Osemindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Zaradi razmer je bilo tekmovanje, ki je v preteklosti pogosto potekalo v Blagoevgradu v Bolgariji, lani izvedeno po vsem svetu. Med 2. in 8. avgustom so študenti iz celega sveta tekmovali, vsak v svoji državi, nekateri kar doma. Iz Slovenije sta se tekmovanja udeležili dve ekipi. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali Luka Horjak iz prvega letnika, Matevž Miščič iz drugega letnika, Andraž Maier in Žan Bajuk iz tretjega letnika ter Daniel Vitas in Tjaž Silovšek, ki matematiko študirata četrto leto. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem pa so zastopali študenti Dorotea Redžepi in Lazar Marković iz prvega letnika, Ajla Šehović, Milan Milivojčević in Todor Antić iz drugega letnika in Besfort Shala, četrto leto študija. Pravila tekmovanja namreč določajo, da lahko tekmujejo vsi, ki niso starejši od 23 let ter so vključeni v študij največ štiri leta. Prilagojena izvedba je dovoljevala nadzor bodisi fizično v predavalnici bodisi prek ustreznega nadzornega računalniškega sistema. Na FMF smo se odločili za fizično prisotnost, tako da je vseh šest tekmovalcev pisalo v predavalnici, na Famnitu pa so študentom omogočili, da so pisali doma, nadzor pa je bil prek Zooma.

Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.

V dvodnevnem reševanju osmih nalog se je pomerilo 589 študentov, kar je največ do sedaj. Razvrščeni so bili v 113 ekip, med katerimi je bila najbolj

Slika 1. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko prvi dan tekmovanja.

Slika 2. Študenti FMF na začetku drugega tekmovalnega dne.

številna ekipa študentov brez ekipe. Običajno namreč univerzitetno ekipo sestavlja od tri do šest študentov, se pa na tekmovanje lahko prijavi vsak študent, tudi če njegova univerza ne sodeluje. Letos je bilo takih študentov kar precej, skoraj sto, in ker mora tudi za njih kdo poskrbeti (nadzor, pritožbe), so bili organizirani v ekipo. V ekipni razvrstitvi so univerze rangirane po formuli »vsota najboljših treh tekmovalcev plus povprečje vseh«. Kot zanimivost, ekipa študentov brez ekipe je imela tudi (vsaj) tri zelo dobre tekmovalce, tako da je po omenjeni formuli, kljub kar nekaj študentom z ničlo (in pravzaprav številnim, ki so povprečje zniževali), dosegla celo trinajsto mesto.

Letos so naši tekmovalci dosegli izjemen uspeh. Luka Horjak in Daniel Vitas sta dobila prvo nagrado, vsi drugi tekmovalci s FMF, torej Matevž Miščič, Andraž Maier, Tjaž Silovšek in Žan Bajuk ter Besfort Shala so dobili drugo nagrado, Todor Antić in Dorotea Redžepi pa pohvalo.

Ekipno smo dosegli devetnajsto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter štiriinosemdeseto mesto (ekipa Famnit).

Ker tekmovanje ni potekalo na eni lokaciji, je ves spremljevalni družabni program odpadel. Tekmovanje na ta način izgubi precej svojega značaja, po drugi strani pa je tudi vpliv motečih elementov zmanjšan. V dneh, ko so študenti reševali naloge, se je temperatura v Blagoevgradu dvignila do 38 °C, kar v kombinaciji z neklimatiziranimi prostori lahko pomeni težavo. Tudi dejstvo, da so ekipe začenjale pisati ob različnih urah, ni bil problem, vsaj zaznaven ne. Na splošno je bila letos odgovornost študentov na visokem nivoju, kar dokazuje nič diskvalificiranih (lani jih je bilo nekaj, ob podobnem

Slika 3. Študenti FMF med drugim tekmovalnim dnem.

režimu). Je pa bivanje v različnih časovnih pasovih bilo problem za komisijo, ko se je bilo treba uskladiti za ocene z ocenjevalcema z drugih strani planeta – vedno jih je kar nekaj spalo (tako smo morda dobili še praktičen dokaz, da Zemlja res ni ploščata).

Otvoritvena slovesnost ter končna podelitev nagrad sta potekali po spletu, posnetka lahko najdete na strani tekmovanja (`www.imc-math.org.uk`) oziroma na YouTubu. To pa je bilo tudi vse, kar se tiče družabnega življenja. Namesto da bi študenti v pričakovanju rezultatov spoznavali druge tekmovalce, igrali nogomet, družabne igre, morda šli na bazen ali plezali po okoliških hribčkih (kar običajno počnejo v Blagoevgradu), so na rezultate čakali doma. In tokrat so morali čakati kar dolgo, saj so bili tudi člani komisije doma in vpeti v normalen ritem življenja, namesto da bi cele dneve in noči posvetili hitremu ocenjevanju izdelkov. Prav tako se nismo mogli izogniti za to leto običajnim dogodkom. Ena ekipa, ki je imela nadzor na daljavo, je pisanje tik pred začetkom premaknila z dopoldneva na popoldan, ker je pri enem od tekmovalcev prišlo do pretrganja električnega kabla. Eden izmed ocenjevalcev je kar naenkrat postal neodziven, naknadno smo ugotovili, da zaradi močne reakcije po cepljenju. In seveda, sredi ocenjevanja so izdelki postali nedostopni, ker smo presegli dovoljen dnevni promet podatkov na strežniku, kar je onemogočilo oddajo prek obrazca tudi nekaterim študentom (med drugim tudi prej omenjeni ekipi).

Oglejmo si še štiri naloge s tekmovanja ter nekaj njihovih rešitev. Priporočam, da poskušate naloge najprej rešiti sami, nato pa pogledate namige in rešitve.

Slika 4. Ekipa Fakultete za matematiko in fiziko po zaključku drugega tekmovalnega dne.

Pogosto so naloge sestavljene zelo dobro, tako da preverjajo razumevanje snovi in koncepte reševanja matematičnih nalog, oziroma že razumevanje, kaj navodilo naloge sploh pomeni. Taka je bila tudi najlažja naloga obeh dni.

Naloga 1. Naj bo A realna $n \times n$ matrika, za katero velja $A^3 = 0$.

(a) Dokažite, da enačbo
$$X + AX + XA^2 = A$$
reši enolična realna $n \times n$ matrika X.

(b) Izrazite X z A.

Rešitev. Navajeni smo, da se enoličnost dokazuje na način, da predpostavimo dve rešitvi ter pokažemo, da sta enaki. V tem primeru naj torej poleg matrike X enačbo reši tudi matrika Y. No, ta pot nas ne privede skoraj nikamor. Tako se začnemo igrati in osnovno enačbo množimo z različnimi potencami matrike A, včasih z leve, včasih z desne. Tako dobimo recimo

$$A^2(X + AX + XA^2)A^2 = A^2XA^2 + A^3XA^2 + A^2XA^4 = A^2XA^2\,.$$

Upoštevamo seveda, da je $A^3 = 0$ in zato tudi $A^4 = A^5 = 0$. Zato je desna stran enačbe enaka $A^2 \cdot A \cdot A^2 = A^5 = 0$, torej smo dobili $A^2XA^2 = 0$.

Podobno dobimo

$$
\begin{aligned}
A^2X &= A^2(X + AX + XA^2) = A^3 = 0 \\
AXA &= A(X + AX + XA^2)A = A^3 = 0 \\
XA^2 &= (X + AX + XA^2)A^2 = A^3 = 0 \\
AX &= A(X + AX + XA^2) = A^2.
\end{aligned}
$$

Sledi

$$X = A - AX - XA^2 = A - A^2.$$

Videti je, kot da smo rešili točko (b) naloge, saj imamo X izražen z A. Vsaj tako je menilo kar precej študentov. Pravzaprav pa smo rešili točko (a), namreč, predpostavili smo, da obstaja X, ki reši enačbo, in ugotovili, da bi moral biti oblike $X = A - A^2$. Če torej rešitev obstaja, je ena sama. Za točko (b) moramo le še preveriti, da tako izbran X res ustreza enačbi, kar enostavno vidimo, saj je res

$$(A - A^2) + A(A - A^2) + (A - A^2)A^2 = A\,.$$

Druga rešitev. Sicer podobna, a le malo drugačna rešitev, najprej preoblikuje osnovno enačbo:

$$X = A - AX - XA^2\,.$$

Sedaj tako izražen X vstavimo v desno stran enačbe, upoštevamo $A^3 = 0$ in nadaljujemo:

$$
\begin{aligned}
X &= A - AX - XA^2 \\
&= A - A(A - AX - XA^2) - (A - AX - XA^2)A^2 \\
&= A - (A^2 - A^2X - AXA^2) - (A^3 - AXA^2 - XA^4) \\
&= A - A^2 + A^2X + 2AXA^2 \\
&= A - A^2 + A^2(A - AX - XA^2) + 2A(A - AX - XA^2)A^2 \\
&= A - A^2 + (A^3 - A^3X - A^2XA^2) + 2(A^4 - A^2XA^2 - AXA^4) \\
&= A - A^2 - 3A^2XA^2 \\
&= A - A^2 - 3A^2(A - AX - XA^2)A^2 \\
&= A - A^2 - 3(A^5 - A^3XA^2 - A^2XA^4) \\
&= A - A^2.
\end{aligned}
$$

Tudi v tem primeru moramo preveriti, da je tako izražen X res rešitev osnovne enačbe.

Tretja rešitev. Opazimo, da velja $(I-A+A^2)\cdot(I+A)=I$. Če osnovno enačbo pomnožimo z $(I-A+A^2)$ z leve, dobimo

$$X+(I-A+A^2)XA^2=(I-A+A^2)A=A-A^2. \tag{1}$$

Od tod (z množenjem z A^2 z desne) dobimo $XA^2=0$, kar enačbo (1) spremeni v $X=A-A^2$. Spet moramo preveriti, da je to res rešitev.

Kombinatorika in verjetnost sta eni izmed področij, iz katerih so lahko naloge na tem tekmovanju, vendar pa se redko pojavijo. Tokrat je bila v reševanje ponujena naslednja verjetnostna naloga.

Naloga 2. Naj bosta n in k naravni števili in naj bo a poljubno nenegativno celo število. Naključno izberemo k-elementno podmnožico X množice $\{1,2,\ldots,k+a\}$ tako, da je vsaka k-elementna podmnožica izbrana enako verjetno (torej jo izberemo enakomerno), in podobno (spet enakomerno), neodvisno od izbrane podmnožice X, naključno izberemo n-elementno podmnožico Y množice $\{1,\ldots,k+n+a\}$.

Dokažite, da je verjetnost

$$\mathsf{P}\Big(\min(Y)>\max(X)\Big)$$

neodvisna od izbrane vrednosti parametra a.

Rešitev. Najprej opazimo, da je število vseh možnih izbir podmnožic (X,Y) enako $\binom{k+a}{k}\cdot\binom{k+n+a}{n}$.

Če želimo, da je $\min(Y)>\max(X)$, izberemo $n+k$ števil izmed $n+k+a$, k manjših števil razglasimo za množico X in n večjih za Y. Torej je ugodnih izbir za podmnožici X in Y $\binom{n+k+a}{n+k}$. Tako je iskana verjetnost enaka

$$\frac{\binom{n+k+a}{n+k}}{\binom{k+a}{k}\cdot\binom{n+k+a}{n}}=\frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

(preverimo tako, da binomske koeficiente razpišemo in pokrajšamo dobljene ulomke).

Tako izračunana verjetnost je neodvisna od a.

Druga rešitev. Če se nekaj da rešiti enostavno, se zagotovo da tudi zakomplicirati. Tako je veliko študentov razmišljalo zaporedno: najprej izberemo števila v X, kakorkoli že, nato pa števila v Y izbiramo izmed tistih, ki so večja od največjega v X. Torej moramo ločiti primere, koliko je največje število v množici X. Če je to število m, potem za X (poleg njega) izberemo še $k-1$ števil izmed števil od 1 do $m-1$, za Y pa izberemo n števil izmed $m+1, m+2, \ldots, k+n+a$. Torej imamo $\binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}$ ugodnih izbir za X in Y, pri katerih je največje število v X enako m. Da dobimo vse možne ugodne izbire, samo še seštejemo po m:

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}.$$

Kombinatorično že znamo sešteti to vsoto, saj preštevamo vse $n+k$ velike podmnožice množice z $k+n+a$ elementi (pri čemer v vsoti ločimo, katero vrednost zavzame k-to število). Vendar bi v tem primeru razmislek naredili kot v prvi rešitvi. Alternativa je, da se vsote lotimo računsko. Tako sedaj sledijo trije načini, kako sešteti to vsoto. Vse tri so uporabili študenti. Vsi trije so napačni. Pozoren bralec bo napake zagotovo odkril sam.

Prvi način. Seveda lahko preverimo, kaj se zgodi pri $a = 0$. Vsota je enaka le enemu členu, torej

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m-1}{k-1} \cdot \binom{k+n+a-m}{n} = \binom{k-1}{k-1} \cdot \binom{k+n-k}{n} = 1\,,$$

kar pomeni, da je

$$\mathsf{P}\Big(\min(Y) > \max(X)\Big) = \frac{1}{\binom{k+0}{k} \cdot \binom{n+k+0}{n}} = \frac{1}{\binom{n+k}{n}}$$

Ker v rezultatu ne nastopa a, je iskana verjetnost neodvisna od a.

Drugi način. Če nekaj velja za vse a, je možno poskusiti tudi indukcijo. Poskusov na to temo je bilo veliko. Vsem je skupno to, da izraz za $a+1$ preoblikujejo (recimo, uporabijo Pascalovo enakost za binomski koeficient), nato pa bodisi nekaj spregledajo bodisi nekaj opazijo, kar ne drži in kar jih pripelje do želenega rezultata. Podrobnosti spustimo, podoben sistem reševanja si oglejmo v naslednjem načinu.

Tretji način. Ta je še posebej inovativen. Najprej naredimo malce drugačen razmislek, kako izberemo obe ugodni množici. Izbrali bomo k števil izmed prvih m ter n števil izmed zadnjih $k+n+a-m$, torej je treba sešteti

$$\sum_{m=k}^{k+a} \binom{m}{k} \cdot \binom{k+n+a-m}{n}.$$

Števìlni se spomnimo enakosti

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r},$$

ki je (pri verjetnosti) povezana s hipergeometrijsko porazdelitvijo, ima pa tudi posebno ime: Vandermondeova enakost (uporabljene črke so nerodne, vendar je to točno oblika, kot je na Wikipediji). Namesto n raje pišimo $t-m$ in seštevajmo po j, da dobimo

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{m}{j}\binom{t-m}{r-j}=\binom{t}{r},$$

sedaj pa lahko preimenujemo spremenljivke in dobimo ($m\to k+j$, $r\to a$, $t\to k+n+a$, še vedno seštevamo po j):

$$\sum_{j=0}^{a}\binom{k+j}{j}\binom{k+n+a-(k+j)}{a-j}=\binom{k+n+a}{a},$$

torej smo dobili vsoto

$$\sum_{j=0}^{a}\binom{k+j}{j}\binom{n+a-j}{a-j}=\binom{k+n+a}{a}.$$

Za novo spremenljivko $m=j+k$ dobimo

$$\sum_{m=k}^{k+a}\binom{m}{m-k}\binom{n+a-m+k}{a-m+k}=\binom{k+n+a}{a}.$$

Oziroma

$$\sum_{m=k}^{k+a}\binom{m}{k}\binom{n+a-m+k}{n}=\binom{k+n+a}{a}.$$

Spet smo pravilno rešili nalogo: ko pokrajšamo vse člene, je končni rezultat neodvisen od a.

Zanimivo, kako se pogosto dve napaki ravno pokrajšata, da dobimo pravi rezultat.

Še četrti način. S tem je bilo sploh veliko problemov pri ocenjevanju. Namreč, zelo veliko študentov je zapisalo, da je

$$\sum_{m=k}^{k+a}\binom{m-1}{k-1}\cdot\binom{k+n+a-m}{n}=\binom{k+n+a}{a}$$

po znani formuli. Kateri, niso zapisali. Komisija se je strinjala, da so verjetno nekateri študenti res že slišali za ustrezno enakost (predložen je bil celo učbenik kombinatorike, kjer je ustrezna enačba dokazana na sedmi strani, pred Vandermondovo). Kako ločiti med tistimi, ki to enakost poznajo, in tistimi, ki je ne, je ostalo neodgovorjeno vprašanje. Tako pri vsej objektivnosti ocenjevanja s tremi ocenjevalci vsakega izdelka še vedno ostaja subjektivni del.

Naslednja naloga išče dobra zaporedja.

Naloga 3. Rečemo, da je pozitivno realno število d *dobro*, če obstaja zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots \in (0, d)$, tako da za vsak n točke $a_1, \ldots, a_n$ razdelijo interval $[0, d]$ na podintervale dolžine največ $1/n$. Določite

$$\sup \Big\{ d \;\Big|\; d \text{ je dobro} \Big\}.$$

Rešitev. Naj bo $d^\star = \sup\{d \mid d \text{ je dobro}\}$. Pokazali bomo, da je $d^\star = \ln(2) \doteq 0{,}693$ (kar je recimo več kot $\frac{1}{2}$, kar je kot zgornjo mejo našlo kar nekaj tekmovalcev).

(a) $d^\star \leq \ln 2$:

Naj bo d dobro število in naj bo $a_1, a_2, \ldots$ ustrezno zaporedje za to število. Vemo, da vsako končno zaporedje $a_1, \ldots, a_n$ razdeli interval $[0, d]$ na $n + 1$ delov z dolžino največ $1/n$. Naj bodo $0 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \cdots \leq \ell_{n+1}$ dolžine teh intervalov. Za vsak $k = 1, \ldots, n$ velja, da ko dodamo naslednjih k členov zaporedja, torej $a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$, vsaj $n + 1 - k$ intervalov ostane nespremenjenih in imajo torej nespremenjene dolžine. Torej mora veljati $\ell_{n+1-k} \leq \frac{1}{n+k}$, zato pa je

$$d = \ell_1 + \cdots + \ell_{n+1} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Ko pošljemo $n \to \infty$, desna stran konvergira k $\ln(2)$, od koder dobimo želeno neenakost $d \leq \ln(2)$.

(b) $d^\star \geq \ln 2$:

Najti moramo zaporedje a_i, ki ustreza pogoju o delitvi intervala $(0, d)$ in za katerega je $\sup a_i = \ln 2$. Opazimo

$$\begin{aligned} \ln 2 = \ln 2n - \ln n &= \sum_{i=1}^{n} (\ln(n+i) - \ln(n+i-1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+i-1}\right). \end{aligned}$$

Ideja je, da člene vsote enačimo z dolžinami intervalov, ki jih dobimo, če v interval $(0, \ln 2)$ dodamo $n-1$ točk. Seveda velja tudi, da je največja dolžina enaka $\ln(1+1/n)$, kar je manj od $1/n$.

Ko v interval dodamo še eno točko, razbijemo najdaljši interval na dva manjša kosa, tako da v vsoti člen $\ln(1+1/n)$ nadomestimo z vsoto $\ln(1+1/(2n))$ in $\ln(1+1/(2n+1))$, saj je

$$\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Tako dobimo postopek dodajanja točk. Za $n=2$ dobimo prvo točko, $a_1=\ln\frac{3}{2}$ in interval $(0,\ln 2)$ razpade na dva intervala, $(0,\ln\frac{3}{2})$ in $(\ln\frac{3}{2},\ln 2)$. Vzamemo večjega, vanj dodamo točko tako, da se interval dolžine $\ln\frac{3}{2}$ razbije na dva kosa, dolga $\ln\frac{5}{4}$ in $\ln\frac{6}{5}$, torej je $a_2=\ln\frac{5}{4}$. Nato interval dolžine $\ln\frac{4}{3}$ razbijemo na dva z dolžinama $\ln\frac{7}{6}$ in $\ln\frac{8}{7}$, tako je recimo $a_3=\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{7}{6}=\ln\frac{7}{4}$. Na isti način dobimo $a_4=\ln\frac{9}{8}$, $a_5=\ln\frac{11}{8}$, $a_6=\ln\frac{13}{8}$, $a_7=\ln\frac{15}{8}$, $a_8=\ln\frac{17}{16},\ldots$.

Za konec pa najlepša naloga. Zakaj najlepša? Recimo, ker je kratka, z enostavno formulacijo, ki jo lahko razume tudi marsikateri nematematik:

Naloga 4. Koliko največ enotskih vektorjev lahko izberemo v $\mathbb{R}^n$, da bosta med poljubnimi tremi izmed njih vsaj dva pravokotna?

Kot informacija: z nalogo je povezan Paul Erdős.

Namigi. Rešitev je seveda $2n$. Izberemo lahko dve različni ortonormirani bazi, vsaka ima n vektorjev, in ko izberemo tri, sta zagotovo dva iz iste baze in torej pravokotna. Naloga je torej pokazati, da ne moremo imeti $2n+1$ takih vektorjev. Ko pogledamo Gramovo matriko teh vektorjev, ugotovimo, da je z njo nekaj narobe. Kaj točno, lahko poskusite premisliti sami.

Še informacija: na tekmovanju je bil dosežen povprečen rezultat pri prvi nalogi 6,5, pri drugi 4,7, pri tretji 1,1 in pri četrti 0,04 točke, od 10 možnih. Zmagovalec je imel 70 točk od 80 možnih, pri četrti nalogi je dobil 0 točk.

Kogar zanima uradna rešitev zadnje naloge ali pa bi se rad poskusil v reševanju še kakšne naloge s tekmovanja, si jih lahko ogleda na prej omenjeni internetni strani tekmovanja `www.imc-math.org.uk`.

28. tekmovanje je bilo kar se tiče tekmovalnega uspeha za naše študente res popolno, kot je 28 popolno število. Vseeno na podoben uspeh upamo prej kot čez 468 let.

Gregor Šega