno zvezni druga glede na drugo, kar bomo zaznamovali

$$\mu \cong \lambda .$$

Pravimo, da je mera μ skoncentrirana na množici A, če eksistira taka množica $A \in \mathfrak{M}$, da je $\mu(E) = \mu(A \cap E)$ za vsako množico $E \in \mathfrak{M}$.

Recimo, da imamo meri μ in λ na $\mathfrak{M}$ in da eksistira par takih disjunktnih množic A in B, da je μ skoncentrirana na A, mera λ pa na B; potem pravimo, da sta meri μ in λ medsebojno singularni, kar zapišemo $\mu \perp \lambda$.

Omenimo še Lebesgovo dekompozicijo mere. Naj bosta μ in λ pozitivni in σ-končni meri na σ-algebri $\mathfrak{M}$ v X. Potem eksistira enolično določen par mer λ_a in λ_s na $\mathfrak{M}$, da je

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s\ ,\quad \lambda_a \ll \mu \quad \text{in } \lambda_s \perp \mu .$$

Meri λ_a in λ_s se imenujeta absolutno zvezni del in singularni del mere λ; λ_a in λ_s sta tudi pozitivni in medsebojno singularni meri.

Izrek, ki uporablja absolutno zveznost in ki ga bomo tudi potrebovali, je Radon-Nikodymov izrek, ki pravi:

Če sta μ in λ pozitivni omejeni meri, $\mathcal{M}$ σ-algebra v X in $\lambda \ll \mu$, potem eksistira funkcija $g \in L_1(\mu)$, da je

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\mu$$

za vsak $E \in \mathcal{M}$.

V primeru, ko sta meri μ in λ pozitivni in σ-končni, zgornji izrek tudi velja, le da eksistira funkcija g, ki je lokalno v prostoru L_1, $g \in L_{1loc}$, to pomeni, da eksistira tako zaporedje množic E_n z lastnostjo $E = \bigcup E_n$, kjer je $\mu(E_n) < \infty$ in $\lambda(E_n) < \infty$ za $n = 1,2,\ldots$, da je

$$\int_{E_n} g \, d\mu < \infty$$

za vsak n.

Ob koncu tega pregleda definicij iz teorije mere omenimo še odvod mere. Naj bo Ω družina odprtih množic v k-dimenzionalnem evklidskem prostoru R^k z lastnostmi:

a) eksistira konstanta $\beta < \infty$, da je vsaka množica $E \in \Omega$ vsebovana v neki odprti krogli B, pri čemer velja

$$m(B) \leqq \beta\, m(E) \quad \text{oziroma} \quad \frac{m(B)}{m(E)} \leqq \beta ,$$

kjer je m Lebesgova mera, in

b) vsakemu $x \in R^k$ in $\delta > 0$ eksistira $E \in \Omega$, da je $x \in E$ in premer množice E je manjši od δ :

$$\operatorname{diam} E = \sup\{\,|x-y| \;:\; x\in E,\ y\in E\,\} < \delta .$$

Tako družino množic imenujemo Vitalijevo družino.

Naj bo Ω poljubna Vitalijeva družina, $x\in R^k$. Če je μ pozitivna Borelova mera na R^k, potem lahko definiramo zgornji in spodnji odvod mere μ za vsako točko $x\in R^k$. Za vsak $r > 0$ postavimo

$$\bar{\Delta}_r(x) = \sup\left\{ \frac{\mu(E)}{m(E)} \;:\; x\in E,\ E\in\Omega\ ,\ \operatorname{diam} E < r \right\} \qquad (*)$$

in definirajmo zgornji odvod mere μ za x takole:

$$(\bar{D}\mu)(x) = \lim_{r\to 0} \bar{\Delta}_r(x)$$

Če v izrazu (*) zamenjamo supremum z infimum, dobimo $\underline{\Delta}_r(x)$ in definiramo spodnji odvod mere

$$(\underline{D}\mu)(x) = \lim_{r\to 0} \underline{\Delta}_r(x) .$$

Torej rečemo, da je mera μ odvedljiva in ima odvod $(D\mu)(x)$ pri nekem x tedaj in le tedaj, če sta izraza $(\bar{D}\mu)(x)$ in $(\underline{D}\mu)(x)$ enaka in končna, to je

$$(\underline{D}\mu)(x) = (\bar{D}\mu)(x) = (D\mu)(x) .$$

Zvezo med Radon-Nikodymovim odvodom in odvodom v pravkar definiranem smislu podaja tale izrek ([14],Th.8.6):

Naj bo μ kompleksna Borelova mera na R^k, Ω poljubna Vitalijeva družina, potem velja:

a) mera μ je odvedljiva skoraj za vsak $x\in R^k$;

b) naj bo $\mu = \mu_s + \mu_a$, tedaj je $(D\mu_s)(x) = 0$ skoraj povsod in Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\mu}{dm}(x)$ je enak $(D\mu)(x)$ skoraj povsod,

$$\frac{d\mu_a}{dm}(x) = (D\mu)(x) \text{ skoraj povsod glede na } m.$$

Iz izreka opazimo, da so trditve v bistvu neodvisne od izbire Vitalijeve družine Ω .

Poleg do sedaj navedenih pojmov iz teorije mere bomo potrebovali pri nekaterih dokazovanjih še izreke, ki govore o spremembi integracijske spremenljivke ([14],[7]). Preden navedemo tak izrek, podajmo definicijo N-funkcije:

Naj ima funkcija f domeno $[a,b] \subset R$ in zalogo vrednosti v $[\alpha,\beta] \subset R$. Če za vse Borelove podmnožice $E \subset [a,b]$ $m(E)=0$ implicira $m(f(E)) = 0$, imenujemo funkcijo f N-funkcijo.

<u>Izrek 1</u> ([7],20.4): Naj bo $[a,b]$ interval na realni premici R. Funkcija f bodi nekonstantna, realna, zvezna in N-funkcija na intervalu $[a,b]$. Interval $[\alpha,\beta]$ naj preslika funkcija f na interval $[a,b]$. Potem eksistira nenegativna, realna po Borelu merljiva funkcija w na intervalu $[a,b]$ tako, da je za vse $g \varepsilon L_1([\alpha,\beta],M_m,m)$ tudi $(g.f).w \varepsilon L_1([a,b],M_m,m)$ in

$$\int_\alpha^\beta g(y)dy = \int_a^b g.f(x)w(x)dx$$

Tu smo z M_m zaznamovali po Lebesgu merljive množice in m je Lebesgova mera.

V primeru, ko je funkcija f monotona, zvezna, dobimo klasično obliko izreka o integraciji s substitucijo.

<u>Izrek 2</u> ([7],20.5): Naj bo f monotona, zvezna, N-funkcija z domeno na $[a,b]$ in zalogo vrednosti na $[\alpha,\beta]$. Potem je f absolutno zvezna funkcija in funkcija w iz izreka 1 je kar $|f'|$ skoraj povsod glede na mero m na intervalu $[a,b]$. Tako je za $g \varepsilon L_1([\alpha,\beta])$ tudi $(g.f)|f'| \varepsilon L_1([a,b])$ in

$$\int_\alpha^\beta g(y)dy = \int_a^b g.f(x)|f'(x)|dx.$$

Pri dokazovanju, da je homogen sebi adjungiran operator ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$, potrebujemo teorijo o spektralni reprezentaciji neomejenih sebi adjungiranih operatorjev. Ta teorija je podrobno izdelana za omejene normalne operatorje ([3], pogl.X). Ker je rezolventa sebi adjungiranega operatorja normalen omejen operator, lahko teorijo o spektralni reprezentaciji razširimo na neomejene sebi adjungirane operatorje ([3], pogl.XII).

Pripravimo najprej definicijo spektralne reprezentacije. Razčlenitev enote sebi adjungiranega operatorja A zaznamujmo z E_λ. Vzemimo vektor $a \in \mathcal{H}$, z $\mathcal{H}_a$ označimo podprostor iz $\mathcal{H}$, ki sestoji iz vseh vektorjev oblike $f(A)a$, kjer f preteče vse Borelovo merljive funkcije, za katere je $a \in D(f(A))$. Funkcija μ_a

$$\mu_a(e) = (E(e)a,a), \quad e \in \mathcal{B}$$

predstavlja regularno mero, definirano na Borelovih množicah družine $\mathcal{B}$ v ravnini.

Prostor $\mathcal{H}_a$ je Hilbertov prostor in je glede na preslikavo

$$f(A)a \longleftrightarrow f$$

ekvivalenten prostoru $L_2(\mu_a)$, ([3], pgl.XII,Lema 1).

Dalje velja tole ([3], XII,Lema 2): eksistira taka množica $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$, da je

$$\mathcal{H} \doteq \sum_{a \in \mathcal{A}} \oplus \mathcal{H}_a$$

Torej, če vzamemo $x \in \mathcal{H}$, potem x_a predstavlja komponento od x v podprostoru $\mathcal{H}_a$,

$$x = \sum_{a \in \mathcal{A}} x_a$$

Omeniti moramo še, da je za vsako Borelovo funkcijo f

$$D(f(A)) = \{ x : x_a \varepsilon D(f(A)),\ a \varepsilon \mathcal{A},\ \sum_a |f(A)x_a|^2 < \infty \}$$

in $(f(A)x)_a = f(A)x_a$ za vsak x iz $D(f(A))$ in vsak $a \varepsilon \mathcal{A}$, ([3], XII,Lema 3).

Sedaj lahko podamo definicijo spektralne reprezentacije:

<u>Definicija 3</u>: Naj bo A neomejen sebi adjungiran operator v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ in $\{\mu_\alpha\}$družina končnih pozitivnih mer, ki so definirane na Borelovih množicah ravnine in so enake nič izven spektra operatorja A. Naj bo U izomorfizem prostora $\mathcal{H}$ na ves prostor $\sum_\alpha \oplus L_2(\mu_\alpha)$. Izomorfizem U naj še ohranja skalarni produkt. Operator $V = UAU^{-1}$ je sebi adjungiran v $\sum_\alpha \oplus L_2(\mu_\alpha)$. Preslikavo U imenujemo spektralno reprezentacijo prostora $\mathcal{H}$ na $\sum_\alpha \oplus L_2(\mu_\alpha)$ glede na operator A, če sta izpolnjena pogoja:

a) za vsako Borelovo funkcijo f, ki je definirana na spektru $\sigma(A)$ operatorja A, je

$$D(f(V)) = \{x : x \varepsilon \sum_\alpha \oplus L_2(\mu_\alpha),\ \sum_\alpha \int_{\sigma(A)} |f(t)x_\alpha(t)|^2 \mu_\alpha dt < \infty \},$$

$\alpha \varepsilon \mathcal{A}$,

in

b) $(f(V)x_\alpha)(t) = f(t)x_\alpha(t)$ za $x \varepsilon D(f(V))$ in skoraj vse t glede na mero μ_α.

<u>Izrek 4</u> ([3], XII,Th.3.5): Vsak Hilbertov prostor ima spektralno reprezentacijo glede na poljuben sebi adjungiran operator.

Drugi pomemben pojem iz teorije spektralne reprezentacije je pojem urejene reprezentacije.

<u>Definicija 5</u>: Naj bo μ pozitivna mera, definirana na družini Borelovih množic $\mathcal{B}$ kompleksne ravnine in $\{e_k\}$ padajoče zaporedje Borelovih množic, pri čemer naj bo prvi element e_1

vsa ravnina. Če je za poljubno Borelovo množico $e \subset e_1$,

$$\mu_k(e) = \mu(e \cap e_k),\ e \in \mathcal{B}\ ,\ k = 1,2,\dots,$$

potem imenujemo spektralno reprezentacijo prostora $\mathcal{H}$ na $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus L_2(\mu_k)$ glede na sebi adjungiran operator A, urejeno reprezentacijo. Pri tem se mera μ imenuje mera urejene reprezentacije. Množice e_k bomo imenovali množice večkratnosti urejene reprezentacije. Če je $\mu(e_k) > 0$ in $\mu(e_{k+1}) = 0$, pravimo, da ima urejena reprezentacija večkratnost k. Kadar je $\mu(e_k) > 0$ za vse k, potem ima urejena reprezentacija neskončno večkratnost.

Povejmo še, kdaj sta dve urejeni reprezentaciji ekvivalentni.

Definicija 6: Dve urejeni reprezentaciji U in U′ prostora $\mathcal{H}$ glede na sebi adjungirana operatorja A in A′ in z merama μ in μ' in množicami večkratnosti $\{e_n\}$ in $\{e_n'\}$, sta ekvivalentni, če je

$$\mu \cong \mu' \quad \text{in} \quad \mu(e_k \Delta e_k') = \mu'(e_k \Delta e_k') = 0 \text{ za } k = 1,2,\dots$$

Končajmo navedeni del teorije spektralne reprezentacije s pomembnim izrekom ([3], XII, Th.3.16).

Izrek 7: Separabilen Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ ima urejeno reprezentacijo U glede na sebi adjungiran operator A v $\mathcal{H}$. Dva sebi adjungirana operatorja iz prostora $\mathcal{H}$ sta unitarno ekvivalentna tedaj in le tedaj, kadar sta ekvivalentni urejeni reprezentaciji prostora $\mathcal{H}$ glede na ta dva operatorja.

3. UREJENA REPREZENTACIJA ZA SPEKTRALNE MERE

Pri obravnavanju homogenih spektralnih mer bomo potrebovali teorijo o spektralni in urejeni reprezentaciji glede na spektralne mere. Ta teorija za spektralne mere v literaturi ni izdelana, zato jo na tem mestu pripravimo in to kar za primer, ki ga bomo obravnavali, to je za k-dimenzionalen evklidski prostor, σ-algebro v tem prostoru pa naj sestavlja družina Borelovih množic.

Pri konstrukciji te teorije se opiramo na teorijo o spektralni in urejeni reprezentaciji Hilbertovega prostora glede na omejene normalne operatorje ([3], pogl.X,5).

Najprej podajmo splošno definicijo spektralne mere.

<u>*Definicija 8:*</u> *Naj bo X neprazna množica, $\mathcal{M}$ pa neka σ-algebra podmnožic iz X. $\mathcal{H}$ naj bo Hilbertov prostor in P družina vseh sebi adjungiranih projektorjev v prostoru $\mathcal{H}$. Homomorfno preslikavo*

$$E : \mathcal{M} \longrightarrow P$$

imenujemo spektralno mero, če ima lastnosti:

(a) prazni množici pripada ničelni operator, $E(0) = \emptyset$ in vsemu prostoru identični operator $E(X) = I$;

(b) $E(e \cap f) = E(e).E(f)$ za $e,f \in \mathcal{M}$;

(c) $E(e \cup f) = E(e) + E(f)$, če je $e \cap f = \emptyset$ in $e,f \in \mathcal{M}$;

(d) E je zvezna preslikava, in sicer v tem smislu, da za vsako naraščajoče zaporedje množic $e_n \uparrow e$, $e_n \in \mathcal{M}$, velja, da zaporedje projektorjev $E(e_n)$ konvergira krepko proti $E(e)$.

Ugotovimo nekaj posledic, ki jih daje ta definicija. Iz lastnosti (b), ki je lastnost multiplikativnosti, sledi še, da je spketralna mera komutativna, to pomeni, da je $\{E(e), e\varepsilon \mathcal{M}\}$ komutativna množica operatorjev. Projektorja E(e) in E(f) sta ortogonalna, če sta množici e in f disjunktni.

V nadaljnem obravnavamo primer, ko je $X = R^k$, to je k-dimenzionalen evklidski prostor in $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, družina Borevih množic v prostoru R^k.

Recimo, da imamo dano spektralno mero E(e) za vsak $e\varepsilon \mathcal{B}$, ki ima zalogo vrednosti v P, prostoru vseh sebi adjungiranih projektorjev, ki delujejo v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$.

Spektralni meri lahko prireдimo normalen operator. Poglejmo to povezavo! Z M zaznamujemo razred omejenih Borelovo merljivih funkcij f na prostoru R^k. K vsaki funkciji $f\varepsilon M$ eksistira integral ([1], sec.5;[6],&37), tako imenovani spektralni integral

$$T(f) = \int_{R^k} f\, dE .$$

Zgornji vektorski integral eksistira v smislu krepke topologije. T(f) je o~~m~~mejen normalen operator, ki je seveda odvisen od izbire funkcije f. Tako imamo korespondenco med integralom in funkcijami,

$$f \longmapsto \int f\, dE.$$

Ker je E spektralna mera,velja

$$\int (f+g)\,dE = \int f\, dE + \int g\, dE, \quad \int (cf)\,dE = c\int f\, dE \text{ in}$$

$$\int \bar{f}\, dE = \left(\int f\, dE\right)^*, \int fg\, dE = \left(\int f dE\right)\left(\int g dE\right) \text{ za vse}$$

$f,g \varepsilon M$ in

$$\left(\int f dE\right)^*\left(\int f\, dE\right) = \int |f|^2\, dE, \text{ za } f\varepsilon M.$$

Vzemimo neki $x\varepsilon\mathcal{H}$. K vektorju x priredimo y na tale način

$$y = (\int_{R^k} f\,dE)x = \int_{R^k} f\,dEx = T(f)x,$$

za vsak $f\varepsilon M$.

Vsi vektorji y, ki jih tako dobimo, sestavljajo linearno množico X_o:

$$X_o = \{y\varepsilon\mathcal{H},\ y = T(f)x,\ f\varepsilon M\}.$$

Linearna množica X_o je predhilbertov prostor, ki je invarianten glede na dano spektralno mero E. Pokazati moramo torej, da je za vsak $y\varepsilon X_o$ tudi $E(e)y\varepsilon X_o$. V ta namen izračunajmo $E(e)y = E(e)T(f)x$; iz prejšnjih rezultatov sledi, da je

$$\int_{R^k} dE = E(R^k) = I,$$

oziroma

$$\int_{R^k} \chi_e dE = \int_e dE = E(e).$$

Tako dobimo

$$E(e)T(f)x = (\int_{R^k} \chi_e dE)(\int_{R^k} f\,dE)x$$

in po lastnostih, ki smo jih prej navedli, imamo dalje

$$E(e)T(f)x = \int_{R^k} (\chi_e f)dEx = T(\chi_e f)x.$$

Ker je funkcija $\chi_e f\varepsilon M$, je tudi $E(e)y\varepsilon X_o$. Torej je X_o invarianten glede na spektralno mero E.

Vsakemu vektorju $x\varepsilon\mathcal{H}$ pripada s predpisom

$$(E(e)x,x) = \mu_x(e),\quad e\varepsilon\mathcal{B}$$

funkcija μ_x definirana na Borelovih množicah, kjer je E dana spektralna mera in ta funkcija μ_x je mera ([1], Th.1). Mera μ_x je očitno pozitivna Borelova mera na $\mathcal{B}$. Dalje je mera μ_x tudi omejena:

$$\mu_x(e) \leq \|x\|^2.$$

za vse $e\epsilon\mathcal{B}$ in za vsak $x\epsilon\mathcal{H}$. Tako definirana mera je tudi regularna, ker izpolnjuje izrek ([14],Th.2.18), ki smo ga navedli v razdelku 2, kajti v tem primeru je $X = R^k$ in celo $\mu_x(e)<\infty$ za vsako množico $e\epsilon\mathcal{B}$. Vsaki spektralni meri E in za vsak $x\epsilon\mathcal{H}$ priredimo lahko družino mer, definiranih na prejšnji način ([1],sec.3).

Prostor vseh merljivih funkcij, ki ustrezajo pogoju

$$\int_{R^k} |f|^2 d(Ex,x) < \infty ,$$

zaznamujmo z $L_2(\mu_x)$, torej

$$L_2(\mu_x) = \{f, \int |f|^2 d\mu_x < \infty\} .$$

Z L(B) zaznamujmo prostor omejenih funkcij v $L_2(\mu_x)$. L(B) je predhilbertov prostor in zaprtje $\overline{L(B)}$ je ravno prostor $L_2(\mu_x)$, kajti omejene funkcije so povsod goste v prostoru $L_2(\mu_x)$. Vsaki omejeni funkciji $f\epsilon L(B)$ pripada neki vektor $y\epsilon X_o$, in sicer

$$y = (\int_{R^k} f\, dE)x.$$

S tem imamo neko linearno preslikavo, ki jo trenutno zaznamujmo J, iz L(B) na X_o. Preslikava J je izomorfizem. Izračunajmo normo elementa $y\epsilon X_o$! Po prejšnjem je

$$\|y\|^2 = \int_{R^k} |f|^2 d(Ex,x) = \int_{R^k} |f|^2\, d\mu_x.$$

Zadnji integral je prav kvadrat norme funkcije $f \in L_2(\mu_x)$. Preslikava

$$J : L(B) \longleftrightarrow X_o$$

je zato izometrični izomorfizem, $\|J\| = 1$.

Zaprimo prostor X_o. S tem seveda privzamemo še vse limite Cauchyjevih zaporedij $\{y_n\} \in X_o$ in zaznamujmo zaprtje $\bar{X}_o$ prostora X_o z

$$\bar{X}_o = H(x).$$

Naj na primer zaporedje $\{y_n\}$, $y_n \in X_o$ konvergira proti $z \in H(x)$. Ker je preslikava J izomorfizem, eksistira zaporedje funkcij $\{f_n\} \in L(B)$, da je $y_n = Jf_n$. Zaporedje $\{y_n\}$ je Cauchyjevo in zaradi izometričnosti preslikave J še sledi

$$\|f_n - f_m\| = \|y_n - y_m\| \to 0, \; m,n > n_o.$$

Zaporedje$\{f_n\}$je tudi Cauchyjevo zaporedje v polnem prostoru $L_2(\mu_x)$, torej konvergira $\{f_n\}$ proti funkciji $f \in L_2(\mu_x)$. S tem priredimo $z \in H(x)$ funkcijo $f \in L_2(\mu_x)$ in smo tako preslikavo J razširili na ves prostor $H(x)$,

$$\bar{J} : H(x) \longrightarrow L_2(\mu_x).$$

Pokažimo, da je preslikava $\bar{J}$ korektno definirana. Naj na primer tudi zaporedje $\{y_n'\}$ konvergira proti $z \in H(x)$. K temu zaporedju pripada zaporedje omejenih funkcij $\{f_n'\} \in L(B)$. Ocenimo $\|y_n - y_n'\|$; ker je

$$\|y_n - y_n'\| < \|y_n - z\| + \|z - y_n'\|$$

dobimo $\|y_n - y_n'\| \longrightarrow 0$. Zaradi izometričnosti preslikave J pa prav tako $\|f_n - f_n'\| \longrightarrow 0$. Odtod pa sledi, da ~~je~~ tudi zaporedje $\{f_n'\}$ konvergira proti f. Seveda je $\|z\| = \|f\|$ in preslikava $\bar{J}$ je izometrični izomorfizem iz H(x) na $L_2(\mu_x)$.-

Ugotovili smo, da za poljuben $x \varepsilon \mathcal{H}$ dobimo podprostor H(x) v $\mathcal{H}$,

$$H(x) = \{y \varepsilon \mathcal{H},\ y = (\int_{R^k} f\, dE)x,\ \|y\|^2 = \int_{R^k} |f|^2 d\mu_x$$

za vsak $f \varepsilon L_2(\mu_x)\}$

ki je izometrično izomorfen prostoru $L_2(\mu_x)$. Tu je $\mu_x(e) = (E(e)x,x)$ in projektorju E(e) restringiranemu na podprostor H(x) ustreza v prostoru $L_2(\mu_x)$ množenje s karakteristično funkcijo χ_e množice e.

Pojem spektralne reprezentacije in urejene reprezentacije za neomejene sebi adjungirane operatorje smo podali v razdelku 2. Ta dva pojma podajmo še za spektralne mere.

<u>Definicija 9:</u> *Naj bo E spektralna mera v Hilbertovem prostoru* $\mathcal{H}$ *in* $\{\mu_n\}$ *družina končnih pozitivnih mer definiranih na Borelovih množicah* $e \varepsilon \mathcal{B}$. *Naj bo sedaj J izomorfizem prostora* $\mathcal{H}$ *na ves prostor* $\sum \oplus L_2(\mu_n)$. *Izomorfizem J naj še ohranja skalarni produkt. Preslikavo J imenujemo spektralno reprezentacijo prostora* $\mathcal{H}$ *na* $\sum \oplus L_2(\mu_n)$ *glede na spektralno mero E, če je izpolnjena relacija*

$$J(E(e)x)_n(\lambda) = \chi_e (Jx)_n(\lambda)$$

za vsak $x \varepsilon \mathcal{H}$, *skoraj za vsak* λ *glede na mero* μ_n; χ_e *je karakteristična funkcija množice* $e \varepsilon \mathcal{B}$.

V naslednji definiciji podajmo še pojem urejene reprezentacije glede na spektralno mero.

<u>*Definicija 10:*</u> *Naj bo μ pozitivna mera definirana na družini Borelovih množic $\mathcal{B}$, $\{e_k\}$ padajoče zaporedje Borelovih množic, pri čemer naj bo e_1 ves prostor R^k. Če je za poljubno Borelovo množico $e \subset e_1$*

$$\mu_n(e) = \mu(e \cap e_n), \quad e \in \mathcal{B} \quad , n = 1,2,\ldots$$

potem imenujemo reprezentacijo prostora $\mathcal{H}$ na $\sum^{\oplus} L_2(\mu_n)$ glede na spektralno mero E, urejeno reprezentacijo.

Pojem večkratnosti urejene reprezentacije pa se ujema z definicijo 5 iz razdelka 2.

Sedaj, ko imamo ta dva pojma, lahko zapišemo naslednjo lemo.

<u>*Lema 11:*</u> *Se~~d~~parabilen Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ ima urejeno reprezentacijo glede na dano spektralno mero E.*

Za dokaz te leme potrebujemo dva pomožna rezultata, še prej pa uvedimo pojem maksimalnega vektorja v prostoru $\mathcal{H}$.

<u>*Definicija 12:*</u> *Vektor $x \in \mathcal{H}$ imenujemo maksimalen glede na dano spektralno mero E, če je vsaka mera oblike $(E(e)y,y)$, $y \in \mathcal{H}$, absolutno zvezna glede na mero $(E(e)x,x)$.*

<u>*Lema 13:*</u> *V separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ eksistira maksimalen vektor x glede na dano spektralno mero $E(e)$.*

Dokaz te leme teče enako, kakor prvi del dokaza Leme 7 v [3], pogl.X,5.

Maksimalen element, ki ga po lemi 13 dobimo v prostoru $\mathcal{H}$, zaznamujmo kot z_1. K temu maksimalnemu elementu na prej opisani način konstruiramo podprostor $H(z_1)$.

<u>*Lema 14:*</u> *V separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ naj bo dana spektralna mera E. Potem eksistira zaporedje $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$,*

da je $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus H(x_i)$ *in tako zaporedje* $\{e_n\}$ *Borelovih množic, da je*

$$(E(e)x_n, x_n) = (E(e \cap e_n)x_1, x_1)$$

za $n \geq 1$.

Dokaz: Če prostor $H(z_1)$ ni ves prostor $\mathcal{H}$, potem v ortogonalnem komplementu $H(z_1)^c$ eksistira $z \neq 0$. Temu vektorju z pripada podprostor $H(z)$, ki sestoji iz vektorjev oblike

$$y = \int_{R^k} f \, dEz,$$

kjer je $f \varepsilon L_2(\mu)$, $\mu = (E(e)z, z)$.

Pokažimo, da je $H(z_1)^c \perp H(z_1)$. Vzemimo $y \varepsilon H(z_1)^c$ in ugotovimo, da je $y \perp z_1$. Najprej še ugotovimo, da je prostor $H(z_1)^c$ invarianten na spektralno mero. Vzemimo $z \varepsilon H(z_1)^c$ in neki $y \varepsilon H(z_1)$; izračunajmo skalarni produkt

$$(E(e)z, y) = (z, E(e)y) = (z, y_1) = 0,$$

kjer je, kot smo se prepričali, $E(e)y = y_1 \in H(z_1)$. Torej je $E(e)z \varepsilon H(z_1)^c$. Sedaj izračunajmo skalarni produkt (y, z_1),

$$(y, z_1) = \int_{R^k} f \, d(Ez, z_1) = 0,$$

ker je $(Ez, z_1) = 0$.

Sedaj po lemi 13 izberemo maksimalen vektor $z_2 \varepsilon H(z_1)^c$. Spet konstruiramo podprostor $H(z_2)$. Po zgornjem je očitno, da sta podprostora $H(z_1)$ in $H(z_2)$ med seboj ortogonalna. Če $H(z_1) \oplus H(z_2)$ ni ves prostor $\mathcal{H}$, potem iz $(H(z_1) \oplus H(z_2))^c$ izberemo element z_3, ki naj bo tu maksimalen in sestavimo podprostor $H(z_3)$. Tako lahko zaradi separabilnosti prostora nadaljujemo največ števno mnogokrat in dobimo

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus H(z_i) .$$

Zaradi maksimalnosti elementa z_1 je mera $\mu_2(e) = (E(e)z_2,z_2)$ zvezna glede na mero $\mu_1(e) = (E(e)z_1,z_1)$. Splošno je mera μ_{n+1} zvezna glede na mero μ_n, $n \geqq 1$.

Uporabimo Radon-Nikodymov izrek in zapišemo

$$\mu_n(e) = \int_e g_n(\lambda)\, d\mu_1,$$

kjer je $g_n(\lambda) \varepsilon L_1(\mu_1)$. Ker sta μ_1 in μ_n nenegativni meri, lahko vzamemo, da je g_n tudi nenegativna funkcija. Množica e_n naj sestoji iz tistih točk λ, za katere je $g_n(\lambda) > o$, torej

$$e_n = \{\lambda : g_n(\lambda) > 0\}.$$

Ker je mera μ_{n+1} zvezna glede na mero μ_n, se vidi, da je tudi $\mu_1(e_{n+1} - e_n) = 0$ takole: $e_{n+1} - e_n = \{\lambda : g_{n+1}(\lambda) > 0 \text{ in } g_n(\lambda) = 0\}$. Ker je $\mu_n(e_n^c) = 0$, je zaradi zveznosti tudi $\mu_{n+1}(e_n^c) = 0$. Množica $e_{n+1} - e_n \subset e_n^c$ in je $\mu_n(e_{n+1} - e_n) = 0$ in zaradi zveznosti mere μ_{n+1} na mero μ_n, je tudi $\mu_{n+1}(e_{n+1} - e_n) = 0$. Po Radon-Nikodymovem izreku imamo spet

$$\mu_{n+1}(e_{n+1} - e_n) = \int_{e_{n+1}-e_n} g_{n+1}(\lambda)\, d\mu_1 = 0.$$

Ker je $g_{n+1}(\lambda) > 0$ za $\lambda \varepsilon e_{n+1} - e_n$ sledi, da je $\mu_1(e_{n+1} - e_n) = 0$. Če modificiramo funkcijo g_{n+1} na množicah, ki imajo mero μ_1 nič, in sicer tako

$$\bar{g}_{n+1}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda\ \varepsilon e_{n+1} - e_n \\ g_{n+1}, & \text{sicer} \end{cases}$$

in popravimo množice e_n takole

$$\bar{e}_n = \{ \lambda : \bar{g}_n(\lambda) > 0 \},$$

dobimo padajoče zaporedje Borelovih množic $\{e_n\}$. Vzemimo še, da je e_1 ves prostor, $e_1 = R^k$.

Za $n \geq 2$ naj bo $x_n = \lim x_{nk}$, $k \to \infty$, kjer je

$$x_{nk} = \int_{S_{nk}} [g_n(\lambda)]^{-1/2} \, dEz_n$$

in

$$S_{nk} = \{ \lambda : g_n(\lambda) > 1/k \},$$

tu smo z z_n zaznamovali maksimalne elemente. Najprej pokažimo, da ta limita eksistira. Za $k>j$ ocenimo normo

$$\| x_{nk} - x_{nj} \|^2 = \int_{S_{nk}-S_{nj}} \frac{1}{g_n(\lambda)} \, d\|Ez_n\|^2.$$

Ker je $d(Ez_n, z_n) = d\mu_n$, imamo po Radon-Nikodymovem izreku $d\mu_n = g_n d\,\mu_1$ in dalje

$$\| x_{nk} - x_{nj} \|^2 = \int_{S_{nk}-S_{nj}} \frac{1}{g_n(\lambda)} d\,\mu_1 =$$

$$= \mu_1(S_{nk} - S_{nj}) \leq \mu_1(e_n - S_{nj}),$$

kajti očitno je $S_{nk} \subset e_n$. V limiti, ko gresta, k in $j \to \infty$, gre norma $\| x_{nk} - x_{nj} \| \to 0$. Sedaj postavimo $x_1 = z_1$, torej je x_1 maksimalen vektor, za $n>1$ pa je $x_n = \lim x_{nk}$, $k \to \infty$. In imamo

$$(E(e)x_n,x_n) = \|E(e)x_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|E(e)x_{nk}\|^2 =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{e\cap S_{nk}} \frac{1}{g_n(\lambda)}\, d\|Ez_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{e\cap S_{nk}} \frac{1}{g_n(\lambda)}\, d\mu_n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{e\cap S_{nk}} d\mu_1 = \lim_k \mu_1(e\cap S_{nk}) = \mu_1(e\cap e_n) =$$

$$= (E(e\cap e_n)x_1,x_1).$$

Lema 14 da torej padajoče zaporedje Borelovih množic $\{e_n\}$, pri čemer je e_1 ves prostor, $e_1 = R^k$. Mere μ_n, $\mu_n(e) = (E(e)x_n,x_n)$, $n>1$, so mere, ki so z μ_1 povezane kot vidimo za vsako Borelovo množico e takole:

$$\mu_n(e) = \mu_1(e\cap e_n).$$

Tako lahko spet govorimo o urejeni reprezentaciji separabilnega prostora $\mathcal{H}$ glede na spektralno mero E in to je trditev leme 11.

<u>*Definicija 15:*</u> *Dve urejeni reprezentaciji glede na spektralni meri E in $\bar{E}$ z zaporedji Borelovih množic $\{e_n\}$ in $\{\bar{e}_n\}$ imenujemo ekvivalentni, če velja*

$$\mu \equiv \bar{\mu} \quad in \quad \mu(e_n \Delta \bar{e}_n) = \bar{\mu}(e_n \Delta \bar{e}_n) = 0, \; n = 1,2,\ldots$$

<u>*Lema 16:*</u> *Katerikoli dve urejeni reprezentaciji prostora $\mathcal{H}$ glede na spektralno mero E sta ekvivalentni.*

Dokaz te leme teče enako kot dokaz Th.10,pogl.X,5 v [3] , le da uporabimo definicijo spektralne reprezentacije (definicija 9) in urejene reprezentacije (definicija 10) za spektralne mere.

<u>*Definicija 17:*</u> *Spektralni meri $E(e)$ in $\bar{E}(e)$ imenujemo ekvivalentni, če eksistira tak unitaren operator U, da je $\bar{E}(e)=UE(e)U^*$ za vsako Borelovo množico e.*

Lema 18: Dvema ekvivalentnima spektralnima merama v separabilnem Hilbertovem prostoru pripadata ekvivalentni urejeni reprezentaciji prostora $\mathcal{H}$ glede na spektralni meri.

Dokaz: Naj bosta E in $\bar{E}$ dve spektralni meri, J in $\bar{J}$ pripadajoči urejeni reprezentaciji prostora $\mathcal{H}$ glede na dani spektralni meri. Torej:

$$J : \mathcal{H} \longrightarrow \sum\oplus L_2(e_n,\mu)$$
$$\bar{J} : \mathcal{H} \longrightarrow \sum\oplus L_2(\bar{e}_n,\bar{\mu}).$$

Spektralni meri sta po predpostavki unitarno ekvivalentni, to je $\bar{E} = UEU^{-1}$, kjer je U unitaren operator iz $\mathcal{H}$ v $\mathcal{H}$. Pokazati bo treba, da eksistira neka urejena reprezentacija prostora $\mathcal{H}$ na $\sum\oplus L_2(\bar{e}_n,\bar{\mu})$ glede na spektralno mero E.

Sestavimo preslikavo $W = \bar{J}U$ iz $\mathcal{H}$ na $\sum\oplus L_2(\bar{e}_n,\bar{\mu})$. Ta preslikava je očitno izometrična. Velja relacija, ko upoštevamo definicijo 9,

$$W(E(e)x) = \bar{J}U(E(e)x) = \bar{J}(\bar{E}(e)(Ux)) =$$
$$= \chi_e(\bar{J}Ux) = \chi_e Wx,$$

torej je W urejena reprezentacija $\mathcal{H}$ na $\sum\oplus L_2(\bar{e}_n,\bar{\mu})$ glede na spektralno mero E. Sedaj uporabimo trditev leme 16 in urejeni reprezentaciji J in $\bar{J}$ sta ekvivalentni.

Ugotovitve, ki smo jih dognali za spektralne mere zapišimo skupaj: *Separabilen Hilbertov prostor ima urejeno reprezentacijo glede na dano spektralno mero E. Vse urejene reprezentacije glede na isto mero so med seboj ekvivalentne in ekvivalentnim spektralnim meram pripadajo ekvivalentne urejene reprezentacije.*

4. HOMOGENI SEBI ADJUNGIRANI OPERATORJI

V tem razdelku bomo iskali karakterizacijo za homogene sebi adjungirane operatorje. Definicijo in nekaj lastnosti sebi adjungiranega homogenega operatorja poznamo iz razdelka 1. Kot smo tam omenili, je naš glavni cilj dokazati domnevo, da je vsak homogen sebi adjungiran operator ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.

Vzemimo homogen sebi adjungiran operator A, definiran v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Zapišimo še enkrat, da je operator A homogen, če eksistira tak unitaren operator $U(\lambda)$, da je

$$A - \lambda I = U(\lambda)AU^*(\lambda). \qquad (1)$$

Po definiciji homogenosti pripada vsakemu realnemu λ vsaj en unitaren operator $U(\lambda)$. $\{U(\lambda)\}$ je množica, ki jo dobimo za vsa realna števila λ. Ta množica je še poljubna, njene lastnosti še niso določene. Vzemimo kar najpreprostejši primer, da množica $\{U(\lambda)\}$ tvori enoparametrično grupo, ki je zvezna v krepki topologiji. Ker se omejimo na separabilen prostor, je celo dovolj, da je enoparametrična grupa krepko merljiva v Lebesgovem smislu ([11], [13]).

Po Stoneovem izreku eksistira tak sebi adjungiran operator B, da je

$$U(\lambda) = e^{i\lambda B}$$

in operator B je generator grupe. Enačba (1) dobi sedaj obliko

$$A - \lambda I = e^{i\lambda B} A e^{-i\lambda B}.$$

Iz te enačbe dobimo dalje, seveda po čisto formalnem računu, kajti homogen operator A je neomejen, tole

$$A - \lambda I = (1 + i\lambda B + \ldots)A(1 - i\lambda B + \ldots)$$

in

$$A - \lambda I = A + i\lambda (BA - AB) + \ldots$$

in odtod tole zvezo

$$BA - AB = iI.$$

Tudi operatorju A pripada enoparametrična grupa unitarnih operatorjev ([8],Th.12.3.1), torej

$$e^{i\mu A} = V(\mu).$$

Operatorji $U(\lambda)$ in $V(\mu)$ v splošnem ne komutirajo. Zapišimo najprej

$$U(\lambda)A^n U^*(\lambda) = (A - \lambda I)^n$$

Delimo to enačbo z n! in množimo z $(i\mu)^n$ in nato seštejemo preko vseh n, n = 1,2,... in dobimo

$$U(\lambda)e^{i\mu A}U^*(\lambda) = e^{i\mu (A - \lambda I)}$$

odtod pa

$$U(\lambda)V(\lambda)U^*(\lambda) = e^{-i\mu\lambda}V(\mu)$$

oziroma

$$U(\lambda)V(\mu) = e^{-i\mu\lambda}V(\mu)U(\lambda)$$

V članku [12] je dokazano tole: dva sebi adjungirana operatorja A in B, ki sta ireducibilna v Hilbertovem prostoru in ki ustrezata pravkar izpeljani zvezi, sta ekvivalentna operatorju množenja s t oziroma odvajanja i(d/dt) v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$. Na osnovi do sedaj povedanega lahko postavimo tale izrek.

<u>*IZREK I:*</u> *Če sestavljajo operatorji $U(\lambda)$ grupo, ki je zvezna v krepki topologiji in je B generator te grupe in če operatorja A in B delujeta ireducibilno, potem je homogen operator A ekvivalenten operatorju množenja v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.*

Ker nastopata operatorja A in B in parametra λ,μ simetrično, se hitro vidi, da je tudi operator B homogen operator. Tak par operatorjev imenujemo konjugirano homogena operatorja.

Ob privzetku, da sestavljajo unitarni operatorji $U(\lambda)$ grupo, ki je zvezna v krepki topologiji in da na primer vzamemo, da operator $U(\lambda)$ deluje tako

$$U(\lambda)x(t) = x(t-\lambda),$$

kakor smo izbrali v razdelku 1, ko smo pokazali eksistenco homogenega operatorja, potem po Stonovem izreku lahko zapišemo

$$U(\lambda) = e^{i\lambda B}$$

in dalje

$$e^{i\lambda B}x(t) = x(t-\lambda).$$

Razvijmo v vrsto

$$(1 + i\lambda B + \ldots)x(t) = x(t) - \lambda x'(t) + \ldots$$

in odtod dobimo

$$iBx(t) = -x'(t),$$

torej je operator B operator odvajanja, in sicer $-i(d/dt)$, v prostoru L_2.

Poglejmo še, če so unitarni operatorji, ki nastopajo pri definiciji homogenosti, enolično izbrani?

Po definiciji homogenosti pripada k vsakemu realnemu številu λ neki unitaren operator $V(\lambda)$, da je

$$V(\lambda)AV^*(\lambda) = A - \lambda I,$$

vendar operator $V(\lambda)$ ni enolično izbran. K vrednosti λ vzemimo neki unitaren operator $V_1(\lambda)$, ki tudi izpolnjuje relacijo

$$V_1(\lambda)AV_1^*(\lambda) = A - \lambda I.$$

Iz obeh relacij dobimo

$$V(\lambda)AV^*(\lambda) = V_1(\lambda)AV_1^*(\lambda),$$

odtod pa

$$(V_1^*(\lambda)V(\lambda))A(V^*(\lambda)V_1(\lambda)) = (V_1^*(\lambda)V(\lambda))A(V_1^*(\lambda)V(\lambda))^* = A.$$

Zaznamujmo $V_1^*(\lambda)V(\lambda) = W(\lambda)$, ki kot produkt dveh unitarnih operatorjev predstavlja spet unitaren operator.

Če imamo tak unitaren operator $W(\lambda)$, da je

$$W(\lambda)AW^*(\lambda) = A$$

in operator $V_1(\lambda)$, ki ustreza definiciji homogenosti, dobimo operator $V(\lambda)$ tako

$$V_1(\lambda)W(\lambda) = V(\lambda).$$

Pokažimo, da tudi operator $V(\lambda)$ ustreza enačbi (1). Torej

$$V(\lambda)AV^*(\lambda) = V_1(\lambda)W(\lambda)AW^*(\lambda)V_1^*(\lambda) =$$

$$= V_1(\lambda)AV_1^*(\lambda) = A - \lambda I.$$

Tako lahko zaključimo: če unitaren operator $V_1(\lambda)$ izpolnjuje relacijo (1), potem jo izpolnjuje vsak unitaren operator $V(\lambda)$, ki ga dobimo na ta način

$$V(\lambda) = V_1(\lambda)W(\lambda),$$

kjer je $W(\lambda)$ unitaren operator z lastnostjo, da komutira z operatorjem A,

$$W(\lambda)AW^*(\lambda) = A.$$

Ugotovili smo, da je v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$ vseh s kvadratom integrabilnih funkcij, ki so merljive po Lebesgu, operator množenja z neodvisno spremenljivko

$$(Ax)(t) = tx(t) \tag{2}$$

homogen operator. Zanima nas nekoliko splošnejši primer in se vprašamo, ali je tako definiran operator tudi homogen v prostoru s splošnejšo mero ?

Da bi odgovorili na to vprašanje, vzemimo prostor $L_2^\alpha(-\infty,\infty)$ s kvadratom integrabilnih funkcij, ki so merljive s pozitivno Stieltjes-Lebesgovo mero. Naj bo $\alpha(t)$ zvezna, strogo naraščajoča funkcija, ki jo normiramo $\alpha(0) = 0$. Taka funkcija generira Stieltjes-Lebesgovo mero ν takole:

$$\nu[0,t] = \alpha(t), \quad t \geq 0$$
$$\nu[t,0] = -\alpha(t), \quad t \leq 0.$$

Prostor $L_2^\alpha(-\infty,\infty)$ sestavljajo funkcije

$$\{x(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, d\alpha(t) < \infty \}$$

K zgoraj določeni funkciji $\alpha(t) = t'$ eksistira enolična obratna funkcija $t = \beta(t')$, ki je tudi monotona, naraščajoča in zvezna. Funkcija $x[\beta(t')]$ je očitno po Lebesgu merljiva in s kvadratom integrabilna,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x[\beta(t')]^2 \, dt' < \infty .$$

Torej vsaki funkciji $x(t) \varepsilon L_2^\alpha$ ustreza funkcija $x[\beta(t')] \varepsilon L_2$. Preslikava

$$L_2^\alpha(-\infty,\infty) \longrightarrow L_2(-\infty,\infty)$$

je linearna in ohranja skalarni produkt, saj je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, \overline{y(t)} \, d\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x[\beta(t')] \, \overline{y[\beta(t')]} \, dt'.$$

Torej je preslikava izomorfizem. Enačbo (2) zapišemo sedaj tako

$$(Ax)[\beta(t')] = \beta(t') x[\beta(t')] \quad ,$$

kjer ~~je~~ $x[\beta(t')]$ pomeni, da je x posredno funkcija spremenljivke t'. Kot neodvisno spremenljivko pišimo spet t in imamo tole ugotovitev:

Operator množenja s t v prostoru $L_2^\alpha(-\infty,\infty)$ je homogen operator tedaj in le tedaj, če je operator množenja s $\beta(t)$ v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$ homogen, kjer je $\alpha[\beta(t)] = t$.

Tako moramo odgovoriti na vprašanje, kdaj je na naslednji način definiran operator

$$(Ax)(t) = f(t)x(t) \tag{3}$$

homogen, kjer je f(t) po Lebesgu merljiva in monotona funkcija in $x(t) \varepsilon L_2(-\infty,\infty)$.

Kakšne dodatne zahteve je treba še postaviti za funkcijo f(t), da bi bil operator A iz relacije (3) res homogen operator ? Odgovor da tale izrek.

<u>IZREK II</u>: *Operator, definiran z relacijo (3) je homogen operator v prostoru L_2, če je funkcija f(t) realna, zvezna, striktno monotona, $\lim f(t) = -\infty$, $t \to -\infty$, $\lim f(t) = \infty$, $t \to \infty$ in naj eksistira od nič različen odvod v vsaki točki, razen v števno mnogo točkah (v teh ali $\dot{f}$ ne eksistira, ali pa je $\dot{f}=0$).*

Dokaz: Konstruirajmo tak unitaren operator V, da bo V*AV prav operator množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$. Definirajmo operator V na ta način:

$$(Vx)(t) = x[f(t)]\sqrt{\dot{f}(t)} .$$

Najprej ugotovimo, da tako definiran operator ohranja normo, $\|Vx\| = \|x\|$ in dá preslikavo iz L_2 v L_2. Pokazati moramo namreč tole:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x[f(t)]|^2 \dot{f}(t)dt \tag{4}$$

Pri tem bomo uporabili pravilo o spremembi integracijske spremenljivke, in sicer izrek 1, oziroma izrek 2 iz razdelka 2.

Najprej poglejmo, ali ima funkcija f(t) lastnosti, ki jih zahteva izrek 2, zatem moramo še razširiti meje integracije iz končnosti na neskončnost. Funkcija $f(t)$ je N-funkcija, velja namreč tole ([7],18.48b): če je na kompaktnem intervalu $[a,b]$ iz R funkcija f realna funkcija, definirana na (a,b) in ima končne odvode v vseh, razen v števno mnogo točkah intervala $[a,b]$, potem je funkcija f tudi N-funkcija. Iz predpostavk za funkcijo f vidimo, da je res N-funkcija. Znano je tudi, da je monotona N-funkcija absolutno zvezna. Tako so izpolnjeni vsi pogoji izreka 2 in smemo uporabiti novo integracijsko spremenljivko.

Razširiti moramo le še meje integracije. Ker imamo naraščajočo funkcijo, seveda velja $f(t)\downarrow -\infty$, ko $t \to -\infty$, $f(t)\uparrow \infty$, ko $t \to \infty$ in zato $\alpha_n = f(-n)\downarrow -\infty$, $\beta_n = f(n)\uparrow \infty$. Potem velja za vsak n po izreku 2, ko je $a = -n$ in $b = n$ tole

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} g(y)dy = \int_{-n}^{n} g(f(t))\dot{f}(t)dt, \quad y = f(t) \qquad (5)$$

To pravilo potrebujemo pri verifikaciji, da operator V ohranja normo.

Poglejmo enačbo (4), tam nastopa $g(t) = |x(t)|^2$, ki je v L_1 in $g(t) \geqq 0$. Zato sedaj vzemimo, da je $g(y) \geqq 0$ in $g(y)\epsilon L_1(-\infty,\infty)$. Definirajmo

$$g_n(y) = \begin{cases} g(y) & \alpha_n \leqq y \leqq \beta_n \\ 0 & \text{izven} \end{cases}$$

Enačbo (5) lahko zapišemo v tejle obliki

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(f(t))\dot{f}(t)dt \qquad (6)$$

Leva stran v enačbi (6) ima limito, saj velja

a) $g_n(y) \to g(y)$ za vsak fiksen y, ko gre $n \to \infty$ in

b) $g_n(y) \uparrow g(y) \varepsilon L_1(-\infty,\infty)$.

Uporabimo Lebesgov izrek o dominantni konvergenci in imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy$$

Za desno stran enačbe (6) vemo, da velja

a) $g_n(f(t))\dot{f}(t) \geq 0$ za vse t, za katere $\dot{f}(t)$ eksistira, to je po naših predpostavkah za vse t, razen za števno mnogo; in

b) $g_n(f(t))\dot{f}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(f(t))\dot{f}(t)$ za vsak fiksen t, razen morda za števno t, kjer $\dot{f}$ ne eksistira.

Po izreku o limiti pozitivnih funkcij velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(f(t))\dot{f}(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} g(f(t))\dot{f}(t)dt$$

in ker je

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)dy \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy$$

sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(f(t))\dot{f}(t)dt.$$

Torej je enačba (4) izpolnjena in smo ugotovili, da operator V ohranja normo.

Ko iščemo operator V* potrebujemo inverzno funkcijo funkcije $f(t) = t'$, to je $\phi(t') = t$. Inverzna funkcija $\phi(t')$ je monotona, odvod eksistira in je končen, razen morda $\dot{\phi}(t')$

ne eksistira, ker pač $\dot{f}(t)$ ne eksistira za pripadajoči t, ali pa ne eksistira, ker je tam $\dot{f}(t) = 0$. Toda takih točk t' je kvečjemu števno mnogo. Povsod drugod je

$$\dot{f}(\phi(t'))\dot{\phi}(t') = 1.$$

Iz do sedaj povedanega sledi, da je tudi $\phi(t')$ absolutno zvezna in zato N-funkcija.

Pokazati moramo še, da operator V* ohranja normo. Smemo spet uporabiti izrek 2 iz razdelka 2 in s pomočjo njega ugotovimo, da operator V* res ohranja normo.

Konstruirajmo sedaj adjungirani operator V*. Zapišimo skalarni produkt

$$(Vx,y) = \int_{-\infty}^{\infty} x[f(t)]\,\sqrt{\dot{f}(t)}\;\overline{y(t)}\,dt.$$

POstavimo $f(t) = t'$, torej $t = \phi(t')$. Očitno je $f[\phi(t')] = t$ in odtod $(df/dt).(d\phi/dt') = 1$, oziroma $d\phi/dt' = 1/(df/dt)$. Ker sta $\dot{f} \geqq 0$ in $\dot{\phi} \geqq 0$, dobimo dalje

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,\sqrt{1/(\dot{\phi}(t'))}\;\overline{y[\phi(t')]}\;\dot{\phi}(t')dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,\overline{(y[\phi(t')]\sqrt{\dot{\phi}(t')})}\;dt' = (x,V^*y)$$

in odtod pač sledi, da operator V* deluje takole:

$$(V^*x)(t) = x[\phi(t)]\,\sqrt{\dot{\phi}(t)}\;.$$

Za nadalnje dokazovanje hočemo videti, koliko je izraz $(V^*Vx)(t)$,

$$(V^*x)(f(t)\sqrt{\dot f(t)}\,) =$$

$$= \sqrt{\dot\phi(t)}\ \sqrt{\dot f[\phi(t)]}\ x[f(\phi(t))] =$$

$$= \sqrt{\dot\phi(t)\dot f[\phi(t)]}\ x[f(\phi(t))]$$

Ker sta f in ϕ inverzni funkciji druga druge, je $f[\phi(t)] = t$ in $\dot f[\phi(t)]\ \dot\phi(t) = 1$. Upoštevajmo to v prejšnjem izrazu in dobimo dalje

$$(V^*Vx)(t) = \sqrt{\dot\phi(t)\dot f[\phi(t)]}\ x[f(\phi(t))] =$$

$$= 1.x(t) = x(t).$$

Prav tako dobimo, da je

$$(VV^*x)(t) = x(t).$$

Operator V je res unitaren operator.

V naslednjem koraku izračunajmo izraz $(V^*AV)(x(t))$! Operator V^*AV je unitarno transformiran k operatorju A. Iz definicij operatorjev A,V in V^* dobimo

$$(AVx)(t) = f(t)\sqrt{\dot f(t)}\ \ x[f(t)]$$

in dalje

$$(V^*AVx)(t) = \sqrt{\dot\phi(t)\dot f[\phi(t)]}\ f[\phi(t)]x[f(\phi(t))] =$$

$$= tx(t).$$

Odtod sledi, da je v tem primeru operator A ekvivalenten operatorju množenja s t v prostoru L_2 in je zato homogen operator.

Konstruirajmo še grupo unitarnih operatorjev $V(\lambda)$, ki prevede operator A v $A - \lambda I$. Operator množenja s t v prostoru

L_2 zaznamujmo sedaj z $\bar{A}$. Ker je operator $\bar{A}$ homogen, eksistira unitaren operator $W(\lambda)$, da je

$$W(\lambda)\bar{A}W^*(\lambda) = \bar{A} - \lambda I \tag{7}$$

Vzemimo primer, da operator $W(\lambda)$ deluje takole

$$W(\lambda)x(t) = x(t - \lambda) \quad \text{in}$$
$$W^*(\lambda)x(t) = x(t + \lambda) \tag{8}$$

Pravkar smo videli, da je operator A množenja s funkcijo f(t), ki ima predpisane lastnosti, v prostoru L_2 unitarno ekvivalenten operatorju množenja s t v prostoru L_2.

Za unitaren operator

$$Ux(t) = \sqrt{\dot{\phi}(t)}\; x[\phi(t)] \quad \text{oz.}$$
$$U^*x(t) = \sqrt{\dot{f}(t)}\; x[f(t)] \tag{9}$$

dobimo

$$(UAU^*)x(t) = tx(t) = \bar{A}x(t)$$

ali

$$UAU^* = \bar{A}. \tag{10}$$

V enačbi (7) uporabimo zvezo (10) in dobimo

$$W(\lambda)UAU^*W^*(\lambda) = UAU^* - \lambda(UU^*)$$

Pomnožimo z leve z U^*, z desne pa z U in imamo

$$U^*W(\lambda)UAU^*W^*(\lambda)U = A - \lambda I.$$

Od~~ø~~tod sledi, da je iskani operator $V(\lambda)$ dan kot

$$V(\lambda) = U^*W(\lambda)U \quad \text{in} \quad V^*(\lambda) = U^*W^*(\lambda)U.$$

Očitno je

$$V(\lambda)AV^{*}(\lambda) = A - \lambda I.$$

Iz definicije operatorja $W(\lambda)$, to je enačbe (8) in definicije operatorja U, to je enačbe (9) sledi

$$V(\lambda)x(t) = \sqrt{\dot{f}(t)\dot{\phi}[f(t)+\lambda]}\; x[\phi[f(t)+\lambda]]$$

$$V^{*}(\lambda)x(t) = \sqrt{\dot{f}(t)\dot{\phi}[f(t)-\lambda]}\; x[\phi[f(t)-\lambda]]$$

Ker tvorijo operatorji $W(\lambda)$ grupo, tvorijo tudi operatorji $V(\lambda)$ grupo in smo s tem dobili iskano grupo unitarnih operatorjev.

Na vprašanje kdaj je v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$ operator množenja z zvezno funkcijo homogen, smo vsaj delno odgovorili ż izrekom II. Omenimo še, da velja podoben izrek, le da postavimo na funkcijo $f(t)$ nekoliko hujše zahteve, zahtevamo namreč, da je funkcija $f(t)$ še zvezno odvedljiva.

Pa vzemimo sedaj še vse homeomorfizme na številski premici in postavimo prejšnje vprašanje takole: kdaj je operator množenja s homeomorfizmom na številski premici homogen operator ?

Homeomorfizem ja povratno enolična in v obe smeri zvezna preslikava in predstavlja na številski premici monotono funkcijo. Potem se to vprašanje reducira na prej postavljeno vprašanje in odgovor lahko zapišemo v malo spremenjeni obliki izreka II:

Operator definiran z relacijo (3) je homogen operator v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$, če je f poljuben homeomorfizem na številski premici, ki ima od nič različen odvod v vsaki, razen v števno mnogo točkah.

V drugem delu tega razdelka hočemo pokazati, da je vsak homogen operator v separabilnem Hilbertovem prostoru ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$, pri tem se naslonimo na teorijo o urejeni reprezentaciji za sebi adjungirane operatorje in teorijo o kvaziinvariantnih merah.

Najprej bomo študirali tak homogen sebi adjungiran operator, ki ima enostavno spektralno večkratnost (izrek III), zatem bomo pokazali še splošneje, da pridemo do takega rezultata, če ima homogen sebi adjungiran operator števno spektralno večkratnost (izrekV).

<u>IZREK III:</u> *Naj bo A sebi adjungiran homogen operator v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Privzemimo, da ima operator A enostavno spektralno večkratnost. Potem je operator A unitarno ekvivalenten operatorju množenja s t v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.*

Pri dokazu tega izreka bomo uporabili nekaj teorije spektralne reprezentacije neomejenih sebi adjungiranih operatorjev in nekaj pojmov in izrekov iz teorije mere (glej razdelek 2). Povedali smo, da ima separabilen Hilbertov prostor urejeno reprezentacijo U glede na dan sebi adjungiran operator A v prostoru $\mathcal{H}$. Spektralno reprezentacijo definira linearna izometrija U,

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow \sum_k \oplus L_2(\mu_k).$$

Kot sledi iz definicije 3, je operator UAU^{-1} v prostoru $\sum \oplus L_2(\mu_k)$ prav operator množenja z neodvisno spremenljivko

$$(UAU^{-1}x)(t) = tx(t).$$

Torej je homogenemu operatorju A pripadajoči operator $\tilde{A} = UAU^{-1}$ v prostoru $\sum\oplus L_2(\mu_k)$ operator množenja s t.

Pokažimo najprej, da je operator $\tilde{A} = UAU^{-1}$ tudi homogen operator v prostoru $\sum \oplus L_2(\mu_k)$!

Po definiciji homogenosti eksistira k vsakemu realnemu λ tak unitaren operator $S(\lambda)$, da je

$$\tilde{A} - \lambda I = S(\lambda)AS^*(\lambda).$$

Konstruirati moramo torej tak unitaren operator S. Z U smo zaznamovali spektralno reprezentacijo, to je linearno izometrijo iz $\mathcal{H} \longrightarrow \sum\oplus L_2(\mu_k)$. Ker je A homogen operator, seveda velja

$$A - \lambda I = W(\lambda)AW^{-1}(\lambda),$$

kjer je $W(\lambda)$ unitaren operator. Zgornjo zvezo pomnožimo z leve z U in desne z U^{-1}, dobimo

$$UAU^{-1} - \lambda I = UW(\lambda)AW^{-1}(\lambda)U^{-1}.$$

Sedaj zaznamujemo $UW(\lambda)U^{-1} = S(\lambda)$ in se prepričamo, da je $S(\lambda)$ unitaren operator, $S^{-1} = S^*$ in $SS^{-1} = I$. Naj bo $Ux = \xi$ in $Uy = \eta$, kjer sta $x,y \in \mathcal{H}$ in $\xi,\eta \in \sum\oplus L_2(\mu_k)$. Dalje dobimo

$$(S\xi,\eta) = (UWU^{-1}\xi,\eta) = (UWx,Uy) = (Wx,y) =$$

$$= (x,W^{-1}y) = (Ux,UW^{-1}y) = (\xi,UW^{-1}U^{-1}\eta) = (\xi,S^{-1}\eta).$$

Odtod sledi $S^* = S^{-1}$. Očitno je $(UWU^{-1})(UW^{-1}U^{-1}) = I$. In končno je

$$\tilde{A} - \lambda I = UAU^{-1} - \lambda I =$$

$$= UWU^{-1}AUW^{-1}U^{-1} = S\tilde{A}S^*.$$

Privzeli smo, da ima operator A enostavno spektralno večkratnost, to po definiciji 5 pomeni, da so e_k prazne množice za vse $k > 1$ in seveda $\mu_k(e) = 0$ za $k > 1$. V direktni vsoti prostorov $L_2(\mu_k)$ imamo le en prostor $L_2(\mu_1)$, kjer je $\mu_1(e) = \mu(e \cap e_1) = \mu(e)$, pri čemer je $e_1 = R$, vsa realna premica.

Eden važnejših pojmov, ki ga pri tem dokazovanju večkrat uporabimo, je pojem kvaziinvariantnosti mere ([4]) in podajmo definicijo.

Definicija 19: *Naj bo G lokalno kompaktna (kompaktna) komutativna topološka grupa. Regularno Borelovo mero μ na G imenujemo kvaziinvariantno, če je za merljivo množico $D \subset G$, za katero je $\mu(D) = 0$ tudi $\mu(-x+D) = 0$ za vsak $x \in G$.*

Kot lokalno kompaktno komutativno topološko grupo G vzamemo realno premico R in grupna operacija je seštevanje.

Lema 20: *Pozitivna regularna mera μ, ki pripada po izreku o urejeni reprezentaciji homogenemu sebi adjungiranemu operatorju A, je generirana s striktno monotono funkcijo in je kvaziinvariantna.*

Dokaz: Po definiciji homogenega operatorja sta operatorja A in $A - \lambda I$ unitarno ekvivalentna za vsak realen λ. Iz izreka 7 sledi, da sta ekvivalentni pripadajoči urejeni reprezentaciji. Po definiciji 6 to pomeni, da sta ustrezni meri ekvivalentni. Operatorju A pripada mera μ, operatorju $A - \lambda I$ pa mera $\bar{\mu}$. Operatorju $A - \lambda I$ pripada v prostoru $L_2(\mu_1(t))$ operator množenja s $t - \lambda$. Imamo namreč spektralno reprezentacijo U, $U: \mathcal{H} \longrightarrow L_2(\mu_1)$. Za $x(t) \in L_2(\mu_1)$ je

$$[U(A - \lambda I)U^{-1}x](t) = (UAU^{-1}x)(t) - \lambda x(t) =$$

$$= \tilde{A}x(t) - \lambda x(t) = (t - \lambda)x(t).$$

V prostoru $L_2(\mu_1(s+\lambda))$ pa je operator $A - \lambda I$ ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko s. Vsaki funkciji $x(t)\in L_2(\mu_1(t))$ priredimo funkcijo $Vx(s) = x(s+\lambda) \in L_2(\mu_1(s+\lambda))$ in obratno $V^{-1}y(s) = y(s-\lambda)\in L_2(\mu_1(s))$. Očitno je V izometrični izomorfizem

$$V : L_2(\mu_1(t)) \longrightarrow L_2(\mu_1(s+\lambda)),$$

saj je

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 d\mu_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(s+\lambda)|^2 d\mu_1(s+\lambda) =$$

$$= \|x(s+\lambda)\|^2 = \|Vx(t)\|^2.$$

Operatorju $A - \lambda I$ pripada v prostoru $L_2(\mu_1(t))$ operator množenja s $t - \lambda$. Temu operatorju pa pripada v prostoru $L_2(\mu_1(s+\lambda))$ operator $V(A - \lambda I)V^{-1}$ in

$$V(A - \lambda I)V^{-1}y(s) = V(s - \lambda)y(s - \lambda) = sy(s).$$

Tako pripada v prostoru $L_2(\mu_1(s+\lambda))$ operatorju $A - \lambda I$ operator množenja z s in $\mu_1(s+\lambda)$ je mera, ki po spektralnem izreku pripada operatorju $A - \lambda I$.

Zaradi ekvivalence operatorjev A in $A - \lambda I$ sta meri μ in $\bar{\mu}$ ekvivalentni, $\mu \cong \bar{\mu}$. Ekvivalentnost mer pa pomeni, da iz $\mu(D) = 0$ sledi $\bar{\mu}(D) = \mu(D + \lambda) = 0$ in obratno, za $D \subset R$, kar je ravno lastnost kvaziinvariantnosti.

Funkcija $g(t)$, ki generira mero μ, $dg(t)$, je zvezna in monotona funkcija. Skokov funkcija $g(t)$ ne more imeti, ker bi v tem primeru imel operator A v teh točkah lastne vrednosti, ki jih kot homogen operator nima. Recimo, da bi bila funkcija $g(t)$ na kakem intervalu (a,b) konstantna. Potem je mera μ množice $D \subset (a,b)$ enaka nič, $\mu(D) = 0$. Ker sta meri, ki pripadata operatorjema A in A - λI zvezni druga glede na drugo, to je ekvivalentni, sledi, da je $\bar{\mu}(D) = \mu(D + \lambda) = 0$ za vsak realen λ, kar bi pomenilo, da je $\mu(D) \equiv 0$ za vsako množico $D \subset R$.

Vpeljimo še pojem konvolucije dveh pozitivnih mer. Naj bosta sedaj μ in ρ pozitivni, regularni končni Borelovi meri na kompaktnem prostoru G, ki naj bo kompaktna Abelova topološka grupa. Konvolucija $\mu*\rho$ je definirana na G ([5],[9],[15]) z relacijo

$$\int_G f \, d(\mu*\rho) = \int_G \Big(\int_G f(x+y)\,d\mu(x) \Big) d\rho(y),$$

kjer je f nenegativna po Borelu merljiva funkcija definirana na G.

Naj bo D Borelova podmnožica iz G. Za f vzemimo karakteristično funkcijo množice D, χ_D. Tako je

$$\int_G \chi_D \, d(\mu*\rho) = (\mu*\rho)(D) = \int_G \Big(\int_G \chi_D(x+y)\,d\mu(x) \Big) d\rho(y)$$

Ker sta meri pozitivni in integrand pozitivna funkcija, velja Fubinijev izrek in dobimo

$$(\mu*\rho)(D) = \int_G \Big(\int_G \chi_D(x+y)\,d\rho(y) \Big) d\mu(x) =$$

$$= \int_G \Big(\int_G \chi_{-x+D}(y)\,d\rho(y) \Big) d\mu(x) = \int_G \rho(-x+D)\,d\mu(x).$$

G je Abelova grupa in z uporabo Fubinijevega izreka dobimo tudi

$$(\mu*\rho)(D) = \int_G \mu(-x+D)\,d\rho(x)$$

Funkciji $\mu(-x+D)$ oziroma $\rho(-x+D)$ sta glede na x po Borelu merljivi funkciji, kar tudi dokazuje omenjeni članek [9].

Kako pa je s konvolucijo mer na lokalno kompaktni Abelovi grupi G? Naj bosta μ in ρ regularni končni meri na G. Iz članka [15] se vidi, da tudi sedaj velja vse, kar smo povedali za primer kompaktne Abelove grupe.

S pomočjo teh priprav konstruirajmo dalje mero $\mu\rho$ tako, da bo konvolucija $\mu*\rho$ eksistirala in da bo končna. O tem govori naslednja lema.

<u>*Lema 21:*</u> *Če je mera ρ dana tako, da je $d\rho = dx/(1+x^2)$ in μ pozitivna, regularna Borelova mera, potem je konvolucija dana takole*

$$(\mu*\rho)(D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(-x+D)\,dx}{(1+x^2)}$$

končna za omejene množice $D \subset R$.

Dokaz: Mero μ naj določa monotona, zvezna in naraščajoča funkcija g(t), ki je končna za končen t. Funkcijo g(t) normalizirajmo, da je g(0) = 0. Ker je

$$\mu(-x+D) \leq |g(-x+b) - g(-x+a)| \leq |g(-x+b)| + |g(-x+a)| ,$$

kjer je $D \subset |a,b|$, dobimo

$$(\mu*\rho)(D) \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(-x+b)\,dx}{1+x^2} \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(-x+a)\,dx}{1+x^2} \right|$$

Oba integrala sta v mejah od -N do N končna, N poljubno končno število, ker je funkcija g(-x+b) in g(-x+a) omejena za

$x \in [-N,N]$. Da bo prvi sumand končen, je treba oceniti le integrala

$$\left| \int_{-\infty}^{-N} \frac{g(-x+b)\,dx}{(1+x^2)} \right| \quad \text{in} \quad \left| \int_{N}^{\infty} \frac{g(-x+a)\,dx}{(1+x^2)} \right|$$

Ocenimo najprej tale integral

$$\left| \int_{-\infty}^{-N} \frac{g(-x+b)\,dx}{(1+x^2)} \right| = \int_{-\infty}^{-N} \frac{g(b-x)\,dx}{(1+x^2)} \leq \int_{-\infty}^{-N} \frac{dx}{(1+x^2)} < \infty$$

Ocenimo še drugi integral in imamo

$$\left| \int_{N}^{\infty} \frac{g(b-x)\,dx}{(1+x^2)} \right| \leq \int_{N}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} < \infty$$

Enako dobimo ocene tudi za integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(-x+a)\,dx}{(1+x^2)} .$$

<u>*Lema 22:*</u> *Mera* ρ, *definirana v prejšnji lemi, je kvaziinvariantna.*

Dokaz: Naj bo D taka omejena množica na R, da je $\rho(D) = 0$. Videti moramo, da je tudi $\rho(-x+D) = 0$ za vsak $x \in R$. Torej

$$\rho(D) = \int_{R} \chi_D \, d\rho = \int_{D} \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Ker je funkcija h(t),

$$h(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

pozitivna funkcija, je $m(D) = 0$, kjer je m Lebesgova mera. Ker je $h(t) \in L_1$, velja, da je tudi $h(t-x) \in L_1$ in imamo

$$\rho(-x+D) = \int_D h(t-x)\, dt = 0 \ ,$$

ker je $m(D) = 0$.

S pomočjo konvolucije lahko pokažemo odnos med merama μ in ρ.

Lema 23: Ker sta prej opisani meri μ in ρ kvaziinvariantni, sta zvezni druga glede na drugo, torej ekvivalentni.

Dokaz: Vzemimo tako množico $D \subset R$, da je $\mu(D) = 0$. Zapišimo konvolucijo

$$(\mu * \rho)(D) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(-x+D)\, d\rho(x).$$

Zaradi kvaziinvariantnosti mere μ je $\mu(-x+D) = 0$ za vsak x. Potem je $(\mu*\rho)(D) = 0$, torej $\mu*\rho << \mu$.

Sedaj vzemimo tako množico $D \subset R$, da je $(\mu*\rho)(D) = 0$, potem je

$$(\mu*\rho)(D) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(-x+D)\, d\rho(x) = 0 \ .$$

Meri μ in ρ sta pozitivni in je $\mu(-x+D) = 0$ skoraj povsod glede na mero ρ. Eksistira tak x_o, da je $\mu(-x_o+D) = 0$, zaradi lastnosti kvaziinvariantnosti je $\mu(D) = 0$ in $\mu << \mu*\rho$. Tako smo pokazali, da sta meri μ in $\mu*\rho$ ekvivalentni.

Pokazati hočemo še, da je $\rho \cong \mu*\rho$. Spet vzemimo tako množico D, da je $\rho(D) = 0$. Zapišimo konvolucijo v tej obliki

$$(\mu*\rho)(D) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(-x+D)\, d\mu(x).$$

Ker je ρ kvaziinvariantna mera, je $\rho(-x+D) = 0$ in odtod sledi, da je $(\mu*\rho)(D) = 0$. Pokažimo obratno. Za množico D, za katero je $(\mu*\rho)(D) = 0$, je

$$(\mu*\rho)(D) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(-x+D)d\mu(x) = 0.$$

Ker je μ pozitivna mera, je $\rho(-x+D) = 0$ skoraj povsod glede na mero μ. Eksistira tak x_o, da je $\rho(-x_o+D) = 0$, zaradi kvaziinvariantnosti pa je $\rho(D) = 0$.

Ker ima ekvivalenca lastnost tranzitivnosti, iz obeh rezultatov sledi: $\mu \cong \rho$.

<u>Lema 24</u>: *Prej izbrana mera ρ in Lebesgova mera m sta zvezni druga glede na drugo, $\rho \cong m$.*

Dokaz: Vzemimo tako množico $D \subset R$, da je $\rho(D) = 0$. Pokazati je treba, da je tudi $m(D) = 0$. Definirajmo zaporedje pozitivnih funkcij ϕ_n takole

$$\phi_n = (1 + x^2)\, \chi_{D \cap [-n,n]}$$

Ker je funkcija ϕ_n različna od nič le na množici, ki ima mero ρ enako nič, je očitno

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n\, d\rho = 0.$$

Imamo naraščajoče zaporedje pozitivnih, merljivih funkcij ϕ_n, $\phi_n(x) \longrightarrow \phi(x)$, $n \to \infty$, pri čemer je limitna funkcija $\phi(x) = (1 + x^2)\, \chi_D$, $x \in R$. Po Lebesgovem izreku o monotoni konvergenci velja, da je tudi $\phi(x)$ merljiva funkcija in je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n\, d\rho \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi\, d\rho \quad ,n \to \infty .$$

Odtod sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi \, d\rho = \int_D (1+x^2) \frac{dx}{(1+x^2)}$$

in odtod pa $m(D) = 0$. Obratno, da iz $m(D) = 0$ sledi $\rho(D) = 0$, je očitno, saj je funkcija $1/(1+x^2) \varepsilon L_1$.

Posledica leme 23 in leme 24 je, da sta meri μ in Lebesgova mera m ekvivalentni, $\mu \cong m$.

Lema 25: *Če sta meri μ in m ekvivalentni, je operator A z lastnostjo, kot smo jo postavili v izreku III, ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.*

Dokaz: Homogenemu operatorju A po izreku 4 pripada operator $\tilde{A} = UAU^{-1}$ v prostoru $L_2(\mu_1) = L_2(\mu)$. Vemo, da je operator $\tilde{A}$ tudi homogen operator in da je operator množenja s t v prostoru $L_2(\mu)$. Vzemimo funkcijo $y \varepsilon L_2(m)$ in $x \varepsilon L_2(\mu)$; zaradi ekvivalence mer po Radon-Nikodymovem izreku velja

$$d\mu = h(t) \, dt ,$$

kjer je h(t) pozitivna funkcija integrabilna na vsakem končnem intervalu. Velja tudi

$$dm = 1/h(t) \, d\mu$$

in $1/h(t) \varepsilon L_{1loc}$. Norma funkcije $x \varepsilon L_2(\mu)$ je

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, h(t) dt$$

in norma funkcije $y \varepsilon L_2(m)$ pa

$$\|y\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |y(s)|^2 \, ds$$

Preslikava $V: L_2(\mu) \longrightarrow L_2(m)$ naj priredi funkciji $x(t)\varepsilon L_2(\mu)$ funkcijo $y(s)\varepsilon L_2(m)$ takole:

$$y(s) = Vx(s) = x(s)\sqrt{h(s)} .$$

Preslikava V je izometrični izomorfizem, norma se ohranja

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)\sqrt{h(t)}|^2 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \|y\|^2 = \|Vx\|^2.$$

Torej je operator A ekvivalenten operatorju množenja z s v prostoru $L_2(m)$, kajti

$$(VAV^{-1}y)(s) = VA\frac{y(s)}{\sqrt{h(s)}} = V s \frac{y(s)}{\sqrt{h(s)}} =$$

$$= s\sqrt{h(s)} \frac{y(s)}{\sqrt{h(s)}} = s\, y(s).$$

Ker je predpostavka leme 25 izpolnjena, imamo s tem dokazan izrek III.

Vprašamo se, kako je v primeru, ko imamo homogen sebi adjungiran operator z večkratno spektralno mnogokratnostjo? Poglejmo najprej primer z dvojno spektralno večkratnostjo. Pokažimo, da velja izrek, ki ga zatem lahko posplošimo.

<u>*IZREK IV:*</u> *Homogen sebi adjungiran operator A v separabilnem Hilbertovem prostoru naj ima dvojno spektralno večkratnost. Tak operator je ekvivalenten operatorju množenja s t v direktni vsoti dveh prostorov* $L_2(-\infty,\infty)$.

Dokaz: Po predpostavki vzemimo, da sta neprazni le prvi dve Borelovi množici iz definicije 5, to je $e_1 = R$ in e_2, ostale množice e_k naj bodo za $k \geq 3$ prazne. V razdelku 2 smo omenili, da sebi adjungiranemu operatorju pripada neka pozitivna mera μ, takoimenovana mera urejene reprezentacije in $\mu(e_1)>0$, $\mu(e_2)>0$. Meri $\mu_1(e)$ in $\mu_2(e)$, kjer je e Borelova množica iz e_1, sta definirani (definicija 5) tako

$$\mu_1(e) = \mu(e) \quad \text{in} \quad \mu_2(e) = \mu(e \cap e_2).$$

Po izreku 4 eksistira izometrični izomorfizem U,

$$U: \mathcal{H} \longrightarrow L_2(\mu_1) \oplus L_2(\mu_2).$$

Operator A je ekvivalenten operatorju množenja s t, za $(x_1(t),x_2(t)) \in L_2(\mu_1) \oplus L_2(\mu_2)$ je

$$\tilde{A}(x_1(t),x_2(t)) = (tx_1(t),tx_2(t)),$$

kjer je $\tilde{A} = UAU^{-1}$ in U prej omenjeni izomorfizem. Operatorju A unitarno ekvivalenten operator $A - \lambda I$ je ekvivalenten operatorju množenja s $t-\lambda$ v prostoru $L_2(\mu_1) \oplus L_2(\mu_2)$, torej

$$(\tilde{A} - \lambda I)(x_1(t),x_2(t)) = ((t-\lambda)x_1(t),(t-\lambda)x_2(t)).$$

Po izreku 7 pripada operatorju $A - \lambda I$ neka mera $\bar{\mu}$ urejene reprezentacije in Borelovi množici $f_1 = R$ in f_2, $f_1 \supset f_2$ in $\bar{\mu}(f_k)>0$ za $k = 1,2$ in $\bar{\mu}(f_k) = 0$ za $k \geq 3$, kajti unitarno ekvivalentna operatorja imata enako večkratnost.

Operator $A - \lambda I$ je tudi ekvivalenten operatorju množenja s t v direktni vsoti prostorov L_2 z mero $\mu_1(t+\lambda)$ oziroma $\mu_2(t+\lambda)$ in $\bar{\mu}(e) = \mu_1(e+\lambda)$.

Ker sta po definiciji homogenosti operatorja A in $A - \lambda I$ unitarno ekvivalentna, velja, da sta pripadajoči urejeni reprezentaciji ekvivalentni, to pomeni (definicija 6)

$$\mu \cong \bar{\mu} \quad \text{in} \quad \mu(e_k \Delta f_k) = \bar{\mu}(e_k \Delta f_k) = 0, k=1,2$$

Množica f_k je v tem primeru za λ premaknjena množica e_k, $f_k = e_k - \lambda$. Ker je $e_1 = f_1 = R$, je pogoj $\mu(e_1 \Delta f_1) = \bar{\mu}(e_1 \Delta f_1) = 0$ očitno izpolnjen in ostane le

$$\mu \cong \bar{\mu} \text{ in } \mu(e_2 \Delta f_2) = \bar{\mu}(e_2 \Delta f_2) = 0.$$

Pokažimo tole trditev:

Borelova množica e_2 je kar enaka vsej realni premici R skoraj povsod glede na Lebesgovo mero.

Zaznamujmo s $\phi(t)$ karakteristično funkcijo množice e_2 in karakteristično funkcijo množice $f_2 = e_2 - \lambda$ pa s $\phi(t+\lambda)$. Karakteristična funkcija simetrične diference $e_2 \Delta f_2$ je $\phi(t) + \phi(t+\lambda) - 2\phi(t)\phi(t+\lambda)$. Mera μ, ki pripada operatorju A je po lemi 20 kvaziinvariantna in je, kakor smo se prepričali, ekvivalentna Lebesgovi meri m. Potem sledi iz $\mu(e_2 \Delta f_2) = 0$, da je tudi $m(e_2 \Delta f_2) = 0$, kjer smo z m kot vedno, zaznamovali Lebesgovo mero. Odtod sledi, da pri vsakem $\lambda \varepsilon R$ velja

$$\phi(t) + \phi(t+\lambda) - 2\phi(t)\phi(t+\lambda) = 0$$

skoraj povsod. Tako dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\phi(t) + \phi(t+\lambda) - 2\phi(t)\phi(t+\lambda)\right]dt = 0,$$

za poljubno po Lebesgu merljivo funkcijo $f(t)$. Zapišimo zgornjo enakost takole

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[2\phi(t)-1\right] \phi(t+\lambda)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt.$$

Izraz $2\phi(t)-1$ lahko zavzame vrednost 1 ali -1; vpeljimo funkcijo $g(t)$, in sicer $g(t) = f(t)[2\phi(t) - 1]$. Očitno je tudi funkcija $g(t)$ merljiva in poljubna, če primerno izberemo $f(t)$. Dalje je

$$f(t)\phi(t) = g(t)\frac{\phi(t)}{2\phi(t)-1}$$

in ulomek v zgornjem izrazu ima za $t\varepsilon e_2$ vrednost 1, za $t\notin e_2$ pa 0 in je torej karakteristična funkcija množice e_2. Tako

$$f(t)\phi(t) = g(t)\phi(t),$$

S tem dobimo dalje

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t+\lambda)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt,$$

oziroma

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)[\phi(t+\lambda)-\phi(t)]\, dt = 0,$$

za poljubno merljivo funkcijo $g(t)$; od tod dobimo tole pomembno zvezo

$$\phi(t+\lambda) - \phi(t) = 0 \qquad (11)$$

Ta enačba velja pri poljubnem λ skoraj za vsak t glede na mero m. Funkcija $\phi(t)$ je merljiva, zato eksistira integral

$$\int_0^x \phi(t)\, dt = f(x)$$

za vsak realen x. Tu je $f(x)$ zvezna funkcija spremenljivke x in je $f(o) = 0$. Dalje je

$$f(x+\lambda) = \int_0^{x+\lambda} \phi(t)dt.$$

Sedaj namesto integracijske spremenljivke t vzemimo $t+\lambda$ in imamo

$$f(x+\lambda) = \int_{-\lambda}^{x} \phi(t+\lambda)\, dt.$$

Upoštevajmo zvezo (11) in dobimo

$$f(x+\lambda) = \int_{-\lambda}^{x} \phi(t)\, dt,$$

ko razdelimo integracijski interval pa

$$f(x+\lambda) = \int_{0}^{x} \phi(t)dt - \int_{0}^{-\lambda} \phi(t)dt,$$

odtod sledi

$$f(x+\lambda) = f(x) - f(-\lambda).$$

Vstavimo $x=0$, dobimo $f(\lambda) = - f(-\lambda)$ in končno imamo

$$f(x+\lambda) = f(x) + f(\lambda).$$

Ker je $f(x)$ zvezna funkcija, ima ta funkcionalna enačba samo rešitve $f(x) = c.x$, kjer je c konstanta.

Znano je, da iz enačbe (12) sledi, da je funkcija $f(x)$ odvedljiva in njen odvod je skoraj povsod enak integrandu, torej

$$f'(x) = \phi(x).$$

Ker je $f'(x) = c$, je $\phi(x)$ konstantna skoraj povsod. Torej ima funkcija $\phi(t)$ konstantno vrednost na poljubnem intervalu skoraj za vsak t glede na mero m. Ker je ϕ karakteristična funkcija, je $\phi(t)$ ali 0 ali 1 skoraj za vsak t glede na mero m. Tako je $e_2 = R$ skoraj povsod glede na m, ali pa $e_2 = \emptyset$ skoraj povsod. V drugem primeru bi imel operator A le enostavno spektralno večkratnost, kar nasprotuje privzetku.

Ker je $e_2 = R$ skoraj povsod, je torej $\mu_2(e) = \mu(e \cap e_2) = \mu(e)$ za poljubno Borelovo množico $e \subset R$. Tako je $\mu_2(e) = \mu_1(e)$ in enako kakor pri dokazovanju izreka III, ugotovimo, da je operator $\tilde{A}|L_2(\mu_2)$ unitarno ekvivalenten operatorju množenja s t v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$. Tako je homogen operator A z dvojno spektralno večkratnostjo ekvivalenten operatorju množenja s t v direktni vsoti prostorov $L_2(-\infty,\infty) \oplus L_2(-\infty,\infty)$.

Rezultat, ki smo ga pravkar dobili, lahko analogno razširimo na homogene sebi adjungirane operatorje s poljubno spektralno večkratnostjo.

<u>*IZREK V:*</u> *Sebi adjungiran homogen operator v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ je ekvivalenten operatorju množenja s t v direktni vsoti prostorov $L_2(-\infty,\infty)$, tj. $\sum_K \oplus L_2(-\infty,\infty)$. Sumandov v tej direktni vsoti je toliko, kolikršna je spektralna večkratnost operatorja.*

Podobno kakor prej bi se prepričali, da so Borelove množice e_k iz definicije 5 enake R skoraj povsod glede na mero m. Tako je $\mu_k(e) = \mu(e \cap e_k) = \mu(e) = \mu_1(e)$. Zatem lahko enako kakor v izreku IV ugotovimo, da je operator $\tilde{A} = UAU^{-1}$ restringiran na prostor $L_2(\mu_k)$, $k = 1,2,\ldots$ unitarno ekvivalenten operatorju množenja s t v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.

Pokazali smo, da je vsak homogen operator A z enostavno spektralno večkratnostjo ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko t v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$, (izrek III). Množica unitarnih operatorjev $\{U(\lambda), \lambda \in R\}$, ki pripadajo operatorju A po definiciji homogenosti, v splošnem ne sestavljajo grupe unitarnih operatorjev. Operator $U(\lambda)$ pri danem λ ni enolično izbran, kot smo pokazali. Ker je homogen operator A ekvivalenten operatorju množenja s t, za katerega pa lahko izberemo množico $\{V(\lambda), \lambda \in R\}$ tako, da je $\{V(\lambda)\}$ grupa.

Potem tudi za homogen operator A z enostavno spektralno večkratnostjo lahko izberemo množico unitarnih operatorjev $\{U(\lambda), \lambda \in R\}$ tako, da je tudi $\{U(\lambda)\}$ grupa. V izreku I smo trdili: če je A homogen ireducibilen sebi adjungiran operator in če je mogoče izbrati množico $\{U(\lambda), \lambda \in R\}$ tako, da je to grupa, potem je operator A ekvivalenten operatorju množenja v prostoru $L_2(-\infty,\infty)$.

Veljavnost izreka I sledi torej iz izreka III in zgoraj povedanega, če se le še prepričamo, da iz ireducibilnosti operatorja A sledi enostavna spektralna večkratnost. O tem se prepričamo takole: če ima neki sebi adjungiran operator spektralno večkratnost večjo ali enako 2, potem ima ta operator najmanj dva invariantna podprostora in zato ni ireducibilen.

5. HOMOGENI UNITARNI OPERATORJI

V prejšnjem razdelku smo dobili nekaj rezultatov za homogene sebi adjungirane operatorje. Tu želimo nakazati, da se da dobiti podobne rezultate za preprostejši tip operatorjev, to je za unitarne operatorje. Do teh rezultatov pridemo po podobni poti kakor pri sebi adjungiranih operatorjih. Podajmo najprej definicijo homogenosti za unitarne operatorje.

<u>*Definicija 26:*</u> *Unitaren operator U, definiran v separabilnem Hilbertovem prostoru imenujmo homogen, če je ekvivalenten operatorju $e^{i\alpha}U$ za vsak $\alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$.*

Po zgornji definiciji za vsak $\alpha \varepsilon [0,2\pi]$ obstaja unitaren operator $V(\alpha)$, da je

$$e^{i\alpha}U = V(\alpha)UV^*(\alpha) \qquad (1)$$

oziroma

$$e^{i\alpha}UV(\alpha) = V(\alpha)U.$$

Najprej zopet poglejmo, ali kak homogen unitaren operator sploh eksistira. V prostoru $L_2(K)$, kjer K pomeni enotno krožnico v kompleksni ravnini, eksistira homogen unitaren operator U, dan s predpisom

$$Ux(z) = \bar{z}x(z) = e^{i\phi}x(e^{i\phi}),$$

kjer je $x(z) \varepsilon L_2(K)$ in $z = e^{i\phi}$.

Pripadajoči unitarni operator $V(\alpha)$ izberimo na primer takole

$$V(\alpha)x(z) = e^{-i\alpha/2}x(e^{i\alpha}z) =$$
$$= e^{-i\alpha/2}\, x(e^{i(\phi+\alpha)}),$$

$$V^*(\alpha)x(z) = e^{i\alpha/2}\, x(e^{i(\phi-\alpha)}).$$

Pokažimo, da s tako izbranimi operatorji velja zveza (1):

$$e^{i\alpha}Ux(z) = e^{i(\phi+\alpha)}\, x(e^{i\phi}) = e^{i\alpha}z\, x(z),$$

in

$$V(\alpha)UV^*(\alpha)x(z) = V(\alpha)Ue^{i\alpha/2}\, x(e^{i(\phi-\alpha)}) =$$

$$= V(\alpha)e^{i\phi}\, e^{i\alpha/2}x(e^{i(\phi-\alpha)}) = e^{-i\alpha/2}e^{i(\phi+\alpha)}e^{i\alpha/2}x(e^{i\phi}) =$$

$$= e^{i\alpha}e^{i\phi}\, x(e^{i\phi}) = e^{i\alpha}z\, x(z).$$

Unitaren operator je normalen operator in ima spekter na krožnici K. Homogen unitaren operator ima samo zvezen spekter, torej je vsa krožnica K zvezen spekter.

O tej trditvi se prepričamo v dveh korakih. V prvem koraku pokažimo, da homogen unitaren operator nima lastnih vrednosti. Recimo, da je $e^{i\beta}$ lastna vrednost operatorja U. Obstaja torej lastna funkcija x(z), da je

$$Ux(z) = e^{i\beta}\, x(z).$$

Uporabimo lastnost homogenosti:

$$e^{i\alpha}Ux(z) = V(\alpha)UV^*(\alpha)x(z)$$

in imamo

$$e^{i(\alpha+\beta)}\, x(z) = V(\alpha)UV^*(\alpha)x(z),$$

pomnožimo zgornje z leve z $V^*(\alpha)$, dobimo

$$e^{i(\alpha+\beta)}\, V^*(\alpha)x(z) = U(V^*(\alpha)x(z)).$$

Zaznamujmo $V^*(\alpha)x(z) = y(z;\alpha)$ in dobimo

$$e^{i(\alpha+\beta)}y(z;\alpha) = Uy(z;\alpha),$$

torej je $e^{i(\alpha+\beta)}$ tudi lastna vrednost operatorja U in to za poljuben α. Tako bi imel homogen unitaren operator neštevno lastnih vrednosti, kar v separabilnem Hilbertovem prostoru ni mogoče.

V drugem koraku pokažimo še, da na krožnici K ni regularnih točk homogenega unitarnega operatorja U. Pa recimo, da je $\lambda = e^{i\beta}$ regularna točka operatorja U, to pomeni, da je operator $(U - e^{i\beta}I)^{-1}$ omejen operator. Potem je $V(\alpha)(U - e^{i\beta}I)^{-1}V^*(\alpha)$, kjer je $V(\alpha)$ unitaren operator iz enačbe (1), tudi omejen operator. Zapišimo

$$V(\alpha)(U - e^{i\beta}I)^{-1}V^*(\alpha) = [V(\alpha)(U - e^{i\beta}I)V^*(\alpha)]^{-1}.$$

Upoštevajmo še relacijo homogenosti in dobimo

$$[V(\alpha)(U - e^{i\beta}I)V^*(\alpha)]^{-1} = (V(\alpha)UV^*(\alpha) - e^{i\beta}I)^{-1} =$$
$$= e^{-i\alpha}(U - e^{i(\beta-\alpha)}I)^{-1}.$$

Ker je očitno operator $[(U - e^{i(\beta-\alpha)}I]^{-1}$ omejen operator, je tudi $e^{i(\beta-\alpha)}$ regularna točka, in to za vsak α. Tako bi bila vsaka točka na krožnici regularna, ~~sicer~~ in bi bil spekter prazna množica in odtod zaključimo, da na krožnici K ni regularnih točk homogenega unitarnega operatorja U.

Iz obojega do sedaj povedanega, da homogen unitaren operator U nima lastnih vrednosti in da na K ni regularnih točk, sledi, da je vsa krožnica K zvezni spekter.

Kot smo omenili, je unitaren operator omejen normalen operator, za take operatorje je izdelana teorija spektralne in urejene reprezentacije ([3],pogl.X.5); veljajo seveda podobni izreki kakor pri omenjeni teoriji za sebi adjungirane operatorje. Eksistira izometrični izomorfizem iz Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ na $\sum_k \oplus L_2(\mu_k)$, kjer so μ_k pozitivne regularne Borelove mere na krožnici. Iz teorije o kvaziinvariantnih merah, ki pa so sedaj definirane na kompaktni komutativni topološki grupi - krožnici K (definicija 19), sledi po analogni poti, kot pri sebi adjungiranih operatorjih, da je na krožnici vsaka kvaziinvariantna mera ekvivalentna Lebesgovi meri $\tilde{m}$ na krožnici.

Podobno kot v razdelku 4 dokažemo, da homogenemu unitarnemu operatorju z enostavno spektralno večkratnostjo pripada po urejeni spektralni reprezentaciji mera, ki je kvaziinvariantna.

Sedaj na podoben način kakor pri homogenih sebi adjungiranih operatorjih dobimo rezultat, da je homogen unitaren operator v separabilnem Hilbertovem prostoru unitarno ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko $z, |z| = 1$, v prostoru $L_2(K,\tilde{m})$, oziroma splošno:

Homogen unitaren operator v separabilnem Hilbertovem prostoru je ekvivalenten operatorju množenja z neodvisno spremenljivko z, $|z| = 1$, v direktni vsoti prostorov $L_2(K,\tilde{m})$; število sumandov direktne vsote se ujema s spektralno večkratnostjo operatorja.

6. HOMOGENI NORMALNI OPERATORJI

Pojem homogenosti lahko razširimo iz sebi adjungiranih in unitarnih operatorjev tudi na normalne operatorje.

<u>*Definicija 27:*</u> *Normalen operator A v separabilnem Hilbertovem prostoru imenujmo homogen, če je ekvivalenten razliki $A - \lambda I$ za vsako kompleksno število λ.*

Iz definicije sledi spet nekaj lastnosti homogenega normalnega operatorja. Homogen normalen operator je neomejen in če je definiran v separabilnem Hilbertovem prostoru, nima nobene lastne vrednosti. Razlogi za to so seveda isti kakor pri homogenih sebi adjungiranih operatorjih. Zvezni spekter v tem primeru predstavlja vsa ravnina kompleksnih števil.

Prepričajmo se o eksistenci homogenega normalnega operatorja! Vzemimo spet prostor L_2 vseh v Lebesgovem smislu merljivih funkcij $x(t,\tau)$ dveh spremenljivk. Operator množenja s $t + i\tau$ je homogen operator,

$$(Ax)(t,\tau) = (t+i\tau)x(t,\tau).$$

Grupa unitarnih operatorjev $U(\lambda)$, ki prevedejo normalen operator A v $A - \lambda I$, je določena s predpisom

$$(U(\lambda)x)(t,\tau) = x(t+\lambda_1,\ \tau+\lambda_2),$$

kjer je $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Hitro se prepričamo, da je z zgoraj uvedenim unitarnim operatorjem izpolnjena relacija homogenosti, kajti

$$((A - \lambda I)x)(t,\tau) = ((t-\lambda_1) + i(\tau-\lambda_2))x(t,\tau)$$

in

$$((U(\lambda)AU^*(\lambda)x)(t,\tau) = (Ax)(t-\lambda_1,\tau-\lambda_2) =$$

$$= (t-\lambda_1 + i(\tau-\lambda_2))x(t-\lambda_1,\tau-\lambda_2) =$$

$$= ((t-\lambda_1) + i(\tau-\lambda_2))x(t,\tau).$$

Podajmo sedaj normalen operator A še v obliki

$$A = A_1 + i\,A_2,$$

kjer sta A_1 in A_2 sebi adjungirana operatorja, ki komutirata. Trdimo tole: če je normalen operator A homogen, potem sta tudi sebi adjungirana operatorja A_1 in A_2 homogena. O tem se hitro lahko prepričamo.

Sebi adjungiran operator A_1 se izraža takole

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}.$$

Ker je normalen operator A homogen, potem za operator A^* velja tale relacija

$$A^* - \bar{\lambda}I = U(\lambda)A^*U^*(\lambda)$$

oziroma

$$A^* - \lambda I = U(\bar{\lambda})A^*U^*(\bar{\lambda}).$$

Poglejmo, kako je z relacijo homogenosti za operator A_1!

$$A_1 - \lambda I = \frac{1}{2}((A - \lambda I) + (A^* - \lambda I)) =$$

$$= \frac{1}{2}(U(\lambda)AU^*(\lambda) + U(\bar{\lambda})A^*U^*(\bar{\lambda})).$$

Ker pa je operator A_1 sebi adjungiran, je λ realno število in imamo

$$A_1 - \lambda I = U(\lambda)\frac{A+A^*}{2}U^*(\lambda) = U(\lambda)A_1U^*(\lambda),$$

torej je sebi adjungiran operator A_1 homogen. Enako se prepričamo o homogenosti sebi adjungiranega operatorja A_2.

Podobnega rezultata, kakor ga imamo pri sebi adjungiranih homgenih operatorjih, da je namreč homogen normalen operator ekvivalenten operatorju množenja s $t + i\tau$ v direktni vsoti prostorov L_2, kjer se število sumandov direktne vsote ujema s spektralno večkratnostjo normalnega operatorja, pa ni uspelo dobiti. Potrebovali bi spektralni teorem in teorijo o urejeni spektralni reprezentaciji za normalne operatorje, če bi seveda delali po podobni poti kakor pri sebi adjungiranih operatorjih. Tu nastopi težava, kajti spektralno reprezentacijo Hilbertovega prostora imamo le za omejene normalne operatorje ([3],pogl.X; [1]), homogen normalen operator pa je neomejen.

7. HOMOGENE SPEKTRALNE MERE

Znano je, da vsakemu sebi adjungiranemu operatorju pripada enoparametrična družina $\{E(\lambda)\}$. Iz spektralne družine $\{E(\lambda)\}$ sebi adjungiranega operatorja moremo konstruirati spektralno mero operatorja, saj lahko vsaki Borelovi množici e na realni premici priredimo projektor $E(e)$. Za odprti interval (a,b) definiramo $E((a,b))$ takole:

$$E((a,b)) = E(b-0) - E(a).$$

Za poljubno Borelovo množico e je narejena konstrukcija v [11]VII/3. Dobljeno družino $\{E(e), e\in \mathcal{B}\}$ imenujemo spektralno mero sebi adjungiranega operatorja A.

Iz homogenosti operatorja A sledi, da ima spektralna mera to lastnost:

$$E(\tau e) = U(\tau)E(e)U^*(\tau), \quad e\in \mathcal{B},$$

kjer pomeni τ paralelni premik množice e, $U(\tau)$ je unitarni operator. Spektralno mero, ki zadošča zgornji enačbi, imenujemo homogeno spektralno mero.

Do sedaj povedano povzemimo v tejle ugotovitvi: homogenemu sebi adjungiranemu operatorju A pripada homogena spektralna mera. Tako poleg homogenih operatorjev lahko študiramo tudi homogene spektralne mere.

Splošno definicijo spektralne mere smo podali v razdelku 3, tam so zbrana tudi sredstva, ki jih potrebujemo pri študiju homogenih spektralnih mer.

Uvedimo pojem homogenosti pri spektralnih merah! Kot do sedaj naj pomeni $\mathcal{B}$ družino vseh Borelovih množic iz R^k, P linearno množico vseh sebi adjungiranih projektorjev v danem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Zaznamujmo s T grupo vseh translacij τ v prostoru R^k in τe je množica, v katero preide množica e po translaciji τ.

<u>*Definicija 28:*</u> *Spektralno mero $E(e)$,*

$$E(e) : \mathcal{B} \longrightarrow P$$

imenujmo homogeno (za translacijo), če je spektralna mera $E(\tau e)$ ekvivalentna meri $E(e)$ za vsako translacijo τ in za vsako množico $e \varepsilon \mathcal{B}$; torej eksistira tak unitaren operator $U(\tau)$, da je

$$E(\tau e) = U(\tau)E(e)U^*(\tau)$$

za vsako Borelovo množico e.

Recimo, da imamo dano homogeno spektralno mero E. Predpostavimo najprej, da imamo enostavno spektralno večkratnost. Torej naj bodo vse množice iz zaporedja Borelovih množic $\{e_k\}$, ki nastopajo pri urejeni reprezentaciji, prazne množice, le $e_1 = R^k$. Eksistira tak maksimalni vektor $x \varepsilon \mathcal{H}$, da je $H(x)$ ves prostor $\mathcal{H}$ in $\mu_x = \mu_1 = \mu$.

<u>*Lema 29:*</u> *Zgoraj definirana mera μ je kvaziinvariantna in ekvivalentna Lebesgovi meri m, $\mu \cong m$.*

Dokaz: Pri dokazu bomo uporabili rezultate, ki smo jih dobili že pri homogenih sebi adjungiranih operatorjih v razdelku 4. Začnimo s kvaziinvariantnostjo. Da ugotovimo kvaziinvariantnost mere, po definiciji 19 potrebujemo, da je mera na lokalno kompaktni komutativni topološki grupi regularna Borelova mera. Mera μ ima na prostoru R^k te lastnosti. Ker je spektralna mera $E(e)$ homogena, je ekvivalentna spektralni meri $E(\tau e) = \bar{E}(e)$. Po lemi 18 iz razdelka 3 sledi, da sta pripadajoči urejeni reprezentaciji ekvivalentni, to po definiciji 15 pomeni, da sta meri μ in $\bar{\mu}$, ki pripadata spektralnima merama $E(e)$ in $\bar{E}(e)$, ekvivalentni. V tem primeru je

$$\bar{E}(e) = E(\tau e) \text{ in } \bar{\mu}(e) = \mu(\tau e).$$

Iz ekvivalence mer sledi, da za množico $e \subset R^k$, za katero je $\mu(e) = 0$, je tudi $\bar{\mu}(e) = \mu(\tau e) = 0$ in obratno. S tem imamo prav lastnost kvaziinvariantnosti mere.

Spet potrebujemo pojem konvolucije dveh mer. Po članku [15] je definirana za pozitivni končni regularni meri konvolucija takih mer na lokalno komapktni grupi G takole:

$$(\mu * \rho)(D) = \int_G \mu(-x+D)\, d\rho(x)$$

za vsako podmnožico $D \subset G$.

V našem primeru vzamemo za G evklidski prostor R^k. Mera μ je določena s spektralno mero E, medtem ko mero ρ želimo izbrati tako, da bo to pozitivna, regularna Borelova in končna mera, obenem pa še taka, da bo integral, ki nastopa v konvoluciji, končen. Definirajmo mero ρ tako

$$\rho(e) = \int_e f(r)\, dm,$$

kjer bomo za f(r) izbrali primerno zvezno funkcijo iz prostora L_1. Tu je $r = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|)^{1/2}$. Z m zaznamujemo k-dimenzionalno Lebesgovo mero. Tako definirana mera ρ je absolutno zvezna glede na mero m. Vpeljimo sferične koordinate in imamo

$$\int_{R^k} f(r) dm = \Omega_k \int_0^{\infty} r^{k-1} f(r) dr,$$

kjer je Ω_k površina krogle v R^k. Funkcijo f(r) izberemo še tako, da bo

$$\int_{R^k} f(r)\, dm < \infty \quad ;$$

vzemimo na primer, da je

$$f(r) = \frac{1}{1 + r^{k+1}},$$

tedaj velja

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-1}\,dr}{1 + r^{k+1}}$$

Torej je $d\rho = dm/(1 + r^{k+1})$. Tako določena mera ima vse potrebne lastnosti, je pozitivna, Borelova, končna in tudi regularna mera. Konvolucija je končna, ocenimo

$$|(\mu*\rho)(D)| \leq \mu(R^k) \int_{R^k} d\rho \ , \ D\in\mathcal{B}$$

Mera ρ je tudi kvaziinvariantna, o čemer se prepričamo podobno kakor v lemi 22. Ker sta meri μ in ρ kvaziinvariantni, dobimo po lemi 23, da sta meri ekvivalentni, to je zvezni druga glede na drugo.

Pokazati bi bilo še treba, da je mera m absolutno zvezna glede na mero ρ. Dokaz teče podobno kakor v lemi 24. Dobili smo vmesni rezultat: $\rho \cong m$.

Zaradi tranzitivnosti relacije ekvivalence sta meri μ in m ekvivaletni, $\mu \cong m$.

Ko imamo ta rezultat, lahko zapišemo izrek, ki je analogen izreku III za sebi adjungirane operatorje.

<u>*IZREK VI:*</u> *Naj bo E(e) homogena spektralna mera z enostavno spektralno večkratnostjo v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Potem eksistira tak izometrični izomorfizem $\mathcal{H} \longrightarrow L_2(m,R^k)$, da projektorju $E(e)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ustreza v prostoru $L_2(m,R^k)$ operator množenja s karakteristično funkcijo χ_e.*

Dokaz: Pokazali smo, da imamo urejeno reprezentacijo z enostavno spektralno večkratnostjo v separabilnem Hilbertovem prostoru glede na mero E, torej

$$J : H(x) \longleftrightarrow L_2(\mu_x).$$

Vemo tudi, da projektorju, ki deluje v H(x), ustreza v prostoru $L_2(\mu_x)$ množenje s karakteristično funkcijo χ_e. Vzemimo $f \varepsilon L_2(\mu_x)$. Zaradi ekvivalence mere μ_x in Lebesgove mere imamo po Radon-Nikodymovem izreku

$$d\mu = h(t)\ dt,$$

kjer je h(t) pozitivna in $h(t) \varepsilon L_{1loc}$. Izračunajmo normo f,

$$\|f\|^2 = \int_{R^k} |f|^2\, d\mu_x = \int_{R^k} |f(t)|^2 h(t)dt$$

Preslikava V,

$$V : L_2(\mu_x) \longleftrightarrow L_2(m)$$

dana s predpisom

$$Vf = f\sqrt{h} \equiv g\ L_2(m),$$

je očitno izomorfizem in je tudi izometrična, saj je po zgornjem računu

$$\|f\|_\mu^2 = \|Vf\|^2 = \|g\|^2.$$

Izračunajmo še

$$(VE(e)V^{-1})g = VE(e)f = V\chi_e\ f = \chi_e g$$

in vidimo, da pripada projektorju E(e) množenje s karakteristično funkcijo χ_e v prostoru $L_2(m,R^k)$, prostoru vseh po Lebesgu merljivih in s kvadratom integrabilnih funkcij v prostoru R^k.

V izreku VI smo predpostavili, da imamo enojno spektralno večkratnost. Spet skušajmo posplošiti in vzemimo najrej, da imamo dvojno spektralno večkratnost urejene reprezentacije glede na dano homogeno spektralno mero E, na primer

$e_1 = R^k$, $\mu(e_2) > 0$, $e_k = \emptyset$ za $k \geq 3$. Po lemi 11 imamo v tem primeru

$$\mathcal{H} = H(x_1) \oplus H(x_2)$$

in $\mu_2(e) = \mu_1(e \cap e_2)$, $e \subset R^k$, kjer je $\mu_1(e) = (E(e)x_1, x_1)$ in $\mu_2(e) = (E(e)x_2, x_2)$. Pokazali smo, da imamo izometrični izomorfizem J,

$$J : \mathcal{H} \longleftrightarrow L_2(\mu_1, R^k) \oplus L_2(\mu_2, R^k).$$

<u>*Lema 30:*</u> *Urejena reprezentacija z dvojno spektralno večkratnostjo glede na homogeno spektralno mero ima to lastnost, da je tudi množica e_2 kar ves prostor R^k skoraj povsod glede na Lebesgovo mero in potem je $\mu_2(e) = \mu_1(e) = \mu(e)$.*

Dokaz: Ker sta zaradi homogenosti za vsak premik τ spektralni meri $E(e)$ in $E(\tau e)$ unitarno ekvivalentni, velja, da sta pripadajoči urejeni reprezentaciji ekvivalentni,

$$\mu = \bar{\mu} \quad \text{in} \quad \mu(e_n \Delta f_n) = \bar{\mu}(e_n \Delta f_n) = 0, \; n = 1,2.$$

Množice f_n so Borelove, ki pripadajo po urejeni reprezentaciji spektralni meri $E(\tau e)$. Množica f_2 je translatirana množica e_2, $f_2 = \tau\, e_2$. Enako kakor pri sebi adjungiranih operatorjih zaznamujmo s $\phi(t)$ karakteristično funkcijo množice e_2, $\phi(t) = \chi_{e_2}$ in $\phi(t+\tau) = \chi_{f_2} = \chi_{\tau e_2}$. Prav tako velja za karakteristično funkcijo simetrične diference $e_2 \Delta f_2$, da je

$$\phi(t) + \phi(t+\tau) - 2\phi(t)\phi(t+\tau) = \chi_{e_2 \Delta \tau e_2}$$

Tu je $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ in $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Zaradi ekvivalence mere μ in merem sledi iz $\mu(e_2 \Delta f_2) = 0$, da je tudi $m(e_2 \Delta f_2) = 0$. Potem imamo

$$\int_{R^k} f(t)[\phi(t) + \phi(t+\tau) - 2\phi(t)\phi(t+\tau)]dm = 0$$

za vsak τ in za vsako merljivo funkcijo f. Zgornjo enačbo zapišemo v tej obliki

$$\int_{R^k} f(t)[2\phi(1) - 1]\phi(t+\tau)dm = \int_{R^k} f(t)\phi(t)dm. \qquad (1)$$

Vpeljemo funkcijo $g(t) = f(t)[2\phi(t) - 1]$, ki je očitno merljiva funkcija in po enakem razmisleku, kakor v razdelku 4 dobimo relacijo

$$f(t)\phi(t) = g(t)\phi(t).$$

V desno stran enačbe (1) vstavimo desno stran zgornjega izraza in je

$$\int_{R^k} g(t)\phi(t+\tau)dm = \int_{R^k} g(t)\phi(t)\, dm$$

odtod pa

$$\int_{R^k} g(t)[\phi(t+\tau) - \phi(t)]dm = 0,$$

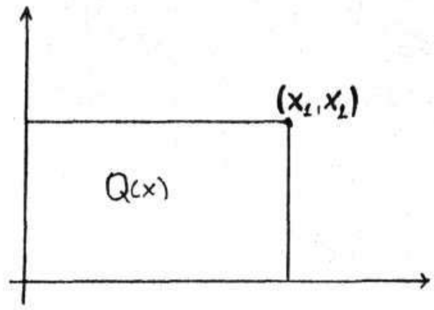
za poljubno merljivo funkcijo $g(t)$.

Sedaj dobimo zopet zvezo

$$\phi(t+\tau) - \phi(t) = 0, \qquad (2)$$

ki velja pri poljubnem τ in skoraj za vsak $t \in R^k$ glede na mero m.

Nadaljne razmišljanje omejimo najprej na ravnino R^2. Funkcija $\phi(t)$ je merljiva in poglejmo integral po pravokotniku $Q(x)$, kjer je $x = (X_1, x_2)$ oglišče pravokotnika, ki leži izven koordinatnih osi (slika).



Vpeljimo funkcijo F(x) takole

$$\int_{Q(x)} \phi(t)\ dm = F(x).$$

Definirajmo mero ν s predpisom

$$\nu(e) = \int_e \phi\ dm.$$

Mera ν je absolutno zvezna glede na mero m in imamo

$$\nu(Q(x)) = \int_{Q(x)} \phi\ dm = F(x_1,x_2).$$

Očitno je F(0) = 0. Napravimo sedaj premik v smeri spremenljivke x_1 za τ_1. Potem imamo dalje

$$F(x_1+\tau_1,x_2) = \int_{Q(x_1+\tau_1,x_2)} \phi(t_1,t_2)\ dm\ .$$

Z zamenjavo integracijske spremenljivke t_1 z $t_1+\tau_1$ dobimo

$$F(x_1+\tau_1,x_2) = \int \phi(t_1+\tau_1,t_2)\ dm$$

integracijsko območje je pravokotnik $Q(x_1+\tau_1,x_2)$ premaknjen za $-\tau_1$ v smeri osi x_1. Upoštevamo enačbo (2) in je

$$F(x_1\ +\tau_1,x_2) = \int \phi(t_1,t_2)\ dm =$$

$$= \int_{Q(x_1,x_2)} \phi(t_1,t_2) + \int_{Q(-\tau_1,x_2)} \phi(t_1,t_2)\ dm$$

Odøtod dobimo

$$F(x_1+\tau_1,x_2) = F(x_1,x_2) - F(-\tau_1,x_2).$$

Ker je $F(0,x_2) = 0$, imamo iz zgornje enačbe, ko vzamemo $x_1 = 0$ tole

$$F(\tau_1,x_2) = - F(-\tau_1,x_2).$$

Z upoštevanjem tega dobimo tole funkcionalno enačbo

$$F(x_1+\tau_1,x_2) = F(x_1,x_2) + F(\tau_1,x_2).$$

Funkcija F je zvezna funkcija spremenljivk x_1,x_2. Rešitev zgornje funkcionalne enačbe je

$$F(x_1,x_2) = c(x_2).x_1.$$

Isti postópek napravimo za spremenljivko x_2, to je premik v smeri x_2 za τ_2. Enako kakor prej bi prišli do tele funkcionalne enačbe

$$F(x_1,x_2+\tau_2) = F(x_1,x_2) + F(x_1, \tau_2),$$

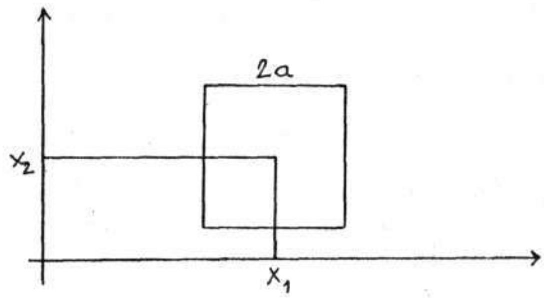
in ngena rešitev je

$$F(x_1,x_2) = k(x_1).x_2.$$

Postavimo x_1 = 1 in dobimo $c(x_2) = k(1)x_2$ za vsak x_2. S tem dobimo tole

$$F(x_1,x_2) = k\ x_1.x_2\ . \tag{3}$$

Ker je funkcija $F(x_1,x_2)$ mera ν pravokotnikov, poiščimo odvod mere. Za elemente Vitalijeve družine Ω vzemimo kar kvadrate Q s stranico $2a$ in središčem v točki $x = (x_1,x_2)$ (slika).



Omejimo se na primer, da je (x_1,x_2) v prvem kvadrantu in da je a dovolj majhen. Iz definicije odvoda (razdelek 2) sledi

$$F'(x) = \lim_{a\to 0} \frac{\nu(Q)}{m(Q)}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{\nu(x_1+a,x_2+a) - \nu(x_1+a,x_2-a) - \nu(x_1-a,x_2+a) + \nu(x_1-a,x_2-a)}{4a^2}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{F(x_1+a,x_2+a)-F(x_1+a,x_2-a)-F(x_1-a,x_2+a)+F(x_1-a,x_2-a)}{4a^2}$$

Upoštevajmo enačbo (3) in dobimo dalje

$$F'(x) = k \lim_{a\to 0} \frac{(x_1+a)(x_2+a)-(x_1+a)(x_2-a)-(x_1-a)(x_2+a)+(x_1-a)(x_2-a)}{4a^2} =$$

$$= k \lim_{a\to 0} \frac{4a^2}{4a^2} = k.$$

Torej je $F'(x) = \phi(x) = k$.

Funkcija $\phi(x)$ je konstantna skoraj povsod. Ker je $\phi(t)$ karakteristična funkcija množice e_2, ima vrednost 0 ali 1 za vsak t glede na mero m in ker je $m(e_2) > 0$, je $\phi(t) = 1$ skoraj povsod. Torej je

$$m(e_2 - R^k) = 0.$$

Isto razmišljanje seveda lahko razširimo na k spremenljivk, na prostor R^k.

Dosedanji rezultat, ki smo ga izrazili v izreku VI, lahko posplošimo na primer dvojne spektralne večkratnosti in zapišimo izrek v obliki:

<u>*IZREK VII:*</u> *Homogeni spektralni meri $E(e)$ z dvojno spektralno večkratnostjo v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ ustreza v prostoru $L_2(m,R^k) \oplus L_2(m,R^k)$ množenje s karakteristično funkcijo χ_e in prostor $L_2(m,R^k) \oplus L_2(m,R^k)$ je ekvivalenten Hilbertovemu prostoru $\mathcal{H}$.*

Dokaz: Ko smo v prejšnji lemi 30 ugotovili, da je $e_2 = R^k$ skoraj povsod in $\mu_2(e) = \mu_1(e)$ za poljubno množico $e \subset R^k$, smo dobili enako situacijo kakor v izreku VI, torej pripada homogeni spektralni meri $E(e)$ restringirani na prostor $L_2(\mu_2)$ tudi v prostoru $L_2(m)$ množenje s karakteristično funkcijo χ_e. Dalje zaključimo, da homogeni spektralni meri z dvojno spektralno večkratnostjo pripada množenje s karakteristično funkcijo v direktni vsoti prostorov $L_2(m,R^k) \oplus L_2(m,R^k)$.

Isti rezultat lahko raztegnemo na primer poljubne spektralne večkratnosti in po enaki poti ugotovimo, da so vse Borelove množice e_k, ki nastopajo pri urejeni reprezentaciji, kar enake prostoru R^k. Tako lahko formuliramo splošni izrek, ki je analogen izreku V, ki smo ga dobili pri homogenih sebi adjungiranih operatorjih.

<u>*IZREK VIII:*</u> *Homogeni spektralni meri $E(e)$ v separabilnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ ustreza množenje s karakteristično funkcijo χ_e v direktni vsoti prostorov $\sum \oplus L_2(m,R^k)$, sumandov pa je toliko, kolikršna je spektralna večkratnost spektralne mere.*

Do sedaj smo definirali homogenost spektralne mera za translacijo. Ali je spektralna mera, ki je homogena za translacijo, homogena tudi za rotacijo?

Vzemimo najprej preprost primer, spektralno mero v prostoru $L_2(R^k)$. Tu konstruiramo primer spektralne mere $E(e)$ na primer tako:

$$E(e)f(t) = \chi_e(t)f(t),$$

$f(t)\varepsilon L_2(R^k)$. Taka spektralna mera je, kot smo videli, homogena za translacijo. Hitro se prepričamo, da je tako izbrana spektralna mera homogena tudi za rotacijo. Veljati mora tedaj relacija

$$E(\sigma e) = U(\sigma)E(e)U^*(\sigma)$$

za vsako rotacijo σ in Borelovo množico e.

Unitarni operator $U(\sigma)$ naj deluje takole

$$U(\sigma)f(t) = f(\sigma^{-1}t) \text{ in } U^*(\sigma)f(t) = f(\sigma t).$$

Potem imamo

$$[U(\sigma)E(e)U^*(\sigma)]f(t) = U(\sigma)[\chi_e(t)f(\sigma t)] =$$

$$= \chi_e(\sigma^{-1}t)f(t) = \chi_{\sigma e}(t)f(t) = E(\sigma e)f(t).$$

Pokazali smo, da je tako izbrana spektralna mera v prostoru $L_2(R^k)$ homogena za poljubno gibanje.

Dobljeni rezultat pokažimo še v splošnem primeru. Vzemimo spektralno mero $E(e)$ v separabilnem Hilbertovem prostoru , ki naj ima enostavno spektralno večkratnost in ki naj bo homogena za translacijo, e pa Borelova množica v k-dimenzionalnem evklidskem prostoru. Da bi bila ta mera homogena tudi za rotacijo, mora biti izpolnjena relacija

$$E(\sigma e) = U(\sigma)E(e)U^*(\sigma)$$

za vsako rotacijo σ in vsako Borelovo množico e.

Vemo, da eksistira izometrični izomorfizem J iz prostora $\mathcal{H}$ na $L_2(R^k)$. Pa konstruirajmo unitarni operator $U(\sigma)$ takole:

$$U(\sigma) = J^{-1}V(\sigma)J,$$

kjer operator $V(\sigma)$ deluje na funkcije $f(t)\varepsilon L_2(R^k)$, in sicer

$$V(\sigma)f(t) = f(\sigma t).$$

Verificirajmo zgornjo relacijo homogenosti za rotacijo! Iz izreka VI vemo, da je spektralna mera $E(e)$ unitarno ekvivalentna operatorju množenja s karakteristično funkcijo; vzemimo $u\varepsilon\mathcal{H}$ in torej velja

$$E(e)u = J^{-1}\,\chi_e(t)Ju$$

Dalje potem imamo

$$U(\sigma)E(e)U^*(\sigma)u = (J^{-1}V(\sigma)J)(J^{-1}\chi_e J)(J^{-1}V^*(\sigma)J)u =$$

$$= (J^{-1}(V(\sigma)\chi_e V^*(\sigma))Ju = J^{-1}\chi_{\sigma e}Ju = E(\sigma e)u$$

Pri predzadnjem enačaju smo uporabili rezultat iz začetka tega razmišljanja. Iz do sedaj povedanega dobimo tole posledico:

Vsaka spektralna mera, ki je homogena za translacijo v prostoru R^k, je homogena tudi za poljubno gibanje v prostoru R^k.

Analogno velja v splošnem primeru, ko ima homogena spektralna mera E(e) v separabilnem Hilbertovem prostoru poljubno večkratnost.

Na koncu omenimo še eno posplošitev: Vzemimo tranzitivno grupo homeomorfizmov v k-dimenzionalnem evklidskem prostoru. Spet definiramo homogeno spektralno mero, to pomeni, da za vsak homeomorfizem σ iz grupe eksistira unitaren operator $U(\sigma)$, da je izpolnjena relacija

$$E(\sigma e) = U(\sigma)E(e)U^*(\sigma)$$

za vsako Borelovo množico e.

Ali se da tudi sedaj dokazati domneva, da je homogena spektralna mera ekvivalentna operatorju množenja s karakteristično funkcijo v prostoru $L_2(m,R^k)$?

To vprašanje ostane odprto, nastopita dve težavi: topološka grupa homeomorfizmov v R^k se ne da identificirati s k-dimenzionalnim prostorom in tranzitivna grupa homeomorfizmov ni komutativna grupa, komutativnost smo pa pri dosedanjih dokazih tudi potrebovali.

Σ

LITERATURA

[1] Berberian S. : Notes on spectral theory, Van Nostrand New York 1967

[2] Dunford N.,Schwarz J.: Linear operators I,Interscience N.Y. 1963

[3] -"- -"- Linear operators II, -"-

[4] Forelli F.: Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math.118(1967),33-59

[5] Glicksberg I.: Convolution semigroups of measures, Pacif.J.Math.9(1959),59-67

[6] Halmos P.: Introduction to Hilbert space,Chelsea,N.Y.1957

[7] Hewitt E.,Stromberg K.: Real and complex analysis, Springer,Heidelberg,N.Y. 1965

[8] Hille E.,Phillips R.: Functional analysis and semigroups, Coll.Publ.,Providence 1957

[9] de Leeuw K.: The Fubini theorem and convolution formula for regular measures, Math.Scand.11(1962), 117-122

[10] de Leeuw K.,Gliksberg J.: Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math.109(1963),18o-205

[11] Nagy Sz.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes,Springer Bd.39,1967

[12] v.Neumann J.: Die Eindeutigheit der Schrödingerschen Operatoren, Coll.Works,vol.II,No.7

[13] Plesner A.,Rohlin V.: Spektralnaja teorije linejnih operatorv,Uspehi mat. nauk1l(1946),71-191

[14] Rudin W.: Real and complex analysis,Mc Graw Hill, 1966

[15] Stromberg K.: A note on the convolution of regular measures, Math.Scand.7(1959),347-352