PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 4
Strani 204–206

Izidor Hafner:

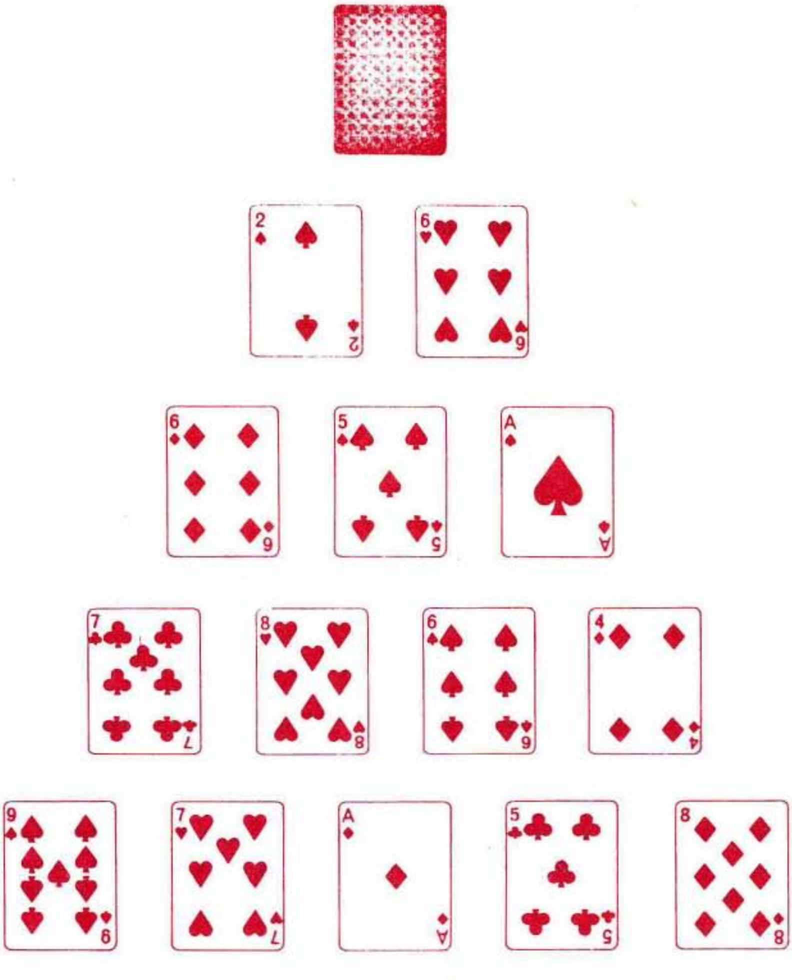
PASCALOV TRIKOTNIK IN TRIKI S KARTAMI

Ključne besede: bolj za šalo kot zares, razvedrilo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/790-Hafner.pdf

PASCALOV TRIKOTNIK IN TRIKI S KARTAMI

V knjigi M. Gardnerja Mathematical Carnival (Random House, New York, 1975) je na strani 194 opisan naslednji trik s kartami, ki ga boš brez težav preizkusil na sošolcih, ki ne berejo Preseka.



Iz igralnih kart odstrani vse figure in desetke, tako da ostanejo le karte od asov do devetk. Sošolca prosi, da položi pet kart v vrsto, nato pa zgradi trikotnik kart po pravilu, ki ga opisuje naslednji odstavek. Toda še preden začne, ti že položiš zadnjo karto, z obrazom navzdol (glej sliko). Katero karto boš moral položiti, ti bo jasno, ko boš prebral sestavek.

Vsak par števil na sosednjih kartah seštejemo, in če vsota preseže 9, odštejemo 9. Nad ta par kart položimo karto, katere številka je tako dobljena vsota. Na primer: zadnji dve karti v spodnji vrstici sta 5 in 8, vsota je 13, ko odštejemo 9, dobimo 4. Ko sošolec tako pride do vrha, odkrije vrhnjo karto in ugotovi, da je ravno prava.

Jasno je, da je zgornje število funkcija spodnjih petih števil. Toda katera?

Spomnimo se opisa Pascalovega trikotnika, ki ga je napisal Franci Forstnerič v Preseku 8 (1980/81) 4, str. 200 – 205. To je neskončna trikotna shema števil. Prvo in zadnje število v vsaki vrstici je 1, za vsako drugo število pa velja, da je dobljeno kot vsota dveh števil, ki sta zapisani neposredno nad njim. Če vrstice štejemo od 0 naprej, lahko pravilo zapišemo

a) $P(0, 0) = 1$
b) $P(n + 1, 0) = P(n + 1, n + 1) = 1$
c) $P(n + 1, k) = P(n, k - 1) + P(n, k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

V n–ti vrstici je $n + 1$ števil.

Imejmo pet števil, ki jih seštevamo v obliki piramide

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a+4b+6c+4č+d & & & & \\
 & & & a+3b+3c+č & & b+3c+3č+d & & & \\
 & & a+2b+c & & b+2c+č & & c+2č+d & & \\
 & a+b & & b+c & & c+č & & č+d & \\
a & & b & & c & & č & & d
\end{array}
$$

Vidimo, da je število na vrhu piramide vsota produktov števil *a, b, c, č* in *d* s števili četrte vrstice Pascalovega trikotnika. Srednješolci bi temu rekli skalarni produkt vrstice $(a, b, c, č, d)$ z vrstico $(1, 4, 6, 4, 1)$.

Ker lahko hitro ugotovimo, da je isto, če odštevamo 9 sproti ali na koncu, je jasno, kako dobimo karto na vrhu piramide. Formula, ki smo jo dobili, na žalost za računanje na pamet ni najbolj primerna. Pogled na Pascalov trikotnik pa ti pove, da so naslednji triki enostavno izvedljivi.

Trik 1. Vzemi samo karte od 1 do 5 (odštevamo 5), za osnovo piramide pa šest števil. Peta vrstica, to je vrstica s števili 1, 5, 10, 10, 5, 1, ti pove, da bo na vrhu piramide vsota prvega in zadnjega števila iz osnovne vrste ali pa ta vsota, zmanjšana za pet. Podobno velja za naslednja dva trika.

Trik 2. Piramido začnemo z osmimi kartami, odštevamo pa 7. Kakšna je formula za vrhnjo karto?

Trik 3. Piramido začnemo z desetimi kartami in odštevamo 5.

Trik 4. Če začnemo s sedmimi kartami in odštevamo 5 ali če začnemo z devetimi kartami in odštevamo 7, je končno število vsota prvih dveh in zadnjih dveh števil v vrstici, zmanjšana za primeren mnogokratnik števil 5 oziroma 7. Katere vrstice so primerne za odštevanje 9 ali 11?

Trik 5. Desetim sošolcem naročiš, da zapišejo po deset števil (vsako je med 1 in 9), nato pa zgradijo piramido z odštevanjem 9. Medtem ko oni računajo, obiščeš vsakega in izračunaš njihove vsote. Ko vsi končajo, jim poveš rezultate. Presenečeni so, saj računaš desetkrat hitreje od njih. Formula je: vsota prevega in zadnjega ter triktratnega četrtega in trikratnega sedmega števila. Pri odštevanju devetice lahko uporabiš še tole:

$$ab - 9 = 10a + b - 9 = 9a + (a + b)$$

$$\text{npr. } 13 - 9 = 10 \,.\, 1 + 3 - 9 = 9 + (1 + 3)$$

Trik 6. Vsak učenec v razredu naj si izmisli osem števil, pri tem naj vsi na prvo mesto zapišejo 1, na osmo mesto pa 8. Nato morajo vsote zmanjševati za mnogokratnike števila 7. Na koncu bodo vsi dobili 2.

Morda te bo teh nekaj primerov spodbudilo, da si še sam izmisliš kakšen trik.

Izidor Hafner