PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 5
Strani 274–280

Edvard Kramar:

DIOFANTSKE ENAČBE V ELEMENTARNI GEOMETRIJI

Ključne besede: matematika, teorija števil, geometrija, diofantska enačba, pitagorejske trojice, trikotnik.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/947-Kramar.pdf

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

DIOFANTSKE ENAČBE V ELEMENTARNI GEOMETRIJI

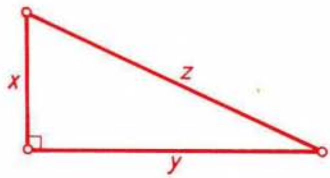
Diofantske enačbe so enačbe, ki jih rešujemo v okviru celih števil. Ogledali si bomo nekaj takih enačb s tremi neznankami, ki imajo svoj izvor ali pa ponazoritev v elementarni geometriji. Proučili bomo nekatere nelinearne enačbe in poskušali najti vsaj nekaj rešitev za vsak primer.

V prvih petih problemih bomo naleteli na enačbe oblike

$$x^a + y^a = z^a$$

kjer bo a zavzel nekatere racionalne vrednosti.

Problem 1. Določi trojico naravnih števil (x, y, z), ki predstavljajo dolžino stranic pravokotnega trikotnika.



Iz slike takoj razberemo enačbo za neznane količine

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2} \tag{1}$$

Gre za iskanje znamenitih *pitagorejskih trojic,* ustrezni trikotnik imenujemo *pitagorejski trikotnik.* Trojica (x, y, z) je primitivna, če števila v njej nimajo skupnega delitelja. Vse primitivne pitagorejske trojice dobimo iz zvez

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2 \tag{1a}$$
$$(u, v \in \mathbb{N},\ u > v \text{ in tuji})$$

kjer $\mathbb{N}$ pomeni množico naravnih števil. Ker so ti obrazci zelo poznani, jih tu ne bomo izpeljevali. Nekaj takih trojic je: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (15, 8, 17), ... Vse pitagorejske trojice dobimo z večkratniki primitivnih. O pitagorejskih trojicah je tudi Presek že nekajkrat pisal.

Obstaja še vrsta drugih obrazcev, ki dajo nekaj rešitev zgornje enačbe. Če na primer vstavimo $z = y + k$ v zgornjo enačbo, dobimo $x^2 = 2yk + k^2$. Izberimo najprej $k = 1$, tedaj je $x^2 = 2y + 1$, torej mora biti x liho število $x = 2n + 1$

in sledi $y = (x^2 - 1)/2 = 2n^2 + 2n$, $z = y + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. Dobimo pitagorejske trojice

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1, n \in \mathbb{N} \tag{1b}$$

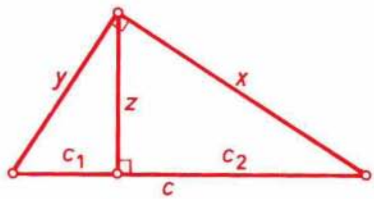
Lahko si zapomnimo tudi naslednji praktični napotek: izberi poljubno liho število $l \geqslant 3$ in izračunaj $x = l$, $y = (l^2 - 1)/2$, $z = (l^2 + 1)/2$. Mimogrede smo dokazali še dve trditvi:

1) Za vsako liho število $l \geqslant 3$ obstaja pitagorejski trikotnik, ki ima za dolžino katete to število.
2) Obstaja neskončno pitagorejskih trikotnikov, katerih hipotenuza je za 1 večja, kot meri ena od katet.

   Podobno bi dobili pri $k = 2$ pitagorejske trojice

$$x = 4n, \quad y = 4n^2 - 1, \quad z = 4n^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1c}$$

Problem 2. Določi pravokotni trikotnik, ki bo imel za kateti in za višino na hipotenuzi celoštevilsko vrednost.



Zapišimo znane zveze za pravokotni trikotnik (glej sliko): $x^2 + y^2 = c^2$, $x^2 = c_2c$, $y^2 = c_1c$, $z^2 = c_1c_2$. Iz njih sledi zveza $x^2y^2 = c_1c_2c^2$ oziroma $x^2y^2 = z^2(x^2 + y^2)$. Po deljenju z $x^2y^2z^2$ (saj so vsi $\neq 0$) dobimo

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \tag{2}$$

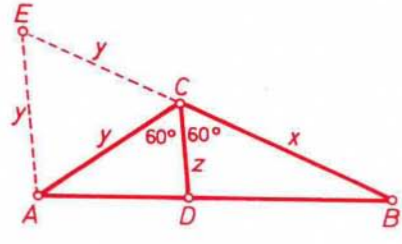
Poiščimo nekaj trojic, ki rešijo to enačbo v naravnih številih. Iz prejšnje enačbe najprej izrazimo $z = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ in opazimo, da mora biti izraz $x^2 + y^2$ popoln kvadrat. Rešitev iščimo torej v obliki zvez, ki smo jih srečali v prejšnjem problemu: $x = k(u^2 - v^2)$, $y = k.2uv$, $k, u, v \in \mathbb{N}$. Sledi $z = 2uv(u^2 - v^2)k/(u^2 + v^2)$ in tudi z bo celo število, če izberemo $k = u^2 + v^2$. S tem dobimo naslednjo dvoparametrično družino rešitev

$$x = u^4 - v^4, \quad y = 2uv(u^2 + v^2), \quad z = 2uv(u^2 - v^2); \; u, v \in \mathbb{N}, u > v \tag{2a}$$

Tako sta na primer (15, 20, 12) in (65, 156, 60) dve taki rešitvi. Opazimo, da je tudi c celoštevilski, in sicer je enak $c = (u^2 + v^2)^2$. Zgoraj bi lahko uporabili tudi nastavek, ki smo ga srečali v prejšnji točki: $x = t.l$, $y = t.(l^2 - 1)/2$, kjer je l liho število ($\geqslant 3$) in $t \in \mathbb{N}$, nato pa $z = t.l\,(l^2 - 1)/(l^2 + 1)$. Če izberemo $t = (l^2 + 1)/2$, dobimo trojice

$$x = l(l^2 + 1)/2,\ y = (l^4 - 1)/4,\ z = l(l^2 - 1)/2\ ;\ l = 2j + 1, j \in \mathbb{N} \qquad (2b)$$

Problem 3. Poišči naravna števila x, y in z tako, da bosta x in y dolžini stranic trikotnika, ki oklepata kot 120^0, z pa dolžina simetrale tega kota.



Če stranico BC podaljšamo za y (glej sliko), sta očitno trikotnika ABE in DBC podobna. Sledi $z : x = y : (x + y)$ oziroma $z = xy/(x + y)$ ali

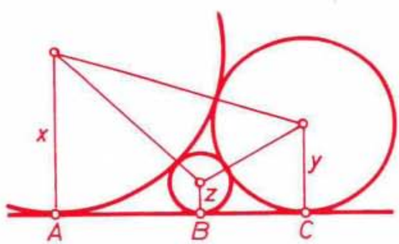
$$\boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}} \qquad (3)$$

Poskusimo najti nekaj rešitev te enačbe v naravnih številih. Uvedimo novi neznanki X in Y, ki sta s prejšnjima v zvezi $X = x + y$, $Y = x - y$. Izrazimo stari spremenljivki z novima $x = (X + Y)/2$, $y = (X - Y)/2$ in izraza vstavimo v našo enačbo ($X \neq Y$, ker $y \neq 0$). Po kratkem računu dobimo $4Xz = X^2 - Y^2$ ali $Y^2 + 4z^2 = (X - 2z)^2$. Opazimo, da moramo za Y, $2z$ in $X - 2z$ izbrati ravno pitagorejsko trojico. Ker je $2z$ sodo število, postavimo iz (1a): $Y = u^2 - v^2$, $2z = 2uv$ in $X - 2z = u^2 + v^2$. Torej $X = u^2 + v^2 + 2uv$, $Y = u^2 - v^2$, $z = uv$ in za prvotne neznanke dobimo rešitve

$$\boxed{x = u(u + v),\ y = v(u + v),\ z = uv;\ \ u, v \in \mathbb{N}} \qquad (3a)$$

Spotoma smo opazili, da sta X in Y že bila take parnosti, da sta tudi x in y celoštevilska. Zapišimo nekaj konkretnih rešitev za (x, y, z): $(2, 2, 1)$, $(6, 3, 2)$, $(12, 4, 3)$, ...

Problem 4. Določi tri naravna števila, ki so enaka radijem treh krogov, ki se drug drugega dotikajo; vsi krogi pa se dotikajo še skupne premice.



Iz slike razberemo zveze:

$\overline{AC}^2 + (x-y)^2 = (x+y)^2$, $\overline{AB}^2 + (x-z)^2 = (x+z)^2$, $\overline{BC}^2 + (y-z)^2 = (y+z)^2$. Sledi $\overline{AC} = 2\sqrt{xy}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{xz}$ in $\overline{BC} = 2\sqrt{yz}$. Prva razdalja je vsota drugih dveh, zato $\sqrt{xy} = \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$. Po deljenju s $\sqrt{xyz}$ dobimo

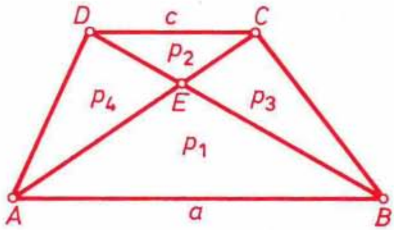
$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \tag{4}$$

Neskončno rešitev te enačbe v naravnih številih dobimo, če pišemo kar $x = X^2$, $y = Y^2$ in $z = Z^2$ in enačbo prevedemo na prejšnjo. Iz množice rešitev (3a) tako dobimo naslednje rešitve enačbe (4)

$$x = u^2(u+v)^2,\ y = v^2(u+v)^2,\ z = u^2v^2;\ u, v \in \mathbb{N} \tag{4a}$$

Nekaj trojic za iskane radije je tako: (4, 4, 1), (36, 9, 4), (144, 16, 9), ... Seveda pa so vsi večkratniki teh rešitev zopet rešitve.

Problem 5. Trapez $ABCD$ diagonali razdelita na štiri dele. Določi naravna števila p_1, p_2, p_3, p_4 in p tako, da bodo pomenila po vrsti ploščine posameznih delov in skupno ploščino.



Očitno je, da je $p_1 + p_4 = p_1 + p_3$, torej $p_4 = p_3$. Tako zadošča poiskati le štiri med njimi. Pri tem je $p = p_1 + p_2 + 2p_3$. Hitro se lahko prepričamo, da čim dosežemo za tri med njimi, da so naravna števila, je tudi četrto tako. To ni čisto očitno le v primeru, ko zagotovimo $p_1, p_2, p \in \mathbb{N}$, p_3 pa izračunamo iz zapisane zveze. Pa vzemimo ravno ta primer. Poiščimo zvezo med p_1, p_2 in p. Če označimo z v_1 in v_2 višini trikotnikov ABE oziroma ECD (glej sliko), velja $p_1 = av_1/2$, $p_2 = cv_2/2$ in $p = (a+c)(v_1+v_2)/2$. Upoštevajmo še podobnost omenjenih dveh trikotnikov pa dobimo $av_2 = cv_1$. Od tod sledi $p_1p_2 = av_1cv_2/4 = (av_2/2).(cv_1/2)$. Produkt enakih količin je enak izrazu p_1p_2, zato je $av_2/2 = cv_1/2 = \sqrt{p_1p_2}$. Če to upoštevamo v izrazu za p, dobimo $p = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1p_2}$, kar pa lahko zapišemo tudi v obliki $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} = \sqrt{p}$. Če pišemo $x = p_1$, $y = p_2$ in $z = p$, iščemo torej rešitve diofantske enačbe

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z} \tag{5}$$

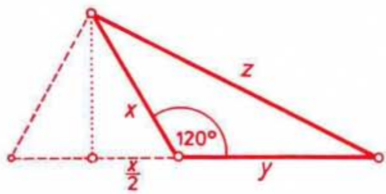
Nekaj rešitev lahko takoj zapišemo, če postavimo

$$x = u^2,\ y = v^2,\ z = (u+v)^2\ ;\ u, v \in \mathbb{N} \tag{5a}$$

Večkratniki teh so seveda tudi rešitve. Izkaže se, da v resnici dobimo z zgornjimi zvezami vse primitivne trojice, če sta u in v tuji, vendar tega tu ne utegnemo dokazovati. Dolžni smo še odgovor, ali je tudi $p_3 \in \mathbb{N}$. Zanj imamo dve zvezi, ki ju opazimo zgoraj: $p_3 = (p - p_1 - p_2)/2 = \sqrt{p_1 p_2}$, od koder sledi, da je tudi $p_3 \in \mathbb{N}$. Nekaj četvork za iskane ploščine (p_1, p_2, p_3, p) je: (1, 1, 1, 4), (4, 1, 2, 9), (9, 1, 3, 16), ...

V zadnjih dveh problemih si bomo ogledali še primer kvadratne diofantske enačbe z mešanim členom.

Problem 6. Poišči trojico naravnih števil, ki pomenijo dolžine stranic trikotnika z enim kotom 120^0.



Iz slike razberemo $z^2 - (\frac{x}{2} + y)^2 = (\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3})^2$ odkoder sledi enačba

$$x^2 + xy + y^2 = z^2 \tag{6}$$

V 3. letniku Preseka je bilo opisanih nekaj metod, ki so dale nekatere celoštevilske rešitve te enačbe. Tokrat bomo izpeljali obrazce za rešitve, ki bodo podobni obrazcem (1a). Zgornjo enačbo bomo prevedli na enačbo (1) z uvedbo novih neznank X, Y in Z, ki naj bodo s prejšnjimi v zvezi: $x = X$, $y = (-X + 2Y + Z)/2$, $z = (Y + 2Z)/2$. S preprostim računom potem preverimo zvezo

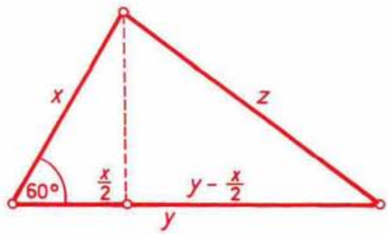
$$4\,(x^2 + xy + y^2 - z^2) = 3\,(X^2 + Y^2 - Z^2)$$

Od tod takoj sledi, da x, y in z zadoščajo enačbi (6) natanko tedaj, ko za X, Y in Z velja enačba (1). Zato iz (1a) postavimo: $X = u^2 - v^2$, $Y = 2uv$, $Z = u^2 + v^2$. Od tod po kratkem računu dobimo izraze za naše neznanke

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv + v^2,\ z = u^2 + uv + v^2;\ u, v \in \mathbb{N},\ u > v \tag{6a}$$

Naj pripomnimo, da bi bila obratna izbira za X in Y slabša, ker y in z ne bi bila vedno celoštevilska. Nekaj konkretnih rešitev zgornje enačbe je $(x, y, z) = (3, 5, 7), (8, 7, 13), (5, 16, 19), \ldots$

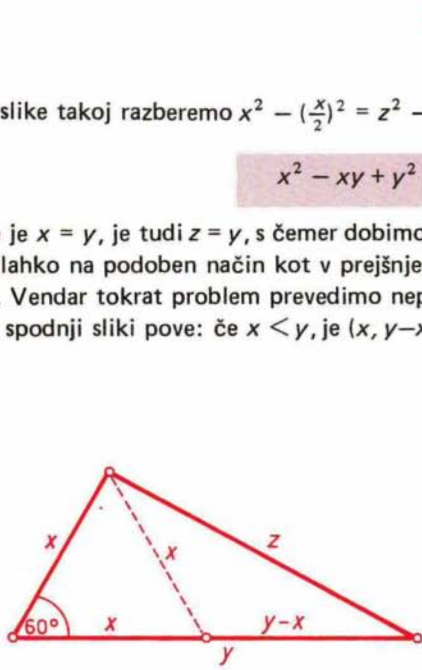
Problem 7. Določimo naravna števila x, y in z tako, da bodo dolžine stranic trikotnika z enim kotom 60^0.

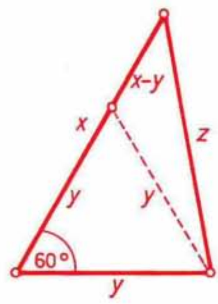


Iz slike takoj razberemo $x^2 - (\frac{x}{2})^2 = z^2 - (y - \frac{x}{2})^2$, kar nam po ureditvi da

$$x^2 - xy + y^2 = z^2 \tag{7}$$

Če je $x = y$, je tudi $z = y$, s čemer dobimo enakostranične trikotnike. Za $x \neq y$ bi lahko na podoben način kot v prejšnjem primeru problem prevedli na prvega. Vendar tokrat problem prevedimo neposredno na prejšnjega. Bežen pogled na spodnji sliki pove: če $x < y$, je $(x, y-x, z)$ trojica, ki pomeni rešitev proble-





ma 6 (s kotom 120^0), če pa je $x > y$, je $(x-y, y, z)$ taka trojica. Torej imamo iz obrazcev (6a): $x = u^2 - v^2 . y - x = 2uv + v^2, z = u^2 + uv + v^2$ ali pa $x - y = u^2 - v^2, y = 2uv + v^2, z = u^2 + uv + v^2$. Od tod dobimo skupaj z enakostraničnimi trikotniki troje obrazcev za rešitve diofantske enačbe (7)

$$x = u,\ y = u,\ z = u;\ u \in \mathbb{N} \tag{7a}$$

$$x = u^2 - v^2,\ y = u^2 + 2uv,\ z = u^2 + uv + v^2;\ u, v \in \mathbb{N},\ u > v \tag{7b}$$

$$x = u^2 + 2uv,\ y = v^2 + 2uv,\ z = u^2 + uv + v^2,\ u, v \in \mathbb{N}, u > v \tag{7c}$$

Zapišimo nekaj rešitev, ki jih dobimo po izmenični uporabi zgornjih izrazov. $(x, y, z) = (1, 1, 1), (3, 8, 7), (8, 5, 7), (2, 2, 2), (8, 15, 13), (15, 7, 13), \dots$

Za konec poskusi na podlagi zgornjih ugotovitev rešiti naslednje naloge. Če se bi kjer zataknilo, si oglej nasvete na str. 302 .

1. Pokaži, da je v pitagorejskem trikotniku tudi polmer včrtanega kroga naravno število.
2. Če je (x, y, z) pitagorejska trojica, dokaži, da je potem produkt xyz vedno deljiv s 60.
3. Poišči nekaj pitagorejskih trikotnikov, ki imajo tudi za dolžine ene od simetral ostrega kota naravno število.
4. Preveri, da naletimo na enačbo (3) tudi v primeru, ko iščemo trikotnik, ki ima za stranice naravna števila, ena njegovih višin pa je enaka vsoti drugih dveh višin.
5. Poišči nekaj celoštevilskih trikotnikov (dolžine stranic so naravna števila) z enim kotom 120^0, pri katerih je tudi dolžina simetrale ob tem kotu naravno število.
6. Dokaži, da je lahko vsako liho število $n \geqslant 3$ dolžina stranice celoštevilskega trikotnika z enim kotom 120^0.
7. Dokaži trditev: če je (x, y, z) primitivna trojica naravnih števil, ki reši enačbo (6), so vsa tri števila liha, ali pa je natanko eno med njimi večkratnik števila 8.

Edvard Kramar