LUNEBURGOVA LEČA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 49Sxx, 53A04, 78A05

V prispevku je predstavljena Luneburgova leča, v kateri se žarki enobarvne svetlobe širijo po eliptičnih lokih. Izpeljane so nekatere lastnosti ustreznih elips.

THE LUNEBURG LENS

In this contribution the Luneburg lens wherein the monocromatic light rays propagate along elliptical arcs is presented. Some properties of the corresponding ellipses are derived.

Uvod

Običajno v optiki najlaže obravnavamo probleme, pri katerih imajo optična sredstva lomni količnik, ki se ne spreminja v prostoru in času. V prispevku bomo skoz in skoz predpostavljali, da veljajo pravila geometrijske optike, kar pomeni, da bodo dimenzije optičnih teles zelo velike v primerjavi z valovno dolžino uporabljene svetlobe, za katero bomo ves čas predpostavljali, da je enobarvna. Ogledali si bomo kroglo, ki je izdelana iz optične snovi tako, da je njen lomni količnik v vsaki točki funkcija samo razdalje te točke od središča krogle. Opazovali pa bomo samo tiste žarke, ki prodirajo skozi kroglo, ne pa tistih, ki se na njenem robu odbijajo. Videli bomo, da nekateri dobljeni rezultati spominjajo na znane zakone mehanike.

Najprej bomo uporabili običajni Fermatov princip v optiki, ki pravi, da *v optičnem sistemu prepotuje svetloba svojo pot od točke A do točke B v najkrajšem času*. Če smo natančni, bi morali zapisati v *stacionarnem času*, ker se v nekaterih primerih lahko zgodi, da stacionarni čas ni najmanjši, ampak *lokalno* največji (več o tem v [2]). Vzemimo, da se svetloba širi v optičnem sredstvu z lomnim količnikom, ki je zvezno odvisen od točke. V izbranem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ označimo lomni količnik v točki T, ki jo določa njen krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, z $n(\mathbf{r}) = n(x, y, z)$. Funkcija $\mathbf{r} \mapsto n(\mathbf{r})$ naj ima zvezne vse parcialne odvode in naj bo navzdol omejena z 1 na obravnavanem območju. Naj točki A do B povezuje gladka krivulja $\mathcal{K}$, za katero predpostavljamo, da je parametrizirana s parametrom ξ:

$$\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)).$$

Točki A naj ustreza parameter ξ_A, točki B pa ξ_B, katerikoli točki T na krivulji pa ξ, tako da velja $\xi_A \leq \xi \leq \xi_B$. Z $\ell(\xi)$ označimo naravni parameter krivulje $\mathcal{K}$, to je njeno dolžino od točke A do točke T. Veljata zapisa:

$$\ell(\xi) = \int_{\xi_A}^{\xi} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right| d\tau, \quad \frac{d\ell}{d\xi}(\xi) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right|.$$

Hitrost svetlobe v praznem prostoru naj bo c_0, v točki T pa je po fizikalni definiciji lomnega količnika enaka $c_0/n(\mathbf{r})$. Hitrost svetlobe v optičnem sredstvu je torej zvezno odvisna od točke, tudi vzdolž krivulje se zvezno spreminja. Na splošno se svetloba v optičnem sredstvu s krajevno spremenljivim lomnim količnikom ne širi premočrtno. Svetlobni žarki se ukrivijo.

Uporaba variacijskega računa

Razmišljajmo takole: Zelo kratek lok dolžine $\Delta\ell$ na krivulji v okolici točke, ki jo določa vektor $\mathbf{r}$, kjer se lahko vzame, da je lomni količnik približno stalen, prepotuje svetloba v času $\Delta t = \Delta\ell/(c_0/n(\mathbf{r})) = n(\mathbf{r})\Delta\ell/c_0$. Ko vse Δt po krivulji seštejemo, nato pa vse $\Delta\ell$ manjšamo proti nič, dobimo celotni čas $t_{AB,\mathcal{K}}$ potovanja svetlobe po krivulji $\mathcal{K}$ od točke A do točke B:

$$t_{AB,\mathcal{K}} = \frac{1}{c_0} \int_{A,\mathcal{K}}^{B} n(\mathbf{r})\, d\ell.$$

Količino $s_{AB,\mathcal{K}} = c_0 t_{AB,\mathcal{K}}$ imenujemo *optična pot* od točke A do točke B vzdolž krivulje $\mathcal{K}$. Fermatov princip zahteva, da najdemo tako krivuljo $\mathcal{K}$, za katero bo optična pot

$$s_{AB,\mathcal{K}} = \int_{A,\mathcal{K}}^{B} n(\mathbf{r})\, d\ell = \int_{\xi_A}^{\xi_B} n(\mathbf{r}(\xi)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right| d\xi$$

minimalna. Naloga je tipičen primer iskanja ekstremale funkcionala

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \int_{\xi_A}^{\xi_B} n(\mathbf{r}(\xi)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}(\xi) \right| d\xi$$

v variacijskem računu. Podintegralska funkcija, s katero imamo opravka, je

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = n(\mathbf{r})\, |\mathbf{p}|\,,$$

kjer je $\mathbf{p} = d\mathbf{r}/d\xi = (x', y', z')$. Pri tem smo označili $x' = dx/d\xi, y' = dy/d\xi, z' = dz/d\xi$. V daljšem, koordinatnem zapisu je

$$\mathcal{L}(x, y, z; x', y', z') = n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Ekstremalo $\mathcal{K}$ iščemo med rešitvami sistema Euler-Lagrangeevih enačb (za poglobljen študij variacijskega računa je na razpolago na primer delo [1]):

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{d}{d\xi}\frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Po krajšem računu dobimo v vektorski obliki enačbo, ki velja vzdolž ekstremale:

$$n(\mathbf{r})\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1}\frac{d}{d\xi}\left(n(\mathbf{r})\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1}\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Leva stran enačbe (1) je zapletena. Če pa sledimo [2, 3], pa tudi [1], jo lahko dodobra poenostavimo. Iskana ekstremala mora namreč biti neodvisna od svoje ekvivalentne parametrizacije. Denimo, da je parametrizirana z naravnim parametrom ℓ, za katerega velja $|d\mathbf{r}/d\ell| = 1$. Izberimo za parameter ξ rešitev diferencialne enačbe $d\xi/d\ell = 1/n(\mathbf{r}(\ell))$ pri začetnem pogoju $\xi(0) = \xi_A$. Potem je

$$n\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right|^{-1} = n\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\ell}\right|^{-1}\frac{d\xi}{d\ell} = n\frac{d\xi}{d\ell} = 1$$

in

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\ell}\right|\frac{d\ell}{d\xi} = \frac{d\ell}{d\xi} = n.$$

Tedaj dobi diferencialna enačba (1) posebno preprosto obliko, in sicer

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}), \tag{2}$$

ki velja pri pogoju

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right| = n(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Enačba (2) v primeru, ko je parameter ξ čas, spominja na Newtonov zakon delca z maso $m = 1$ v potencialnem polju.

Pomembni so primeri, ko je lomni količnik odvisen le od dolžine $r = |\mathbf{r}|$ vektorja $\mathbf{r}$. Tedaj je za $r \neq 0$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} n^2(r) = n(r)n'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{4}$$

Omejili se bomo na primer, ko ima funkcija $r \mapsto n(r)n'(r)/r$ limito v točki 0, tako da (4) velja tudi za $r = 0$. Tedaj smemo zapisati relacijo

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right) = \mathbf{0}.$$

To pa pomeni, da obstaja tak konstanten, od ξ neodvisen vektor $\mathbf{G}$, da velja

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} = \mathbf{G}. \tag{5}$$

Za $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ je ekstremala premica, za $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$ pa neka ravninska krivulja. Enačbi (5) ustreza pri gibanju planeta okoli Sonca izrek o stalnosti ploščinske hitrosti. V obeh primerih lahko potem obravnavamo ravninski primer diferencialne enačbe (2). Vpeljemo ravninski koordinatni sistem Oxy v ravnini, ki je pravokotna na vektor $\mathbf{G}$. Diferencialna enačba (2) razpade na sistem

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = n(r)n'(r)\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = n(r)n'(r)\frac{y}{r},$$

kjer je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pri tem pa seveda velja pogoj (3) $n(r) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Vzemimo kroglo, ki ima brez škode za splošnost polmer 1, izdelana pa je iz optičnega sredstva, kateremu se lomni količnik spreminja po zakonu $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$, pri čemer smo koordinatno izhodišče našega sistema $Oxyz$ postavili v središče krogle. Lomni količnik v središču krogle je enak $\sqrt{2}$, na površini krogle pa je enak 1. Zunanjost krogle naj ima lomni količnik enak 1, tako da je $r \mapsto n(r)$ zvezna funkcija na vsem prostoru. Taka krogla je *Luneburgova leča.*

Rudolf Karl Luneburg (1903–1949) je bil rojen v Nemčiji s priimkom Lüneburg, doktoriral je leta 1930 iz teorije potenciala v Göttingenu, pred nacizmom se je zatekel najprej na Nizozemsko, od tam pa leta 1935 v ZDA, kjer je nekaj časa delal na univerzi, v glavnem pa se je ukvarjal z optiko. Njegovo temeljno delo je *Mathematical theory of optics*, ki je v obliki predavanj izšlo leta 1944, nato pa z istim naslovom še v knjižni obliki leta 1964 (glej [3]). V ZDA se je avtor pisal najprej Lueneburg, nato Luneburg, včasih pa ga napačno navajajo celo kot Luneberg. Zahvaljujoč njegovemu temeljnemu delu pa se je v svetu najbolj uveljavil priimek Luneburg.

Potek žarkov v Luneburgovi leči

Z odvajanjem relacije $n^2(r) = 2 - r^2$ takoj dobimo $n(r)n'(r) = -r$. Ravninski primer nam omogoča, da lečo študiramo v koordinatnem sistemu Oxy, ki leži v poljubni ravnini skozi središče krogle. Ustrezni diferencialni enačbi sestavljata preprost sistem

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = -x, \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = -y, \tag{6}$$

ki ima splošno rešitev

$$x(\xi) = \alpha \cos \xi + \beta \sin \xi, \quad y(\xi) = \gamma \cos \xi + \delta \sin \xi, \tag{7}$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ realne konstante, ki pa zaradi pogoja (3) niso poljubne. Iz zahteve $n^2(r) = 2 - r^2 = 2 - x^2 - y^2 = x'^2 + y'^2$ namreč dobimo

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2. \tag{8}$$

Vpeljimo matriko in njeno determinanto

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad d = \det M = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Primer $d = 0$ ni zanimiv, saj sta tedaj rešitvi $x(\xi)$ in $y(\xi)$ linearno odvisni, ekstremala v Luneburgovi leči tedaj poteka po premici. Primer $d \neq 0$ pa nam omogoča iz (7) izraziti $\cos \xi$ in $\sin \xi$:

$$\cos \xi = \frac{\delta x - \beta y}{d}, \quad \sin \xi = \frac{\alpha y - \gamma x}{d}. \tag{9}$$

Po izločitvi parametra ξ iz (9) dobimo družino stožnic

$$(\delta x - \beta y)^2 + (\alpha y - \gamma x)^2 = d^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2,$$

na katerih ležijo iskane ekstremale. Iz razvite oblike

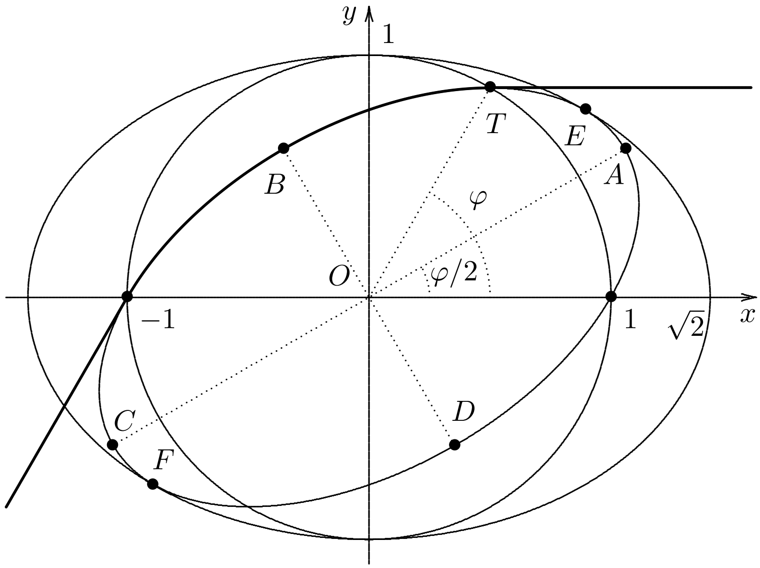
$$(\gamma^2 + \delta^2)x^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)xy + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 = d^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2, \tag{10}$$

izračunamo diskriminanto kvadratne forme na levi strani enačbe (10):

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = -(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = -d^2 < 0.$$

To pomeni, da je dobljena stožnica elipsa, ki je na splošno zasukana okoli koordinatnega izhodišča. Elipso, ki jo dobimo kot rešitev sistema (7), imenujemo *Hookova elipsa*. Po Robertu Hooku (1635–1703) se elipse imenujejo zato, ker imamo vsako od enačb (6) lahko za enačbo gibanja vzmetnega nihala, pri katerem za vzmet velja Hookov zakon. Hookove elipse so tudi poseben primer Lissajousovih krivulj. Spomnimo se, da Lissajousovo krivuljo opisuje točkasto telo, ki niha sinusno v dveh med seboj pravokotnih smereh, na splošno z različnima krožnima frekvencama ω_1 in ω_2. Matematično tako gibanje opišemo s funkcijama časa t:

$$x(t) = \alpha \cos \omega_1 t + \beta \sin \omega_1 t, \quad y(t) = \gamma \cos \omega_2 t + \delta \sin \omega_2 t. \tag{11}$$



Slika 1. Potek žarka skozi Luneburgovo lečo.

Za $\omega_1 = \omega_2$ in $\xi = \omega_1 t$ dobimo ravno Hookovo elipso.

Ekstremala v Luneburgovi leči, v preseku znotraj enotskega kroga, torej poteka po loku, ki je del Hookove elipse (slika 1).

Naj svetlobni žarek pada na enotsko krožnico v točki $T(\cos\varphi, \sin\varphi)$, kjer je φ polarni kot točke T, vzporedno z osjo x. Smiselno je vzeti pogoja $|\varphi| < \pi/2$ in $\varphi \neq 0$. Za $\varphi = 0$ se žarek ne lomi in poteka skozi središče kroga od točke $(1, 0)$ do točke $(-1, 0)$, kjer lečo zapusti. Žarek namreč tedaj pravokotno seka namišljene krožnice, vzdolž katerih se lomni količnik ne spreminja.

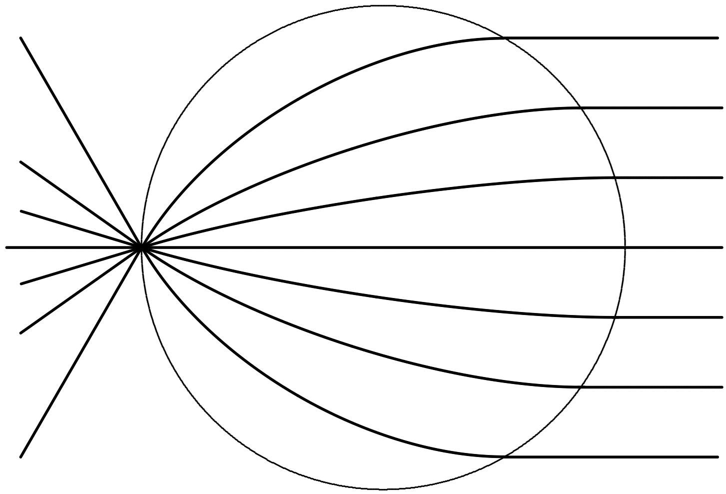
Hookove elipse in Luneburgova leča

Enačbo elipse (10) z vpeljavo novih koeficientov

$$a = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{d^2}, \; b = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{d^2}, \; c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2}$$

predelamo v enostavnejšo obliko:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$



Slika 2. Vzporeden snop žarkov Luneburgova leča zbira v točki.

Iz pogoja (8) dobimo najprej $d^2(a+c)=2$, iz enakosti

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2+(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$$

pa $ac=b^2+1/d^2$. Nazadnje najdemo relacijo:

$$ac-b^2=\frac{a+c}{2}. \tag{12}$$

Žarek pade vzporedno z osjo x na enotsko krožnico v točki $T(\cos\varphi,\sin\varphi)$, kjer se zaradi enakosti lomnih količnikov zunaj kroga in na njegovem robu ne lomi. V točki T je tangenta na ekstremalo vzporedna z osjo x, kar pomeni, da v točki T velja $ax+by=0$. Iz obeh podatkov imamo:

$$a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi=1,\quad a\cos\varphi+b\sin\varphi=0.$$

Iz teh zvez hitro dobimo $c=1+(a+1)\operatorname{ctg}^2\varphi$ in $b=-a\operatorname{ctg}\varphi$. Izraza za b in c vstavimo v (12) in brez težav izrazimo:

$$a=1,\quad b=-\operatorname{ctg}\varphi,\quad c=1+2\operatorname{ctg}^2\varphi.$$

To pomeni, da lahko enačbo elipse zapišemo kot

$$x^2-2xy\operatorname{ctg}\varphi+(1+2\operatorname{ctg}^2\varphi)y^2=1 \tag{13}$$

ali pa kot

$$x^2 + 2bxy + (1 + 2b^2)y^2 = 1. \tag{14}$$

Dobili smo enoparametrično družino elips in preprost račun pove, da ima družina za ogrinjačo elipso z enačbo $x^2/2 + y^2 = 1$. Vsaka elipsa iz družine poteka skozi točki $(-1, 0)$ in $(1, 0)$, ki sta ravno gorišči ogrinjače. Najbolj zanimiva pa je ugotovitev, da Luneburgova leča vse vzporedne žarke, ki padajo nanjo, zbere v isti točki na nasprotni strani leče (slika 2).

Izračunajmo še kot izstopa žarka. Z odvajanjem relacije (14) dobimo:

$$y'(x, y) = -\frac{x + by}{bx + (1 + 2b^2)y}.$$

V izstopni točki $(-1, 0)$ se odvod poenostavi v

$$y'(-1, 0) = -\frac{1}{b} = \operatorname{tg}\varphi.$$

To pomeni, da žarek izstopa pod kotom, ki je enak polarnemu kotu vstopne točke T.

Kot ϑ zasuka elipse (14) izračunamo s formulo

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2b}{a - c} = -\frac{1}{b} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Kot zasuka je torej $\vartheta = \varphi/2$.

Temena elipse (13) najpreprosteje izračunamo kot presečišča premic $y = x \operatorname{tg}(\varphi/2)$ in $y = -x \operatorname{ctg}(\varphi/2)$ s to elipso:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \cos\varphi), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right), \quad C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \cos\varphi), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right),$$

$$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\varphi), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right), \quad D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\varphi), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right).$$

Polosi elipse sta dolgi

$$\sqrt{2}\cos(\varphi/2) \quad \text{in} \quad \sqrt{2}|\sin(\varphi/2)|,$$

njena ploščina pa je enaka $\pi|\sin\varphi|$. Nekoliko bolj zahtevno pa je računanje, kje se elipsa dotika ogrinjače družine (14), to je elipse $x^2/2 + y^2 = 1$. To se zgodi v točkah

$$E\left(\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}, \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}\right) \quad \text{in} \quad F\left(-\frac{2\cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}, -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}\right).$$

Do zgornjega rezultata najlaže pridemo tako (glej na primer [5]), da rešimo sistem enačb

$$x^2 + (2y^2 - 2) = 0, \quad x^2 + 2byx + (1 + 2b^2)y^2 - 1 = 0$$

z uporabo rezultante $R(p, q)$ polinomov

$$p(x) = x^2 + (2y^2 - 2), \quad q(x) = x^2 + 2byx + (1 + 2b^2)y^2 - 1,$$

pri čemer je y parameter:

$$R(p,q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2y^2 - 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y^2 - 2 \\ 1 & 2by & (1 + 2b^2)y^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2by & (1 + 2b^2)y^2 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ((1 + 2b^2)y^2 - 1)^2 = 0.$$

Nato rešitve ni več težko najti. Če polarni kot točke E označimo s ψ (slika 1), potem ni težko priti do povezave $2 \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi$. Prav tako očitno velja, da sta daljša in krajša polos elipse v razmerju $|\operatorname{ctg}(\varphi/2)|$ in da je razdalja od središča elipse do njenih gorišč enaka $\sqrt{2 \cos \varphi}$. Gorišči elipse sta v točkah

$$(\pm\sqrt{2 \cos \varphi} \cos(\varphi/2), \pm\sqrt{2 \cos \varphi} \sin(\varphi/2)).$$

Takoj opazimo, da ležita na Bernoullijevi lemniskati $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, ki ima gorišči v točkah $(\pm 1, 0)$. Numerična ekscentričnost ε elipse in njen parameter p (polovica dolžine na daljšo os elipse pravokotne tetive skozi gorišče, glej na primer [6]) sta

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\cos(\varphi/2)}, \quad p = \sqrt{2} \sin(\varphi/2) \operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Uporaba

Nazadnje se še vprašamo, ali ima Luneburgova leča tudi kakšno uporabno vrednost. Leče, ki zbirajo žarke v eni točki, so pomembne, ker je v tej točki svetloba zelo ojačana. Isti princip pa deluje tudi pri dielektrični Luneburgovi leči, saj so telekomunikacijski in drugi elektromagnetni valovi tudi podvrženi odboju in lomu. Luneburgova leča elektromagnetna valovanja z majhno valovno dolžino v primerjavi s premerom leče, na primer s satelitov, zbere in ojača praktično v točki, z različnih satelitov pa v različnih točkah. Z isto lečo torej lahko spremljamo hkrati več satelitov. Luneburgova leča je uporabna tudi v obratni smeri: na lečo prislonjen izvir valovanja usmeri v snop vzporednih žarkov. Razne mobilne postaje in celo počitniške prikolice ter avtodomi so pogosto opremljeni z Luneburgovo lečo kot anteno.

Kako tehnično izdelati Luneburgovo lečo? V bistvu se moramo zadovoljiti z bolj ali manj natančnimi približki. Po tankih krogelnih plasteh nanašamo optično snov oziroma dielektrik, tako da v bistvu funkcijo $r \mapsto n(r)$ nadomestimo z odsekoma konstantno funkcijo. Velikost in maso Luneburgove leče lahko razpolovimo, če namesto krogle vzamemo polkroglo, na njen ravni del pa namestimo ravno zrcalo, ki žarke odbije proti ukrivljenemu površju polkrogle, kjer se zberejo. Raziskav v zvezi z Luneburgovo lečo ne manjka, na kar nas opozarja veliko spletnih strani. Tudi člankov v znanstvenih in strokovnih revijah je precej, če samo navedemo [4]. Kakšne pa so v resnici Luneburgove leče, pa si lahko bralec sam ogleda na svetovnem spletu, kjer najdemo precej skic in fotografij.

Sklepne besede

Spremenljivi lomni količnik $n(r) = \sqrt{2 - r^2}$, Hookov lomni profil, je samo eden, ki se uporablja in smo si ga v prispevku nekoliko natančneje ogledali. Lomnih profilov si lahko izmislimo nešteto. Pomemben je na primer tudi Newtonov lomni profil $n(r) = \sqrt{2/r - 1}$. Ustrezna leča, Eatonova leča, je tudi krogla in obrne snop vzporednih žarkov tja, od koder so prišli. Diferencialna enačba (4) preide v obliko, ki ustreza gibanju delca v gravitacijskem polju. Teorija takih leč je obširna. Kot lahko razberemo iz [2, 3], je v njej veliko matematike in fizike, na primer analitična geometrija, diferencialna geometrija, diferencialne enačbe, variacijski račun, kompleksna analiza, analitična mehanika, teorija relativnosti.

LITERATURA

[1] F. Križanič, *Diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

[2] U. Leonhardt, T. Philbin, *Geometry and light: the science of invisibility*, Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[3] R. K. Luneburg, *Mathematical theory of optics*, University of California Press, Berkely, Los Angeles, 1964.

[4] M. M. Mattheakis, G. P. Tsironis in V. I. Kovanis, *Luneburg lens waveguide networks*, Journal of optics **14** (2012), št. 11, 1–8.

[5] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

[6] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – Založništvo, Ljubljana, 2008.