PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 2
Strani 75–77

Damjan Kobal:

NAPOLEONOV ALGORITEM

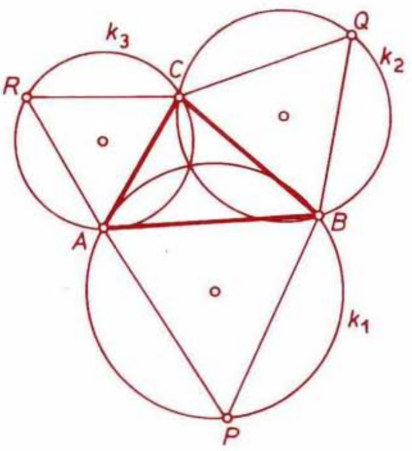
Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/13-2-Kobal.pdf

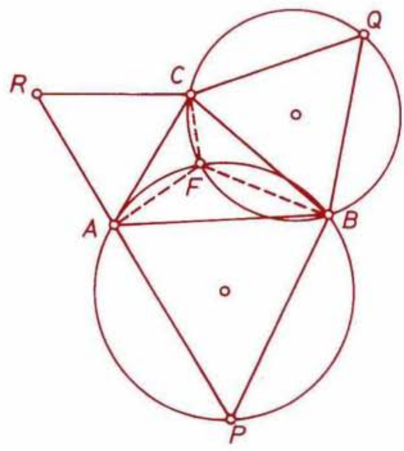
NAPOLEONOV TRIKOTNIK

Poskušajmo združiti nekaj našega znanja o geometriji – mogoče se celo kaj novega naučimo! Ali, kot bi temu drugače rekli: povejmo to, kar že vemo, v novi obliki, ... pa dobimo nekaj, česar še nismo vedeli.

Nad stranicami poljubnega trikotnika ABC načrtajmo enakostranične trikotnike (kot kaže slika 1)! Enakostraničnim trikotnikom APB, BQC, CRA očrtajmo kroge, ki jih označimo s k_1, k_2, k_3. Kaj opazimo? Če nas površnost ni izdala, se vse tri krožnice sekajo v isti točki.



Slika 1



Slika 2

Da bi se o tem prepričali, ponovimo risbo, a očrtajmo le kroga k_1 in k_2 (slika 2). Krožnici k_1 in k_2 se sekata v oglišču B in v točki, ki jo označimo z F. Točke A, P, B, F ležijo na krožnici k_1. Torej je štirikotnik $APBF$ tetiven. Podobno ležijo točke B, Q, C, F na krožnici k_2 in je tudi štirikotnik $BQCF$ tetiven. Ker vemo, da sta nasprotna kota v tetivnem štirikotniku suplementarna, je:

$$\sphericalangle AFB = 180^0 - \sphericalangle APB = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

in

$$\sphericalangle CFB = 180^0 - \sphericalangle CQB = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

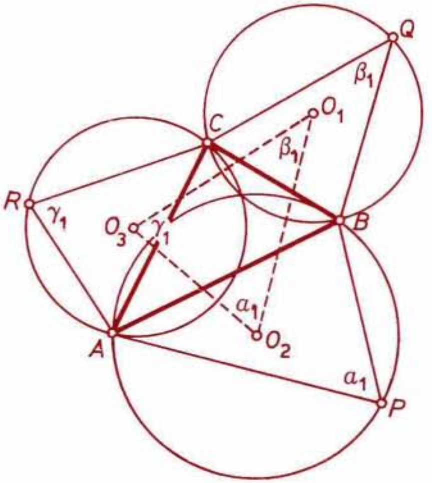
Od tod izračunamo še:

$$\sphericalangle AFC = 360^0 - \sphericalangle AFB - \sphericalangle CFB = 360^0 - 120^0 - 120^0 = 120^0$$

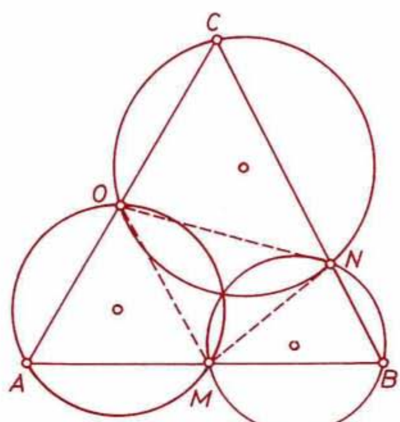
Ker je trikotnik CRA enakostraničen, je $\sphericalangle CRA = 60^0$, kota $\sphericalangle AFC$ in $\sphericalangle CRA$ sta torej suplementarna. Če sta v štirikotniku nasprotna kota suplementarna, je štirikotnik tetiven. Ugotovili smo torej, da določajo točke C, R, A, F tetivni štirikotnik $CRAF$, oziroma, da lahko skozi točke C, R, A, F napeljemo krožnico. Ta krožnica pa je lahko le k_3, saj k_3 vsebuje točke C, R, A. Torej gre tudi k_3 skozi F, ki je skupna točka krožnic k_1 in k_2. Krožnice k_1, k_2 in k_3 se torej res sekajo v isti točki F.

Našo ugotovitev lahko zelo posplošimo. Namesto da bi na stranicah poljubnega trikotnika ABC načrtali enakostranične trikotnike, načrtajmo poljubne trikotnike APB, BQC, CRA. Pazimo le na nekaj! Vsota kotov $\sphericalangle CRA$, $\sphericalangle APB$ in $\sphericalangle BQC$ naj bo enaka 180^0 (glej sliko 3). Zopet opazimo, da se krogi, očrtani trikotnikom APB, BQC, CRA, sekajo v isti točki. Dokaz (ki je podoben prejšnjemu) naj bo za vajo.

V našem primeru smo imeli $\sphericalangle CRA = \sphericalangle APB = \sphericalangle BQC = 60^0$, torej tudi $\sphericalangle CRA + \sphericalangle APB + \sphericalangle BQC = 180^0$, in gre res za posplošitev prejšnjega primera.



Slika 3



Slika 4

Za utrditev in v razmislek še nalogi:

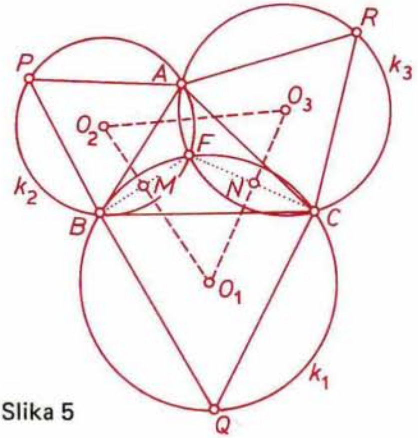
(1) *Na stranicah trikotnika ABC izberi tri poljubne točke M, N in O, na vsaki stranici po eno. Trikotnikom AMO, MBN, NCO očrtaj kroge. Pokaži, da se vsi trije krogi sekajo v isti točki (glej sliko 4)!*

(2) *Ali lahko na stranicah poljubnega trikotnika ABC načrtamo trikotnike, ki so podobni poljubnemu trikotniku DEF (v posebnem primeru je lahko trikotnik DEF kar trikotnik ABC), tako da se bodo njim očrtani krogi sekali v isti točki?*

Naredimo še korak naprej! Trikotniku ABC smo na stranicah načrtali enakostranične trikotnike, njim pa očrtali kroge k_1, k_2, k_3, ki se, kot že vemo, sekajo vsi v isti točki F. Oglejmo si trikotnik $O_1O_2O_3$, ki ga tvorijo središča krogov k_1, k_2, k_3 (glej sliko 5).

Označimo skupno tetivo krogov k_1 in k_2 z FB, skupno tetivo krogov k_1 in k_3 z CF, daljico s krajiščema O_1 in O_2 z O_1O_2, daljico s krajiščema O_1 in O_3 z O_1O_3. O_1O_2 seka FB pravokotno v točki M, O_1O_3 pa CF pravokotno v točki N. (Skupna tetiva in zveznica središč dveh krogov se vedno sekata pravokotno!) Za štirikotnik FMO_1N torej velja $\sphericalangle\ FNO_1 = \sphericalangle\ FMO_1 = 90^0$. Od tod takoj sledi

$$\sphericalangle\, O_3O_1O_2 = \sphericalangle\, NO_1M = 180^0 - \sphericalangle\, NFM = 180^0 - \sphericalangle\, CFB$$



Slika 5

Vemo, da je $\sphericalangle\, CQB = 180^0 - \sphericalangle\, CFB$, torej dobimo $\sphericalangle\, O_3O_1O_2 = \sphericalangle\, CQB = 60^0$. Povsem enako bi dobili še $\sphericalangle\, O_1O_3O_2 = \sphericalangle\, CRA = 60^0$ in $\sphericalangle\, O_3O_2O_1 = \sphericalangle\, APB = 60^0$. Torej smo ugotovili, da je trikotnik $O_1O_2O_3$ enakostraničen.

Ponovno naj bo za vajo dokaz trditve, da lahko tudi to ugotovitev posplošimo kot v prvem primeru. Trikotnik $O_1O_2O_3$ sedaj ne bo več enakostraničen, temveč bo imel kote $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, kot kaže slika 3.

Najvztrajnejšim še dve nalogi:

(1') *Pokaži, da tvorijo središča krogov iz naloge (1) trikotnik, ki je podoben trikotniku ABC (iz naloge (1))!*

(2') *Pokaži, da tvorijo središča krogov iz naloge (2) trikotnik, ki je podoben trikotniku DEF (iz naloge (2))!*

(V nalogi (2) je bil odgovor seveda pritrdilen.)

Obravnavanemu trikotniku $O_1O_2O_3$ rečemo Napoleonov trikotnik k danemu trikotniku ABC. Zakaj ravno Napoleonov, ni znano. Danes je jasno samo to, da zgornje zakonitosti ni odkril on.

Damjan Kobal