GEOMETRIA INTUITIVA

PER IL

GINNASIO INFERIORE.

DEL

Dr. FRANCESCO MOČNIK,

I. R. CONSIGLIERE SCOLASTICO.

PARTE SECONDA.

PER LA TERZA E QUARTA CLASSE.

CON 113 FIGURE INTERCALATE NEL TESTO.

EDIZIONE QUARTA INVARIATA.

VIENNA.

PRESSO IL FIGLIO DI CARLO GEROLD TIPOGR. EDIT.

1881.

INDICE

DELLA IIª PARTE.

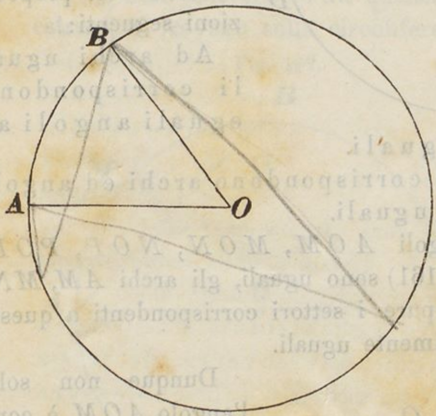
La Stereometria.

VIII. Il cerchio.

1. Archi, angoli al centro e settori circolari.

§. 182. Se il punto A (fig. 159) si muove intorno ad un punto fisso O in guisa che la sua distanza da questo punto rimanga sempre costante, esso descrive un cerchio. Il punto O è il centro, la distanza AO è il raggio del cerchio. Ogni punto la cui distanza dal centro è maggiore del raggio, trovasi fuori del cerchio; se all' incontro quella distanza fosse minore del raggio, il punto sarebbe situato entro il cerchio. Una porzione qualunque della linea circolare, p. e. AB è un arco di cerchio.

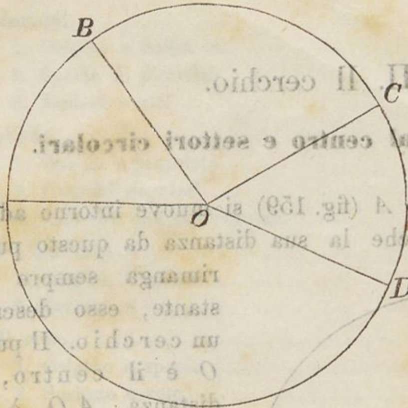
Fig. 159.



Conducendo alle due estremità di un arco AB i raggi, l' angolo AOB da essi compreso dicesi angolo al centro. Una porzione della superficie del cerchio terminata da due raggi e dall' arco ad essi interposto, come p. e. $AOBA$ si chiama settore circolare.

§. 183. Ammettiamo che gli angoli AOB e COD al centro O (fig. 160) siano uguali. Se ora si sovrappone il settore COD al settore AOB, in modo che gli angoli al centro si confondano esattamente in un solo, per l' uguaglianza dei lati, i punti C e D vengono a coprire i punti A e B, e l' arco CD copre l' arco AB; i due settori dunque coincidono perfettamente.

Fig. 160.



Laonde segue, che ad angoli uguali al centro corrispondono nel medesimo cerchio archi e settori uguali.

Nello stesso modo si possono dimostrare anche le due proposizioni seguenti:

Ad archi uguali corrispondono eguali angoli al centro e settori uguali.

A settori uguali corrispondono archi ed angoli al centro parimente uguali.

§. 184. Se gli angoli AOM, MON, NOP, POB, COQ, QOR, ROD (fig. 161) sono uguali, gli archi AM, MN, NP, PB e CQ, come pure i settori corrispondenti a questi archi, devono essere parimente uguali.

Fig. 161.

Dunque non solo l'angolo AOM è contenuto 4 volte nell' angolo AOB, e 3 volte nell' angolo COD, ma anche l' arco AM può ripetersi 4 volte sopra l' arco AB e 3 volte sopra l' arco CD, come pure il settore AOM è compreso 4 volte nel settore AOB e 3 volte nel settore COD; per modo che hanno luogo i rapporti seguenti:

Angolo al centro $AOB : COD = 4 : 3$.
Arco $AB : CD = 4 : 3$.
Settore $AOB : COD = 4 : 3$.

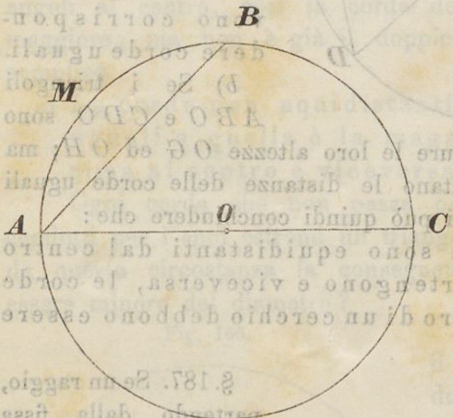
Ne segue che:

Gli archi stanno fra loro come i rispettivi angoli al centro e questo è appunto il rapporto che hanno fra loro anche i settori corrispondenti.

2. Corde, angoli alla periferia e segmenti.

§. 185. Dicesi corda qualsiasi retta AB (fig. 162) i cui estremi si trovano sulla circonferenza di un cerchio.

Fig. 162.



Sarà facile per ogni principiante di risolvere il problema di condurre per un punto della circonferenza una corda uguale in lunghezza ad una retta data.

Una corda, come p. e. la AC, che passa pel centro del cerchio, dicesi diametro del cerchio. Essendo ogni diametro il doppio del raggio, tutti i diametri di un cerchio sono fra loro uguali.

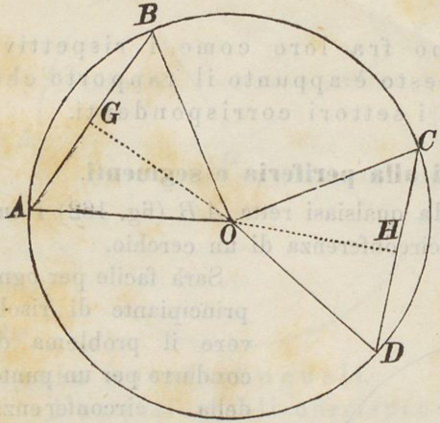
La porzione di superficie circolare compresa fra una corda e l'arco ad essa corrispondente, come p. e. $ABMA$ dicesi segmento circolare.

Ogni corda partisce la superficie del cerchio in due segmenti ordinariamente disuguali. Solo nel caso in cui la corda è ad un tempo un diametro, i due segmenti riescono uguali e sono semicerchî.

§. 186. *a*) Ammettiamo che le due corde AB e OD (fig. 163) siano uguali. A tenore di questa supposizione i triangoli ABO

e CDO sono uguali e perciò devono esserlo pure gli angoli AOB e COD; laonde segue che: a corde uguali corrispondono nello stesso cerchio angoli uguali al centro e quindi anche archi uguali.

Fig. 163.

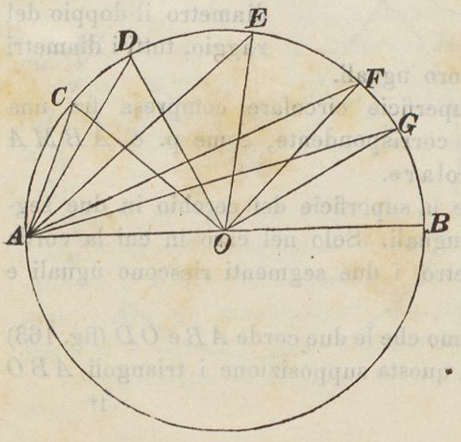


In modo affatto simile si dimostra che: ad angoli uguali al centro, ovvero ad archi uguali devono corrispondere corde uguali.

b) Se i triangoli ABO e CDO sono uguali, devono esserlo pure le loro altezze OG ed OH; ma queste altezze rappresentano le distanze delle corde uguali AB e CD dal centro; si può quindi conchiudere che:

Le corde uguali sono equidistanti dal centro del cerchio cui appartengono e viceversa, le corde equidistanti dal centro di un cerchio debbono essere di uguale lunghezza.

Fig. 164.



§. 187. Se un raggio, partendo dalla fissa posizione AO (fig. 164) gira intorno al punto O, in guisa da prendere successivamente le posizioni CO, DO, EO . . . le estremità di questi raggi saranno tanto più lontane l'una dall' altra quanto maggiore è il rispettivo angolo al centro; ognuna delle corde AC,

AD, AE, ..., sarà dunque maggiore della sua precedente. Inoltre si vede che queste corde si avvicinano sempre più al centro coll' aumentare in lunghezza. Quando poi il raggio mobile è arrivato nella posizione OB, la corda BA passa pel centro, diviene diametro e raggiunge la massima lunghezza. Da queste considerazioni scaturiscono i teoremi seguenti:

a) Il diametro è la massima fra tutte le corde;

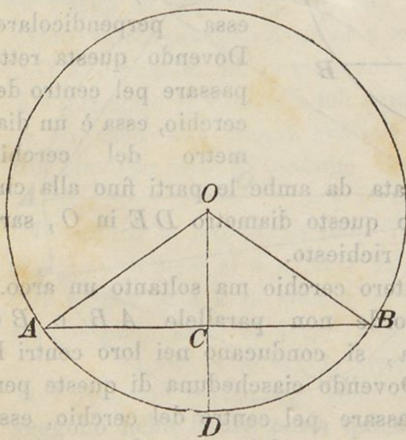
b) di due corde disuguali, quella è la maggiore cui corrisponde l'angolo maggiore al centro o l'arco maggiore.

Le corde non aumentano però proporzionalmente agli angoli al centro, così la corda dell' angolo doppio è bensì maggiore, ma non è già il doppio della corda dell' angolo semplice.

c) Le corde non equidistanti dal centro sono disuguali e quella è la maggiore che è più prossima al centro e viceversa.

Ogni corda che non passa pel centro forma coi raggi condotti per i suoi estremi un triangolo. Non risulterebbe già da questa circostanza la conseguenza che ogni corda dev' essere minore del diametro?

Fig. 165.

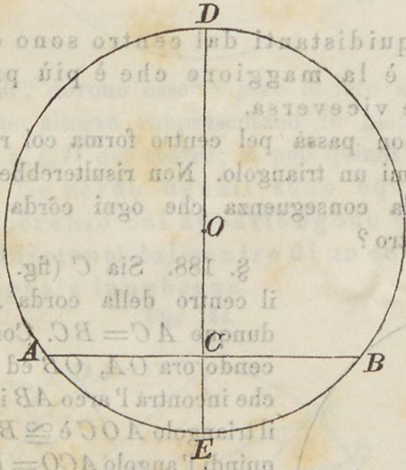


§. 188. Sia C (fig. 165) il centro della corda AB, dunque $AC = BC$. Conducendo ora OA, OB ed OC, che incontra l' arco AB in D, il triangolo AOC è $\cong BOC$, quindi l' angolo $ACO = BCO$ ($OC \perp AB$) ed $AOC = BOC$. Ne segue adunque che la retta che unisce il centro di un cerchio col centro di una sua corda è perpendicolare a quest' ultima e divide per metà l' angolo al centro, come pure l'arco ad essa corrispondente. In guisa affatto simile si può dimostrare che:

Conducendo dal centro di un cerchio la perpendicolare ad una corda, essa divide per metà la corda, l'angolo al centro e l'arco corrispondente alla corda medesima.

§. 189. Siccome la retta che unisce il centro di un cerchio col centro di una corda è perpendicolare a quest' ultima e siccome nel centro di una corda non si può innalzare che una sola perpendicolare alla medesima, così possiamo asserire che la perpendicolare innalzata nel centro di una corda deve passare pel centro del cerchio.

Fig. 166.



§. 190. S'abbia a trovare il centro di un dato cerchio.

a) Supposta data l'intera circonferenza.

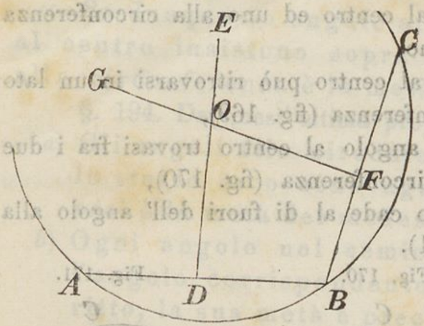
Si conduca una corda qualunque AB (fig. 166), e divisa per metà, s'innalzi nel suo centro C, la retta ad essa perpendicolare. Dovendo questa retta passare pel centro del cerchio, essa è un diametro del cerchio purchè venga prolungata da ambe le parti fino alla circonferenza. Dimezzato questo diametro DE in O, sarà questo punto il centro richiesto.

b) Se non fosse dato l'intero cerchio ma soltanto un arco.

Si conducano due corde non parallele AB e BC (fig. 167) e divise per metà, si conducano nei loro centri le rispettive perpendicolari. Dovendo ciascheduna di queste perpendicolari DE ed FG passare pel centro del cerchio, esso non può trovarsi che nel loro punto d'incontro O.

§. 191. S'abbia a descrivere un cerchio il quale passi per tre punti A, B, C (fig. 167) non situati in linea retta.

Fig. 167.

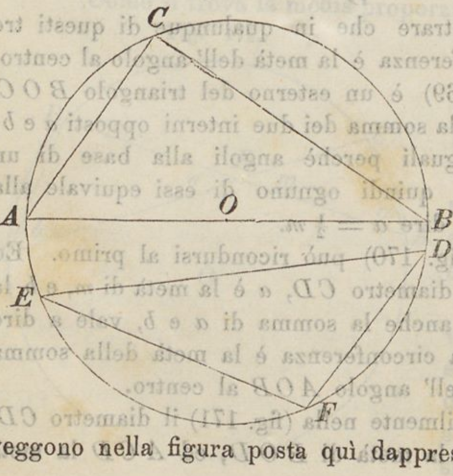


Condotte per i punti dati le rette AB e BC e considerate queste rette come corde del cerchio da costruirsi, se ne può trovare il centro O dietro il metodo accennato nel §. precedente alla lettera b). Il raggio di questo cerchio è OA, OB od OC; è quindi cosa agevole il descriverlo.

Un cerchio è dunque completamente determinato dati che siano tre punti non situati in linea retta.

§. 192. Se da un punto della periferia si conducono due corde, l'angolo da esse compreso si dice angolo alla circonferenza.

Fig. 168.



Si leggano tutti gli angoli alla circonferenza descritti nella (fig. 168).

Possiamo dire degli angoli al centro, come di quelli alla circonferenza che essi insistono sopra l'arco interposto ai loro lati. Sopra qual arco insiste ognuno degli angoli alla circonferenza che si veggono nella figura posta quì dappresso?

Un angolo che come ABC insiste sulla semicirconferenza i cui lati dunque passano per le estremità di un diametro, dicesi angolo inscritto nel semicerchio, o semplicemente angolo nel semicerchio.

§. 193. Se un angolo al centro ed uno alla circonferenza insistono sull' arco medesimo:

a) il vertice dell' angolo al centro può ritrovarsi in un lato dell' angolo alla circonferenza (fig. 169),
b) oppure il vertice dell' angolo al centro trovasi fra i due lati dell' angolo alla circonferenza (fig. 170),
c) ovvero finalmente esso cade al di fuori dell' angolo alla circonferenza (fig. 171).

Fig. 169.

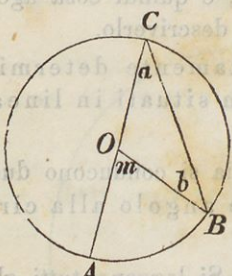


Fig. 170.

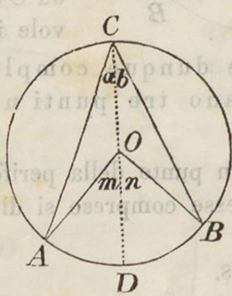
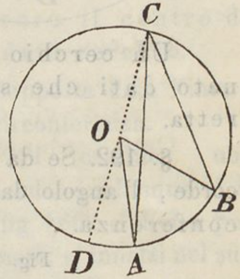


Fig. 171.



Ora si può dimostrare che in qualunque di questi tre casi l' angolo alla circonferenza è la metà dell' angolo al centro.

a) L' angolo m (fig. 169) è un esterno del triangolo BOC, e perciò uguale alla somma dei due interni opposti a e b; ma a e b sono uguali perchè angoli alla base di un triangolo isoscele, quindi ognuno di essi equivale alla metà di m, vale a dire $a = \frac{1}{2} m$.

b) Il secondo caso (fig. 170) può ricondursi al primo. Ed infatti condotto il diametro CD, a è la metà di m, e b la metà di n; quindi anche la somma di a e b, vale a dire l' angolo ACB alla circonferenza è la metà della somma di m ed n ossia dell' angolo AOB al centro.

c) Se si conduce similmente nella (fig. 171) il diametro CD, l' angolo BCD è la metà di BOD, ed ACD la metà di AOD; quindi anche la differenza di BCD ed ACD, cioè l'angolo ACB alla circonferenza dev' essere la metà della differenza fra BOD ed AOD, vale a dire dell' angolo al centro AOB.

Se dunque un angolo alla circonferenza ed uno al centro insistono sopra lo stesso arco, quello alla circonferenza è la metà dell' angolo al centro.

§. 194. Da quest' ultima proposizione si deduce che:

a) Gli angoli alla circonferenza insistenti sopra lo stesso arco sono uguali, poichè ognuno di essi è la metà del medesimo angolo al centro.

b) Ogni angolo nel semicerchio è retto poichè l'angolo corrispondente al centro essendo diritto, la sua metà è precisamente un retto.

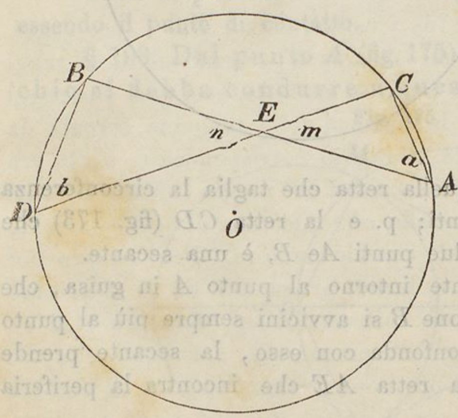
Come si può costruire un triangolo rettangolo sopra una retta data per modo che questa divenga l' ipotenusa?

A norma del §. 169 *c*) possiamo stabilire anche il teorema seguente:

c) Se si abbassa da un punto della periferia la perpendicolare ad un diametro, essa è la media proporzionale fra i due segmenti del diametro.

Come si trova la media proporzionale fra due rette date?

Fig. 172.



Si rappresentino le tre proposizioni quì accennate mediante opportuni disegni.

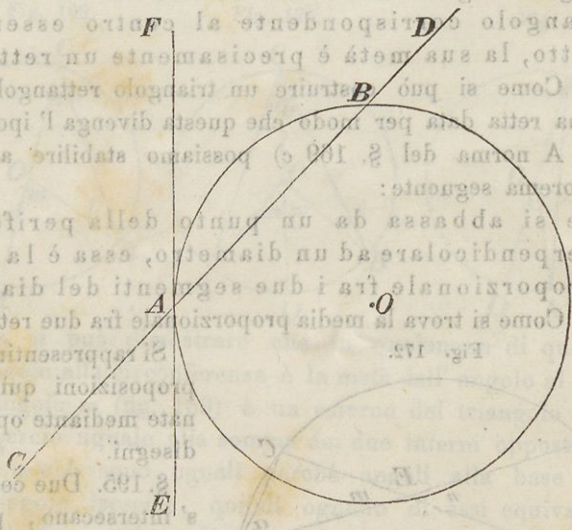
§. 195. Due corde che s' intersecano, possono esse tagliarsi reciprocamente per metà?

Onde esaminare più da vicino il rapporto che sussiste fra i segmenti delle corde AB e CD che s' intersecano (fig. 172), si conducano anche le corde AC e BD. I triangoli ACE e BDE hanno uguali gli angoli m ed n perchè opposti al vertice, inoltre anche a e b come angoli alla circonferenza insistenti sopra lo stesso arco; quindi quei triangoli sono simili ed ha luogo la proporzione $AE : DE = CE : BE$ ovvero $AE : CE = DE : BE$, vale a dire: Se due corde di un cerchio s'intersecano, i loro segmenti sono inversamente proporzionali.

3. Secanti e tangenti.

§. 196. Una retta ed un cerchio non possono intersecarsi in più che in due punti.

Fig. 173.

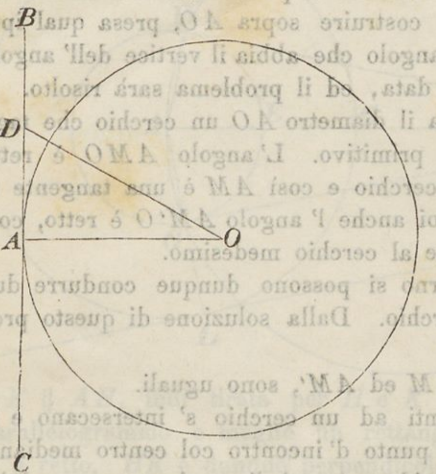


Dicesi secante quella retta che taglia la circonferenza di un cerchio in due punti; p. e la retta CD (fig. 173) che taglia la periferia nei due punti Ae B, è una secante.

Se si gira la secante intorno al punto A in guisa, che l' altro punto d' intersezione B si avvicini sempre più al punto A fino a tanto che si confonda con esso, la secante prende allora la posizione della retta AE che incontra la periferia soltanto nel punto A.

Una retta che ha un solo punto comune col cerchio sì che tutti gli altri suoi punti si ritrovino al di fuori del cerchio medesimo, si chiama linea di contatto ossia tangente al cerchio.

Fig. 174.



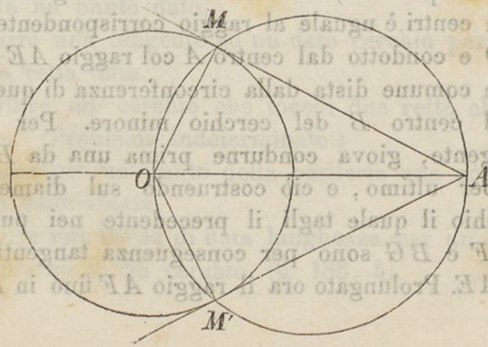
§. 197. Se BC (fig. 174) ha da essere tangente al cerchio, tutti i suoi punti meno A debbono trovarsi al di fuori del cerchio stesso. Condotta dunque da O una retta ad uno de' suoi punti p. e. a D, questa retta deve essere maggiore del raggio e perciò più lunga di AO. Quest' ultima è quindi la più breve fra tutte le rette che si possono condurre da O verso BC donde segue che AO è perpendicolare a BC e viceversa $BC \perp AO$.

La tangente è dunque perpendicolare al raggio che passa pel suo punto di contatto.

Come si può condurre una tangente ad un cerchio, dato essendo il punto di contatto.

§. 198. Dal punto A (fig. 175) situato fuori del cerchio si debba condurre a questo una tangente.

Fig. 175.



Qui trattasi di trovare il punto di contatto M. Riflettendo che la tangente ed il raggio corrispondente al punto di contatto devono essere i cateti di un triangolo rettangolo di cui l' ipotenusa è la retta che unisce il punto dato col centro del cerchio, non s' ha che a costruire sopra AO, presa qual ipotenusa, un triangolo rettangolo che abbia il vertice dell' angolo retto sulla circonferenza data, ed il problema sarà risolto. A tal fine si descriva sopra il diametro AO un cerchio che tagli in M ed M' il cerchio primitivo. L' angolo AMO è retto essendo angolo nel semicerchio e così AM è una tangente al cerchio dato. Siccome poi anche l' angolo $AM'O$ è retto, così AM' è un altra tangente al cerchio medesimo.

Da un punto esterno si possono dunque condurre due tangenti allo stesso cerchio. Dalla soluzione di questo problema consegue che:

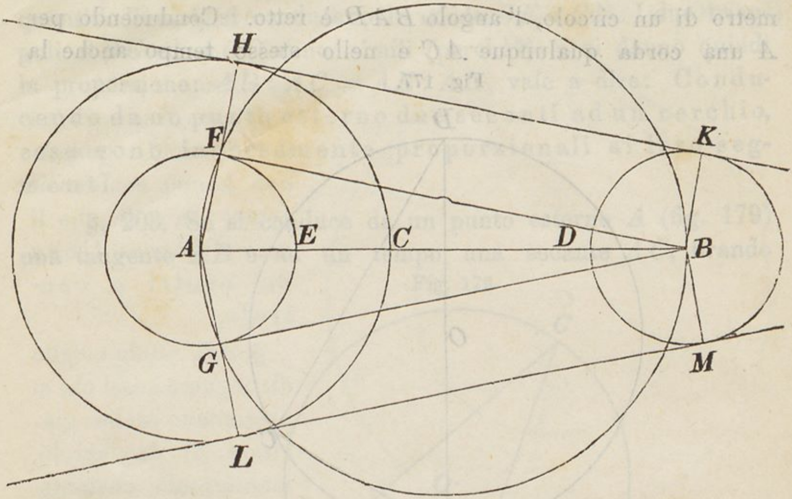
a) Le due tangenti AM ed AM', sono uguali.

b) Quando due tangenti ad un cerchio s' intersecano e si congiunge il loro punto d' incontro col centro mediante una retta, questa divide per metà l' angolo compreso dalle due tangenti nonchè l' arco da esse intercetto ed il rispettivo angolo al centro.

§. 199. S' abbia a condurre una tangente comune a due cerchî dati.

Siano A e B (fig. 176) i centri, AC e BD i loro raggi. Siccome la tangente ad essi comune è perpendicolare ai raggi che passano pei rispettivi punti di contatto, così quei due raggi devono essere paralleli, e la distanza della tangente cercata da ognuno dei centri è uguale al raggio corrispondente. Fatto ora $CE = BD$ e condotto dal centro A col raggio AE un cerchio, la tangente comune dista dalla circonferenza di questo cerchio quanto dal centro B del cerchio minore. Per trovare poi questa tangente, giova condurne prima una da B al cerchio descritto per ultimo, e ciò costruendo sul diametro AB un nuovo cerchio il quale tagli il precedente nei punti F e G; le rette BF e BG sono per conseguenza tangenti al cerchio di raggio AE. Prolungato ora il raggio AF fino in H, condotta

Fig. 176.



$BK \parallel AH$, indi tirata per H e K un retta, $BFHK$ è un parallelogrammo o meglio un rettangolo, perchè l' angolo in F è retto. HK è dunque perpendicolare ai raggi AH e BK, quindi è una tangente comune ai due cerchî proposti. Prolungando similmente il raggio AG fino in L e conducendo $BM \parallel AL$, si può tirare la retta LM che è pure tangente ai due cerchî dati.

Oltre a queste due tangenti comuni, ve ne sono altre due; rimettiamo la loro ricerca all' intelligenza dei studiosi.

§. 200. Si risolvano i seguenti problemi:

a) Descrivere da un dato centro un cerchio che tocchi una retta in un punto dato.

b) Condurre una tangente ad un dato cerchio parallelamente ad una retta data.

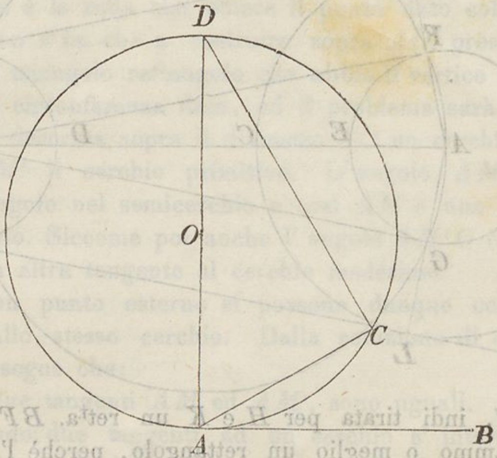
c) Construire un cerchio che tocchi due rette che s' intersecano. (Problema indeterminato.)

d) Condurre per un punto della periferia una corda di lunghezza determinata.

e) Condurre una corda di data lunghezza per un punto dato nell' interno di un cerchio (§. 186, *b*).

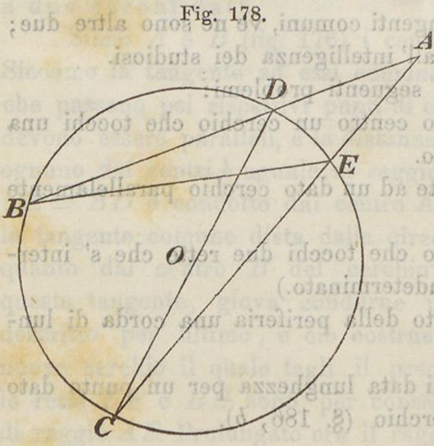
§. 201. Se AB (fig. 177) è una tangente ed AD il diametro di un circolo, l' angolo BAD è retto. Conducendo per A una corda qualunque AC e nello stesso tempo anche la

Fig. 177.



retta CD, l' angolo ACD è pure retto; quindi gli angoli ADC e CAD sommati insieme devono importare parimente un retto. Si ottiene adunque sempre un angolo retto, sia che si aggiunga a CAD l'angolo BAC o l' angolo ADC; quindi dev' essere $CDA = BAC$, vale a dire: L' angolo formato dalla tangente colla corda che passa pel punto di contatto è uguale all' angolo alla circonferenza che insiste sull' arco sotteso alla corda medesima.

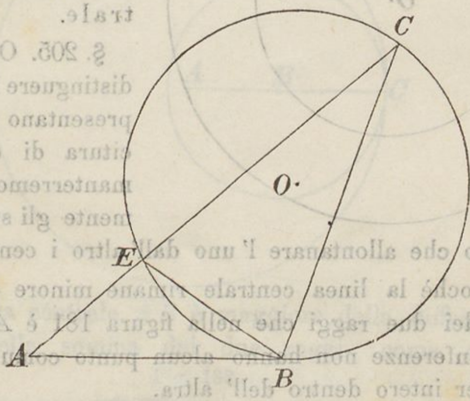
Fig. 178.



§. 202. Si conducano dal punto A (fig. 178) preso fuori del cerchio le due secanti AB ed AC; sono allora AD ed AE i loro segmenti esterni. Per rivelare il rapporto di queste quattro quantità lineari, si conducano le corde BE e CD. I due triangoli ABE ed ACD sono simili (perchè?) e ci danno quindi la proporzione: $AB : AC = AE : AD$, vale a dire: *Conducendo da un punto esterno due secanti ad un cerchio, esse sono inversamente proporzionali ai loro segmenti.*

§. 203. Se si conduce da un punto esterno A (fig. 179) una tangente AB e ad un tempo una secante AC, tirando

Fig. 179.



altresì la corda BE, i triangoli ABC ed AEB sono simili, poichè l'angolo A è loro comune e l'angolo ACB è $= ABE$ (§. 201); quindi si ottiene la proporzione:

$$AC : AB = AB : AE$$

vale a dire: *La tangente è la media proporzionale fra l'intera secante ed il suo segmento esterno.*

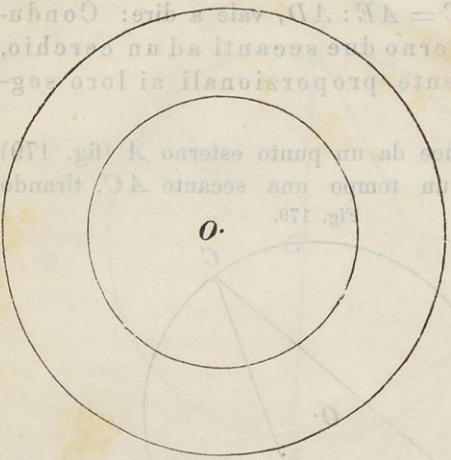
Come si trova la media proporzionale fra due rette date mediante l'applicazione di questo teorema?

4. Giacitura reciproca dei cerchî.

§. 204. La giacitura reciproca di due cerchî dipende dalla posizione dei loro centri come pure dalla grandezza dei loro raggi.

Due cerchî i quali hanno il centro comune, come nella (fig. 180), si dicono concentrici e la superficie compresa fra le due circonferenze si chiama anello.

Fig. 180.

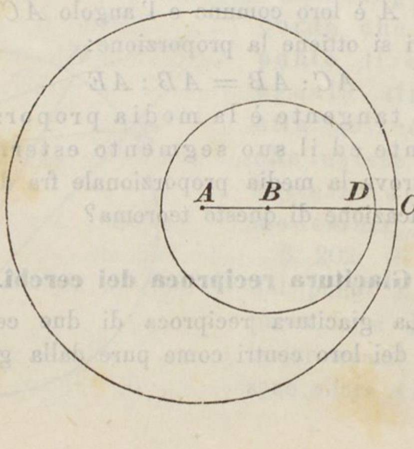


Diconsi eccentrici due cerchî quando non hanno comune il centro; la retta che li unisce chiamasi linea de' centri o centrale.

§. 205. Onde meglio distinguere i casi che si presentano nella giacitura di due cerchî, manterremo costantemente gli stessi cerchî e non faremo che allontanare l' uno dall' altro i centri.

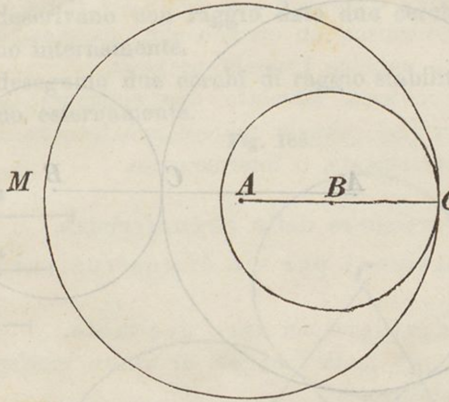
a) Fintantochè la linea centrale rimane minore della differenza dei due raggi che nella figura 181 è $AB + DC$, le circonferenze non hanno alcun punto comune e l' una cade per intero dentro dell' altra.

Fig. 181.



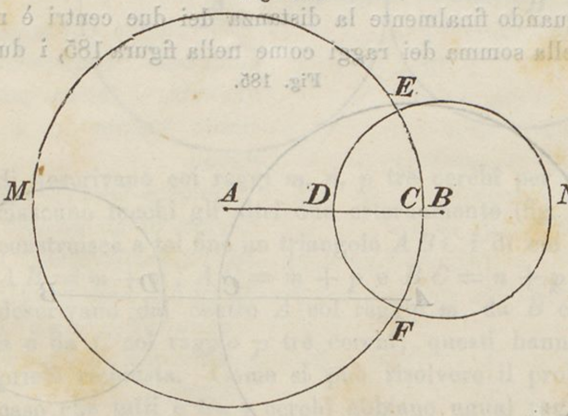
b) Nella figura 182 la distanza dei due centri eguaglia la differenza dei due raggi; in tal caso i due cerchî non hanno comune che un solo punto *C*, mentre ogni altro punto di una delle periferie si ritrova dentro dell' altra. I due cerchî si toccano internamente.

Fig. 182.



c) Se la linea centrale *AB* è maggiore della differenza ma minore della somma dei due raggi, come apparisce

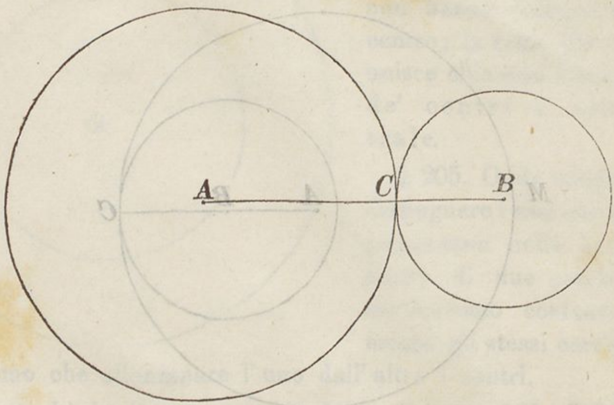
Fig. 183.



nella figura 183, allora le circonferenze s' intersecano nei due punti *E* ed *F*. La porzione di superficie comune ad ambidue i cerchî cioè $EDFC$, si chiama lente, ed ognuna delle porzioni di superficie non comuni ai due cerchî, cioè $EMFD$ o $ENFC$, prende il nome di luna.

d) Nella figura 184 la linea centrale è uguale alla somma dei raggi; le due periferie hanno comune soltanto il punto

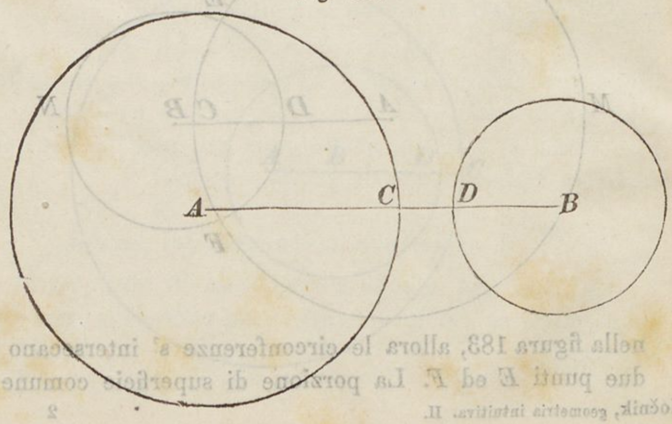
Fig. 184.



C, ed ogni altro punto di uno dei cerchî si trova al di fuori dell' altro. In questo caso si dice che i cerchî si toccano esternamente.

e) Quando finalmente la distanza dei due centri è maggiore della somma dei raggi come nella figura 185, i due cerchî

Fig. 185.



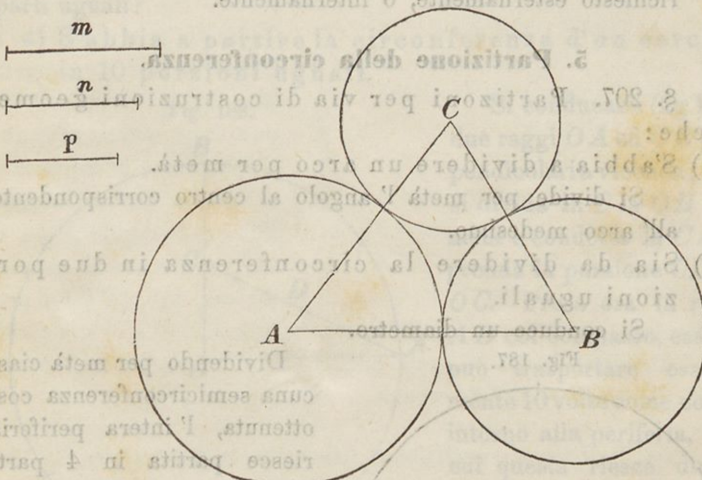
non hanno alcun punto comune ed ogni punto di una delle periferie giace fuori della periferia dell' altro cerchio.

Nelle indagini testè esposte furono supposti cerchî disuguali. Quali risultamenti sono peranco valevoli trattandosi di cerchî fra loro uguali?

§. 206. Problemi:

1) Si descrivano con raggio dato due cerchî i quali si tocchino internamente.
2) Si desegnino due cerchî di raggio stabilito i quali si tocchino esternamente.

Fig. 186.



3) Si descrivano coi raggi m, n, p tre cerchî per modo che ciascuno tocchi gli altri due esternamente (fig. 186). Si construisca a tal fine un triangolo ABC i di cui lati sieno $AB = m + n$, $AC = m + p$ e $BC = n + p$, indi si descrivano dal centro A col raggio m, da B col raggio n e da C col raggio p tre cerchî; questi hanno la proprietà richiesta. Come si può risolvere il problema nel caso che tutti e tre i cerchî abbiano ugual raggio?

Si risolvano i problemi seguenti:

4) Descrivere due cerchî entro ad un terzo cerchio dato in modo che i due primi tocchino il terzo internamente e si tocchino fra di loro esternamente.

5) Si disegnino tre cerchî uguali i quali si tocchino l' un l' altro esternamente, indi si circoscriva a quelli un quarto cerchio che tocchi tutti gli altri.

6) Dati due cerchî concentrici ed un punto sopra il minore di essi, si costruisca un cerchio che, passando per quel punto, tocchi ambidue i cerchî proposti.

Questo problema ammette due soluzioni, poichè la circonferenza del circolo minore può toccare il cerchio richiesto esternamente, o internamente.

5. Partizione della circonferenza.

§. 207. Partizoni per via di costruzioni geometriche:

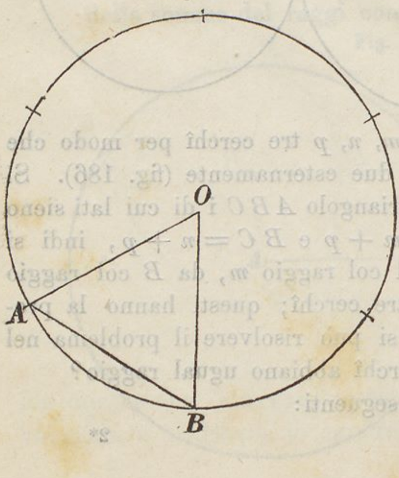
1) S'abbia a dividere un arco per metà.

Si divide per metà l' angolo al centro corrispondente all' arco medesimo.

2) Sia da dividere la circonferenza in due porzioni uguali.

Si conduce un diametro.

Fig. 187.



Dividendo per metà ciascuna semicirconferenza così ottenuta, l' intera periferia riesce partita in 4 parti uguali.

Come si partisce la circonferenza di un cerchio in 8, 16, 32 parti uguali?

3) S' abbia a partire la circonferenza di un cerchio in 6 porzioni uguali.

Si riporti il raggio AO (fig. 187) come corda intorno alla circonferenza e questa riuscirà esattamente divisa in 6 parti uguali. Imperocchè, essendo per costruzione il triangolo ABO equilatero, l' angolo AOB deve contare 60^0 e dovendo contenerne altrettanti anche l' arco AB, esso è infatti la sesta parte della circonferenza.

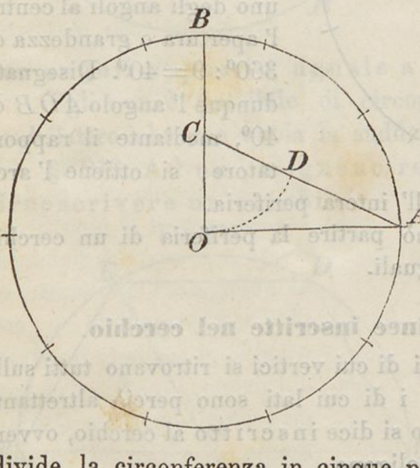
Due di questi archi presi insieme formano la terza parte della periferia.

Come si partisce la periferia di un cerchio in 12 e come in 24 porzioni uguali?

Come si può dividere un quadrante in 3, e come in 6 parti uguali?

4) S'abbia a partire la circonferenza d'un cerchio in 10 porzioni uguali.

Fig. 188.



Si conducano (fig.188) due raggi OA ed OB perpendicolari a vicenda; indi si divida in C la OB per metà e condotta la CA si prenda la porzione $CD = OC$. Presa ora la retta AD col compasso, essa si può trasportare esattamente 10 volte come corda intorno alla periferia, per cui questa riesce divisa in 10 parti uguali.

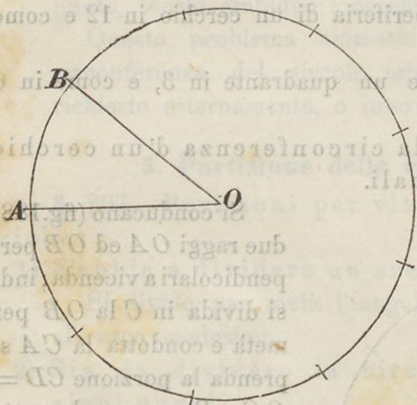
Prendendo due di questi archi insieme si divide la circonferenza in cinque parti eguali.

Come si divide la circonferenza di un cerchio in 20 parti uguali?

§. 208. Partizione della periferia mediante il rapportatore.

Se attorno al centro di un cerchio si trovano disposti degli angoli che abbiano tutti la medesima grandezza, la periferia riesce partita dai loro lati in altrettante porzioni uguali quanti sono gli angoli suddetti. Dunque, affine di dividere la circonferenza di un cerchio in un determinato numero di parti uguali, non si ha che a disegnare intorno al centro un egual numero di angoli che abbiano tutti la medisima grandezza. La grandezza di uno di essi si trova dividendo la somma di tutti gli angoli al centro, cioè 360°, pel numero degli angoli.

Fig. 189.



Trovata che sia la grandezza dell' angolo, lo si disegna e si porta poi sulla periferia l'arco compreso fra i suoi lati. Volendo p. e. dividere la periferia in 9 parti uguali (fig. 189), si ottiene per uno degli angoli al centro l' apertura o grandezza di $360^0 : 9 = 40^0$. Disegnato dunque l' angolo AOB di 40^0, mediante il rapportatore, si ottiene l' arco AB che è la 9na parte dell' intera periferia.

In simil modo si può partire la periferia di un cerchio in 3, 5, 8, 15 porzioni uguali.

6. Figure rettilinee inscritte nel cerchio.

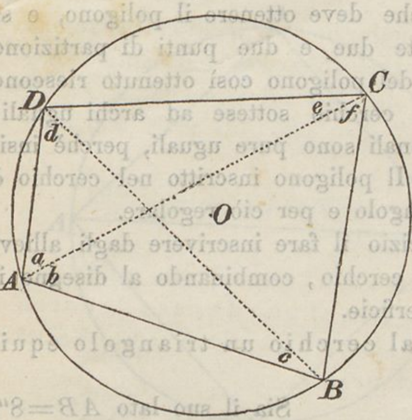
§. 209. Un poligono i di cui vertici si ritrovano tutti sulla periferia di un cerchio ed i di cui lati sono perciò altrettante corde del cerchio medesimo si dice inscritto al cerchio, ovvero il cerchio circoscritto al poligono.

Siccome per tre punti, non situati in linea retta, si può sempre condurre un cerchio, così ad ogni triangolo è possibile di circoscrivere un cerchio. Il metodo col quale si eseguisce questa costruzione riluce dal §. 191.

Altrimenti si procede rispetto ai quadrilateri. Se $ABCD$ (fig. 190) è un quadrilatero inscritto in un cerchio, conducendo in esso le diagonali AC e BD, si hanno gli angoli del triangolo

ABD, $a + b + c + d = 2R$; d'altronde c ed e come pure d ed f sono uguali come angoli alla periferia insistenti sopra

Fig. 190.



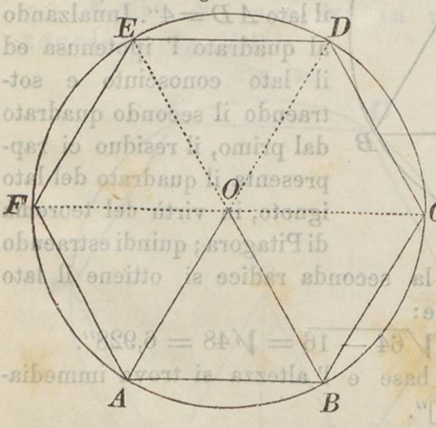
lo stesso arco, quindi avremo anche $a + b + e + f = 2R$, ossia $A + C = 2R$. Ora siccome tutti gli angoli di un quadrilatero sommati insieme importano 4 retti, così anche la somma degli D e B deve uguagliare due retti. Ne segue adunque che:

In ogni quadrilatero inscritto in un cerchio la somma di due angoli opposti è uguale a due retti.

Egli non è possibile di circoscrivere un cerchio ad un quadrilatero che non abbia la suddetta proprietà.

§. 210. Ad un polignono regolare si può sempre circoscrivere un cerchio.

Fig. 191.



Onde circoscrivere un cerchio, p. e. al poligono regolare $ABCDEF$ (fig. 191), si dividano per metà gli angoli poligonali A e B; il punto d'incontro O delle due rette che dimezzano quegli angoli è il centro del poligono ed è equidistante da tutti i suoi vertici. Se dunque dal centro O si descrive col raggio OA un cerchio, esso deve passare per tutti i vertici del poligono e perciò essergli circoscritto.

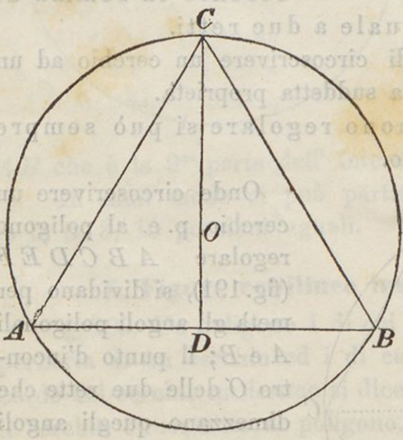
§. 211. Ad un cerchio è possibile d' inscrivere qualunque poligono regolare.

A tal fine si divide la circonferenza in altrettante parti uguali quanti sono i lati che deve ottenere il poligono, e si congiungono successivamente due e due punti di partizione mediante una corda. I lati del poligono così ottenuto riescono uguali, essendo corde del cerchio sottese ad archi uguali; similmente gli angoli poligonali sono pure uguali, perchè insistenti sopra archi uguali. Il poligono inscritto nel cerchio è dunque equilatero ed equiangolo e per ciò regolare.

Riuscirà di utile esercizio il fare inscrivere dagli allievi diversi poligoni regolari al cerchio, combinando al disegno il calcolo dei lati e della superficie.

§. 212. S' inscriva al cerchio un triangolo equilatero ABC (fig. 192).

Fig. 192.



Sia il suo lato $AB = 8''$; quanto importerà l' altezza CD e quanto l' area del triangolo?

CD è un lato del triangolo rettangolo ADC, dove l' ipotenusa AC è $= 8''$ ed il lato $AD = 4''$. Innalzando al quadrato l' ipotenusa ed il lato conosciuto e sottraendo il secondo quadrato dal primo, il residuo ci rappresenta il quadrato del lato ignoto, in virtù del teorema di Pitagora; quindi estraendo dal residuo così ottenuto la seconda radice si ottiene il lato incognito. — Si ha dunque:

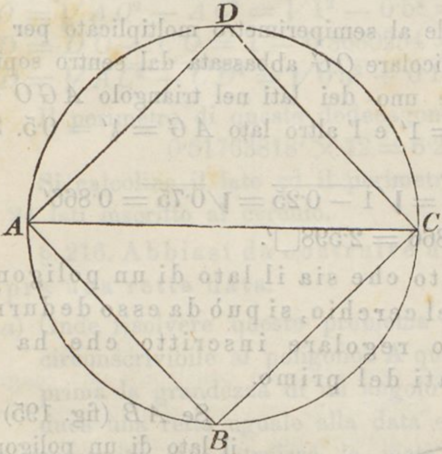
$$CD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 6{,}928''.$$

Conoscendo ora la base e l' altezza si trova immediatamente l' area $= 27 \cdot 712 \square''$.

§. 213. Sia da inscrivere al cerchio un quadrato (fig. 193).

La diagonale AC del quadrato è ad un tempo il diametro del cerchio. Perchè?

Fig. 193.



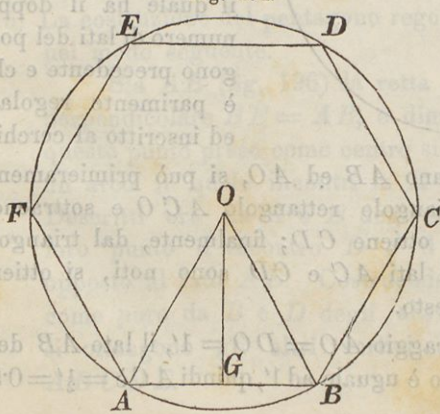
Sia ora, p. e. il lato $AB = 4^0 3' 6''$; quanto importerà il diametro AC? — AC è l' ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui lati AB e BC sono noti. S' innalzino questi due lati al quadrato e dalla somma dei quadrati si estragga la seconda radice. In tal guisa si ottiene:

$$4^0\,3'\,6'' = 330'' \qquad 330^0 = 108900$$
$$AC^2 = 108900 \times 2$$
$$AC = \sqrt{217800} = 446{\cdot}7'' = 6^0\,2'\,10{\cdot}7''.$$

Sia da costruire un quadrato avente il lato di $2'5''$ e da calcolare il raggio del cerchio ad esso circoscrivibile.

§. 214. S' inscriva in un cerchio un esagono regolare (fig. 194).

Fig. 194.



Quale grandezza hanno il perimetro e l' area di questo esagono supponendo che il raggio AO del cerchio sia lungo un piede.

Secondo il §. 207, 3) il lato dell' esagono regolare inscritto nel cerchio è uguale al suo raggio, dunque nel nostro caso ad $1'$, e perciò il perimetro è di $6'$. Il perimetro di un simile esagono è dunque il sestuplo del raggio, ovvero il triplo del diametro del cerchio circoscritto.

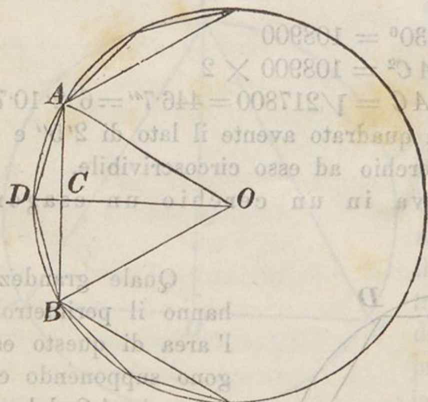
L'area poi è uguale al semiperimetro moltiplicato per la lunghezza della perpendicolare OG abbassata dal centro sopra il lato AB. Ora OG è uno dei lati nel triangolo AGO di cui l' ipotenusa è $AO = 1'$ e l' altro lato $AG = \frac{1}{2}' = 0{\cdot}5$. Si ottiene dunque:

$$OG = \sqrt{1^2 - 0{\cdot}5^2} = \sqrt{1 - 0{\cdot}25} = \sqrt{0{\cdot}75} = 0{\cdot}866'$$

donde l' area $= 3 \times 0{\cdot}866 = 2{\cdot}598\square'$.

§. 215. Conosciuto che sia il lato di un poligono regolare inscritto nel cerchio, si può da esso dedurre il lato del poligono regolare inscritto che ha il doppio numero di lati del primo.

Fig. 195.



Se AB (fig. 195) è il lato di un poligono regolare qualunque inscritto in un cerchio e si abbassa da O la perpendicolare OC che prolungata incontra la periferia in D; AD è il lato di un poligono il quale ha il doppio numero di lati del poligono precedente e che è parimente regolare ed inscritto al cerchio.

Conosciute, che siano AB ed AO, si può primieramente determinare CO dal triangolo rettangolo ACO e sottraendo poscia CD da DO, si ottiene CD; finalmente, dal triangolo rettangolo ACD dove i lati AC e CD sono noti, si ottiene anche il lato AD richiesto.

P. e.: Essendo il raggio $AO = DO = 1'$, il lato AB dell' esagono regolare inscritto è uguale ad $1'$, quindi AC è $= \frac{1}{2}' = 0{\cdot}5'$.

Ora, affine di determinare il lato del dodecagono regolare inscritto si ha:

$$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{1^2 - 0{\cdot}5^2} = 0{\cdot}8660254'$$
$$CD = DO - CO = 1 - 0{\cdot}8660254 = 0{\cdot}1339746' \text{ e}$$
$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}1339746^2} = 0{\cdot}51763818'.$$

Il perimetro di questo dodecagono è dunque:

$$0{\cdot}51763818' \times 12 = 6{\cdot}211658'.$$

Si calcolino il lato ed il perimetro del poligono regolare di 24 lati inscritto al cerchio.

§. 216. Abbiasi da costruire un poligono regolare sopra una retta data.

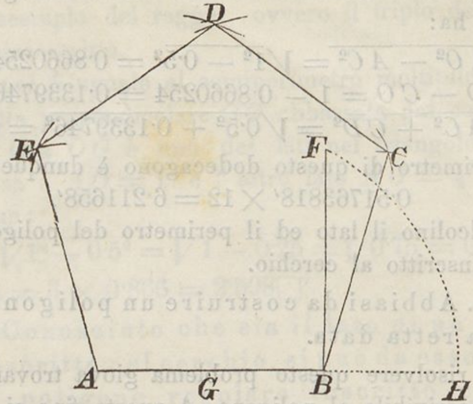
a) Onde risolvere questo problema giova trovare il cerchio circonscrivibile al poligono. A questo fine si calcoli dapprima la grandezza di un angolo poligonale, indi si conduca una retta uguale alla data ed in ciascuna delle sue estremità si costruisca la metà dell' angolo poligonale. Dal punto d' intersezione dei due nuovi lati, preso come centro, si descriva un cerchio che passi per le estremità della retta e si porti all' intorno della circonferenza la retta proposta come corda.

Si costruisca un pentagono, un esagono, un ottagono, un decagono, un dodecagono regolare insistente sopra una retta lunga 1''.

b) La costruzione del pentagono regolare può effettuarsi anche nel modo seguente.

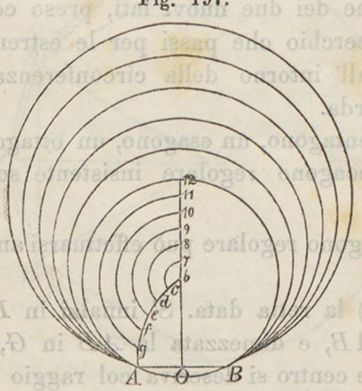
Sia AB (fig. 196) la retta data. S' innalzi in B la perpendicolare $BF = AB$, e dimezzata la AB in G, da questo punto preso come centro si descriva col raggio GF un arco il quale incontri in H la retta AB prolungata. Descritti ora da A e B degli archi col raggio AH, il loro punto d' incontro D è il vertice del pentagono opposto al lato AB. Costruendo poi dai centri A e D, come pure da B e D degli altri archi col raggio AB, si ottengono gli altri vertici del pentagono richiesto $ABCDE$.

Fig. 196.



c) Se sulla retta data non sono da construire che esagoni, ettagoni, ... o dodecagoni regolari, si può eseguire la costruzione meccanicamente nel modo seguente.

Fig. 197.



Se AB (fig. 197) è la retta data, s' innalzi nel suo centro la perpendicolare, indi si descriva dal centro B e col raggio AB l' arco AC e si divida questo arco prima in 2, ed ogni metà in 3 parti uguali; fatto poi centro nel punto 6, si conducano gli archi c 7, d 8, e 9. . ecc.

Intorno al cerchio che ha il suo centro in 6 ed il raggio AC, la retta AB può portarsi sei volte, intorno al cerchio di centro 7 e di raggio A 7 essa può portarsi 7 volte e così di seguito.

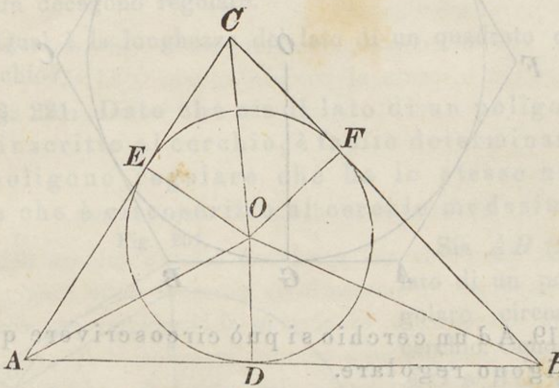
7. Figure rettilinee circoscritte al cerchio.

§. 217. Se un poligono ha i suoi lati tangenti un circolo esso dicesi circoscritto al cerchio, oppure il cerchio dicesi inscritto al poligono.

In un triangolo s' inscrive un cerchio nel modo seguente:

Si dividono per metà (fig. 198) gli angoli B ed A, indi dal punto O d' intersezione delle due rette che dimezzano gli angoli, si abbassa la retta OD perpendicolare ad AB; il

Fig. 198.

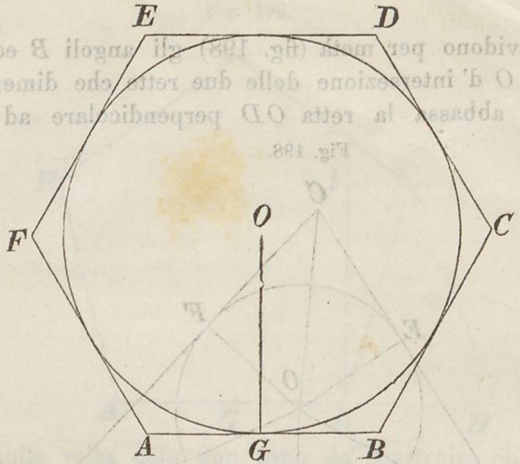


cerchio descritto dal centro O col raggio OD riesce inscritto nel triangolo proposto. Perochè condotte la retta OC e le perpendicolari OE ed OF alle rette AC e BC, il triangolo AOD è $\cong AOE$ e $BOD \cong BOF$, quindi $OD = OE$ ed $OD = OF$. I punti D, E, ed F sono dunque equidistanti da O ed il cerchio descritto da O col raggio OD tocca i lati del triangolo ABC; esso gli è perciò realmente inscritto.

§. 218. In ogni poligono regolare si può inscrivere un cerchio.

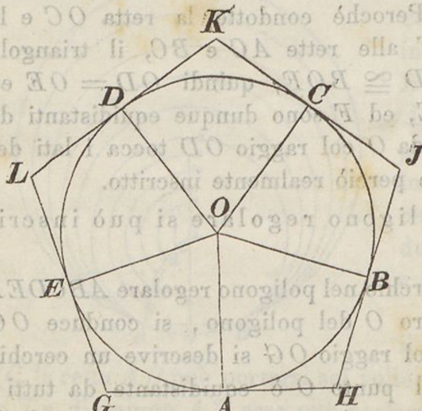
Onde inscrivere un cerchio nel poligono regolare $ABCDEF$ (fig. 199) si cerca il centro O del poligono, si conduce OG perpendicolare ad AB e col raggio OG si descrive un cerchio dal centro O. Siccome il punto O è equidistante da tutti i lati, quel cerchio deve necessariamente passare per i piedi di tutte le altre perpendicolari abbassate da O sui lati medesimi e siccome questi riescono tangenti quel circolo, così esso è realmente inscritto nel poligono proposto.

Fig. 199.



§. 219. Ad un cerchio si può circoscrivere qualunque poligono regolare.

Fig. 200.



Dividendo la sua circonferenza in altrettante porzioni uguali (fig. 200) quanti devono essere i lati del poligono richiesto ed innalzando nei punti di divisione A, B, C... le perpendicolari ai raggi che corrispondono ai detti punti, si ottiene il poligono $GHJK$... circoscritto al cerchio ed avente il numero prestabilito di lati. È facile dimostrare mediante l'uguaglianza dei quadrilateri $AOBH$, $BOCJ$, $CODK$... che il poligono così ottenuto è regolare, vale a dire che ha tutti i lati e gli angoli uguali.

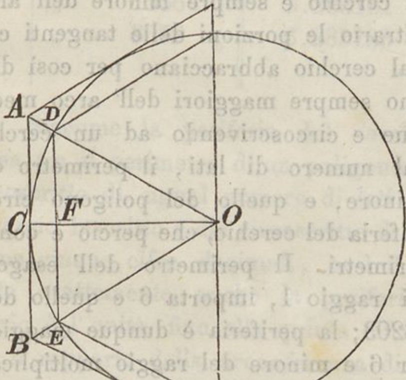
§. 220. Si circoscriva ad un cerchio dato:

a) un triangolo equilatero;
b) un quadrato;
c) un pentagono regolare;
d) un esagono regolare;
e) un ottagono regolare;
f) un decagono regolare.

Qual è la lunghezza del lato di un quadrato circoscritto al cerchio?

§. 221. Dato che sia il lato di un poligono regolare inscritto al cerchio, è facile determinare il lato del poligono regolare che ha lo stesso numero di lati e che è circoscritto al cerchio medesimo.

Fig. 201.



Sia AB (fig. 201) il lato di un poligono regolare circoscritto al cerchio. Condotte le rette AO e BO che incontrano la circonferenza in D ed in E, e congiunti questi punti mediante la corda DE, questo è il lato di un poligono regolare inscritto che ha un numero di lati uguale a quello del circoscritto il di cui lato è AB.

Conosciute ora DE e $DO = CO$, è facile determinare anche AB. I lati AB e DE sono paralleli, perchè ambidue perpendicolari a CO, quindi è il triangolo $ABO \sim DEO$ e le basi di questi triangoli devono stare fra loro come le altezze, dunque $AB : DE = CO : FO$. Di queste quattro quantità DE e CO sono note, FO può trovarsi facilmente dal triangolo DFO e perciò la quarta AB può calcolarsi mediante la proporzione di sopra.

Se p. e. DE rappresenta il lato dell' esagono regolare, ed il raggio DO è $= 1'$ avremo anche $DE = 1'$; inoltre si ha:

$$FO = \sqrt{DO^2 - DF^2} = 0 \cdot 8660254' \text{ quindi}$$

$$AB : 1 = 1 : 0 \cdot 8660254,$$

ossia $AB = 1 \cdot 1547005'$ è il valore che si ottiene per il lato del poligono regolare circoscritto. Il suo perimetro poi importa: $1 \cdot 1547005 \times 6 = 6 \cdot 928203'$.

Al §. 215 ottennemmo la lunghezza del lato del dodecagono regolare inscritto al cerchio eguale $0 \cdot 517638'$; si calcolino ora il lato ed il perimetro del dodecagono regolare circoscritto.

8. Misurazione della circonferenza.

§. 222. La corda nel cerchio è sempre minore dell' arco cui è sottesa e per lo contrario le porzioni delle tangenti che nel poligono circoscritto al cerchio abbracciano per così dire un arco, prese insieme, sono sempre maggiori dell' arco medesimo. Inscrivendo adunque e circoscrivendo ad un cerchio poligoni regolari di egual numero di lati, il perimetro del poligono iscritto riesce minore, e quello del poligono circoscritto maggiore della periferia del cerchio, che perciò è contenuta fra i due detti perimetri. Il perimetro dell' esagono inscritto in un cerchio di raggio 1, importa 6 e quello dell' esagono circoscritto $6 \cdot 928203$; la periferia è dunque maggiore del raggio moltiplicato per 6 e minore del raggio moltiplicato per $6 \cdot 928203$. Prendendo due poligoni, che abbiano un numero di lati due volte maggiore del precedente, vale a dire due dodecagoni, uno dei quali sia inscritto e l' altro circoscritto al cerchio, i loro perimetri sono vieppiù prossimi alla periferia e la comprendono perciò entro limiti più ristretti. Calcolando ora a norma del §. 215 il lato del poligono regolare inscritto di 12, 24, 48 lati ecc. e da questi dietro il §. 221 il lato del poligono regolare circoscritto di 12, 24, 48 lati ecc., si ottengono, calcolando i rispettivi perimetri fino alla sesta cifra decimale, i valori seguenti:

	Perimetro del poligono	
	inscritto	circoscritto
di 6 lati	6.000000	6.928203
" 12 "	6.211658	6.430782
" 24 "	6.265257	6.319320
" 48 "	6.278700	6.292172
" 96 "	6.282065	6.285430
" 192 "	6.282905	6.283746
" 384 "	6.283115	6.283325
" 768 "	6.283168	6.283220
" 1536 "	6.283181	6.283194
" 3072 "	6.283183	6.283187

Siccome la periferia del cerchio si trova sempre compresa fra il perimetro di un poligono inscritto e quello di uno circoscritto di ugual numero di lati e siccome i perimetri del poligono inscritto e del circoscritto di 3072 lati concordano nelle prime cinque cifre decimali, così il numero 6·28318 rappresenta esattamente anche la periferia del cerchio, il di cui raggio è l' unità, fino alla quinta cifra decimale. Da ciò segue che il rapporto della circonferenza di un cerchio qualunque al suo raggio viene espresso dal numero 6·28318 e per conseguenza al suo diametro dal numero 3·14159.

Il numero 3·14159 che esprime il rapporto costante della periferia al diametro, dicesi sovente **numero Ludolfiano** e si esprime colla lettera π; sicchè π è $= 3 \cdot 14159$.

Nei calcoli che non richiedono molta esattezza si suole porre $\pi = 3\frac{1}{7} = 3 \cdot 14$; trattandosi però di maggiore esattezza è d' uopo considerare un numero maggiore di cifre decimali. La frazione $\frac{355}{113}$ esprime il valore di π esattamente fino alla sesta cifra decimale.

§. 223. Dalle considerazioni precedenti scaturiscono i seguenti teoremi:

1) La periferia di un cerchio è uguale al diametro, ovvero al doppio raggio moltiplicato pel numero π.

Se p. e. il raggio di un cerchio è di $3' 4''$, il suo diametro è di $6' 8'' = 80''$; la periferia poi sarà:
$= 80 \times 3 \cdot 14159 = 251 \cdot 3272'' = 3^0 2' 11 \cdot 3271''$.

2) Il diametro di un cerchio è uguale alla periferia divisa pel numero π.

Se p. e. la periferia di un cerchio è di $20''$, quale ne è il diametro?

$20'' : 3\frac{1}{7} = 6\frac{4}{11}''$ di diametro.

3) Le periferie di due cerchî stanno fra loro come i diametri, o come i raggi.

Perocchè se D e d sono i diametri, P e p le periferie di due cerchî, si avrà:

$$P = D \times 3 \cdot 14 \text{ e } p = d \times 3 \cdot 14$$

quindi $P : p = D : d$.

§. 224. Onde determinare la lunghezza di un arco circolare espresso in gradi, si applica il teorema dedotto al §. 184. Vale a dire:

La lunghezza di un arco sta all'intera periferia, come l'angolo al centro corrispondente sta a 360^0.

P. e. Dovendosi determinare la lunghezza di un arco di 45^0 pel caso dove il raggio sia di $5'$, si ha:

$$\text{Periferia} = 10 \times 3 \cdot 1416 = 31 \cdot 416',$$

quindi la proporzione: lunghezza dell' arco : $31 \cdot 416 = 45^0 : 360^0$, donde segue la lunghezza dell' arco $= 3 \cdot 927'$.

A norma dello stesso teorema si può inversamente determinare il numero dei gradi compresi nell' arco e nell' angolo al centro corrispondente.

P. e. un arco circolare è di $4'$ e l' intera periferia cui esso appartiene è lunga $20'$; quanti gradi contiene l' arco proposto?

$$4 : 20 = x^0 : 360^0 \text{ quindi } x = 72^0.$$

§. 225. Problemi.

1) Qual è la lunghezza della periferia di un cerchio che ha 2′ 8″ di diametro?

2) Il diametro di un cerchio importa 3^0, 2^0 4′, 1^0 5′, 10″, $3 \cdot 92^0$, $3\frac{3}{4}'$; quale ne è la periferia?

3) Si determini la periferia del cerchio, essendo il raggio di 3′ 7″, di 1^0 1′ 1″, di $4\frac{7}{12}^0$, di 48·28′.

4) Quale è il diametro di un cerchio, se la sua periferia è di 25^0.

5) La periferia è di 15^0 3′, di 12·2″, di 1^0 3′ 5·5″; quale ne è il raggio?

6) Quale è la lunghezza di un arco di 20^0 se il diametro del cerchio cui esso appartiene è di 5′ 11″?

7) Il raggio di un cerchio è lungo 2′; quale lunghezza avrà un suo arco di 30^0, di 125^0, di 57^0 30′?

8) L' arco di un cerchio che ha 22·5′ di diametro è lungo 20′; quanti gradi comprende?

9) Il raggio di un cerchio è di 8′; quanti gradi contengono gli angoli al centro corrispondenti ad archi della lunghezza di 5′, di 7·5′ di 2′ 7″?

10) Qual è il diametro alla base di un tronco d' albero essendo la circonferenza di 7′ 2″?

11) Quanti alberi equidistanti di 12′ l' uno dal' altro si possono piantare intorno ad uno stagno circolare di 87′ di diametro?

12) Un pedone impiega 6 minuti per fare il giro di uno stagno circolare percorrendo 4′ per minuto secondo; qual è il diametro dello stagno?

13) La ruota di una locomotiva ha 3′ di diametro; quante volte dovrà essa girarsi, percorrendo la rotaja di una lega tedesca?

14) Una palla di 3″ e $\frac{1}{4}$ di diametro si muove sopra una platea lunga 36′; quante volte compie essa il suo giro?

15) Un grado dell' equatore terrestre viene calcolato di 15 miglia geografiche; quale è il raggio dell' equatore ossia il raggio terrestre?

16) Quanti denti deve ottenere una ruota del diametro di 6′ 3″, onde le loro distanze da asse ad asse sieno di 4″ e $\frac{1}{2}$?
17) Quale è il raggio di una mensa di forma circolare destinata per otto persone ciascuna delle quali occupi 2′ 3″ della circonferenza.
18) La ruota anteriore di una carrozza ha 3′ di diametro, la posteriore 5′; quanti giri di più della posteriore farà la ruota anteriore in un tratto di 12000′?
19) Un mappamondo ha 16″ di diametro; quale lunghezza ha in esso ciascun grado all' equatore?
20) Trattandosi di volgere una fune 18 volte intorno ad un ceppo rotondo del raggio di 10″; quale dovrà essere la lunghezza della fune?
21) Quale è la grandezza della circonferenza interna e quale quella dell' esterna di un tubo di ferro che ha 1′ in luce e $\frac{7}{8}$″ di spessore?
22) Una ruota idraulica ha 24 palete distanti l' una dall altra di 10·5″; quale è il diametro della ruota?
23) Il vericello di un pozzo ha 1′ 2″ di diametro; quale profondità ha il pozzo, se la corda che deve giungere a toccarne il fondo s'avvolge 18 volte attorno al vericello?
24) Volendo circondare un laghetto circolare con una siepe piantata alla distanza di 3′ 6″ dalla sponda; quale sarà la circonferenza della siepe, se quella del laghetto è di 158′?
25) La periferia del fondo di una botte è di 12′ 2″; quella al suo ventre e di 13′ 6″; quali sono le lunghezze dei rispettivi diametri?
26) Una torre circolare ha internamente 75·4′ ed esternamente 120′ di periferia, qual è la grossezza delle mura?

9. Misura della superficie del cerchio.

§. 226. Siccome la superficie di un cerchio è sempre maggiore di quella del poligono regolare inscritto e minore di quella del poligono regolare circoscritto di ugual numero di lati, e siccome queste ultime superficie si vanno avvicinando sempre più a quella del cerchio di mano in mano che si va raddoppiando il numero dei lati dei poligoni, così si potrebbe dedurre l' area del cerchio da quella dei poligoni regolari come di sopra abbiamo dedotta la lunghezza della periferia dai perimetri dei poligoni. Più semplicemente però si consegue lo scopo mediante le seguenti considerazioni.

Quanto maggiore è il numero dei lati del poligono inscritto, altrettanto minori divengono i lati stessi, e tanto più si avvicinano questi alla periferia, e con ciò tanto minore riesce anche la differenza fra l' area del poligono e quella del cerchio. Immaginando pertanto il numero dei lati di un tal poligono accresciuto all' infinito, il poligono regolare si confonde finalmente col cerchio medesimo. Un cerchio può dunque considerarsi qual poligono di un numero infinito di lati. Siccome poi in generale l' area di un poligono regolare è uguale al perimetro moltiplicato per la metà della perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati, la qual perpendicolare considerando il cerchio viene a confondersi col raggio, così ne segue che:

L' area di un cerchio è uguale alla circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, ovvero per la quarta parte del diametro.

Se per es. il raggio è di 8″, la periferia sarà di $16 \times 3{\cdot}14 = 50{\cdot}24''$ e l' area $= 50{\cdot}24 \times 4 = 200{\cdot}96\square''$.

Si richiede la superficie di un cerchio, la cui periferia importi 44′.

$44' : 3\frac{1}{7} = 14'$ di diametro,

$44' \times \frac{14}{4} = 154\square'$ d' area.

§. 227. La proposizione antecedente si può esprimere anche nel modo seguente:

Se r significa il raggio, p la periferia ed f l' area del cerchio proposto, si avrà.

$$f = p \cdot \frac{r}{2}, \text{ ovvero essendo } p = 2\pi r,$$

$$f = 2r\pi . \frac{r}{2} = r^2\pi, \text{ vale a dire:}$$

L'area di un cerchio è uguale al quadrato del raggio moltiplicato pel numero π.

Se il raggio è p. e. di $5'$, si ha:

$$f = 5^2 \times 3{\cdot}1416 = 25 \times 3{\cdot}1416 = 78{\cdot}54\square'.$$

Dovendo all' incontro calcolare il raggio di un cerchio data la sua superficie, non s' ha che a dividere quest' ultima pel numero π, il quoziente che si ottiene è il quadrato del raggio. Estrattane la radice quadrata si ottiene il raggio medesimo. P. e. Qual è il raggio di un cerchio la cui superficie è di $20\square''$?

$$2 : 3{\cdot}14 = 6{\cdot}37,\ \sqrt{6{\cdot}37} = 2{\cdot}52'' \text{ di raggio.}$$

§. 228. Se R ed r sono i raggi, F ed f le aree di due cerchî, si avrà:

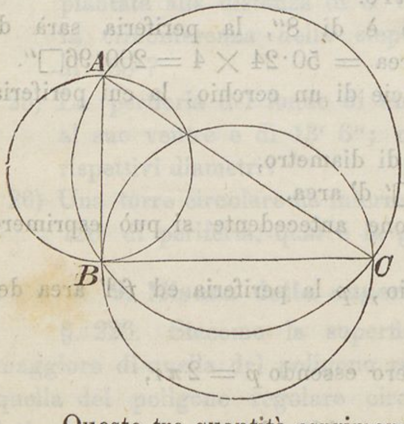
$$F = R^2\pi \text{ ed } f = r^2\pi$$

quindi; $F : f = R^2 : r^2$, vale a dire:

Le aree di due cerchî stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi, ovvero come i quadrati dei loro diametri.

Un cerchio dunque il quale abbia un diametro doppio, triplo, quadruplo, avrà una superficie di 4, 9, 16 volte maggiore di quella corrispondente al cerchio che ha il raggio unitario.

Fig. 202.



§. 229. Se ABC (fig. 202) è un triangolo rettangolo in B e si descrivono sopra i tre lati presi come diametri dei cerchî, in virtù del teorema dî Pitagora si avrà:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

quindi moltiplicando le due espressioni pel numero π, e dividendole poscia per 4 si ottiene:

$$\frac{AC^2\pi}{4} = \frac{AB^2\pi}{4} + \frac{BC^2\pi}{4}$$

Queste tre quantità esprimono nel loro ordine le aree dei cerchî descritti sull' ipotenusa e sopra i due cateti.

L' area dunque del cerchio descritto sull' ipotenusa equivale alla somma di quelle dei due cerchî descritti sopra i cateti del medesimo triangolo rettangolo.

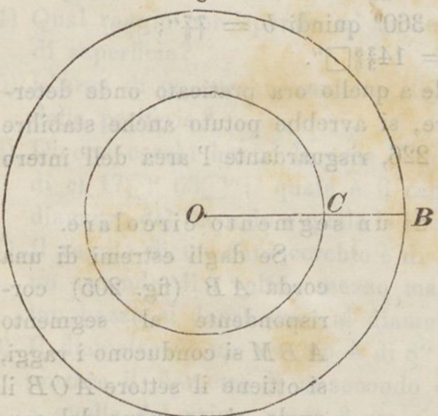
Su questo teorema si fonda la soluzione dei due problemi seguenti:

a) Descrivere un cerchio la di cui area sia uguale alla somma delle aree di due cerchî dati.

b) Descrivere un cerchio la di cui area sia equivalente alla differenza delle aree di due cerchî dati.

§. 230. Onde calcolare la superficie di un anello circolare, si sottrae l' area del cerchio minore da quella del maggiore o più brevemente: si sottrae il quadrato del raggio minore da quello del maggiore e si moltiplica il residuo così ottenuto pel numero π.

Fig. 203.

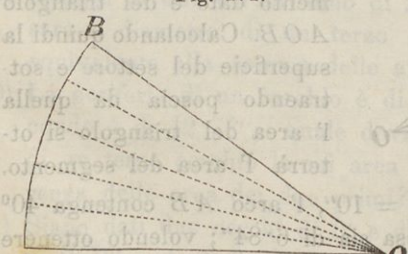


Sia p. e. (fig. 203) $OB = 5'$ ed $OC = 3'$, si avrà:

$$OB^2 = 25$$
$$OC^2 = 9$$
$$\text{Anello} = 16 \times 3 \cdot 14.$$
$$= 50 \cdot 24 \square'.$$

§. 231. S' abbia a determinare la superficie di un settore circolare.

Fig. 204.



Se nel settore OAB (fig. 204) s' immagina condotto un numero infinito di raggi, i piccolissimi settori che ne risultano possono risguardarsi come triangoli le cui basi prese insieme costituiscono l' arco AB corrispondente al settore primitivo e la cui altezza comune è il raggio stesso. Onde ottenere la superficie del settore si calcoleranno le aree dei suddetti triangoli, e si formerà la loro somma. A tal fine si sommano imprima tutte le basi, indi si moltiplica la loro somma, cioè l' arco AB, per la metà della loro altezza comune ossia per la metà del raggio.

La superficie di un settore circolare è dunque uguale al prodotto del suo arco per la metà del raggio.

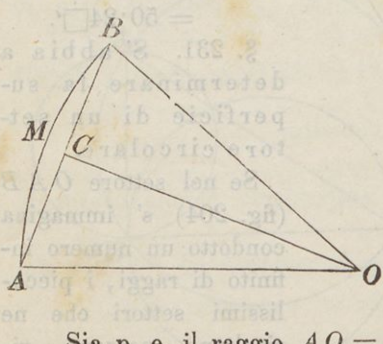
Se p. e. il raggio è di 7'' e l' arco AB contiene 35⁰, si ottiene, rappresentando per p la periferia, per b la lunghezza dell' arco AB, per s la superficie del settore:

$$p = 14 \times 3\tfrac{1}{7} = 44''$$
$$b : 44 = 35^0 : 360^0 \text{ quindi } b = \tfrac{77}{18}'';$$
$$\text{ed } s = \tfrac{77}{18} \times \tfrac{7}{2} = 14\tfrac{35}{36}\square''.$$

In modo affatto simile a quello ora praticato onde determinare l' area di un settore, si avrebbe potuto anche stabilire il teorema accennato al §. 226, risguardante l' area dell' intero cerchio.

§. 232. Superficie di un segmento circolare.

Fig. 205.



Se dagli estremi di una corda AB (fig. 205) corrispondente al segmento ABM si conducono i raggi, si ottiene il settore AOB il quale si compone del segmento dato e del triangolo AOB. Calcolando quindi la superficie del settore e sottraendo poscia da quella l' area del triangolo si otterrà l' area del segmento.

Sia p. e. il raggio $AO = 10''$, l' arco AB contenga 40^0 e la corda AB ad esso sottesa sia di $6 \cdot 84''$; volendo ottenere l' area del segmento, si ottiene in primo luogo per l' arco del settore AOB la lunghezza di $6 \cdot 98''$, quindi la superficie di quel settore

$$= 6 \cdot 98 \times 5 = 34 \cdot 9 \square'';$$

indi nel triangolo AOD l'altezza $OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = 9 \cdot 39''$; e perciò l' area

$$= 3 \cdot 42 \times 9 \cdot 39 = 32 \cdot 11 \square''.$$

La superficie del settore ABM è dunque di

$$34 \cdot 9 - 32 \cdot 11 = 2 \cdot 79 \square''.$$

§. 233. Problemi.

1) Si determini l' area di un cerchio che ha $5^0\,4'$ di diametro.
2) Si determini l'area dei cerchî i cui diametri sono di $15'$, di $1^0\,2'\,5''$, di $3 \cdot 75'$?
3) Quanto importa l' area di un cerchio, se la periferia corrispondente conta 26^0?
4) Qual raggio corrisponde ad un cerchio che ha $5 \square'\, 48 \square''$ di superficie?
5) L' area di un cerchio contiene $10 \square^0$, qual è la lunghezza della periferia?
6) Diversi cerchî hanno le aree di *a*) $166 \square'$ di *b*) $9 \cdot 24 \square^0$, di *c*) $17 \square'\, 63 \square''$; quale è il raggio del primo, quale il diametro del secondo e quale la periferia del terzo cerchio?
7) Il raggio di un dato cerchio è di $5'\,8''$; volendo costruire un secondo di 2 volte e mezzo maggiore del primo, quale lunghezza si dovrà dare al diametro?
8) Il diametro di un cerchio è di $8''$ e $\frac{1}{2}$; quanto dovrà importare il diametro di un secondo cerchio la cui area stia a quella del primo come 3 sta a 4?
9) I raggi di due cerchî sono di $2'\,4''$ e di $3''$ e $\frac{1}{2}$; quale sarà il diametro di un terzo cerchio, la cui area sia equivalente alla somma delle aree dei due primi?
10) La periferia di un cerchio è di $27 \cdot 35''$, quella di un secondo è di $12 \cdot 78''$: quale dovrà essere la circonferenza di un terzo cerchio la cui area sia equivalente alla differenza delle aree dei due primi?
11) Siano dati due cerchî di $5'$ e di $4'$ di raggio, due altri di $2'\,8''$ e di $2'\,3''$ di diametro ed altri due di $57'\,2''$ e di $93 \cdot 25''$ di circonferenza. Si calcoli nel primo caso il

raggio, nel secondo il diametro e nel terzo la periferia del cerchio la cui superficie sia equivalente alla somma delle superficie dei due cerchî dati.

12) Un cerchio ha la periferia uguale al perimetro di un quadrato il cui lato è di 8″; in quale rapporto stanno fra loro le aree di queste due figure?

13) Due cerchî concentrici hanno i raggi di 3′ 5″ e di 2′ 8″; quale superficie ha l' anello fra essi compreso?

14) Se le periferie di due cerchî concentrici hanno 137″ e 152″ in lunghezza, quale sarà la grandezza dell' anello da loro compreso?

15) Qual è il raggio maggiore di un anello circolare il quale conti 86·24□′ in superficie ed il cui raggio minore sia di 4·2′.

16) Il diametro di un cerchio è di 10′; quale grandezza deve avere il cerchio concentrico interno, se l' anello interposto ha la larghezza di 1′ 7″?

17) Si determini l' area di un settore, dove il raggio sia di 3·24′ e la lunghezza dell' arco di 4·5′.

18) La periferia di un cerchio è di 249″; quanto importerà la superficie di un settore se il suo angolo al centro contiene 50°?

19) Quanti gradi deve contenere l' arco di un settore che abbia 28·85□″ in superficie ed il cui raggio sia di 3′ 5″?

20) Quale sarà l' area di un segmento circolare dove tanto il raggio quanto la corda hanno la lunghezza di 3′ 11″?

21) La circonferenza di un tronco d' albero in una delle sue sezioni è di 7′ 10″; quale area corrisponde alla detta sezione?

22) In un villaggio si trova un bacino circolare del diametro di 2⁰ 3′ che si vorrebbe ingrandire fino a che esso ottenga il diametro di 3⁰ 4′; di quanto riuscirà aumentata l' area dello specchio dell' acqua?

23) All' intorno di un prato circolare del diametro di 18⁰ 4′ gira una strada larga 4′; quale è l' area occupata dalla detta strada?

24) La sezione di un tronco rotondo ha $8\square'\ 35\square''$ d' area; si determini il lato dell' esagono regolare che vuolsi ottenere mediante squadratura?

25) Un tubo ha $4''$ in luce e $\frac{1}{2}''$ di grossezza; quale è la grandezza della sezione trasversale?

26) In un bossolo rotondo del diametro di $1 \cdot 1''$ sono contenuti 100 zolfanelli; quanti ne deve capire un altro del diametro di $2''$?

27) Dal centro di un foglio di carta quadrato che ha $9''$ di lato, si descrive col raggio di $4''$ un cerchio; quale superficie ha la carta rimasta fuori del cerchio descritto?

28) Quale larghezza si deve assegnare allo spazio destinato per 500 persone all' ingiro di un anfiteatro circolare del diametro di 4^0, supponendo che ogni persona occupi lo spazio di $4\square'$?

29) Uno stagno circolare ed uno quadrato hanno il contorno di uguale lunghezza, cioè di 60^0; ambidue sono circondati da un orlo d' erba largo 2^0; quale delle due superficie è la minore e quale è la loro differenza?

30) Sopra un bersaglio vi sono tre anelli neri e due bianchi, ciascuno della larghezza di 2 pollici e mezzo, il centro poi del bersaglio è formato da un cerchio bianco del diametro di $2''$; quanto grande è *a*) l' intero bersaglio, *b*) l' area del circolo che ne costituisce il centro, *c*) ciascuno degli anelli?

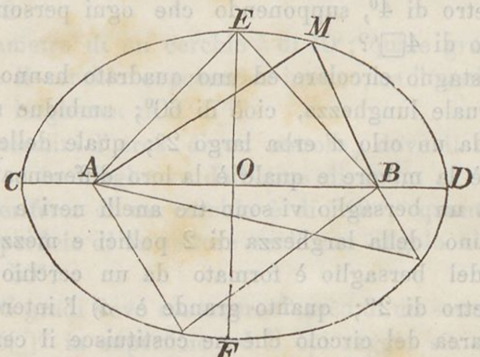
31) Il raggio di un cerchio è di $32''$; quale è l' eccesso della sua area sopra quella del quadrato inscritto, e sopra quella dell' esagono regolare parimente inscritto; all' incontro di quanto è essa minore dell' area del quadrato circoscritto, e dell' area dell' esagono regolare pure circoscritto.

IX. Curve diverse.

1. L'ellisse.

§. 234. Nella retta CD (fig. 206) siano i punti A e B equidistanti da C e D. Posti in A e B due aghi e fissate attorno a questi le estremità di un filo uguale in lunghezza alla retta CD, si tenda il filo mediante la matita collocata in M e la si giri lungo tutto il filo medesimo tenendolo sempre esattamente teso; la matita descrive nel suo movimento una curva rientrante in sè medesima che chiamasi ellisse. La retta CD dicesi asse maggiore, le estremità C e D di questa sono i vertici ed il punto O che la divide per metà il

Fig. 206.



centro dell' ellisse; i punti A e B poi si dicono i fuochi e le rette BM e AM condotte dai fuochi ad un punto qualunque dell' ellisse, chiamansi raggi vettori del punto medesimo.

Dalla suddetta descrizione dell' ellisse mediante un filo risulta che la lunghezza delle due porzioni di filo AM e BM, cioè che i due raggi vettori, si cambiano da punto a punto aumentando l' uno d' essi col diminuire dell' altro, ma che la loro somma rimane sempre uguale all' asse maggiore.

Sicchè per ogni punto dell' ellisse la somma dei raggi vettori è uguale all' asse maggiore.

La retta EF che nel centro stà perpendicolare all' asse maggiore, dicesi asse minore dell' ellisse. Nei punti E ed F

i due raggi vettori hanno la medesima lunghezza e perciò ognuno d'essi è uguale al semiasse maggiore.

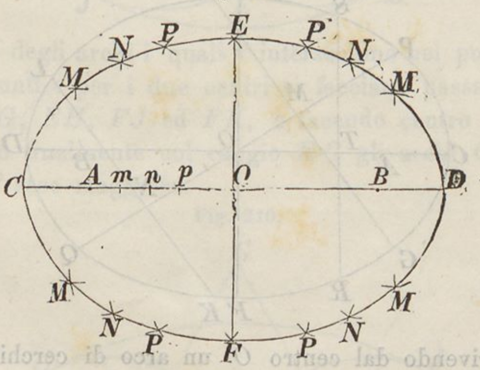
La distanza di un fuoco dal centro, come $A\,O$ e $B\,O$, chiamasi **eccentricità dell'ellisse.** Quanto minore è l'eccentricità, tanto più l'ellisse si avvicina al cerchio.

Nelle costruzioni grafiche e nel calcolo il triangolo $A\,O\,E$ è di speciale importanza. Che cosa rappresenta ciascuno de' suoi lati?

§. 235. **Si determini un numero qualunque di punti appartenenti all'ellisse, conosciuti che siano l'asse maggiore ed i fuochi della medesima.**

Siano A e B (fig. 207) i due fuochi e CD l'asse maggiore dell'ellisse; se primieramente si descrivono dai centri

Fig. 207.



A e B e con raggio uguale al semiasse maggiore degli archi, i loro punti d'intersezione E ed F danno le estremità dell'asse minore.

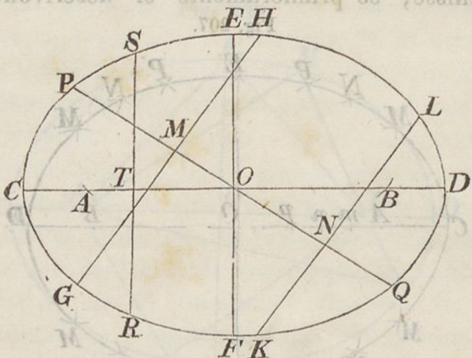
Preso ora fra A ed O un punto qualunque m, descritti da ogni fuoco col raggio $C\,m$ e sopra e sotto alla AB degli archi e tagliati questi archi con altri quattro che si descrivono pure dai fuochi col raggio Dm, i quattro punti M di loro intersezione sono punti dell'ellisse, essendo per ciascuno di loro uno dei raggi vettori uguale a Cm e l'altro a Dm ed importando perciò la loro somma $Cm + Dm$, ovvero l'asse maggiore CD. In modo affatto simile si possono ottenere mediante il punto n i quattro punti N, mediante p i quattro punti P, e così di seguito si potranno determinare tanti punti dell' ellisse quanti se ne desiderano. Determinando questi punti molto vicini gli uni agli altri, si potranno unire mediante una linea curva che sarà l' ellisse stessa.

§. 236. Data un' ellisse cercare il centro e determinare la situazione degli assi e dei fuochi.

Si conducano in direzione arbitraria due corde parallele GH e KL (fig. 208), indi si conduca pei loro centri M ed N anche la corda PQ e la si divida in O per metà.

Questo punto O è il centro dell' ellisse.

Fig. 208.



Descrivendo dal centro O un arco di cerchio che intersechi l' ellisse in R ed S, e dividendo per metà in T la corda RS, la corda CD condotta per T ed O è l' asse maggiore dell' ellisse, quindi la EF elevata perpendicolarmente sulla CD nel punto O sarà l' asse minore.

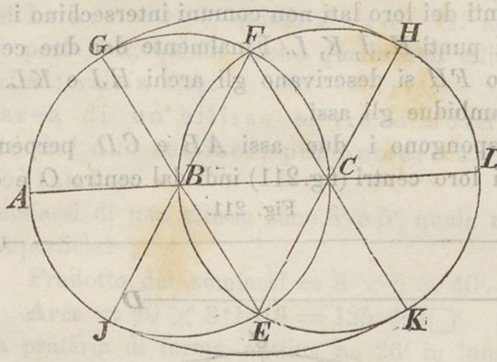
Descritti finalmente dal centro E e con raggio uguale al semiasse maggiore CO degli archi che intersecano l' asse maggiore in A ed in B, si ottengono con questi punti i due fuochi dell' ellisse proposta.

§. 237. Sia da costruire una curva simile all' ellisse mediante la composizione di diversi archi circolari nei casi seguenti:

a) Lasciati i due assi all' arbitrio del disegnatore.

Si trasportino (fig. 209) sopra una retta tre porzioni uguali $AB = BC = CD$, e col raggio BC si descrivano dai

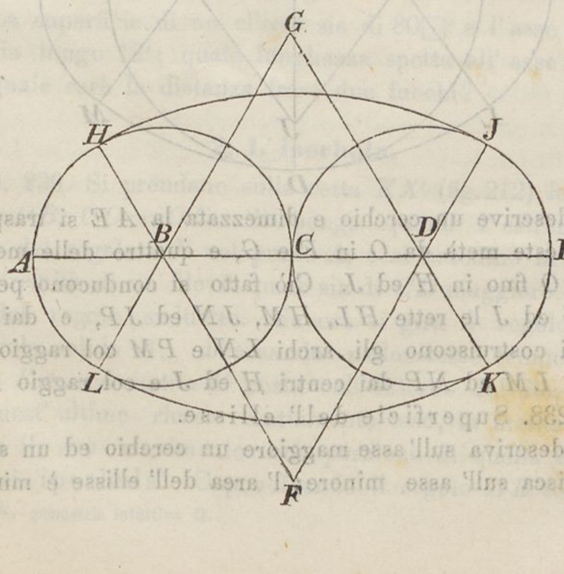
Fig. 209.



centri B e C degli archi i quali s' intersechino nei punti E ed F. Per questi punti e per i due centri si facciano passare le quattro rette EG, EH, FJ ed FK, e facendo centro in E ed F si descrivano finalmente col raggio EG gli archi GH ed JK.

b) Dato l' asse maggiore.

Fig. 210.

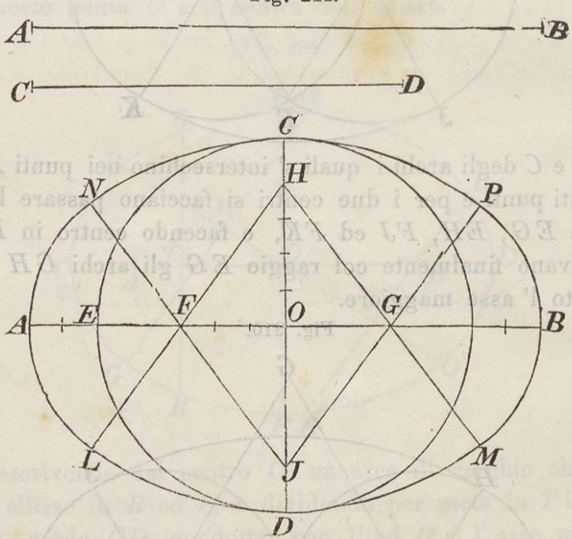


Si partisca l' asse maggiore AE (fig. 210) in quattro porzioni uguali e fatto centro in B e D, si descrivano col raggio BC due cerchî i quali si tocchino in C. Indi si costruiscano sopra BD due triangoli equilateri BDF e BDG, in modo che i prolungamenti dei loro lati non comuni intersechino i due cerchî suddetti nei punti H, J, K, L. Finalmente dai due centri F e G e col raggio FH si descrivano gli archi HJ e KL.

c) Dati ambidue gli assi.

Si dispongono i due assi AB e CD perpendicolari a vicenda nei loro centri (fig. 211) indi dal centro O e col raggio

Fig. 211.



OD si descrive un cerchio e dimezzata la AE si trasportano tre di queste metà da O in F e G, e quattro delle medesime pure da O fino in H ed J. Ciò fatto si conducono pei punti H, F, G ed J le rette HL, HM, JN ed JP, e dai centri F e G si costruiscono gli archi LN e PM col raggio AF e gli archi LM ed NP dai centri H ed J e col raggio NJ.

§. 238. Superficie dell' ellisse.

Si descriva sull' asse maggiore un cerchio ed un secondo si costruisca sull' asse minore; l' area dell' ellisse è minore di quella del primo cerchio e maggiore di quella del secondo. Ora si è trovato che l'area dell' ellisse equivale all' area di un cerchio il cui raggio è la media proporzionale fra i due semiassi di essa. Se r è questo raggio, a il semiasse maggiore, e b il minore, si ha $a : r = r : b$, quindi $r^2 = ab$. L' area di questo cerchio è però $r^2 \pi$, quindi anche quella dell' ellisse sarà $r^2 \pi$, ovvero $ab\pi^2$; vale a dire:

L' area di un' ellisse si trova moltiplicando il prodotto dei due semiassi pel numero π.

Problemi.

1) I semiassi di una ellisse sono 8' e 5', quale ne dev' essere la superficie?

Prodotto dei semiassi $= 8 \times 5 = 40'$.

Area $= 40 \times 3{\cdot}1416 = 125{\cdot}664\square'$.

2) Una prateria di forma elittica ha 26' in lunghezza e 16' in larghezza; quale sarà l' area da essa occupata?

3) L' arena di Verona è un' ellisse della lunghezza di 77^0 e della larghezza di 61^0; quale ne è l' area interna?

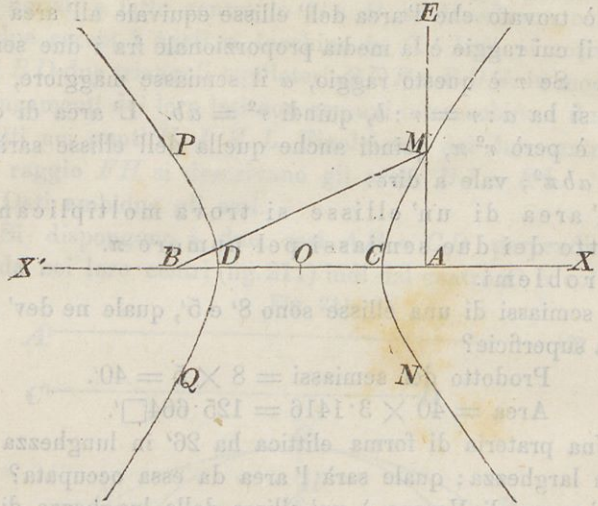
4) L' eccentricità di un' ellisse è di 5' 4'', l' asse maggiore è di 17' 8''; quale è la lunghezza dell' asse minore e quale sarà la superficie dell' ellisse?

5) La superficie di un' ellisse sia di $80\square'$ e l' asse maggiore sia lungo 12'; quale lunghezza spetta all' asse minore e quale sarà la distanza fra i due fuochi?

2. L' iperbola.

§. 239. Si prendano sulla retta XX' (fig. 212) le porzioni $OA = OB$, $OC = OD$. Si ponga quindi l' estremità dello spigolo del regolo AE nel punto A, e si assodino in E e B le due estremità di un filo il quale sia di CD maggiore dello spigolo del regolo suddetto. Se ora si gira il regolo attorno all' angolo solido A, abbassando nello stesso tempo lungi lo spigolo EA una matita M posta nell' interno del filo, in modo che quest' ultimo riesca esattamente teso, la matita descrive durante il suo movimento una porzione di quella curva che chiamasi iperbola. Capovolgendo il regolo AE tostochè la

Fig. 212.



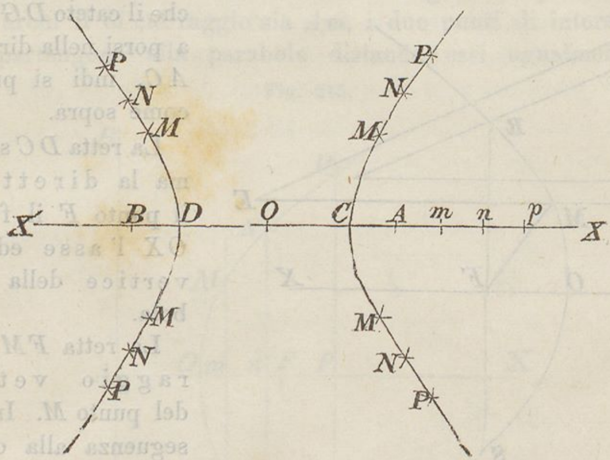
matita sia giunta in C, e continuando poi l' operazione or ora descritta, si ottiene la parte inferiore CN dell' iperbola, uguale alla superiore CM. Posto poi il vertice dell' angolo solido del regolo in B, e fissata in A la seconda estremità del filo che prima ritrovavasi in B, si può analogamente descrivere col mezzo della matita il secondo ramo PDQ dell' iperbola affatto uguale al primo MCN. La retta CD si chiama l' asse, il punto O, in cui essa è divisa per metà, il centro, A e B si dicono i fuochi, C e D poi i vertici dell' iperbola. Le rette AM e BM sono i raggi vettori di M. Ad ogni altro punto corrispondono altri due raggi vettori, fra i quali sussiste però sempre una determinata e costante relazione. Dalla costruzione dell' iperbola cioè risulta, che la porzione di filo BM ohe rappresenta uno dei raggi vettori è sempre uguale in lunghezza alla somma dell' altro raggio vettore AM e dell' asse CD; ossia la differenza fra BM ed AM deve uguagliare costantemente l' asse CD.

Vediamo adunque che nell' iperbola la differenza dei due raggi vettori di ciascun punto è sempre uguale all' asse.

§. 240. Sieno da determinare col compasso diversi punti dell' iperbola, dati che ne siano l' asse ed i fuochi.

Siano A e B (fig. 213) i fuochi, ed O il centro della distanza che li separa; inoltre siano C e D i vertici e quindi CD l' asse dell' iperbola. Si prenda ora sulla retta AX un

Fig. 213.

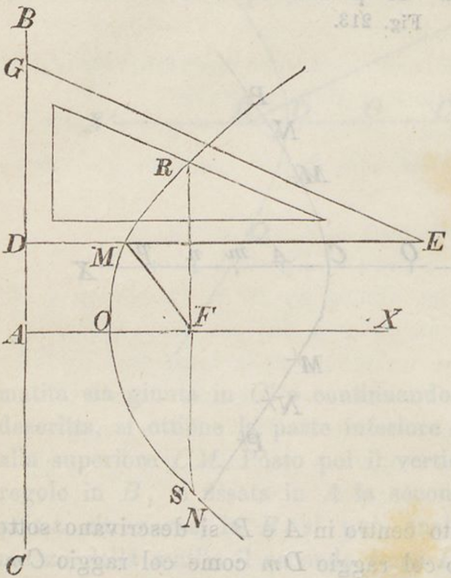


punto qualunque m, e fatto centro in A e B si descrivano sotto e sopra degli archi tanto col raggio Dm come col raggio Cm; i quattro punti M di loro intersezione sono altrettanti punti dell' iperbola, essendo per ognuno d' essi un raggio vettore $= Dm$, e l' altro $= Cm$, quindi la loro differenza $Dm - Cm$ uguale all' asse. Similmente mediante il punto n si possono determinare i quattro punti N, mediante p i quattro punti P e così di seguito si possono determinare punti a piacere. Congiungendo i punti così ottenuti mediante una linea curva questa è un' iperbola.

3. La parabola.

§. 241. Si prendano sulla retta AX (fig. 214) le porzioni $AO = OF$ e si conduca per A la $AC \perp AX$. Preso ora uno squadretto DEG ed un filo che abbia la lunghezza del suo cateto DE se ne fissi una estremità in E e l' altra in F; la matita M, che tendendo esattamente il filo, si muove lungo il cateto ED dello squadretto, mentre questo partendo da A scorre coll' altro cateto DG lungo AB, descrive una curva che dicesi parabola. Per ottenere il ramo inferiore ON della parabola non si ha che a girare lo squadretto in guisa che il cateto DG venga a porsi nella direzione AC, indi si procede come sopra.

Fig. 214.



La retta DC si chiama la direttrice, il punto F il fuoco, OX l' asse ed O il vertice della parabola.

La retta FM dicesi raggio vettore del punto M. In conseguenza alla costruzione, la lunghezza del filo FM rimane costantemente uguale alla porzione MD del cateto DE; vale a dire: ogni punto della parabola dista ugualmente dal fuoco e dalla direttrice.

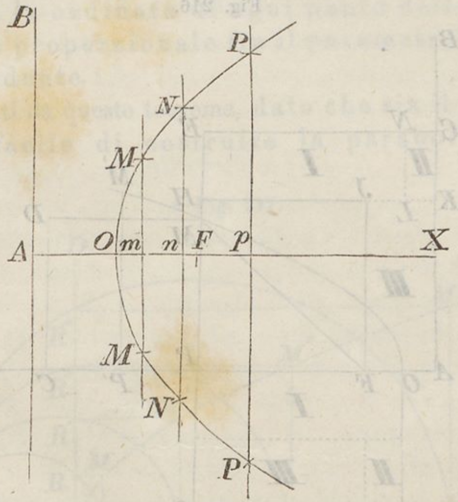
La retta RS, che nel fuoco sta perpendicolare sull' asse, chiamasi parametro della parabola. Essendo R poi un punto della parabola, la sua distanza FR dal fuoco deve essere uguale alla sua distanza dalla direttrice, cioè alla retta AF, quindi $AF = FR$. La distanza del fuoco dalla direttrice è adunque uguale al semiparametro.

§. 242. Sieno da determinare più punti della parabola, essendo dati la direttrice ed il fuoco della medesima.

Sia F (fig. 215) il fuoco e BC la direttrice. Se si conduce $FA \perp BC$ il punto O che divide per metà questa perpendicolare è il vertice e la OX, prolungata oltre F, è l'asse della parabola.

Se da un punto qualunque m dell' asse s' innalza una perpendicolare alla medesima e la si taglia dal punto F con degli archi il di cui raggio sia Am, i due punti di intersezione M appartengono alla parabola distando essi ugualmente dal

Fig. 215.



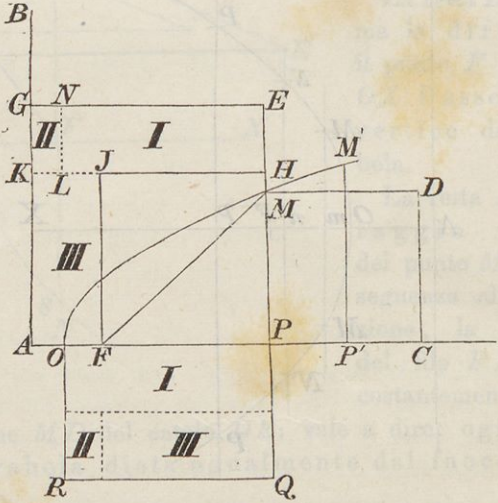
fuoco e dalla direttrice. Similmente determina il punto n due punti N, il punto p due altri punti P, che appartengono tutti alla stessa parabola. In questa guisa si possono ottenere tanti punti quanti sono necessarî a disegnare la parabola colla dovuta esattezza.

§. 243. La perpendicolare MP (fig. 216) abbassata dal punto M della parabola sull' asse, si chiama **ordinata** di quel punto e la porzione OP situata fra il vertice e la suddetta ordinata dicesi **ascissa**. Queste due rette poi appajate si dicono le **coordinate** del punto considerato.

In conseguenza al teorema di Pitagora risulta dal triangolo rettangolo FPM che il quadrato $MPCD$ sull' ordinata MP equivale a quello costruito sul raggio vettore, ovvero sulla retta AP ad esso eguale, vale a dire ad $APEG$, meno il quadrato $FPHJ$ eretto sull' altro cateto EP; la differenza dei due ultimi quadrati è però l' area $AFJHEG$, quindi il quadrato $MPCD$ è equivalente alla figura $AFJHEG$.

Prolungata la HJ e condotta nella distanza $KL = AO$ la LN parallela a GK, gli elementi della figura $AFJHEG$

Fig. 216.



si compongono dei rettangoli LE, KN ed AJ, i quali si possono riunire in un solo rettangolo $OPQR$ che ha per lati l' ascissa OP del punto M e la retta OR uguale al doppio di AF, ovvero al parametro della parabola. Il quadrato della ordinata dunque è uguale al rettangolo, ovvero al prodotto, formato dal parametro e dall' ascissa.

Esprimendo il parametro, che nella stessa parabola ha una lunghezza costante, colla lettera p, si ha $MP^2 = p.OP$. Similmente se $M'P'$ ed OP' sono le coordinate di un secondo punto M' della parabola, avrà luogo altresì l' uguaglianza

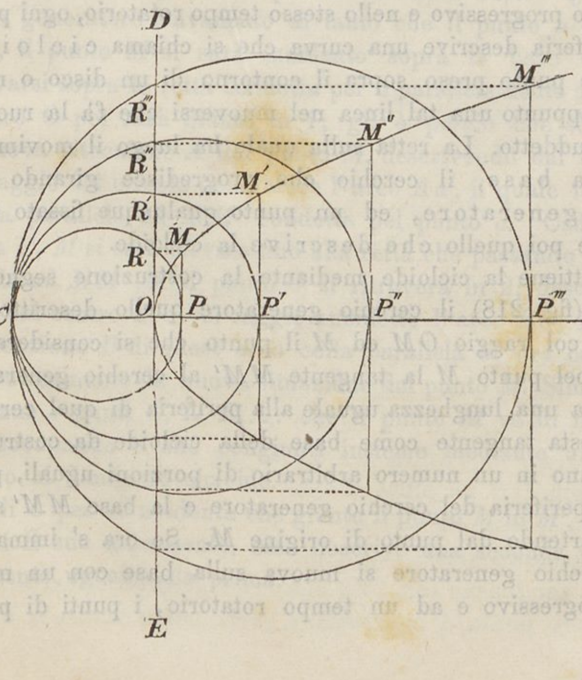
$M'P'^2 = p.OP'$. Da queste espressioni segue la proporzione $MP^2 : M'P'^2 = OP : OP'$ vale a dire: nella parabola i quadrati delle ordinate stanno fra loro come le ascisse corrispondenti.

Se si portano dal punto O le ascisse 1, 4, 9, 16, 25 che altro non sono se non che i quadrati dei numeri naturali, le ordinate corrispondenti aumentano in ragione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5.

§. 244. L'espressione $MP^2 = p.OP$ si può anche rappresentare mediante la proporzione $p : MP = MP : OP$, donde segue che la ordinata di ogni punto della parabola è la media proporzionale fra il parametro e l'ascissa corrispondente.

Scorfati da questo teorema, dato che sia il parametro, ci sarà facile di costruire la parabola nel modo seguente:

Fig. 217.



Sia O (fig. 217) il vertice della parabola, OX l' asse, OC la lunghezza del parametro, inoltre sia $DE \perp CX$. Se si prendono sull' asse OX i punti P, P', P'', P''' ... arbitrariamente e si costruiscono sopra CP, CP', CP'', CP'''... dei cerchî, per quanto si è detto al §. 194 c), la perpendicolare OR sarà la media proporzionale fra CO ed OP, OR' la media proporzionale fra CO ed OP' e così via. Costruiti ora i rettangoli $OPMR$, $OP'M'R'$, $OP''M''R''$... i punti M, M', M'', M'''... saranno punti della parabola, perchè per ciascuno l' ordinata è la media proporzionale fra il parametro e la relativa ascissa. In modo affatto simile si ottengono punti della parabola al di sotto dell' asse. La linea che congiunge con un tratto continuo tutti i punti così determinati, è la parabola stessa.

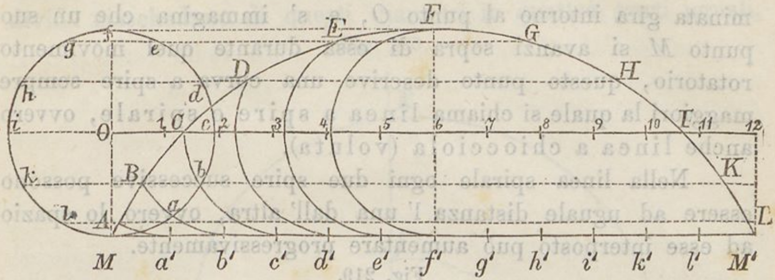
4. La cicloide.

§. 245. Se un cerchio si muove lungo una retta con un movimento progressivo e nello stesso tempo rotatorio, ogni punto della periferia descrive una curva che si chiama cicloide; qualunque punto preso sopra il contorno di un disco o ruota descrive appunto una tal linea nel muoversi che fà la ruota o il disco suddetto. La retta sulla quale ha luogo il movimento si dice la base, il cerchio che progredisce girando è il cerchio generatore, ed un punto qualunque fissato sulla periferia è poi quello che descrive la cicloide.

Si ottiene la cicloide mediante la costruzione seguente:

Sia (fig. 218) il cerchio generatore quello descritto dal centro O col raggio OM ed M il punto che si considera; si conduca pel punto M la tangente MM' al cerchio generatore e le si dia una lunghezza uguale alla periferia di quel cerchio. Presa questa tangente come base della cicloide da costruirsi, si partiscano in un numero arbitrario di porzioni uguali, p. es. in 12, la periferia del cerchio generatore e la base MM' suindicata, partendo dal punto di origine M. Se ora s' immagina che il cerchio generatore si muova sulla base con un movimento progressivo e ad un tempo rotatorio, i punti di parti-

Fig. 218.



zione a, b, c... della periferia, cadranno successivamente sui punti di divisione a', b', c',... della base. Il centro del cerchio percorre, durante questo movimento, una retta parallela alla base e viene a porsi successivamente nei punti 1, 2, 3, . . . i quali devono essere distanti l' uno dall' altro tanto, quanto lo sono fra di loro i punti di partizione della base. Quando il cerchio generatore è avanzato di tanto che il punto a coincida con a', il punto M si sarà innalzato sopra la base di tanto da trovarsi sopra la retta condotta per a parallelamente ad MM'. Il centro O poi sarà giunto in 1; gli è perciò che si ottiene una nuova situazione A del punto M, descrivendo dal centro 1 e col raggio del circolo generatore l' arco Aa', il quale interseca in A la parallela ad MM' condotta pel punto a. Caduto che sia b in b', M si sarà elevato fino alla retta che passando per b è parallela ad MM' ed il punto O si ritroverà in 2; descrivendo quindi dal centro 2 e col raggio anzidetto l' arco Bb', il punto d' intersezione B di quest' arco colla parallela or ora condotta, sarà precisamente la nuova situazione del punto M. Similmente si trovano i punti C, D, E,.. . che il punto M va di mano in mano occupando e che congiunti insieme mediante un tratto continuo ci danno la cicloide.

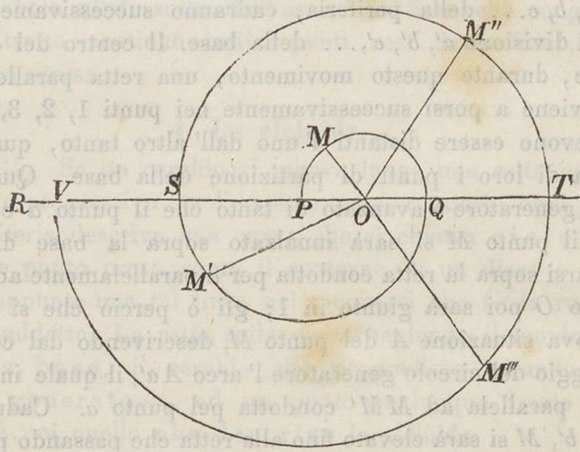
Gli è per sè evidente che giunto il punto M in M', qualora continui il suo movimento, esso descrive una seconda cicloide esattamente uguale alla prima.

5. Linea spirale.

§. 246. Se una retta OR (fig. 219) di lunghezza indeterminata gira intorno al punto O, e s' immagina che un suo punto M si avanzi sopra di essa durante quel movimento rotatorio, questo punto descrive una curva a spire sempre maggiori la quale si chiama linea a spire o spirale, ovvero anche linea a chiocciola (voluta).

Nella linea spirale ogni due spire successive possono essere ad uguale distanza l' una dall' altra, ovvero lo spazio ad esse interposto può aumentare progressivamente.

Fig. 219.



§. 247. Costruzione di una linea a spire ugualmente distanti fra di loro.

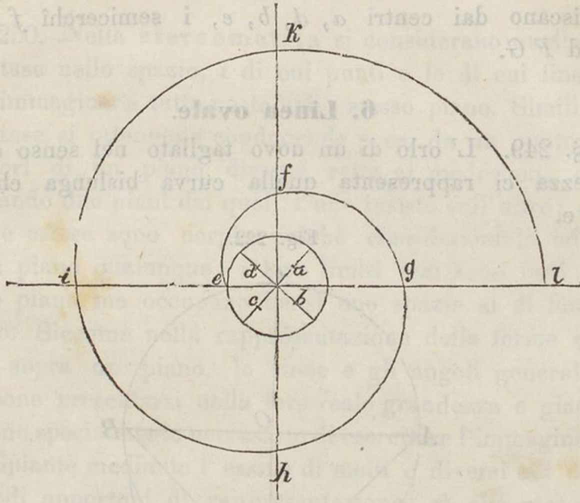
a) Mediante semicerchî.

Si descriva dal centro O (fig. 219) un piccolo semicerchio rivolto all' insù, indi dal centro P se ne descriva un secondo col raggio PQ rivolto all' ingiù; da O poi se ne costruisca col raggio OS un altro rivolto all' insù, da P con PT uno all' ingiù, e così di seguito.

b) Mediante quarti di circolo.

Si conducano (fig. 220) due rette perpendicolari a vicenda e dal loro punto d' intersezione, preso come centro, si descriva un piccolo cerchio; indi si partisca questo cerchio in quadranti mediante due diametri che si taglino ad angolo retto e si divida ciascheduno di questi diametri in quattro parti uguali.

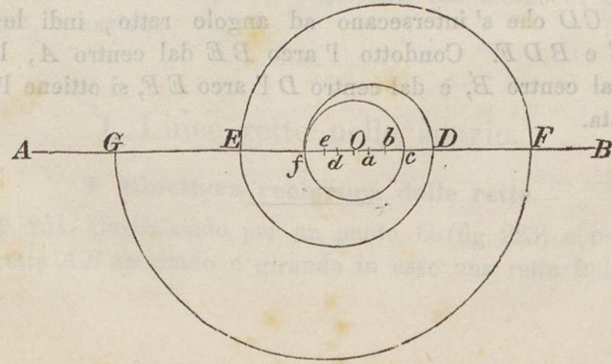
Fig. 220.



Descrivendo da *a* col raggio *a e* l' arco *e f*, indi da *b* l' arco *g f*, da *c* e *d* gli archi *g h* e *h i* e così via, si ottiene la linea spirale richiesta.

§. 248. S' abbia a costruire una linea a spire in modo che queste s' allontanino sempre più l' una dall' altra.

Fig.221.

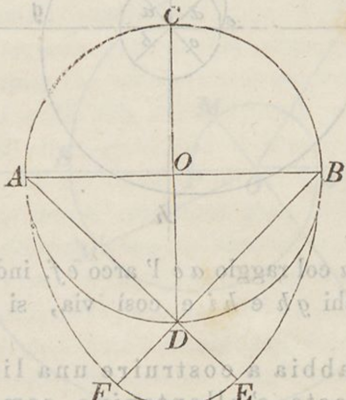


Si portino sulla retta AB (fig. 221) da ambedue le parti del punto O più parti fra di loro uguali p. e. tre; indi dal centro O si descriva col raggio Oc un cerchio, e poi alternativamente al di sopra ed al di sotto della retta AB si costruiscano dai centri a, d, b, e, i semicerchî fD, DE, EF ed FG.

6. Linea ovale.

§. 249. L' orlo di un uovo tagliato nel senso della sua lunghezza ci rappresenta quella curva bislunga che dicesi ovale.

Fig. 222.



Per disegnare questa linea, si descriva (fig. 222) dal centro O un cerchio ed in esso si conducano i due diametri AB e CD che s' intersecano ad angolo retto, indi le rette ADE e BDF. Condotto l' arco BE dal centro A, l' arco AF dal centro B, e dal centro D l' arco EF, si ottiene l'ovale richiesta.

La Stereometria.

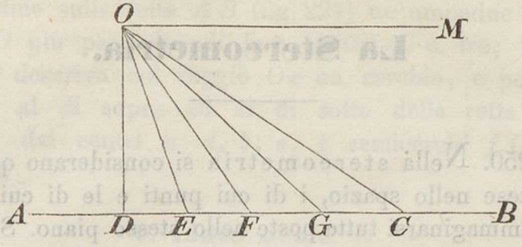
§. 250. Nella stereometria si considerano quelle grandezze estese nello spazio, i di cui punti e le di cui linee non possono immaginarsi tutte poste nello stesso piano. Simili grandezze estese si ottengono conducendo p. es. da un punto preso al di fuori di un piano diverse rette al medesimo, ovvero immaginando due piani dei quali l' uno insiste sull' altro; queste grandezze estese sono corpi, poichè considerandole adagiate sopra un piano qualunque, i loro limiti non sono tutti situati nel detto piano, ma occupano bensì uno spazio al di fuori del medesimo. Siccome nella rappresentazione delle forme stereometriche sopra un piano, le linee e gli angoli generalmente non possono presentarsi nella loro reale grandezza e giacitura, così diviene specialmente necessario di esercitare l'immaginazione del principiante mediante l' esame di molti e diversi tali disegni e dei modi opportuni di rappresentazione, sì che esso sia in grado di riconoscere immediatamente dal disegno la vera giacitura e grandezza delle rette e degli angoli. Onde raffigurare all' occhio le linee rette, servirà all' uopo una verga sottile, oppure un filo teso; l' intuizione del piano si conseguirà mediante un pezzo di cartone, oppure una tavoletta ben levigata od anche mediante la lavagna, il pavimento, od una parete; l' intuizione dei solidi poi si acquisterà per mezzo di modelli in legno, o cartone.

I. Linee rette nello spazio.

1. Giacitura reciproca delle rette.

§. 251. Conducendo per un punto O (fig. 223) e per una data retta AB un piano e girando in esso una retta indefinita

Fig. 223.



OC intorno al punto fisso O, questa retta interseca in ogni sua posizione la retta data AB in diversi punti. La porzione della retta mobile posta fra O e la AB diviene ora maggiore ed ora minore. La perpendicolare OD è la più breve di tutte; ciascheduna delle oblique OE, OF, ecc. è tanto più lunga, ed incontra la AB a tanto maggiore distanza da D, quanto maggiore è l' angolo che essa forma colla perpendicolare. Pervenuta che sia la retta indefinita nel suo movimento rotatorio nella situazione OM dove l' angolo DOM è retto, essa non taglia più la AB, ottenendo la medesima direzione, vale a dire divenendo OM parallela ad AB.

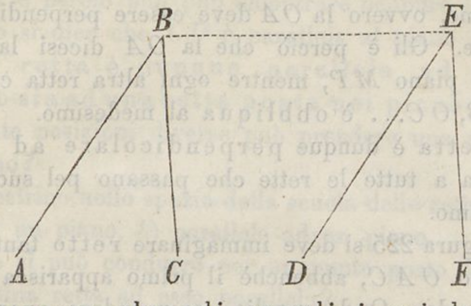
Per il punto O si può condurre poi un numero infinito di altre rette che non si trovano nel piano condotto per O ed AB, ma esse non intersecano la retta AB nè le sono parallele.

Quante e quali sono le posizioni che due rette possono prendere l' una rispetto all' altra?

S' indichino nello spazio della scuola delle rette, le quali *a*) si intersecano, *b*) che si sono parallele, *c*) che non sono nè parallele nè tra loro convergenti.

§. 252. Siano ABC e DEF (fig. 224) due angoli nello spazio, e sia $AB \parallel DF$ e $BC \parallel EF$. Se s' immagina che l' angolo ABC si avanzi per modo che il vertice B si muova costantemente nella retta BE e che i lati rimangano sempre paralleli alla loro direzione primitiva, quando il punto B sarà giunto in E, anche AB dovrà necessariamente coincidere con DE, e BC con EF, quindi l' angolo ABC si confonderà coll' angolo DEF.

Fig. 224.

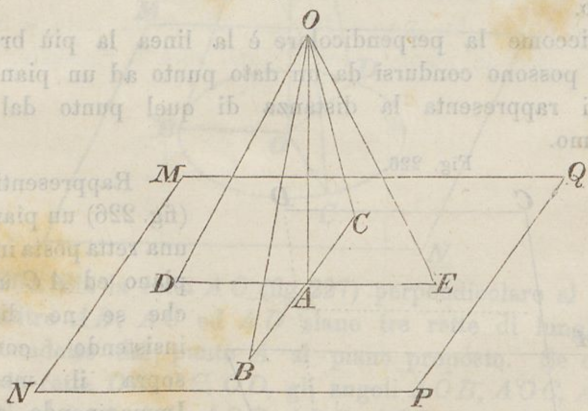


Il teorema che gli angoli i cui lati si sono rispettivamente paralleli sono uguali, si trova dunque verificato anche per angoli situati in diversi piani.

2. Giacitura delle rette rispetto ad un piano.

§. 253. Sia $MNPQ$ un piano qualunque ed O (fig. 225) un punto preso fuori di esso. Da quel punto si possono

Fig. 225.



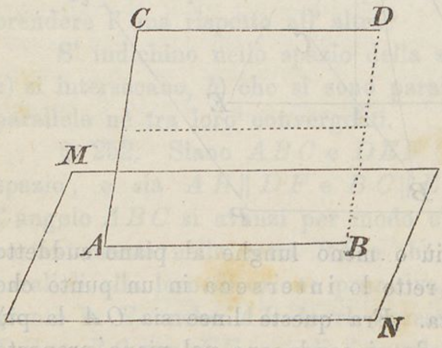
condurre infinite rette più o meno lunghe al piano suddetto MP, ed ognuna di queste rette lo interseca in un punto che dicesi il piede della retta. Fra queste linee sia OA la più breve. Se per il suo piede si conducono nel piano proposto le rette arbitrarie BC, DE, la OA deve essere ad un tempo la retta la più breve fra quante possono condursi da O alle rette medesime, ovvero la OA deve essere perpendicolare alle linee suddette. Gli è perciò che la OA dicesi la perpendicolare al piano MP, mentre ogni altra retta condotta da O, come OB, OC... è obbliqua al medesimo.

Una retta è dunque perpendicolare ad un piano quando lo sia a tutte le rette che passano pel suo piede nel piano medesimo.

Nella figura 225 si deve immaginare retto tanto l'angolo OAB quanto OAC, abbenchè il primo apparisca ottuso, ed acuto il secondo. Onde meglio comprendere questo disegno ed esercitare vieppiù l' ispezione oculare degli allievi, si renderà sensibile il piano $MNPQ$ con una tavoletta, sopra cui si disegneranno le rette BC e DE; si rappresenteranno inoltre la perpendicolore AO mediante un' asticina di legno e le oblique CO, BO, DO ed EO con fili tesi. Si porterà poscia questo modello così allestito talmente sott' occhio all' allievo, che gli angoli gli appariscano tali, come si presentano nel disegno.

Siccome la perpendicolare è la linea la più breve fra quante possono condursi da un dato punto ad un piano, così essa ci rappresenta la distanza di quel punto dal piano medesimo.

Fig. 226.



Rappresenti MN (fig. 226) un piano, AB una retta posta in questo piano ed AC un' altra che se ne distacchi, insistendo comunque sopra il medesimo. Immaginando ora che la retta AB uscendo dal piano, si avanzi parallelamente a sè medesima lungi AC, fino a che essa giunga nella situazione CD, questa, riuscendo allora parallela ad AB, non può giammai incontrarla e perciò non può incontrare neppure il piano MN. In tal caso si dice che CD è parallela al piano MN.

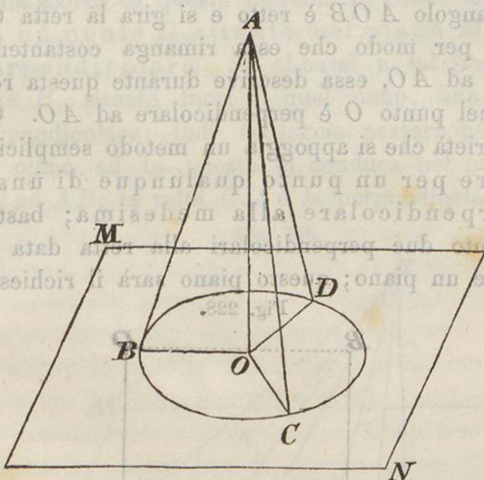
Una retta è dunque parallela ad un piano, quando lo sia ad una retta posta nel piano medesimo.

Quante posizioni diverse può prendere una retta rispetto ad un piano?

Si mostrino nello spazio della scuola delle rette *a*) inclinate rispetto ad un piano, *b*) parallele ad un piano.

Come si può condurre per un punto posto al di fuori di un piano, una retta ad esso parallela?

Fig. 227.



§. 254. Sia la retta AO (fig. 227) perpendicolare al piano MN, inoltre AB, AC ed AD siano tre rette di lunghezza uguale condotte dal punto A al piano proposto. Se ora si guidano le rette OB, OC, OD, gli angoli AOB, AOC, AOD, sono retti ed i triangoli AOB, AOC, AOD uguali (perchè?); quindi anche OB è $= OC = OD$, quindi è O il centro del cerchio che passa per i punti B, C, D.

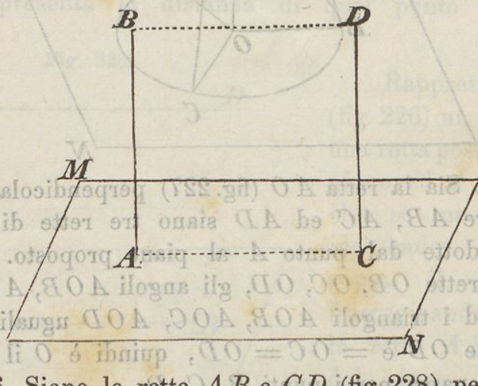
Vediamo adunque che se da un punto situato fuori di piano si abbassa la perpendicolare a quest' ultimo e si conducono nello stesso tempo tre rette di uguali lunghezze ed oblique al piano medesimo, il piede della perpendicolare coincide col centro del cerchio che passa per i piedi delle tre oblique.

Per abbassare una perpendicolare ad un piano da un punto situato fuori di esso, non si ha che a condurre tre rette uguali (mediante un filo ben teso) ed obblique al piano proposto, indi a cercare il centro del cerchio che passa per i loro piedi; questo centro congiunto col punto dato, ci fornisce la perpendicolare richiesta.

§. 255. Un esame più attento della figura precedente conduce alla seguente argomentazione:

Se l' angolo AOB è retto e si gira la retta OB attorno al punto O per modo che essa rimanga costantemente perpendicolare ad AO, essa descrive durante questa rotazione un piano che nel punto O è perpendicolare ad AO. Gli è sopra questa proprietà che si appoggia un metodo semplicissimo onde far passare per un punto qualunque di una retta un piano perpendicolare alla medesima; basta innalzare in quel punto due perpendicolari alla retta data e condurre poi per esse un piano; questo piano sarà il richiesto.

Fig. 228.



§. 256. Siano le rette AB e CD (fig. 228) perpendicolari al piano MN. Se ora la AB si avanza parallelamente a sè medesima lungi la retta AC, non si cambia già la giacitura della AB rispetto a quel piano; essa rimane in ogni sua posizione perpendicolare a quel piano e quando il punto A sarà giunto in C, essa si confonde colla perpendicolare CD; donde segue che CD è parallela ad AB.

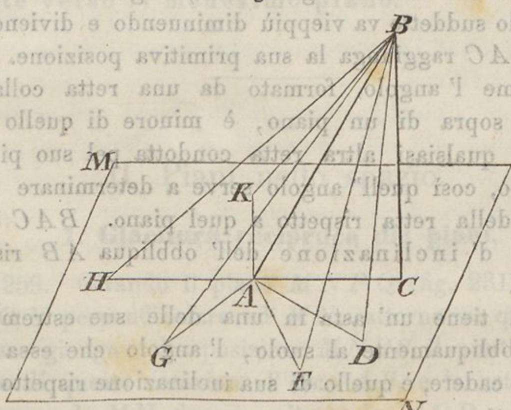
Se dunque due rette sono perpendicolari al medesimo piano, esse devono essere tra loro parallele.

Dalla precedente considerazione si deduce anche la verità del teorema inverso, cioè:

Se una retta è perpendicolare ad un piano, lo dovrà essere pure qualunque altra retta parallela alla prima.

Colla scorta di questo teorema ci riesce facile d' innalzare da un punto C situato nel piano MN su di esso una perpendicolare. Si abbassi a tal fine da un punto qualunque B, situato fuori di quel piano, una retta BA ad esso perpendicolare; indi si faccia passare per C e BA un secondo piano ed in questo si conduca pel punto C la CD parallela ad AB; la retta CD è la perpendicolare richiesta.

Fig. 229.



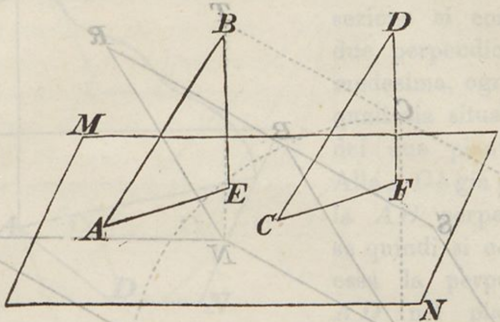
§. 257. Sia AB (fig. 229) una retta obbliqua rispetto al piano MN. Se dalla sua estremità B si abbassa la perpendicolare AC al piano e si congiungono i piedi A e C mediante la retta AC, questa è la projezione dell' obbliqua AB sopra il piano MN. La projezione di una retta è sempre minore della retta stessa. Per paragonare fra di loro gli angoli che forma l' obbliqua AB con altre rette condotte nel piano MN per il suo piede, s' immagina la projezione AC alquanto girata intorno al punto A, p. e. fino alla posizione AD, rimanendo essa però costantemente nel piano primitivo. Se si conduce la retta BD, questa è più lunga della perpendicolare BC; i due angoli BAD e BAC hanno dunque i lati uguali bensì, ma disuguali le loro aperture e sono perciò disuguali, di modo che l' angolo BAD, dove le estremità dei lati sono più distanti l' una dall' altra, è maggiore dell' angolo BAC. Seguitando a girare la retta AC fino che sia giunta nella posizione AF, la retta BF diviene $> BD$; l' apertura dei lati nell' angolo BAF è dunque maggiore che nell' angolo BAD, avendo tuttavia questi angoli i lati uguali; quindi l' angolo BAF è $> BAD$. Così va aumentando, nella continuata rotazione della retta AC, sempre più anche l' angolo che questa retta forma coll' obbliqua AB, fino a tanto che, compiuto mezzo giro, raggiunga la sua massima grandezza; seguitando a girare la AC l' angolo suddetto va vieppiù diminuendo e diviene minimo qualora la AC raggiunga la sua primitiva posizione.

Siccome l' angolo, formato da una retta colla propria projezione sopra di un piano, è minore di quello che essa forma con qualsiasi altra retta condotta pel suo piede nello stesso piano, così quell' angolo serve a determinare l' inclinazione della retta rispetto a quel piano. BAC è dunque l' angolo d' inclinazione dell' obbliqua AB rispetto al piano MN.

Se si tiene un' asta in una delle sue estremità appogiandola obbliquamente al suolo, l' angolo che essa descrive, lasciandola cadere, è quello di sua inclinazione rispetto al piano del pavimento.

§. 258. Siano AB e CD (fig. 230) due rette parallele ed ambedue obblique rispetto al piano MN. Se dai punti B e D si abbassano le perpendicolari BE e DF a questo piano e si conducono le rette AE e CF, BAE e DCF sono gli angoli

Fig. 230.



d' inclinazione delle due obblique rispetto al piano. Siccome nei triangoli ABE e CDF gli angoli in E ed in F sono uguali come retti e gli angoli in B ed in D lo sono pure, perchè formati da lati rispettivamente paralleli, così devono essere uguali anche i terzi angoli BAE e DCF.

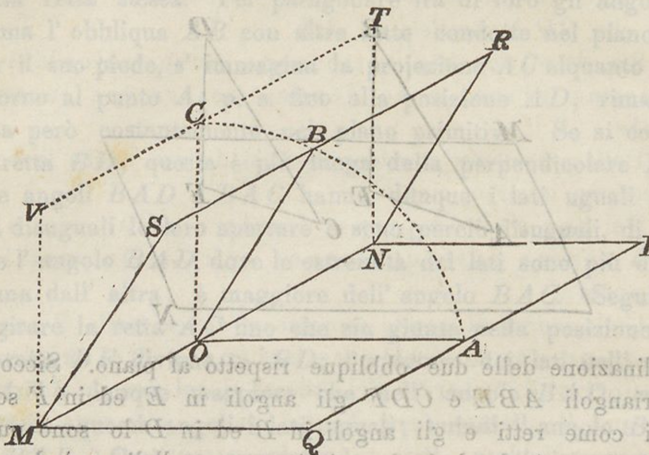
Due rette parallele sono dunque ugualmente inclinate verso il medesimo piano.

II. Piani nello spazio.

1. Giacitura reciproca dei piani.

§. 259. Girando il piano $MNPQ$ (fig. 231), in cui la retta AO è perpendicolare ad MN, attorno a quest' ultima, finchè esso giunga nella posizione $MNRS$, il punto A descrive nel corso di questa rotazione l' arco AB, e la retta AO perpendicolare ad MN descrive l' angolo AOB. I due piani $MNPQ$ ed $MNRS$ si intersecano nella retta MN e le loro direzioni divergono tanto più, quanto maggiore diviene l' angolo AOB, il quale rappresenta perciò la loro reciproca inclinazione. Segue da ciò che:

Fig. 231.



a) Se due piani s' intersecano, la intersezione è una retta.

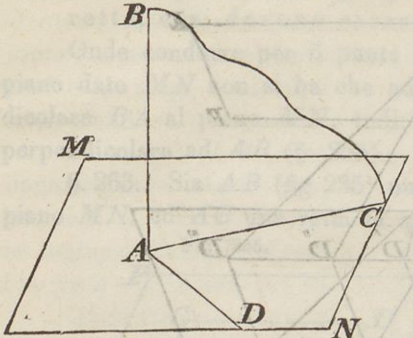
b) L' angolo d' inclinazione di due piani è quello formato da due rette condotte nei piani da un punto dell' intersezione perpendicolarmente a quest' ultima.

L' angolo d' inclinazione di due piani può rendersi evidente mediante gli orli superiori od inferiori di un libro aperto.

Se l' angolo d' inclinazione di due piani è retto, questi sono perpendicolari l' uno all' altro; in ogni altro caso essi sono fra loro obbliqui. Se nella figura superiore si allontanano i due piani tanto che l' angolo AOC da essi compreso divenga retto, il piano $MNTV$ riesce perpendicolare ad $MNPQ$; all' incontro i piani $MNPQ$ ed $MNRS$ sono reciprocamente obbliqui.

§. 260. Sia (fig. 232) $AB \perp$ al piano MN e si conduca per AB un secondo piano ABC il quale intersechi il primo MN nella retta AC. Onde determinare la giacitura reciproca dî questi due piani si cercherà il loro angolo d' inclinazione,

Fig. 232.



vale a dire, da un punto della linea AC di intersezione si condurranno due perpendicolari alla medesima, ognuna delle quali sia situata in uno dei due piani suddetti. Alla AC è già per ipotesi la AB perpendicolare, se quindi si conduce ad essa la perpendicolare AD nel piano MN, BAD sarà l'angolo d'inclinazione dei due piani ABC ed MN. Ma questo angolo è retto, poichè essendo AB perpendicolare al piano MN lo è anche alla retta AD; il piano ABC è dunque perpendicolare al piano MN.

Ne segue che:

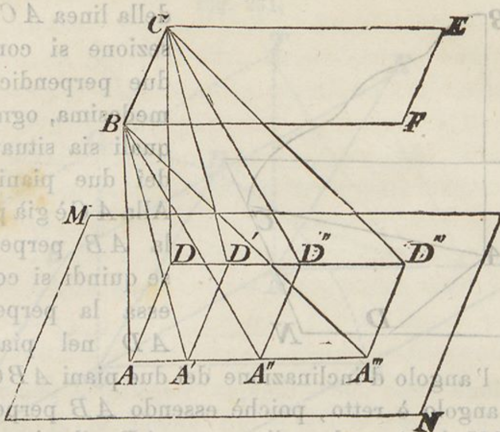
Quando una retta è perpendicolare ad un piano, ogni altro piano condotto per quella retta deve essere perpendicolare al primo.

Come si deve condurre un piano per un punto onde riesca perpendicolare ad un piano dato?

§. 261. Sia AB (fig. 233) perpendicolare al piano MN e $BC \parallel$ al piano MN. Se per l' angolo ABC si fà passare un piano indefinito che intersechi il piano MN nella retta AD, questi due piani riescono fra di loro perpendicolari. Se ora si gira il piano indefinito $ABCD$ attorno alla retta BC presa come asse, esso sarà in ogni successiva posizione obbliquo al piano MN, e lo intersecherà tanto più lontano dalla AD quanto maggiore è l' angolo d' inclinazione che esso forma col piano perpendicolare $ABCD$. Giunto finalmente il piano indefinito nella posizione $BCEF$, dove l' angolo d' inclinazione ABF da esso formato col piano $ABCD$ diviene retto, esso non può più intersecare il piano MN ma deve essergli parallelo.

Piani paralleli sono adunque quelli che prolungati indefinitamente non s'incontrano.

Fig. 233.

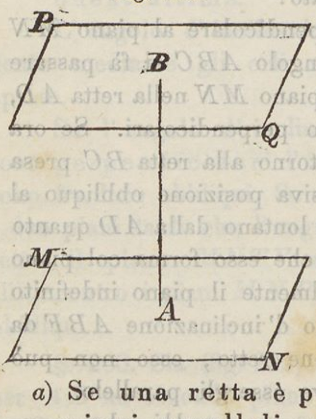


Quante posizioni diverse possono avere due piani l' uno rispetto all' altro?

Si mostrino nello spazio della scuola dei piani *a*) che si incontrano, *b*) di quelli che si sono paralleli.

§. 262. Sia la retta AB (fig. 234) perpendicolare al piano MN. Se ora si fa avanzare il piano MN parallelamente a sè medesimo lungi la retta AB, senza che il punto A l' abbandoni, questa retta rimarrà sempre perpendicolare al piano suddetto in ciascuna delle sue posizioni, sicchè se PQ ci rappresenta una delle dette posizioni del piano MN, il piano PQ sarà parallelo al piano MN, ed AB sarà perpendicolare anche al piano PQ. Da queste considerazioni segue che:

Fig. 234.



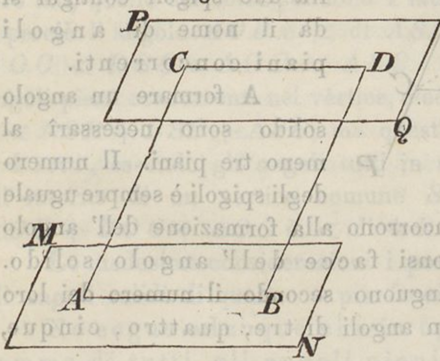
a) Se una retta è perpendicolare ad uno di due piani paralleli, essa lo deve essere anche al secondo.

b) Se due piani sono perpendicolari ad una stessa retta, essi devono essere fra loro paralleli.

Onde condurre per il punto B un piano parallelo ad un piano dato MN non si ha che ad abbassare da B la perpendicolare BA al piano MN, indi a condurre per B un piano perpendicolare ad AB (§. 255).

§. 263. Sia AB (fig. 235) una retta qualunque posta nel piano MN, ed AC una retta la quale si stacchi dal piano insistendo obbliquamente sopra il medesimo. Se s' immagina che, muovendosi il punto A lungi la retta AC, il piano MN e la AB in esso situata, si avanzino parallelamente fino a tanto che il piano MN giunga nella situazione PQ, i punti A e B descrivono le rette AC e BD parallele ed uguali; la AB poi decrive un piano $ABCD$ che inserseca i due piani paralleli MN e PQ nelle rette parallele AB e CD. Da queste considerazioni ci è dato di conchiudere che:

Fig. 235.



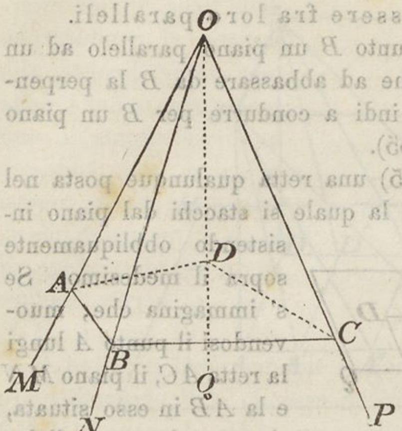
a) Rette parallele interposte ad altre parallele sono uguali;

b) Se due piani paralleli sono tagliati da un terzo, le linee d' intersezione riescono parallele.

2. Angoli solidi.

§. 264. Se una retta indefinita OM (fig. 236) si gira intorno al punto O in guisa che essa di mano in mano passi per tutti i vertici del quadrilatero $ABCD$, essa descrive i piani indefiniti MON, NOP, POQ..., i quali si intersecano tutti nel punto O ad essi comune. Lo spazio non determinato in un senso e terminato in tutti gli altri da questi piani, si chiama angolo solido.

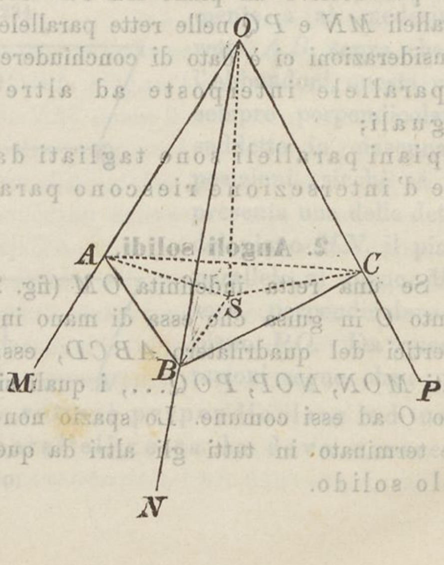
Fig. 236.



Si dice **vertice** del l'angolo solido il punto O d'intersezione comune a tutti i piani, e **spigoli** o **lati** si chiamano le intersezioni OM, ON, OP . . . di due piani; finalmente agli angoli MON, NOP. . ., compresi fra due spigoli contigui si dà il nome di **angoli piani concorrenti.**

A formare un angolo solido sono necessarî al meno tre piani. Il numero degli spigoli è sempre uguale a quello dei piani che concorrono alla formazione dell' angolo solido. Questi piani diconsi **facce dell' angolo solido.** Gli angoli solidi si distinguono secondo il numero dei loro spigoli, o delle loro facce in angoli **di tre, quattro, cinque, sei . . . facce.**

Fig. 237.



§. 265. Sia $OMNP$ (fig. 237) un angolo solido a tre facce. Tagliando tutte le facce mediante un piano ABC ed abbassando da O la perpendicolare OS a questo piano, AS, BS, CS sono le projezioni delle rette AO, BO, CO sul piano ABC, e come tali minori delle obblique AO, BO e CO. Se ora si considerano gli angoli AOB ed ASB, essi hanno bensì l' apertura uguale, ma i lati AO e BO sono maggiori di AS e BS. Ma se due angoli di apertura uguale hanno disuguali i loro lati, quello cui corrispondono i lati più lunghi è il minore, e perciò l' angolo AOB è $<$ di ASB, e similmente è anche $BOC < BSC$ e $AOC < ASC$. Dunque la somma degli angoli piani concorrenti nel vertice, cioè: $AOB + BOC + AOC$ è $< ASB + BSC + ASC$; ma quest' ultima somma è uguale a 4 retti, essendo gli angoli tutti in un piano e disposti tutti all' intorno di un vertice comune S; quindi ne segue che $AOB + BOC + AOC$ è $<$ di $4R$.

Le medesime considerazioni i possono altresì ripetere per gli angoli solidi di quattro o più facce.

Ne segue adunque che in ogni angolo solido, la somma di tutti gli angoli piani è minore di quattro retti.

Se parecchî angoli piani sommati insieme importano 360⁹ o più ancora, essi non possono concorrere a formare un angolo solido.

§. 266. Sopra tutti rimarchevoli sono gli angoli solidi regolari, vale a dire quelli dove ognuno degli angoli piani è uguale all' angolo di un poligono regolare di un determinato numero di lati.

L' angolo di un triangolo regolare è di 60°. Tre di questi angoli presi insieme ci dànno 180°, e per ciò possono formare un angolo solido; quattro di essi importano 240° e permettono pure la costruzione di un angolo solido, così anche cinque di loro, importando la loro somma soli 300°. Sei degli angoli suddetti dànno la somma di 360°; gli è perciò che con sei, ovvero con un numero ancora maggiore di quegli angoli non si può formare alcun angolo solido.

Quante specie di angoli solidi regolari si possono dunque formare mediante angoli appartenenti a triangoli equilateri?

L' angolo di un quadrato contiene 90°. Tre di questi angoli dànno per somma 270° e possono quindi formare un angolo solido; quattro di loro importano di già 360°.

In un pentagono regolare ciascheduno degli angoli è di 108°; tre di loro importano 324° e possono quindi concorrere a formare un angolo solido. Prendendone quattro si hanno già 432°.

L' angolo di un esagono regolare conta 120°. Siccome tre di questi angoli dànno già per somma 360°, così dalla concorrenza di tali angoli non si può ottenere alcun angolo solido. Molto meno possibile sarà di costruire un angolo solido mediante angoli appartenenti ad un poligono regolare che abbia più di sei lati.

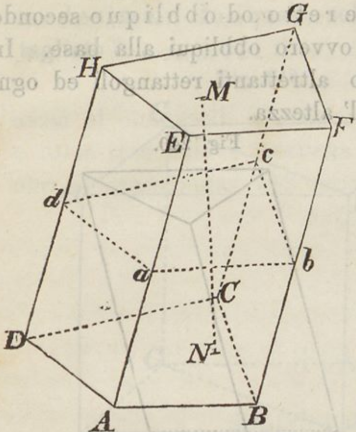
Non è quindi possibile di ottenere di più che cinque sorta di angoli solidi regolari.

III. Prismi.

1. Origine e definizioni.

§. 267. Sia $ABCD$ (fig. 238) un poligono qualunque, ed AE una retta che si distacchi dal piano di questo poligono. Ora se questa retta si muove parallela a sè medesima, passando il punto A successivamente per tutti i punti del perimetro del poligono dato, il punto E, come pure pualunque altro punto a della retta mobile AE, descrive il perimetro di un poligono parallelo ed uguale ad $ABCD$. La retta AE poi descrive i parallelogrammi $ABFE$, $BCGF$, . . . Tuttavia il piano del poligono $EFGH$ determina un solido $ABCDEFGH$ limitato da due poligoni uguali paralleli e similmente posti, e da altrettanti parallelogrammi quanti sono i lati di uno di quei poligoni. Un tal corpo dicesi prisma (colonna angolare ovvero a spigoli).

Fig. 238.



Un prisma può anche immaginarsi generato dal movimento progressivo di un poligono $ABCD$ lungi la retta AE, in modo che in ogni sua posizione esso si conservi parallelo e similmente posto.

Se p. e. si presenta al sole un pezzo di carta, tenendolo parallelo ad una superficie qualunque situata dietro di esso, l'ombra che appare sopra questa superficie sarà di grandezza e forma uguale alla carta tenutale davanti; lo spazio opaco contenuto fra queste figure è un prisma.

S' indichino degli oggetti di forma prismatica.

§. 268. I due poligoni uguali e paralleli $ABCD$ ed $EFGH$ si dicono le basi, ed i parallelogrammi che passano per i loro lati le facce del prisma. La linea d'intersezione di due piani contigui si chiama generalmente spigolo. Le rette d' intersezione di due facce, come p. e. AE, BF ... si dicono in ispecialità spigoli laterali. Tutti gli spigoli laterali di un prisma sono dunque uguali e paralleli.

Una retta MN condotta perpendicolarmente da una delle basi all' altra, chiamasi altezza del prisma.

Le considerazioni fatte finora, come pure quelle che seguiranno in appresso, sono da rendersi sensibili ed evidenti mediante opportuni modelli. Giova quì sottoporre ad attento esame le basi, le facce, gli spigoli di ogni solido rispetto al loro numero, allo loro giacitura e grandezza, come pure gli angoli solidi.

2. Specie di prismi.

§. 269. A norma del numero dei loro spigoli laterali, i prismi si distinguono in triangolari, quadrangolari e poligonali.

Se poi si pone mente alla giacitura degli spigoli laterali rispetto alla base, il prisma si dice retto od obbliquo secondo che quelli sono perpendicolari, ovvero obbliqui alla base. In ogni prisma retto le facce sono altrettanti rettangoli ed ogni spigolo laterale ne rappresenta l' altezza.

Fig. 239.

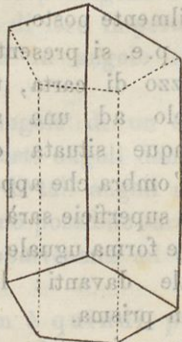
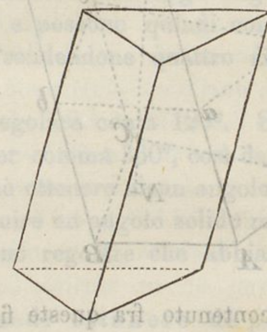
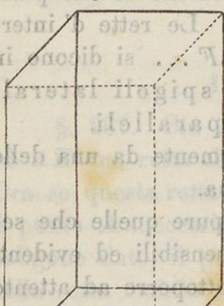


Fig. 240.



La figura 239 rappresenta un prisma pentagonale retto, la figura 240 un prisma triangolare obbliquo.

Fig. 241.



§. 270. Un prisma dove le basi sono parallelogrammi chiamasi parallelepipedo (fig. 241). Questo può essere come tutti gli altri prismi, retto oppure obbliquo. Un parallelepipedo è limitato da sei parallelogrammi.

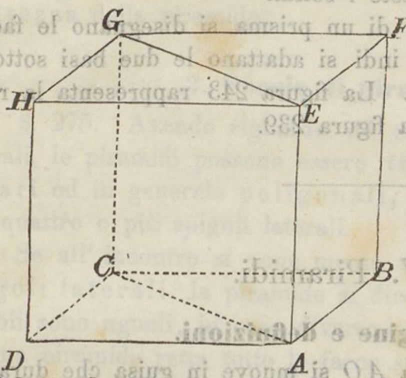
Un prisma retto le cui basi sono rettangoli si chiama parallelepipedo rettangolo. Esso viene limitato da sei rettangoli.

Un prisma terminato da soli quadrati si chiama dado, o cubo. Esso è un parallelepipedo rettangolo a spigoli e facce uguali.

3. Sezione e rete di un prisma.

§. 271. Già dall' origine del prisma (§. 267) si può argomentare che tagliandolo con un piano parallelo alla base, la figura della sezione riesce uguale alla base medesima. In quali solidi si scompone il prisma così tagliato?

Fig. 242.

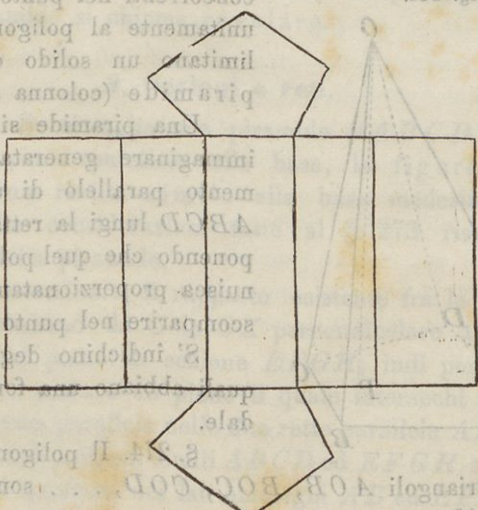


Se si fa passare un piano per due spigoli opposti AE e CG (fig. 242) di un prisma, la sezione $AEGC$ è un parallelogrammo (perche?), e si chiama **sezione diagonale** del prisma proposto.

Come sono costituiti i prismi triangolari in cui riesce partito un parallelepipedo mediante la sezione diagonale?

§. 272. Se si rappresentano le superficie che terminano un solido, tutte fra di loro unite in un solo piano, in guisa che tagliate e convenientemente disposte insieme, díano il solido

Fig. 243.



stesso, quel disegno si chiama la **rete** del solido proposto. Le reti dei solidi sono di speciale importanza nella formazione dei modelli e si consiglierà ai principianti di abbozzare simili reti, indi di ricomporre da queste i solidi.

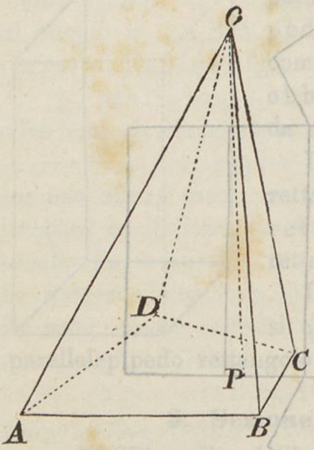
Per ottenere la rete di un prisma si disegnano le facce l' una aderente all' altra; indi si adattano le due basi sotto e sopra una di quelle facce. La figura 243 rappresenta la rete del prisma disegnato nella figura 239.

IV. Piramidi.

1. Origine e definizioni.

§. 273. Se una retta AO si muove in guisa che durante il suo movimento essa passi successivamente per tutti i punti situati sul perimetro del poligono $ABCD$ e ad un tempo anche sempre per il punto O posto fuori del piano di quel poligono, essa descrive i triangoli AOB, BOC, COD . . . (fig. 244), concorrenti nel punto O, i quali unitamente al poligono $ABCD$ limitano un solido che si dice **piramide** (colonna a cuspide).

Fig. 244.



Una piramide si può anche immaginare generata dal movimento parallelo di un poligono $ABCD$ lungi la retta AO, supponendo che quel poligono diminuisca proporzionatamente fino a scomparire nel punto O.

S' indichino degli oggeti, i quali abbiano una forma piramidale.

§. 274. Il poligono $ABCD$ è la base, i triangoli AOB, BOC, COD, . . . sono le **facce** della piramide.

Le rette AO, BO, CO, . . . si chiamano gli spigoli laterali concorrenti tutti nel punto O, che dicesi la punta, il vertice, o la cuspide della piramide.

La perpendicolare OP abbassata dal vertice sulla base è l' altezza della piramide.

2. Specie di piramidi.

§. 275. Avendo riguardo al numero degli spigoli laterali, le piramidi possono essere triangolari, quadrangolari od in generale poligonali, secondo che esse hanno tre, quattro o più spigoli laterali.

Se all' incontro si pone mente alla grandezza degli spigoli laterali, la piramide si dice retta quando tutti gli spigoli sono uguali, in caso diverso essa chiamasi obbliqua. In una piramide retta tutte le facce sono triangoli isosceli. A tenore del §. 254, la base di una simile piramide deve contenere un punto che sia equidistante da tutti i vertici della figura, e l' altezza deve passare esattamente per questo centro della base.

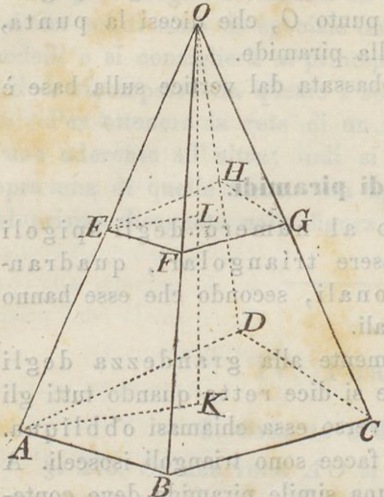
Se la base di una piramide retta è un poligono regolare anche la piramide si chiama regolare.

3. Sezioni e reti.

§. 276. Se si taglia una piramide $OABCD$ (fig. 245) mediante un piano parallelo alla base, la figura $EFGH$ della sezione risulta simile alla base medesima, come consegue dalle considerazioni fatte al §. 273 rispetto alla generazione della piramide.

Onde determinare il rapporto esistente fra la base e la sezione, abbassiamo da O la OK perpendicolare alla base e quindi anche al piano di sezione $EFGH$; indi per l' angolo AOK facciamo passare un piano il quale intersechi la base e la sezione ad essa parallela nelle due rette parallele AK ed EL. Le superficie dei poligoni simili $ABCD$ ed $EFGH$ stanno fra di loro come i quadrati dei lati omologhi AB ed EF. Siccome

Fig. 245.



poi per la somiglianza dei triangoli ABO ed EFO, le rette AB ed EF stanno fra loro come AO ed EO, e siccome queste per la somiglianza dei triangoli AKO ed ELO sono proporzionali a KO ed LO, così le superficie $ABCD$ ed $EFGH$ devono stare fra loro come i quadrati di KO ed LO.

La base di una piramide e la sezione ad essa parallela stanno dunque fra loro come i quadrati delle loro rispettive distanze dal vertice.

Se p. e. OK è il doppio di OL, la superficie $ABCD$ sara 4 volte maggiore di $EFGH$.

Se O è un punto luminoso il quale rischiara separatamente ora la superficie $ABCD$ ed ora la superficie $EFGH$, il numero dei raggi caduti sopra ambedue le superficie è uguale, ma siccome l' intensità di illuminazione dipende in ogni superficie dalla spessezza dei raggi che ad essa pervengono, e siccome questi si spandono in $ABCD$ sopra uno spazio quattro volte maggiore di $EFGH$, così la prima riesce quattro volte più debolmente illuminata dell'altra superficie $EFGH$. In generale, a parità di circostanze, una superficie riesce 4, 9, 16 volte più debolmente illuminata, qualora si faccia la sua distanza dal punto luminoso 2, 3, 4 volte maggiore della distanza primitiva.

§. 277. Una piramide riesce partita da un piano secante parallelo alla base in due solidi, in una piramide minore $OEFGH$ simile alla primitiva, ed in un solido $ABCDEFGH$ situato fra i due piani paralleli, che si chiama piramide abbreviata ovvero tronco piramidale. Se la piramide tagliata è retta o regolare, anche il suo tronco si chiama retto o regolare.

Un tronco di piramide è sempre la differenza di due piramidi le cui basi sono per l' una la superficie superiore e per l' altra la inferiore del tronco, ed il cui vertice commune si ritrova nell' intersezione degli spigoli laterali del tronco, convenevolmente prolungati.

Si può rendere evidente ai sensi un tronco di piramide tenendo p. e. un pezzo di carta contro la luce di una candela in guisa che l' ombra sua si progetti sopra una parete parallela al foglio. Lo spazio non illuminato interposto a queste due superficie parallele e disuguali è un tronco di piramide.

Per altezza di un tronco piramidale s' intende la perpendicolare LK abbassata da un punto di una delle basi sull' altra.

§. 278. Conoscendo i due lati paralleli AB ed EF delle basi e l' altezza LK del tronco di piramide, si possono facilmente dedurre le altezze OK ed OL delle piramidi, di cui il tronco proposto ne è la differenza.

Imperocchè abbiamo: $OK : OL = OA : OE$ ed

$$AB : EF = OA : OE \text{ quindi}$$

$$OK : OL = AB : EF.$$

Siccome poi in ogni proporzione la differenza dei due primi termini sta alla differenza dei due ultimi, come il primo termine sta al terzo, ovvero come il secondo sta al quarto, così si ottiene:

$$OK - OL : AB - EF = OK : AB,$$

$$OK - OL : AB - EF = OL : EF;$$

oppure, essendo $OK - OL = KL$,

$$KL : AB - EF = OK : AB$$

$$KL : AB - EF = OL : EF;$$

donde $OK = \frac{KL}{AB - EF} \times AB$ ed $OL = \frac{KL}{AB - EF} \times EF$, vale a dire:

Si divida l'altezza del tronco piramidale per la differenza dei due lati omologhi delle basi; il quoziente moltiplicato pel maggiore dei due lati suddetti dà l'altezza della piramide maggiore; moltiplicato poi pel minore di essi, ci dà l'altezza della piramide minore.

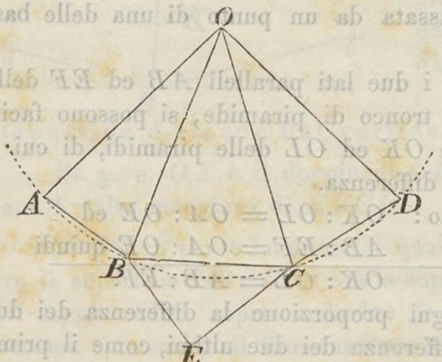
Se p. e. 6' e 4' sono le lunghezze dei due lati paralleli nelle basi, e 5' l' altezza del tronco piramidale, avremo:

l'altezza della piramide maggiore $= \frac{5}{2} \times 6 = 15'$

" " " minore $= \frac{5}{2} \times 4 = 10'$.

§. 279. La rete di una piramide si ottiene costruendo prima i triangoli che ne sono le facce l' uno vicino all' altro in guisa che abbiano tutti il vertice comune; indi si adatta la base sotto uno di essi.

Fig. 246.



Onde costruire in particolare la rete di una piramide retta (fig. 246), si descrive dal centro O e con raggio uguale ad uno spigolo laterale un arco; indi si conducono a questo le corde AB, BC ed CD uguali ai lati della base, e finalmente sotto la BC si disegna la base BCE.

Si costruisca anche la rete

a) di una piramide pentagona regolare,

b) di un tronco piramidale quadrilatero regolare.

V. Poliedri.

1. Specie e proprietà.

§. 280. Un solido limitato soltanto da piani si dice solido a spigoli ovvero poliedro. I poliedri si denominano secondo il numero delle facce che formano i loro limiti e generalmente con nomi numerali grechi. Ogni parallelepipedo è un poliedro a 6 facce, ogni piramide triangolare un solido a quattro facce.

Un poliedro limitato soltanto da poligoni regolari ed uguali, che in egual numero concorrono a formare ciascheduno degli angoli solidi, si chiama poliedro regolare; p. e. un dado. In un poliedro regolare tutti gli angoli solidi sono regolari.

§. 281. È rimarchevole la relazione che sussiste fra il numero degli spigoli, quello delle facce e degli angoli solidi di un poliedro. Rappresentando per k il numero degli spigoli, per f il numero delle facce e per e quello degli angoli solidi, consideriamo primieramente un prisma quadrangolare. Questo ha 4 spigoli laterali, ed 8 ne conta alle due basi, quindi in tutto 12, perciò $k = 12$. Inoltre il numero delle facce f è $= 6$, e quello degli angoli solidi $c = 8$, quindi abbiamo $f + e = 14$. Vediamo adunque che il numero degli spigoli di un prisma quadrangolare è di 2 unità minore della somma dei numeri delle facce e degli angoli solidi.

Se si considera una piramide pentagona si ha $k = 10$, $f = 6$, $e = 6$, quindi $f + e$ 12 e con ciò il numero degli spigoli di bel nuovo di 2 unità minore della somma dei numeri delle facce e degli angoli solidi.

Siccome questa relazione ha sempre luogo qualunque sia il poliedro che si considera, così abbiamo il teorema:

In ogni poliedro il numero degli spigoli è di due unità minore della somma dei numeri delle facce e degli angoli solidi.

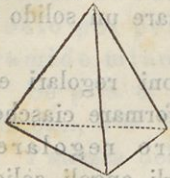
2. Poliedri regolari.

§. 282. Siccome non si dànno che cinque specie di angoli solidi regolari, così non vi sono che cinque specie di poliedri regolari.

Vale a dire:

1) Il tetraedro (fig. 247) terminato da quattro triangoli equilateri, tre dei quali concorrono sempre a formare un

Fig. 247.



angolo solido; esso ha quattro angoli solidi e 6 spigoli.

2) L' ottaedro (fig. 248) terminato da 8 triangoli equilateri, quattro de' quali formano un angolo solido; esso ha sei di questi angoli e 12 spigoli.

3) L' icosaedro (fig. 249) formato da 20 triangoli equilateri; esso ha 12 angoli solidi a cinque facce e 30 spigoli.

Fig. 248.

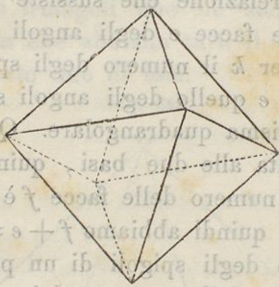
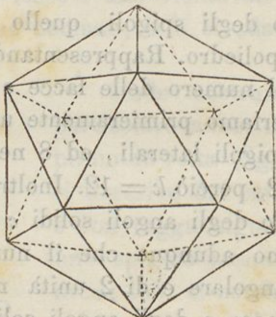


Fig. 249.



4) L' esaedro (fig. 250) o più comunemente il dado, terminato da 6 quadrati, tre dei quali concorrono a formare ciascun angolo solido; esso ha 8 di questi angoli e 12 spigoli.

Fig. 250.

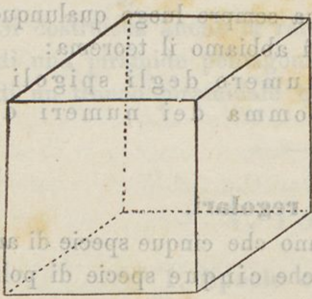
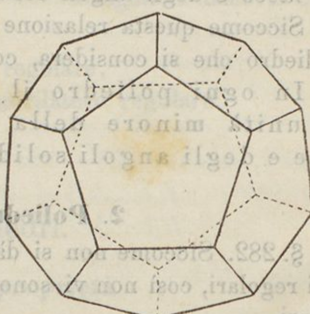


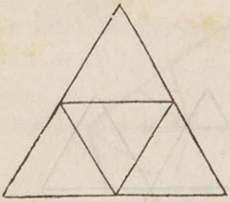
Fig. 251.



5) Il dodecaedro (fig. 251) il quale è terminato da 12 pentagoni regolari, e che comprende 20 angoli solidi e 30 spigoli.

3. Reti dei poliedri regolari.

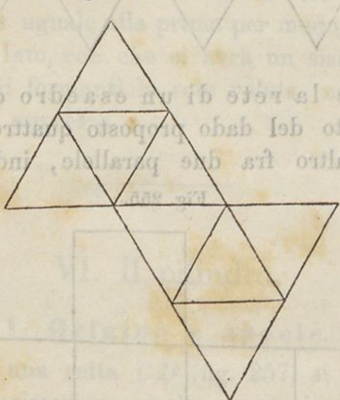
Fig. 252.



§. 283. 1) Onde ottenere la rete di un tetraedro si disegni (fig. 252) un triangolo equilatero il cui lato abbia la doppia lunghezza dello spigolo del tetraedro; diviso poi ogni lato del triangolo per metà si uniscano i centri mediante rette.

2) Si ottiene la rete dell' ottaedro (fig. 253) costruendo prima quella di un tetraedro avente per spigolo quello dell' ottaedro, indi costruendo una seconda rete uguale alla

Fig. 253.

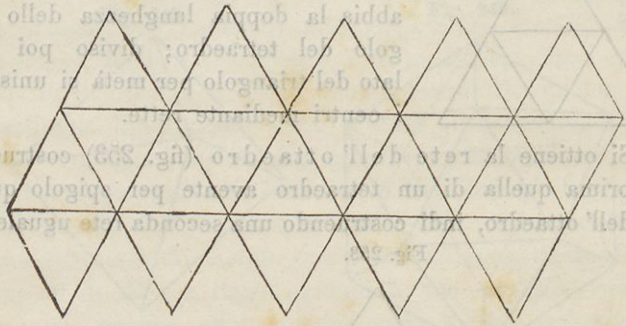


prima adattandola a questa in modo, che le due reti ricevano comune un lato, come si vede nella figura quì sopra indicata col 253.

3) La rete di un icosaedro si ottiene nel modo seguente: sopra una retta si prendono 5 parti eguali allo spigolo dell' icosaedro e sopra ciascuna di queste parti si costruisce d' ambo i versi della retta un triangolo equi-

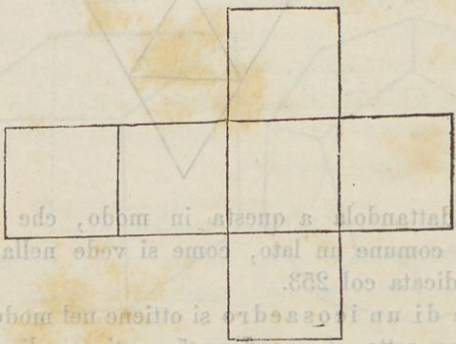
latero; ciò fatto si uniscono i vertici di una serie dei detti triangoli mediante una retta, la quale si prolunga per modo di ottenere su d' essa 5 parti eguali alle anzidette, sopra ciascuna delle quali si costruisce un triangolo equilatero, con che si ottengono 20 triangoli equilateri tra loro eguali formanti la rete richesta, come emerge dalla fig. 254 quì appresso.

Fig. 254.



4) Per ottenere la rete di un esaedro o dado si descrivono col lato del dado proposto quattro quadrati l' uno presso all' altro fra due parallele, indi se ne adattano

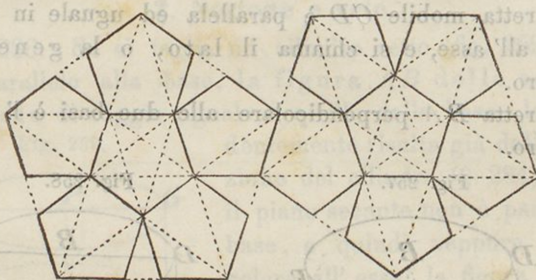
Fig. 255.



altri due di uguali ai lati opposti di uno dei quattro primi, come emerge dalla fig. 255.

5) Si ottiene la rete del dodecaedro nella maniera seguente: si costruisce un pentagono regolare il di cui lato sia uguale allo spigolo del dodecaedro e sopra ciascuno dei suoi cinque lati si costruisce un pentagono uguale al primo, traendo partito dal prolungamento delle

Fig. 256.



diagonali; ciò fatto si adatterà alla rete così ottenuta una seconda rete uguale alla prima per modo, ch' esse ricevano comune un lato, con che si avrà un sistema di 12 pentagoni regolari formanti la rete voluta, come appare dalla fig. 256 quì appresso.

VI. Il cilindro.

1. Origine e specie.

§. 284. Se una retta CD (fig. 257) si muove parallelamente a sè medesima, passando successivamente per tutti i punti della periferia di un cerchio descritto dal centro A col raggio AC, il punto D della retta CD, come pure ogni altro suo punto, descrive durante il movimento di essa un cerchio parallelo ed uguale al proposto; la retta CD poi genera una superficie curva limitata dalla circonferenza del cerchio descritto dal punto D per modo, che la superficie di questo cerchio viene a determinare un solido, limitato da due cerchî e dalla suddetta superficie curva, il quale dicesi cilindro (colonna rotonda).

I due cerchî sono le basi, la superficie curva poi dicesi superficie convessa, o manto del cilindro.

La retta AB che unisce i centri delle due basi si chiama l' asse del cilindro.

La retta mobile CD è parallela ed uguale in ogni sua posizione all' asse, e si chiama il lato, o la generatrice del cilindro.

La retta BA perpendicolare alle due basi è l' altezza del cilindro.

Fig. 257.

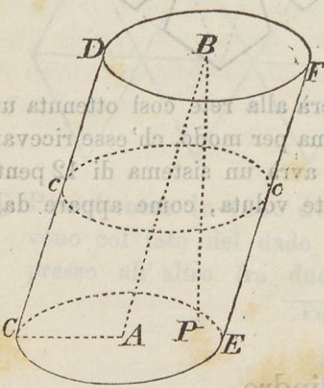
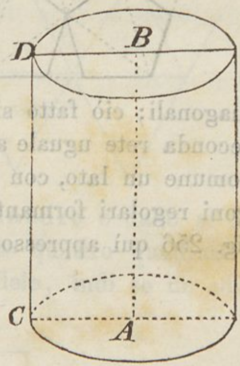


Fig. 258.



Un cilindro può anche immaginarsi generato dal movimento parallelo di un circolo il cui centro A si avanzi sulla retta AB.

Siccome un cerchio può considerarsi come un poligono regolare a numero infinito di lati, così può dirsi anche che:

Il cilindro è un prisma le cui basi sono dei poligoni regolari aventi un numero infinito di lati.

S' indichino degli oggetti di forma cilindrica.

§. 285. Un cilindro il di cui asse sia perpendicolare alla base dicesi retto (fig. 258), ogni altro cilindro è obbliquo. Un cilindro retto può immaginarsi anche generato della rotazione di un rettangolo $ABCD$ attorno ad uno dei suoi lati, p. e. ad AB preso come asse.

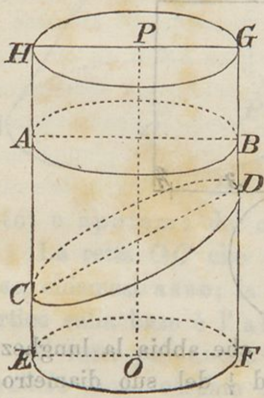
In un cilindro retto l' altezza è uguale all' asse.

Se il lato di un cilindro retto è uguale al diametro della base esso dicesi equilatero.

2. Sezione e rete.

§. 286. Se si taglia un cilindro retto (fig. 259) con un piano parallelo alla base, la figura AB della sezione è un circolo di raggio uguale a quello della base, locchè evidentemente risulta già dalla generazione del cilindro (§. 284). Se poi il piano secante non è parallelo alla base, e quindi neppure perpendicolare all' asse, la figura CD della sezione è un' ellisse.

Fig. 259.



Ambedue queste sezioni possono rendersi evidenti per mezzo di un bicchiere cilindrico riempito per metà d' acqua; se l' asse del bicchiere è verticale, la sezione del piano orizzontale col manto del bicchiere è un cerchio; se poi si inclina il bicchiere in modo che il suo asse venga a porsi obbliquamente rispetto al livello dell' aqua, la sezione che si ottiene è un' ellisse.

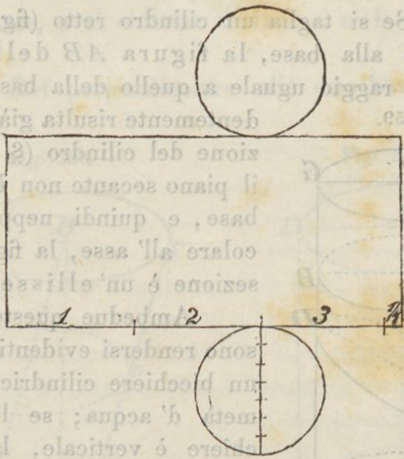
Se finalmente si taglia un cilindro retto con un piano parallelo all' asse, la sezione $EFGH$ è un rettangolo.

Gioverà porre sott' occhio degli allievi anche modelli di corpi rotondi e delle loro sezioni.

§. 287. Se s' immagina un cilindro retto adagiato sopra un piano per modo che esso lo tocchi lungo uno de' suoi lati, ed indi lo si gira, facendolo avanzare fino a che quel lato torni a porsi nel piano suddetto, la superficie convessa del cilindro viene a descrivere un rettangolo, di cui la base è uguale alla circonferenza della base del cilindro e la di cui altezza è uguale a quella del cilindro proposto. Possiamo convincerci di questa verità, rivestendo la superficie convessa del cilindro con un foglio di carta, e stendendo poscia quest' ultimo sopra un piano.

Gli è su questo che si appoggia la costruzione della rete di un cilindro. A tal fine si descrive (fig. 260) un cerchio;

Fig. 260.



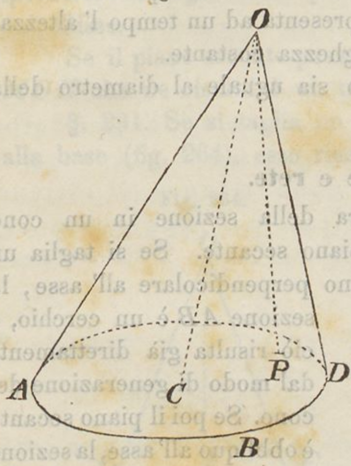
indi si conduce ad esso una tangente che abbia la lunghezza della circonferenza, vale a dire 3 ed $\frac{1}{7}$ del suo diametro e sopra questa tangente si costruisce un rettangolo il quale abbia l' altezza del cilindro; finalmente si descrive un secondo circolo uguale all' altro e tangenziale al lato opposto del rettangolo suddetto.

VII. Il cono.

1. Origine e specie.

§. 288. Se una retta OA (fig. 261) si muove in modo che passi sempre pel punto fisso O, e nello stesso tempo successivamente per tutti i punti della periferia di un cerchio, essa descrive una superficie curva terminante nel punto O, la quale, unitamente a quella del circolo proposto, racchiude il solido che dicesi cono.

Fig. 261.



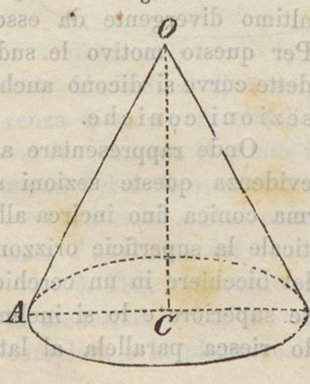
Il punto O si chiama la cima, punta o il vertice; il cerchio ABD si chiama la base e la superficie laterale dicesi superficie convessa, o manto del cono.

Quest' ultima ha la proprietà, che qualunque piano condotto per il vertice e per un punto della periferia della base la taglia lungo una retta, corrispondendo a ciascuna di queste intersezioni una delle posizioni della retta mobile OA. Una tale intersezione si chiama lato, o apotema del cono.

La retta OC che congiunge il vertice col centro della base, chiamasi asse; la perpendicolare OP poi abbassata dal vertice sulla base è l' altezza del cono.

Il cono può anche immaginarsi generato dal movimento parallelo di un cerchio variabile, il cui centro si avanzi isull' asse CO, diminuendo il circolo gradatamente fino a che giunto in O, affatto svanisca.

Fig. 262.



Un cono può risguardarsi qual piramide la cui base sia un poligono regolare di un numero infinito di lati.

S' indichino degli oggetti di forma conica?

§. 289. Se l' asse è perpendicolare alla base, il cono chiamasi retto, altrimenti esso è obbliquo (fig. 262). La generazione di un cono retto può anche rendersi evidente colla rotazione di un triangolo rettangolo ACO attorno ad un suo cateto CO; l' altro cateto AC descrive durante il suddetto movimento la base; l' ipotenusa poi rappresenta il lato del cono e descrive la superficie curva.

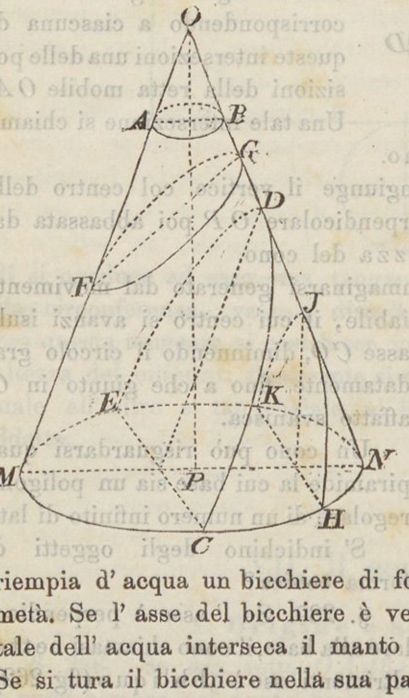
In un cono retto l' asse rappresenta ad un tempo l' altezza; anche i lati sono in esso di lunghezza costante.

Un cono retto il cui lato sia uguale al diametro della base si chiama equilatero.

2. Sezione e rete.

§. 290. La forma e natura della sezione in un cono dipendono dalla giacitura del piano secante. Se si taglia un cono retto (fig. 263) con un piano perpendicolare all' asse, la sezione AB è un cerchio, e ciò risulta già direttamente dal modo di generazione del cono. Se poi il piano secante è obbliquo all' asse, la sezione è una parabola CDE, ovvero un' ellisse FG, o finalmente un' iperbola HJK secondo che il piano secante è parallelo al lato opposto del cono, ovvero ad esso convergente o per ultimo divergente da esso. Per questo motivo le suddette curve si dicono anche sezioni coniche.

Fig. 263.

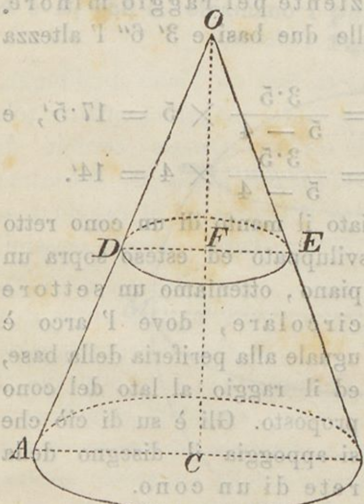


Onde rappresentare ad evidenza queste sezioni si riempia d' acqua un bicchiere di forma conica fino incirca alla metà. Se l' asse del bicchiere è verticale la superficie orizzontale dell' acqua interseca il manto del bicchiere in un cerchio. Se si tura il bicchiere nella sua parte superiore e lo si inclina fino a che la superficie del liquido riesca parallela al lato opposto del cono, la sezione diviene una parabola; inclinando il bicchiere ancora più, fino a tanto che p. e. la superficie liquida divenga parallela all' asse, si ottiene per sezione un' iperbola. In ogni altra posizione del bicchiere la sezione è un' ellisse.

Se il piano secante passa per l' asse medesimo, la sezione *MON* che ne risulta è un triangolo isoscele.

§. 291. Se si taglia un cono con un piano *DE* parallelo alla base (fig. 264), esso riesce scomposto in due silidi, l' uno de' quali è un cono minore e l' altro un corpo contenuto fra i due cerchî paralleli, che chiamasi cono abbreviato ovvero tronco di cono. Se simile tronco di cono retto può immaginarsi generato dal movimento del trapezio *ACDF*, di cui un lato non parallelo *CF* è perpendicolare ai due paralleli, facendolo ruotare attorno a questo lato *CF*. L' altro lato *AD* non parallelo descrive girando la superficie convessa; *AC* e *DF* poi, parallele fra loro, generano le due basi del tronco di cono retto.

Fig. 264.



Un tronco di cono può sempre risguardarsi come la differenza di due coni che hanno per basi le basi del tronco, e per vertice comune il punto in cui terminerebbe la superficie convessa del tronco estendendola convenevolmente.

La retta *AD* si chiama il lato, la distanza *CF* delle due basi, l' altezza del cono abbreviato.

§. 292. Il tronco di cono ha con quello della piramide la medesima relazione che vedemmo sussistere fra il cono completo e la piramide. I raggi dei due circoli nel tronco di cono stanno fra di loro nel medesimo rapporto, in cui stanno due lati omologhi nelle basi poligonali di un tronco piramidale.

Se dunque si conoscono l' altezza ed i raggi delle due basi del tronco, si possono facilmente calcolare (a norma del §. 278) le altezze dei due coni, di cui il tronco di cono proposto è la differenza.

L'altezza del cono maggiore si trova: dividendo quella del tronco per la differenza dei raggi delle due basi e moltiplicando il quoziente pel raggio maggiore; quella poi del cono minore si ottiene moltiplicando lo stesso quoziente pel raggio minore.

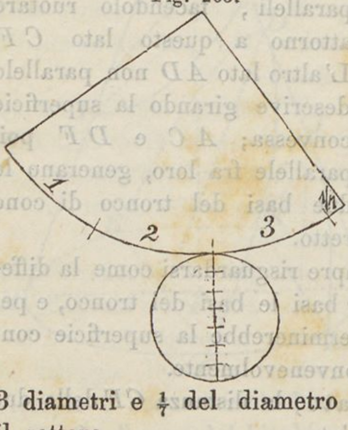
Se $5'$ e $4'$ sono i raggi delle due basi e $3'\ 6''$ l' altezza del tronco di cono, avremo

$$\text{l' altezza del cono maggiore} = \frac{3\cdot5}{5-4} \times 5 = 17\cdot5', \text{ e}$$

$$\text{,, ,, ,, minore} = \frac{3\cdot5}{5-4} \times 4 = 14'.$$

§. 293. Immaginando tagliato il manto di un cono retto lungi uno de' suoi lati, indi sviluppato ed esteso sopra un piano, otteniamo un settore circolare, dove l' arco è uguale alla periferia della base, ed il raggio al lato del cono proposto. Gli è su di ciò che si appoggia il disegno della rete di un cono.

Fig. 265.



A tal fine si disegni (fig. 265) la base circolare, indi col lato del cono si descriva un arco che sia tangenziale a quel cerchio, sopra di esso si porti 3 diametri e $\frac{1}{7}$ del diametro del primo cerchio e si compia il settore.

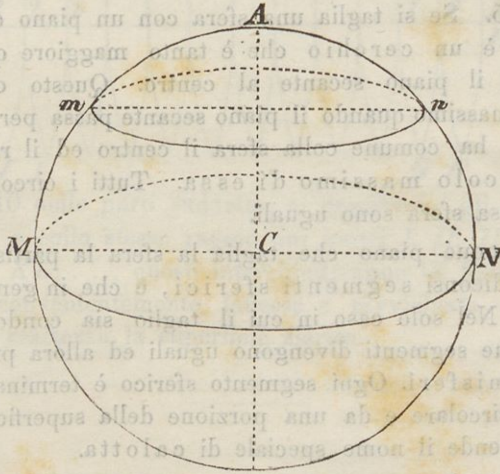
Si costruisca anche la rete di un tronco di cono retto.

VIII. La sfera.

1. Origine e definizione.

§. 294. Rotando un semicerchio AMB (fig. 266) intorno al diametro AB preso come asse, finita la rotazione si avrà un corpo rotondo che dicesi s f e r a. La linea semicircolare AMB descrive durante questo movimento la superficie della sfera, ed ogni suo punto posto fra A e B descrive un circolo, il cui centro è situato sull' asse AB. Questi cerchî sono tutti paralleli e tanto più piccoli quanto più prossimi sono ai punti A e B, che si chiamano i p o l i di quei c e r c h î p a r a l l e l i.

Fig. 266.



Il punto M, che divide per metà la linea semicircolare, descrive il circolo maggiore di tutti.

Dal modo di generazione della sfera si conchiude che ogni punto della superficie sferica è equidistante dal centro C del semicircolo generatore, e gli è per ciò che questo punto dicesi i l c e n t r o d e l l a s f e r a.

La distanza del centro da un punto qualunque della superficie sferica si chiama r a g g i o, ed ogni retta che passa pel centro ed è limitata da ambe le parti dalla superficie sferica è un diametro della sfera. Tutti i raggi sono uguali e similmente lo sono tutti i diametri di una stessa sfera.

Se si conduce per una delle estremità dell'asse una tangente al circolo generatore, questa descrive durante la rotazione del semicerchio un piano, il quale ha un solo punto comune colla sfera generata. Un tale piano si dice tangenziale, e chiamasi punto di contatto il punto che esso ha comune colla sfera. Il piano tangenziale è perpendicolare al raggio che passa per il punto di contatto.

S' indichino degli oggetti di forma sferica?

2. Sezione e rete.

§. 295. Se si taglia una sfera con un piano qualunque, la sezione è un cerchio che è tanto maggiore quanto più prossimo è il piano secante al centro. Questo cerchio di sezione è massimo quando il piano secante passa per il centro; allora esso ha comune colla sfera il centro ed il raggio e si chiama circolo massimo di essa. Tutti i circoli massimi di una stessa sfera sono uguali.

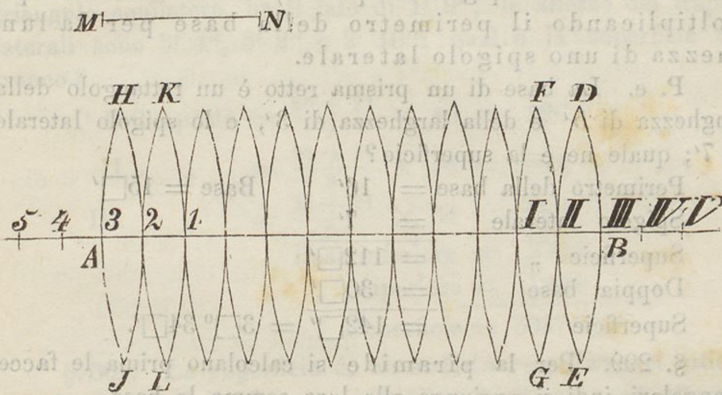
Qualunque piano che taglia la sfera la partisce in due solidi che diconsi segmenti sferici, e che in generale sono disuguali. Nel solo caso in cui il taglio sia condotto per il centro, i due segmenti divengono uguali ed allora prendono il nome di emisferi. Ogni segmento sferico è terminato da una superficie circolare e da una porzione della superficie sferica, la quale prende il nome speciale di calotta.

Se si taglia una sfera con due piani paralleli, le sezioni ottenute sono due circoli paralleli. La porzione anulare di superficie sferica situata fra i due circoli paralleli si chiama fascia o zona. L' arco *Mm* nella figura 266 descrive una zona durante la rotazione del semicircolo *AMB*.

§. 296. La superficie sferica non è sviluppabile in un piano come lo sono quelle del cilindro e del cono, quindi per essa non si può ottenere che una rete approssimativa, e ciò nel modo seguente:

Si porti (fig. 267) da A fino in B sopra una retta 3 diametri MN ed $\frac{1}{7}$, indi si partisca la retta AB, uguale alla periferia del circolo massimo della sfera, in 12 porzioni uguali, e sul suo prolungamento oltre A e B si portino altre 9 di queste parti. Se ora, dai centri 1, 2, 3, . . . e con raggio

Fig. 267.



uguale a 10 delle parti suddette, si descrivono gli archi DE, FG, . . . e collo stesso raggio dai centri I, II, III, . . . gli archi HJ, KL, . . . questi interchiuderanno 12 figure lenticolari che convenientemente inflesse e ravvicinate dànno con sufficiente esattezza la superficie sferica.

IX. Superficie dei solidi.

1. Solidi a spigoli.

§. 297. Per superficie di un solido s' intende la somma delle superficie che lo limitano; la somma delle facce chiamasi poi in particolare la superficie laterale del corpo medesimo.

§. 298. Onde ottenere la superficie di un prisma si calcolano prima di tutto le aree delle facce che sono parallelogrammi, e la loro somma è la superficie laterale; a questa poi si aggiunge il doppio della superficie della base.

Se il prisma è retto, si ottiene la superficie laterale immaginandola sviluppata sopra un piano e rappresentata da un rettangolo in cui un lato è uguale al perimetro della base, e l'altezza ad uno spigolo del prisma; essa si calcola dunque moltiplicando il perimetro della base per la lunghezza di uno spigolo laterale.

P. e. La base di un prisma retto è un rettangolo della lunghezza di 5′ e della larghezza di 3′, e lo spigolo laterale di 7′; quale ne è la superficie?

Perimetro della base	$= 16'$	Base $= 15\square'$
Spigolo laterale	$= 7'$	
Superficie „	$= 112\square'$	
Doppia base	$= 30\square'$	
Superficie	$= 142\square' = 3\square^0\ 34\square'$.	

§. 299. Per la piramide si calcolano prima le facce triangolari, indi si aggiunge alla loro somma la base.

Onde determinare la superficie laterale di una piramide regolare, non si ha che a calcolare l'area di una delle facce triangolari, e poscia moltiplicarla per il numero degli spigoli laterali.

Si determini la superficie di una piramide regolare che abbia lo spigolo laterale di 11′, e la base quadrata con 8″ di lato.

Altezza di un triangolo laterale $= \sqrt{11^2 - 4^2} = \sqrt{105}$
$= 10{\cdot}25''$

Base „ „ „ „	$= 8''$
Area „ „ „ „	$= 41\square''$
Superficie „	$= 164\square''$
Base $= 8^2$	$= 64\square''$
Superficie	$= 228\square''$.

§. 300. Pel tronco di piramide si determinano prima le aree delle facce che sono trapezî, e si aggiungono alla loro somma le due basi.

Se il tronco piramidale è regolare, basta calcolare una delle sue facce trapezie, e moltiplicare l' area così ottenuta pel numero de' suoi spigoli laterali.

P. e. La base inferiore di un tronco piramidale è un triangolo equilatero che ha 2′ 1″ di lato, la base superiore, pure triangolo equilatero, ha il lato di 1′ 9″; le altezze dei trapezî laterali sono 3′ 4″, 3′ 2″ e 2′ 10″; qual è la superficie del tronco?

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I. Trapezio} & = \dfrac{25+21}{2} \times 40 & = & 920\,\square'' \\
\text{II.} \quad " & = \dfrac{25+21}{2} \times 38 & = & 874 \;" \\
\text{III.} \quad " & = \dfrac{25+21}{2} \times 34 & = & 782 \;" \\
 & \text{Base inferiore} & = & 270{\cdot}6 \;" \\
 & "\ \text{superiore} & = & 190{\cdot}9 \;" \\
\hline
 & \text{Superficie} & = & 3037{\cdot}5\,\square''
\end{array}$$

§. 301. La superficie di un solido regolare si ottiene calcolando una delle facce e moltiplicando l' area così ottenuta pel numero delle facce.

Si determini la superficie di un tetraedro che ha 4″ di lato.

L' area di un triangolo equilatero che ha il lato di 4″ è $6{\cdot}93\square''$, quindi la superficie del tetraedro è $= 6{\cdot}93 \times 4'' = 27{\cdot}72\square''$.

2. Solidi rotondi.

§. 302. La superficie di un cilindro retto si compone di due circoli uguali e della superficie convessa. Si calcoli dunque l' area di una delle basi circolari, e se ne prenda il doppio; indi si determini il manto moltiplicando (§. 287) la periferia della base per l' altezza del cilindro, e si sommi questa superficie a quella dei due cerchî.

P. e. L' altezza di un cilindro retto è di 5′, ed il raggio della base di 2′; qual sarà la superficie?

Periferia della base $= 4 \times 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56'$
Manto del cilindro $= 12{\cdot}56 \times 5 = 62{\cdot}8\square'$
Base $= 12{\cdot}56 \times 1 = 12{\cdot}56\square'$
Doppio della base $= 25{\cdot}12\square'$
Superficie $= 87{\cdot}92\square'$.

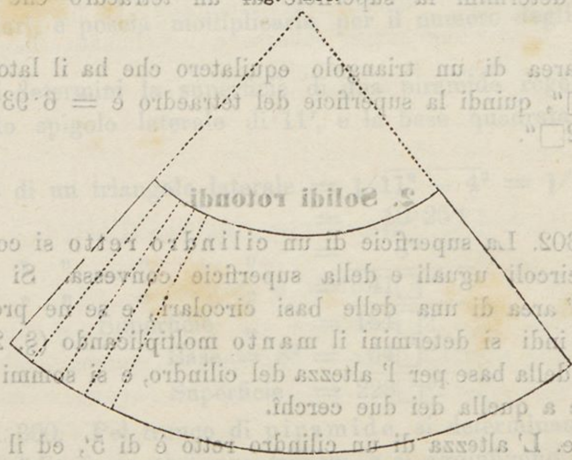
§. 303. Onde determinare la superficie di un cono retto si cerchi prima quella del manto risguardandolo, a norma del §. 293, qual settore circolare e per ciò uguale al prodotto della periferia della base nella metà del lato; gli si aggiunga poi l' area della base.

Sia p. e. il lato di un cono retto lungo 3' 4" ed il diametro della base 2' 4"; qual' è la superficie?

Periferia della base $= 28 \times 3{\cdot}1416 = 87{\cdot}9648''$
Manto $= 87{\cdot}9648 \times 20 = 1759{\cdot}296\ \square''$
Base $= 87{\cdot}9648 \times 7 = 615{\cdot}7536$ „
Superficie $= 2375{\cdot}0496\square''$
$= 16\square'\ 71\square''$.

§. 304. Se si sviluppa il manto di un tronco di cono retto sopra un piano (fig. 268), esso si presenta qual porzione

Fig. 268.



di un anello circolare compreso fra due archi uguali in lunghezza alle periferie delle due basi, e distanti fra di loro per l' importo della lunghezza che ha il lato del tronco di cono proposto. Questa porzione anulare può considerarsi composta da innumerevoli trapezî e per ciò calcolarsi facilmente, moltiplicando la somma dei due lati paralleli, vale a dire delle due porzioni di arco opposte di ciascun trapezio, per la loro semidistanza, ossia per la metà del lato del tronco, e sommando poscia tutte queste aree trapezie. Otterremo però il medesimo risultato sommando a dirittura insieme tutti gli archetti opposti, ossia le periferie delle due basi, e moltiplicando la somma per la metà del lato corrispondente al tronco di cono.

Il manto di un tronco di cono retto è dunque uguale alla somma delle periferie delle due basi, moltiplicata per la metà del lato. Se al manto si aggiungono anche le due basi si ottiene l' intera superficie.

P. e. I raggi delle basi di un cono abbreviato sono di 9′ e 6′; un lato importa 4′; si determini la superficie.

Periferia della base inferiore $= 18 \times 3{\cdot}14 = 56{\cdot}52'$

„ „ „ superiore $= 12 \times 3{\cdot}14 = 37{\cdot}68'$

$94{\cdot}2'$.

Manto $= 94{\cdot}2 \times 2 = 188{\cdot}4 \,\square'$

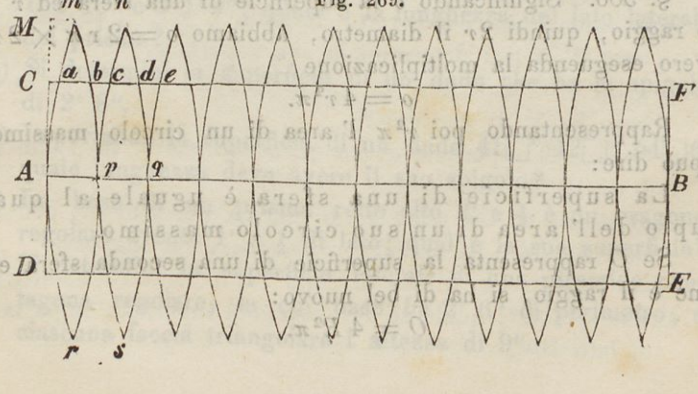
Base inferiore $= 56{\cdot}52 \times 4{\cdot}5 = 254{\cdot}33$ „

„ superiore $= 37{\cdot}68 \times 3 = 113{\cdot}04$ „

Superficie $= 555{\cdot}78 \,\square'$.

§. 305. Affine di stabilire il modo di determinare la superficie di una sfera, gioverà ricorrere alla sua rete. Se la fig. 269

Fig. 269.



rappresenta la rete di una sfera del diametro CD disegnata a norma del §. 296, dove dunque AB è uguale alla periferia di un circolo massimo, ed AM a quasi $\frac{3}{4}$ del diametro, la somma delle figure lenticolari $Ampr$, $pnqs$ . . ., equivale approssimativamente all' intera superficie sferica. Se ora si fanno AC ed AD uguali al raggio della sfera, e si costruisce il rettangolo $CDEF$, si vede a prima vista che le porzioni di lente amb, cnd . . ., sono uguali agli elementi bpc, dqe . . . del rettangolo, o che al meno ne differiscono di quantità trascurabile. Non ci discosteremo adunque di molto dalla verità, se invece delle figure amb, cnd . . ., prenderemo le altre bpc, dqe . . ., e così la superficie della sfera si trasforma in quella del rettangolo $CDEF$, dove la base DE è uguale alla circonferenza di un circolo massimo, e l' altezza CD al diametro della sfera. L' area di questo rettangolo è però uguale al prodotto della periferia di un circolo massimo pel diametro, quindi anche la superficie sferica è uguale alla periferia di un circolo massimo moltiplicata per il suo diametro.

La dimostrazione rigorosa di questo teorema, quì esposto per via di costruzione grafica, appartiene alla scienza geometrica.

Sia p. e. il diametro di una sfera di $8''$; qual è la superficie?

La periferia di un suo circolo massimo è $8 \times 3{\cdot}14 = 25{\cdot}12''$, quindi la superficie $25{\cdot}12 \times 8 = 200{\cdot}96\square''$.

§. 306. Significando o la superficie di una sfera ed r il suo raggio, quindi $2r$ il diametro, abbiamo $o = 2\,r\pi \times 2\,r$, ovvero eseguenda la moltiplicazione

$$o = 4\,r^2\pi.$$

Rappresentando poi $r^2\pi$ l' area di un circolo massimo, si può dire:

La superficie di una sfera è uguale al quadruplo dell' area di un suo circolo massimo.

Se O rappresenta la superficie di una seconda sfera ed R ne è il raggio, si ha di bel nuovo:

$$O = 4\,R^2\pi.$$

Da queste due ultime espressioni segue la proporzione:

$$o : O = r^2 : R^2,$$

vale a dire. Le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi.

§. 307. Nota che sia la superficie di una sfera, si può facilmente ottenere il raggio. Infatti la superficie altro non è se non che il prodotto del numero π preso quattro volte, pel quadrato del raggio. Se dunque si divide la superficie conosciuta pel quadruplo del numero π si ottiene il quadrato del raggio come quoto; onde trovare poi il raggio stesso non s' ha che ad estrarre la radice quadrata da questo quoziente.

P. e. Quale è il raggio di una sfera che ha 10□' di superficie?

$4\pi = 12\cdot566$; $\quad 10 : 12\cdot566 = 0\cdot7951$

$\sqrt{0\cdot7951} = 0\cdot892' = 10\cdot704''$ raggio.

3. Problemi sul calcolo delle superficie dei solidi.

§. 308. 1) L' altezza di un prisma sia di 5', e la base un quadrato a 3' di lato; si determini la superficie.

2) Quale è la superficie di un prisma retto la cui base è un rettangolo lungo 2·4' e largo 1·2', essendo l' altezza di 3·5?

3) La superficie laterale di un prisma retto triangolare è di 2□°, 14□', 90□''; i lati della base importano 2° 0' 2'', 1° 4' 10'' e 0° 1' 9''; quale è la lunghezza del lato laterale del prisma?

4) Si determini la superficie di un dado che ha lo spigolo di 2' 8''.

5) Importando la superficie di un dado 41□° 12□' 54□'', quale lunghezza deve avere il suo spigolo?

6) La base di un prisma retto alto 2' e $\frac{1}{3}$ è un esagono regolare avente 1' e $\frac{1}{2}$ di lato; qual' è la sua superficie?

7) Si determini la superficie laterale di una piramide pentagona regolare, la cui base ha 2' 6'' di perimetro, e ciascuna faccia triangolare l' altezza di 9''.

8) Si calcoli la superficie di una piramide regolare di cui lo spigolo laterale è di 10·8″, e la base un triangolo equílatero che ha 4′ 5″ di lato.
9) Le basi di un tronco retto di piramide sono di forma quadrata ed hanno i perimetri di 5′ 8″ e di 3′ 4″; l' altezza di ciascuno dei trapezî laterali è di 2′ 3″; si calcoli la superficie del tronco?
10) In un tronco di piramide regolare la superficie laterale è di 3□° 20□′ 60□″; le due basi sono triangoli equilateri; l' inferiore ha il lato di 4′ 2″, ed il superiore di 3′ 6″; quale è l' altezza di un trapezio laterale?
11) Si abbia a determinare la superficie di un ottaedro, dove la lunghezza dello spigolo sia di 1′.
12) Un dado ed un icosaedro hanno lo spigolo di 3·4″; in quale rapporto stanno fra di loro le due superficie?
13) Quale è la superficie di un cilindro retto alto 3′ se il diametro della base è di 1′ 4″?
14) Si determini la superficie di un cilindro retto la di cui altezza è di 7·5′ e la di cui base ha 17·4″ di periferia.
15) Il manto di un cilindro retto contiene 188·4□′; il raggio della base è di 5′; quale ne è l' altezza?
16) Si trovi il raggio della base di un cilindro retto alto 1′ 5″, e la di cui superficie convessa è di 1□′ 138·6□″.
17) In un cilindro equilatero il diametro è di 2′ 2″; in quale rapporto sta il manto all' intera superficie?
18) Il lato di un cono retto importa 1′ 8″, il raggio della base 0·72′; si determini la sua superficie.
19) Qual è la superficie di un cono retto alto 3′, se la sua base ha 7′ di periferia?
20) Qual è la superficie di un cono equilatero, se il suo lato è di 10″?
21) Il manto di un cono retto che ha per lato 8″, contiene 2□′ 12·14″; si cerchi il diametro della sua base.
22) Le basi di un tronco di cono retto hanno i diametri di 12″ e di 8″; quale ne dev' essere la superficie, importando il lato 10″?

23) Si determini il manto di un tronco di cono retto le cui basi hanno le aree di 5□′ e di 4□′, ed il di cui lato è di 3′.

24) Il raggio di una sfera è di 2′ 7″; quale ne è la superficie?

25) Si cerchi la superficie di una sfera, il cui circolo massimo ha 20″ di circonferenza.

26) La superficie di una sfera importa 19□′ 90□″; quale è il raggio?

27) Quale è la superficie di una sfera, se quella di un suo circolo massimo è di 12·56□′?

§. 309. 28) Un imbuto perfettamente appuntito ha alla base il diametro di 11″ ed il lato di 1′ 2″; quanti □′ di latta furono necessarî a costruirlo?

29) Quale è la superficie totale di un tronco d' albero lungo 14′, largo 2′ e grosso 1′ e $\frac{3}{4}$?

30) Il tetto di una pagode è una piramide ottangolare che ha 1° 5′ allo spigolo laterale, e la cui base ha 1° di lato; quanti piedi quadrati di lamiera di rame abbisogneranno per coprirlo?

31) Un recipiente parallelepipedo è alto 5′ ed ha per base un rettangolo lungo 7′ e largo 4′; quale grandezza deve avere il fondo, e quale la superficie laterale?

32) Quanti piedi quadrati di latta occorrono alla costruzione di un recipiente cilindrico di 10′ 2″ in lunghezza, e di 4′ e $\frac{1}{4}$ in luce?

33) Quanti piedi quadrati di latta sono necessarî pella costruzione di un recipiente conico alto 2′, se il diametro del fondo dev' essere di 2′ 2″ e quello del coperchio di 3′?

34) La periferia dell' equatore terrestre è di 5400 miglia geografiche; quale dev' essere la superficie del nostro globo, considerandolo perfettamente sferico, e rappresentando l' equatore un circolo massimo di questa sfera?

35) Il diametro di un mappamondo è di 1′; quale è il rapporto della sua superficie a quella del nostro globo?

36) Quanto deve importare il diametro di un mappamondo onde il miglio geografico quadrato vi sia rappresentato da una linea quadrata?

37) In un fabbricato sono da applicarsi parechie grondaje cilindriche che abbiano 5″ e $\frac{1}{2}$ di diametro, e la lunghezza complessiva di 142′; quanti piedi quadrati di latta saranno necessarî alla loro costruzione?

38) Un trave quadrangolare lungo 18′ va restringendosi proporzionalmente verso la cima; le due sezioni estreme sono quadrate ed hanno i lati 1′ e $\frac{3}{4}$, e di 1′ e $\frac{1}{2}$; quale è la superficie totale del trave suddetto?

39) Dovendosi dorare il bottone sferico di un campanile, quanti pollici quadrati importerà la doratura, se il diametro del bottone è di 8·5″?

40) Volendo costruire un recipiente conico di rame del diametro di 2′ 2″ al fondo, e di 2′ 10″ alla bocca; quanti piedi quadrati di lamina di rame vi saranno necessarî se si dà al lato del vaso la lunghezza di 2′ 4″?

41) Quanti piedi quadrati di tavola abbisognano onde fare una cassa di legno a coperchio, di forma parallelepipeda, lunga 7′, larga 4′ ed alta 3′ e $\frac{1}{2}$?

42) Volendo rivestire il tetto conico di un campanile con lamiera di rame; quanti piedi quadrati occorreranno se esso ha il diametro di 14′ in base e l' altezza di 11′?

43) Una canna da stufa è lunga 13′ ed ha il diametro di 5′; quanti piedi quadrati di latta convengono alla sua costruzione?

§. 310. 44) il diametro di un mappamondo è di 16″, quello di un altro è di 12″; quanta carta occorre per rivestire e l' uno e l' altro?

45) Un cilindro retto ha 10″ di diametro alla base ed 8″ in altezza; un secondo cilindro ha soltanto 5″ d' altezza, ma la sua superficie convessa è uguale a quella del primo; quale è il diametro della sua base?

46) Vuolsi rivestire con carta una scatola cubica che ha 1′ 2″ di lato; quanti fogli ne occorrono se ciascheduno d' essi è lungo 1′ 6″ e largo 1′ 4″?

47) Il diametro di una sfera è di 8'', ed altrettanto importa anche il lato di un dado; di quanto sarà minore la superficie della sfera a confronto di quella del dado?

48) Quanto costa la fattura di una cassa a coperchio, lunga 8', larga 5' ed alta 3', calcolando il piede quadrato a 7 soldi?

49) Il tetto di un campanile ha la forma di una piramide quadrilatera regolare; il lato della base è di 13', lo spigolo laterale poi è di 15'; quale è il prezzo unitario per il piede quadrato di rivestimento, se si sborano 420 fiorini per tutto il lavoro?

50) In un tubo cilindrico dello spessore di 2'' il diametro interno è di 7'' e l' altezza di 8''; quali devono essere le superficie dei due manti concentrici?

51) Il diametro di una palla importa 1' 4''; quale diametro si darà ad una seconda palla onde la sua superficie sia il doppio di quella della prima?

52) Un pozzo ha 5' in luce e 28' in profondità; quanti mattoni dovranno impiegarsi nel suo rivestimento, se ciascun mattone è lungo 1', largo 6'' e grosso 2''?

53) Di due palle l' una ha 8' e l' altra 5' di diametro; quale diametro si assegnerà ad una terza, onde la sua superficie equivalga alla somma delle superficie delle due prime?

54) Un cono retto ha il diametro di 5' alla base, e 4' piedi d' altezza; qual diametro si deve dare ad una palla onde la sua superficie sia equivalente a quella del cono?

55) Una coppa d' argento profonda 5'', larga alla bocca 4·2'' e 2·6'' al fondo, abbiasi d' indorare internamente; quanto costerà la doratura pagando 28 soldi pel pollice quadrato?

56) Quante lastre d' ardesia abbisognano per coprire un tetto piramidale quadrilatero, se il lato inferiore è di 10' 8'' e la lunghezza dello spigolo laterale di 18' 5'', impiegandosi d' altronde in tal lavoro delle lastre lunghe 1' 2'' e larghe 8'' e disposte in modo, che ognuna di esse ricopra la sottoposta alla lunghezza di 1'' e $\frac{1}{2}$?

57) Abbiasi d' indorare una sfera del diametro di 2′ 8″; quante foglie d' oro lunghe 2″ e larghe 1″ e $\frac{3}{4}$ sono necessarie per la doratura, calcolando il 6 per 100 in più per supplire alla perdita?

58) Una nicchia murale è terminata superiormente da un quarto di sfera, ed è formata nel rimanente da un semicilindro retto alto 6′ e del diametro di 2′; quale è la superficie di questa nicchia?

X. Volume o solidità dei corpi. (Cubatura dei solidi.)

1. Definizioni.

§. 311. Lo spazio compreso fra le superficie che limitano un corpo chiamasi il suo volume, o la sua solidità. Onde determinarla si assume un corpo già noto come unità di misura e si ricerca quante volte esso sia contenuto nel corpo da misurarsi.

Il cubo o dado più che ogni altro conviene quale unità nella misurazione delle solidità. Un dado che ha un pollice di lato si chiama pollice cubico. Che cosa significa dunque un piede cubico, una tesa cubica, un miglio cubico?

Si rendano sensibili con opportuni modelli il piede cubico ed il pollice cubico.

La cubatura dei solidi minori consiste nella ricerca del numere di tese, piedi, pollici cubici, e quella dei solidi molto grandi, nella ricerca del numero delle miglia cubiche in essi contenute. Gli è perciò che la solidità di un corpo viene anche detta contenuto cubico o cubatura del solido medesimo.

Per misurare p. e. lo spazio di una scuola si porrebbero tante tese cubiche l' una vicino all' altra, e l' una sopra all' altra, quante ne può capire la scuola, ed avendosi un residuo minore della tesa cubica si trasporterebbe in egual modo sopra di esso residuo il piede cubico; ottenendosi poi un nuovo residuo, anch' esso si misurerebbe in guisa affatto simile mediante il pollice cubico. In questo modo ci diverrebbe noto il numero delle tese, dei piedi e pollici cubici contenuti nella scuola misurata. Ma una simile misurazione diretta dei volumi sarebbe ben faticosa e d' altronde non eseguibile nella maggior parti dei casi. Gli è perciò che anche quì, come nella quadratura delle superficie, si ricorre ad un metodo indiretto, deducendo per via di semplici argomentazioni dei teoremi, a norma dei quali si può ottenere il volume di un corpo mediante il calcolo, dalla misura delle linee e delle superficie che determinano perfettamente la grandezza del solido.

2. Solidità o volume di un prisma.

§. 312. Se si prendono 8 pollici cubici di legno o di cartone e se ne adattano quattro vicini fra loro ed in modo che essi coprano l'area di un quadrato, se poi si sovrappongono esattamente a questi gli altri quattro, si ottiene un dado il cui lato importa 2''. Questo dado contiene dunque 8'' cubici, ed è questa appunto la sua solidità.

Quanti pollici cubici si possono disporre l' uno vicino all' altro sopra la base di un dado che ha 3'' di lato e quindi $3 \times 3 = 9''$ quadrati di superficie? La solidità di questo dado è di 27'' cubici, poichè nel senso di sua altezza si possono sovrappore l' uno all' altro 3 strati ciascheduno formato da 9'' cubici.

Se il lato di un dado è di 4', si possono adattare sulla base 16' cubici, e quattro di questi strati, ciascuno formato di 16' cubici, si possono ripetere nel senso dell' altezza. Il suo volume è dunque di 64' cubici.

Quante volte è contenuta la tesa cubica in un dado il cui lato sia di 5°?

Il numero che indica quante volte l' unità solida di misura è contenuta in un dado si trova dunque: prendendo tre volte come fattore il numero ottenuto dalla misura del lato del dado, fatta coll'unità lineare.

Gli è perciò che dicesi innalzare al cubo un numero, quando si prende questo numero tre volte come fattore.

Si suole enunciare il teorema suddetto più brevemente così:

La solidità di un dado si ottiene innalzando al cubo il suo lato.

Il numero ottenuto come misura della solidità significa pollici, piedi o tese cubiche, secondo che la lunghezza del lato che si innalzò al cubo è espressa in pollici, piedi, o tese.

§. 313. Siccome il lato di ogni tesa cubica contiene 6′, così:

$$1^0 \text{ cubica} = 6 \times 6 \times 6 = 216' \text{ cubici.}$$

Similmente si trova essere:

$$1' \text{ cubico} = 12 \times 12 \times 12 = 1728'' \text{ cub.}$$

$$1'' \text{ cub} = 12 \times 12 \times 12 = 1728''' \text{ cub.}$$

$$1 \text{ miglio cubico} = 4000 \times 4000 \times 4000 = 64{,}000.000.000^0 \text{ cub.}$$

Se la lunghezza del lato è data in numeri complessi, essa si ridurrà per intero ad unità di ordine massimo e minimo, indi se ne prenderà il cubo.

P. e. Quale è il volume di un dado che ha $1^0\ 2'\ 2''$ di lato?

$$1^0\ 2'\ 8'' = 8'\ 8'' = 104''$$

104×104
416
10816×104
43264
$1124864''$ cub. : 1728
8806 — $650'$ cub. : 216
1664 — $2'$ cub. — 3^0 cub.

Solidità $= 3^0$ cub. $2'$ cub. $1664''$ cub.

§. 314. Se viceversa si ha a trovare la lunghezza del lato, conosciuto che sia il volume del dado, basta trovare il numero che preso tre volte come fattore dia quel volume; vale a dire non si ha che ad estrarre da quest' ultimo la radice cubica.

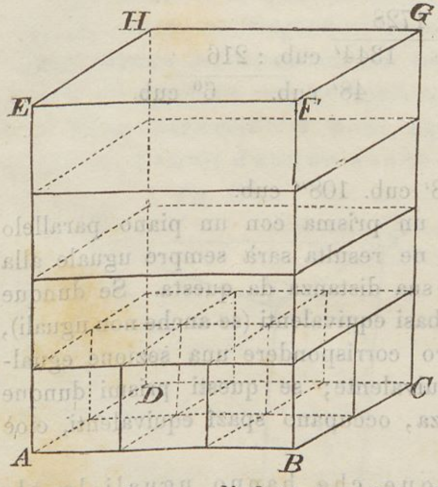
Sia p. e. il volume di un dado di 2^0 cub. $45'$ cub.; quale ne dev' essere il lato?

2^0 cub. $45'$ cub. $= 477'$ cub.

$\sqrt[3]{477} = 7 \cdot 813' = 1^0\ 1'\ 9 \cdot 8''$ lunghezza del lato.

§. 315. Se si dispongono sopra di un piano e vicini fra loro $4''$ cubici di legno o di cartone, e si sovrappongono a questo altri due strati ciascuno di $4''$ cubici, questi $12''$ cubici rappresentano un parallelepipedo rettangolo la cui base è formata da $4''$ quadrati e la cui altezza è di $3''$. Avendosi dunque un parallelepipedo rettangolo di $4\square''$ in base e $3''$ di altezza, la sua solidità o volume è di $12''$ cubici.

Fig. 270.



Sia ora (fig. 270) da determinare la solidità di un parallelepipedo rettangolo dove la lunghezza AB sia di $3'$, la larghezza AD di $1'$ e l' altezza AE di $4'$. Siccome la base contiene $3 \times 2 = 6\square'$ così immediatamente sovr' essa si possono adattare $6'$ cubici; ed importando l' altezza $4'$, quei $6'$ cubici possono ripetersi 4 volte lungi l' altezza; la solidatà del parallelepipedo è dunque di $6 \times 4 = 3 \times 2 \times 4 = 24'$ cub.

Si cerchi a questo modo il volume di un parallelepipedo rettangolo dove si abbia:

a) la lunghezza di $4''$, la larghezza di $3''$, l' altezza di $5''$;
b) la lunghezza di $7'$, la larghezza di $2'$, l' altezza di $6'$;
c) la lunghezza di 3^0, la larghezza di 5^0, l' altezza di 2^0.

Onde dunque determinare la solidità di un parallelepipedo rettangolo, si moltiplica la lunghezza per la larghezza ed altezza del medesimo, ovvero, ciò che è lo stesso, la base per l'altezza.

Quale è il contenuto solido di un parallelepipedo rettangolo che ha $1^0\,5'\,3''$ in lunghezza, $1^0\,1'\,8''$ in larghezza, e $2^0\,3'\,7''$ in altezza?

Lunghezza $= 1^0\,5'\,3'' = 11'\,3'' = 135''$
Larghezza $= 1^0\,1'\,8'' = 7'\,8'' = 92''$
Altezza $= 2^0\,3'\,7'' = 15'\,7'' = 187''$

135×92
1080
12420×187
99360
86940
$2322540''$ cub. : 1728
5945 — $1344'$ cub. : 216
7614 — $48'$ cub. — 6^0 cub.
7020
$108''$ cub.

Solidità $= 6^0$ cub. $48'$ cub. $108''$ cub.

§. 316. Se si taglia un prisma con un piano parallelo alla base, la sezione che ne resulta sarà sempre uguale alla base qualunque sia poi la sua distanza da questa. Se dunque due prismi hanno le loro basi equivalenti (se anche non uguali), ad ogni altezza dovrà loro corrispondere una sezione egualmente ampia, ovvero equivalente; se questi prismi dunque hanno inoltre uguale altezza, occupano spazî equivalenti, cioè di eguale grandezza.

Due prismi adunque che hanno uguali le altezze ed equivalenti le basi, hanno volumi equivalenti.

Ne segue che ogni prisma ha lo stesso volume del parallelepipedo che, avendo la stessa altezza, ha anche la base equivalente a quella del prisma. Il volume del parallelepidedo è poi uguale al prodotto della base per l'altezza, dunque anche quello di un prisma di forma qualunque è uguale alla base moltiplicata per l'altezza.

Quale è il volume di un prisma se la base è di $25\square'$ $64\square''$ e l' altezza di $4'$ $8''$?

$25\square'$ $64\square'' = 3664\square''$; $4'$ $8'' = 56''$

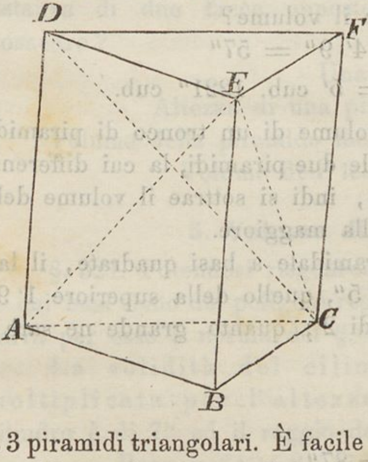
$3664 \times 56 = 205184''$ cub. $= 118'$ cub. $1280''$ cub.

3. Volume di una piramide e di un tronco piramidale.

§. 317. Se si tagliano due piramidi di uguale altezza ed insistenti sopra il piano medesimo con un piano parallelo a questo, le sezioni riescono simili alle basi e stanno fra di loro come il quadrato della distanza del piano secante dal vertice sta al quadrato dell' altezza comune. Se ora le basi delle due piramidi sono equivalenti, lo sono pure le sezioni. Ne segue che due piramidi le quali abbiano le basi equivalenti ed eguale altezza, vanno restringendosi verso la cima per modo che ad uguali altezze corrispondono in esse delle ampiezze uguali, e perciò gli spazî da esse occupati sono uguali.

Due piramidi a basi equivalenti e di uguali altezze, hanno dunque anche ugual volume.

Fig. 271.



§. 318. Sia $ABCDEF$ (fig. 271) un prisma triangolare. Tagliandolo col piano AEC, esso riesce scomposto nella piramide triangolare $EABC$ e nella quadrangolare $EACFD$. Quest' ultima poi può essere scomposta ulteriormente, mediante il piano CED, in due piramidi triangolari $EACD$ ed $ECDF$ sì, che il prisma triangolare proposto ci si presenta costituito da 3 piramidi triangolari. È facile dimostrare che queste piramidi sono di ugual volume. Infatti le piramidi $EACD$ ed $ECDF$ hanno le basi ACD e CDF equivalenti e situate nel piano medesimo; inoltre avendo il vertice E comune hanno uguale anche l' altezza e sono perciò di ugual volume. Similmente puossi supporre il vertice delle piramidi $EACD$ ed $EABC$ collocato in C; allora le basi EAB ed EAD si ritrovano nel piano medesimo e sono equivalenti; le due piramidi sono dunque di egual volume avendo le basi equivalenti e la stessa altezza. Le tre piramidi proposte sono dunque tutte di egual volume e la piramide triangolare $EABC$ è la terza parte del prisma $ABCDEF$ che ha la base e l'altezza della piramide suddetta.

Siccome poi la solidità di un prisma è uguale al prodotto della base per l'altezza, così: quella della piramide triangolare è uguale al prodotto della base nella terza parte dell' altezza.

Potendosi trasformare ogni piramide poligonale in una triangolare di base equivalente e di altezza eguale alla sua, riesce provato in tutta la sua generalità il teorema che:

Il volume di una piramide si trova: moltiplicando la base per la terza parte dell' altezza.

Sia p. e. la base di una piramide di $3\square' \, 87\square''$ e l' altezza di $4' \, 9''$; quale ne dev' essere il volume?

$$3\square' \, 87'' = 519\square''; \; 4' \, 9'' = 57''$$

$$519 \times \frac{57}{3} = 9861 = 5' \text{ cub. } 1221'' \text{ cub.}$$

§. 319. Onde trovare il volume di un tronco di piramide, si determina prima quello delle due piramidi, la cui differenza costituisce il tronco proposto, indi si sottrae il volume della piramide minore da quello della maggiore.

P. e. In un tronco piramidale a basi quadrate, il lato della base inferiore importi $2' \, 5''$, quello della superiore $1' \, 9''$; l' altezza poi del tronco sia di $2'$; quanto grande ne sarà il volume?

Piramide maggiore.

$$\text{Base} = 29^2 = 841\square''$$

$$\text{Altezza} = \frac{24}{29-21} \times 29 = 87''$$

$$\text{Volume} = 841 \times \frac{87}{3} = 24389'' \text{ cub.}$$

Piramide minore.

Base $= 21^2 = 441\square''$

Altezza $= \frac{24}{29-21} \times 21 = 63''$

Volume $= 441 \times \frac{63}{3} = \quad 9261''$ cub.

Volume del tronco piramid. $= 15128''$ cub.

$= 8'$ cub. $1304''$ cub.

4. Volume di un poliedro regolare.

§. 320. Siccome l' esaedro non è che un dado, ed il tetraedro che una piramide, così non ci resta che di stabilire il modo di ottenere i volumi dell' ottaedro, dell' icosaedro e del dodecaedro. Ognuno di questi poliedri può scomporsi in altrettante piramidi uguali, le cui basi sono le facce del solido, ed il cui vertice comune è equidistante da tutte le facce. L' altezza di una di queste piramidi è uguale alla semidistanza di due facce opposte del poliedro regolare.

Sia p. e. il lato dell' icosaedro di $4''$ e di $6{\cdot}04''$ la distanza di due facce opposte; quale è la solidità dell' icosaedro?

Una faccia $= 6{\cdot}8\square''$

Altezza di una piramide $= 3{\cdot}02''$

Volume della piramide medesima $= 6{\cdot}847''$ cub.

Volume dell' icosaedro $= 137''$ cub.

5. Volume di un cilindro.

§. 321. Potendosi risguardare il cilindro come un prisma le cui basi siano dei poligoni regolari a numero infinito di lati, varrà per esso a norma del §. 316 il teorema:

La solidità del cilindro è uguale alla base moltiplicata per l'altezza. Se p. e. l'altezza di un cilindro è di $7''$ ed il raggio della base di $6''$, si avrà:

Base $= 6^2 \times 3{\cdot}1416 = 113{\cdot}0976\square''$

Volume $= 113{\cdot}0976 \times 7 = 791{\cdot}6832''$ cub.

§. 322. Onde determinare il volume di un tubo cilindrico, si cercano i volumi dei due cilindri la cui differenza stabilisce lo spessore; indi si sottrae il volume del cilindro minore da quello del maggiore.

P. e. Un tubo cilindrico è grosso 2″, ed ha 8″ in luce; quale è il suo volume importando la sua lunghezza 40″?

Cilindro maggiore.

Base $= 6^2 \times 3 \cdot 1416 = 113 \cdot 0976 \square''$

Volume $= 113 \cdot 0976 \times 40 = 4523 \cdot 904''$ cub.

Cilindro minore.

Base $= 4^2 \times 3 \cdot 1416 = 50 \cdot 2556 \square''$

Volume $= 50 \cdot 2556 \times 40 = 2010 \cdot 224''$ cub.

Volume del tubo $= 2513 \cdot 68''$ cub.

$= 1'$ cub. $786''$ cub.

§. 323. Forma simile alla cilindrica hanno le botti; soltanto è variabile in esse l'ampiezza perchè, più panciute verso il mezzo, vi hanno una sezione maggiore di quelle praticate ai due fondi. Onde ottenere la capacità approssimativa di una botte, si cerca il volume di un cilindro che abbia la lunghezza della botte, e la cui base sia uguale alla semisomma delle aree delle sezioni praticate nella botte al ventre ed al fondo.

P. e. Quale è la capacità od il contenuto di una botte lunga 4′, che abbia 2′ 4″ di diametro al fondo e 4′ 10″ al suo ventre?

Sezione al fondo $= 615 \cdot 7536 \square''$

Sezione al ventre $= 1017 \cdot 8784 \square''$

$1633 \cdot 632$

Base del cil. medio $= 816 \cdot 816 \square''$

Contenuto della botte $= 816 \cdot 816 \times 48 = 39207''$ cub.

$= 22'$cub. $1191''$cub.

Per ottenere il contenuto di una botte espresso in secchie e boccali di Vienna, basterà dividere la capacità ottenuta in piedi cubici per 1·792, e quella ottenuta in pollici cubici per 77·414; e ciò perchè una secchia di Vienna equivale a 1·792′ cubici ed un boccale a 77·414″ cubici.

6. Volume di un cono e di un tronco di cono.

§. 324. Il metodo stabilito per trovare la solidità di una piramide, vale anche per il cono, potendosi questo risguardare come una piramide che abbia per base un poligono a numero infinito di lati.

La solidità di un cono è dunque uguale alla base moltiplicata per la terza parte dell' altezza.

Se p. e. il raggio della base è di 7'' e l' altezza del cono di 6'', si ha:

Base $= 7^2 \times 3 \cdot 14 = 153 \cdot 86 \square''$

Solidità del cono $= 153 \cdot 86 \times \frac{6}{3} = 307 \cdot 72''$ cub.

§. 325. Si determina la solidità di un tronco di cono, calcolando quella dei due coni di cui il tronco proposto ne è la differenza; indi sottraendo la minore dalla maggiore.

Quale è p. e. il volume di un tronco di cono che ha 3' 6'' d' altezza e le cui basi hanno 5' e 4' di diametro?

Cono maggiore.

Base $= 2 \cdot 5^2 \times 3 \cdot 14 = 19 \cdot 625 \square'$

Altezze $= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 2} \times 2 \cdot 5 = 17 \cdot 5'$

Volume $= 19 \cdot 625 \times \frac{3}{17 \cdot 5} = 114 \cdot 479'$ cub.

Cono minore.

Base $= 2^2 \times 3 \cdot 14 = 12 \cdot 56 \square'$

Altezza $= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 2} \times 2 = 14'$

Volume $= 12 \cdot 56 \times \frac{14}{3} = 58 \cdot 613'$ cub.

Volume del tronco di cono $= 55 \cdot 866'$ cub.

7. Volume di una sfera.

§. 326. Condotto per il centro di una sfera un numero infinito di piani, essa ne risulta scomposta in un numero infinito di solidi di forma pressochè piramidale, i quali si vanno avvicinando tanto più a questa forma, quanto minori sono le porzioni di superficie sferica che servono loro di base. Per ciascuna di queste piramidi a base infinitamente piccola, si può supporre l' altezza uguale al raggio della sfera. Ora la solidità di tutte queste piramidi costituenti la sfera, si trova moltiplicando ogni singola base per il terzo dell' altezza a tutte comune, vale a dire per la terza parte del raggio, indi sommando tutti i valori così ottenuti; ovvero più brevemente sommando a dirittura tutte le basi, con che si ottiene l' intera superficie sferica, indi moltiplicando questa somma per la terza parte del raggio.

La solidità della sfera dunque è uguale al prodotto della sua superficie, per la terza parte del suo raggio.

P. e. Per una sfera che ha 10″ di diametro, la superficie è di $4 \times 5^2 \times 3{\cdot}14 = 314\square''$, quindi il volume $= 314 \times \frac{5}{3} = 523{\cdot}33''$ cub.

§. 327. Significando con r il raggio, con k il volume di una sfera, la sua superficie è $= 4r^2\pi$, e quindi $k = 4r^2\pi \times \frac{r}{3}$, ovvero:

$$k = \tfrac{4}{3}\pi \times r^3.$$

La solidità di una sfera si trova dunque moltiplicando il cubo del raggio per $\frac{4}{3}$ del numero π.

Similmente se R rappresenta il raggio e K la solidità di una seconda sfera, si avrà:

$$K = \tfrac{4}{3}\pi \times R^3,$$

e ne segue:

$$k : K = r^3 : R^3$$

vale a dire: i volumi di due sfere stanno fra loro come le terze potenze dei loro raggi.

§. 328. Se conoscendo la solidità di una sfera, si vuole trovare il raggio, non s' ha che a dividere la solidità conosciuta per $\frac{4}{3}$ del numero π, il quoziente rappresenta il cubo del raggio, quindi estraendo da questo quoziente la radice cubica si ottiene il raggio stesso.

Quale è p. e. il raggio di una sfera il cui volume è di 5′ cub.?

$3{\cdot}14 \times \frac{4}{3} = 4{\cdot}19;$ $\qquad 5 : 4{\cdot}19 = 1{\cdot}193$

$\sqrt[3]{1{\cdot}193} = 1{\cdot}04'$ di raggio.

8. Metodi diversi per calcolare i volumi.

§. 329. Onde determinare il volume di certi solidi, specialmente se sono affatto irregolari, fa d' uopo ricorrere ad altri espedienti, divenendo isufficiente il metodo puramente geometrico.

Il volume di un corpo qualunque si determina in un modo affatto semplice col mezzo di un recipiente prismatico o cilindrico a base conosciuta, e sulla cui parete laterale si applica una scala verticale divisa in pollici e linee. Il corpo di cui si vuole trovare il volume si pone nel recipiente, che si riempie d' acqua fino a tanto che il corpo vi riesca per intero sommerso, indi si prende nota dell' altezza a cui è giunto il livello dell' acqua; estratto poi il corpo si legge l' altezza a cui il detto livello è disceso. Il volume del corpo è equivalente a quello di un prisma o cilindro che ha la base del recipiente, e per altezza la differenza dei due livelli osservati. Se il corpo da misurarsi è assorbente, in vece dell' acqua, si farà uso di sabbia finissima per riempiere il recipiente.

Se p. e. il recipiente è di base quadrata avente nel suo interno il lato di $12''$ e se il livello dell' acqua dopo la sommersione è alto $8''\ 10'''$, mentre che estrattone il corpo esso discende fino a $4''\ 4'''$, la differenza dei due levelli è di $4''\ 6''' = 4{\cdot}5''$ quindi

il volume del corpo $= 12 \times 12 \times 4{\cdot}5 = 648''$ cub.

Mediante un tal recipiente si può anche determinare la capacità di un secondo recipiente vuoto e comunque irregolare. Si riempie quest' ultimo di acqua, e la si versa nel recipiente munito di scala, indi dalla base di questo e dall' altezza a cui è salito in esso il livello dell' acqua versata, si calcola la capacità del recipiente suddetto.

§. 330. Il volume di un corpo può anche determinarsi mediante il suo peso. Un piede cubico d' acqua distillata pesa 56 libbre e $\frac{1}{2}$ peso di Vienna; si ottiene dunque il volume di un corpo d' acqua in piedi cubici, dividendo il suo peso per $56\frac{1}{2}$.

P. e. Il peso dell' acqua contenuta in un dato recipiente è di 24 libbre, sarà dunque:

$$24 : 56\tfrac{1}{2} = 0{\cdot}4242' \text{ cub.} = 733'' \text{ cub.}$$

il volume dell' acqua contenuta nel recipiente, ossia la capacità di quest' ultimo.

In modo affatto analogo, si trova il volume di un altro corpo qualunque dal suo peso, noto che sia quello di un piede cubico di quel corpo. Ciò puossi facilmente dedurre dal suo peso specifico; vale a dire da quel numero che indica di quanto sia maggiore o minore il peso di un piede cubico di quella sostanza, a confronto di un piede cubico di acqua distillata; basta allora moltiplicare le 56 libbre e $\frac{1}{2}$, per il peso specifico della sostanza.

P. e. Il peso specifico del marmo è di 2·7, vale a dire, un piede cubico di marmo pesa 2·7 volte di più che un piede cubico d' acqua, dunque $56{\cdot}5 \times 2{\cdot}7 = 152{\cdot}55$ libbre. Se dunque un pezzo di marmo pesa libbre 248 esso ha:

$$248 : 152{\cdot}55 = 1{\cdot}6257' \text{ cub. di volume.}$$

Esponiamo quì i pesi specifici di alcuni corpi:

Acciajo	7·80	Metallo da campana	8.81
Alabastro	2·70	Oro	19·36
Ambra	1·08	Ottone	8·40
Argento	10·51	Pietra arenaria	2·50
Avorio	1·83	Piombo	11·39
Calce bruciata	3·05	Plattino battuto	21·34
Cristallo	2·89	Rame battuto	9·00
Ferro fuso	7·60	Rame fuso	8·78
Ferro lavorato	7·79	Stagno	7·45
Legno d' abete	0·48	Sughero	0·24
Legno di quercia	0·65	Vetro bianco	3·35
Legno di pino	0·76	Vetro di bottiglia	2·73
Marmo	2·70	Zinco	7·56
Mercurio	13·60		

I numeri quì esposti non sono se non che approssimativi, giacchè i pesi specifici possono essere alcun poco maggiori o minori nei metalli, secondo le anomalíe ed eterogeneità degli elementi che concorrono alla loro composizione; nei legni, secondo il grado di asciutezza e secondo il luogo in cui si trovano.

Un pezzo di acciajo pesa 35 libbre; quale ne è il volume?

1′ cub. di acciajo pesa $56 \cdot 5 \times 7 \cdot 8 = 440 \cdot 7$ libbre.

$35 : 440 \cdot 7 = 0 \cdot 0794'$ cub. $= 137 \cdot 2''$ cub.

Un dado di ferro fuso ha $1 \cdot 2'$ di lato; quanto deve pesare?

Volume $= 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 728'$ cub.

Peso $= 56 \cdot 5 \times 7 \cdot 6 \times 1 \cdot 728 = 742$ libbre.

9. Problemi sul calcolo del volume dei corpi.

§. 331. 1) Quale è il volume di un dado che ha 5′ 4″ di lato?

2) Si calcoli il lato di un dado il di cui volume sia di 5′ cub. e 59″ cub.

3) La superficie di un dado importa 30□′; quale ne è il volume?

4) Un parallelepipedo rettangolo è lungo 4′ 5″, largo 2′ 8″ ed alto 3′ 10″; quale è il suo volume?

5) La base di un prisma ha 31□′ 78□″ di superficie, e 1° cub. 25′ cub. 805″ cub. di volume; quale è la sua altezza?

6) Si determini la base di un prisma alto 4′ 6″ che abbia per volume 124′ cub. 260″ cub.?

7) La base di un prisma alto 5′ 2″ è un triangolo equilatero avente 3′ 4″ di lato; quale è il suo volume?

8) Una piramide ha per base un quadrato di 4″ di lato ed uno spigolo laterale di 1′ 3″; quale è il suo volume?

9) In una piramide la base è un rettangolo lungo 3′ 5″ e largo 1′ 10″; il suo volume è poi di 5′ cub.; si determini l' altezza.

10) La base di una piramide alta 2′ 9″ è un esagono regolare avente 1′ 2″ di lato; quale è il suo volume?

11) Un tronco di piramide ha l' altezza di 5′ 10″, le sue basi poi sono triangoli equilateri; quale sarà il suo volume

supposto che il lato della base inferiore sia di 2′ 6″, e quello della superiore di 1′ 2″?

12) Si determini il volume di un ottaedro il di cui spigolo è di 1′ 8″, distando due delle sue facce l' una dall' altra di 1′ 4·19″.

13) Il diametro di un cilindro è di 4′ e l'altezza di 5′; quanti piedi cubici contiene il cilindro suddetto?

14) La base di un cilindro ha 3′ 8″ in circonferenza, la sua altezza importa 7′ 6″; si calcoli il volume del cilindro?

15) Un cilindro alto 5′ 3″ contiene 20′ cubici; quale è il diametro della base?

16) Il volume di un cilindro è di 37·268′ cub.; quale è la sua altezza se il diametro della base è di 3′ 7″?

17) Un tubo cilindrico è lungo 35′ e largo in luce 1′ 4″; quale è il suo volume, supposto che esso abbia la grossezza di 2″?

18) Quanti pollici cubici contiene un cono alto 2′ 9″, se il diametro della base è di 8″?

19) In un cono retto la periferia della base importa 25·37″ ed il lato è di 18·45′; quale ne è il volume?

20) Quale altezza avrà un cono il di cui volume sia di 35′ cub. 56″ cub. e la di cui base abbia 2′ 8″ di diametro?

21) Il volume di un cono sia di 84·78″ cub., e la sua altezza di 9″; si determini il diametro della base?

22) In un tronco di cono retto alto 10′, sia il raggio del circolo maggiore di 6″, e quello del minore di 2″; quale ne è il volume?

23) Un tronco di cono retto sia alto 2° 5′ 8″; la base maggiore abbia l' area di 2□′ 26·16□″ e la minore l' area di 1□′ 56·96□″; se ne determini il volume.

24) Si desidera conoscere il volume di una sfera avente 1′ 8″ di diametro.

25) Quale dev' essere il volume di una sfera la cui superficie importi 25□″?

26) Si determini il raggio della sfera che ha il volume di 5′ cub. e 712″ cub.

27) Il volume di una sfera sia di 15′ cub.; se ne determini la superficie.

28) Quale è il raggio della sfera il di cui volume è due volte maggiore di quello di un altra, che ha 10□′ e 75□″ di superficie?

29) Il diametro di una sfera è di 1′; tale è anche il diametro di un cilindro equilatero; in quale rapporto stanno fra di loro i volumi di questi due solidi?

30) Una sfera ha 1′ di diametro; uguale lunghezza hanno il raggio della base e l' altezza di un cono; in qual rapporto stanno fra di loro i volumi di questi due corpi?

§. 332. 31) Quanti piedi cubici contiene un muro lungo 34′, alto 10′ e grosso 2′?

32) Una coppa formata da un emisfero vuoto ha 5″ di diametro; quale ne è la capacità?

33) Una fossa da calce è lunga 9′ e $\frac{1}{2}$, larga 4′ e $\frac{2}{3}$ e profonda 5′ e $\frac{3}{4}$, quanti piedi cubici di calce vi si conterranno riempiendo la fossa fino all' orlo?

34) Un recipiente cilindrico deve ottenere la capacità di 5′ cubici; quale altezza gli si assegnerà, prendendo il diametro in luce di 2′?

35) Quale è il volume della nostra terra, se questa si considera come sfera perfetta del diametro di 1719 miglia geografiche?

36) Il diametro del sole è 111 volte maggiore di quello della nostra terra; in quale rapporto stanno fra di loro i volumi di questi due corpi?

37) Un tronco di abete, considerato come cono, ha inferiormente 5′ in circonferenza, ed è alto 5° 4′; quanti piedi cubici sono in esso contenuti?

38) Volendo scavare una fossa che ottenga la capacità di 175′ cubici, avente 10′ in lunghezza e 4′ e 6″ di profondità; quale larghezza si dovrà assegnare all' escavo?

39) Una botte ha 2′ 3″ di diametro al fondo e 3′ al suo ventre; quante secchie conterrà, avendo la lunghezza di 4′ 7″?

40) Un dado di ottone ha lo spigolo di 3'' e pesa libbre 7 e $\frac{2}{5}$; quale è il peso di 1'' cub. di ottone?

41) Il diametro interno di un tubo di ferro è di 8'', la grossezza di $\frac{3}{4}$'' e la lunghezza di 2^0 4' 8''; quanti pollici cubici di ferro sono contenuti nel tubo suddetto?

42) Quanti piedi cubici contiene un tronco d' albero rotondo lungo 22', se la sezione maggiore ha 3' e la minore 2' di diametro?

Se si considera il ceppo suddetto come tronco di cono si ottengono 437' cub. di volume; in pratica però, contentandosi con un valore approssimativo, si considera il ceppo come cilindro la cui altezza è uguale alla lunghezza e la base equivalente alla semisomma delle due sezioni estreme praticate nel tronco; in questa seconda maniera si ottengono pel volume del ceppo proposto 449' cubici.

43) A quanti piedi cubici ascenderà lo sterro, se si vuole avere una fossa lunga 188', profonda 5' 2'' e larga superiormente 7' inferiormente 5'?

44) L' altezza di un cono retto è di 5' 8'' ed il suo lato di 6' 4''; se ne determini il volume.

45) Un trave di quercia è lungo 13' e $\frac{1}{2}$, largo 2 e $\frac{1}{2}$ e grosso altrettanto; a quanto ascenderà il suo valore, pagando il piede cubico a fiorini 1 e $\frac{1}{5}$?

46) Un secchione ha la forma di cono troncato; la sua circonferenza superiore è di 5', l'inferiore di 6' e l' altezza è di 5'; si determini la sua capacità.

47) Un pezzo di piombo pesa 85 libbre, quale è il suo volume?

48) L' altezza di una torre rotonda è di 20', la circonferenza esterna di 38', lo spessore del muro poi di 2' 10''; quanti piedi cubici di muratura contiene la torre suddetta?

49) Una catasta di legno è larga 6' ed alta altrettanto; la lunghezza poi dei pezzi che la compongono è di 24''; di quanti piedi cubici è maggiore la catasta, se i pezzi sono lunghi 32''?

50) Quanti boccali di Vienna contiene un recipiente cilindrico che abbia 1′ di diametro e 10″ di altezza? (§. 323.)

51) Un recipiente della forma di dado debba contenere 8 boccali; quale lunghezza dovrà avere il suo lato?

52) Il truogolo di un pozzo è lungo 7′ e $\frac{1}{2}$, largo 1′, e profondo $\frac{3}{4}$′; quanti boccali d' acqua può esso capire?

53) Quante secchie contiene una botte lunga 5′ 8″, la quale abbia la circonferenza di 9′ 2″ al fondo, e quella di 10′ 4″ al cocchiume?

54) Un ceppo rotondo lungo 8′ e grosso 2′ costa fior. 58 e $\frac{1}{2}$, a quanto fu pagato il piede cubico?

55) Un rullo di ottone deve pesare 42 libbre ed avere la lunghezza di 10″; qual diametro conviene dargli?

56) Una tinozza di birra ha superiormente il diametro di 5′ 2″ in luce, inferiormente quello di 7′ 4″, ed è alta 5′; quante secchie di liquido può contenere?

57) Una palla d' avorio ha 3″ di diametro; quale è il suo peso?

58) Si determini il lato del dado che ha il suo volume uguale a quello di una sfera del diametro di 4′ 9″.

59) Quale altezza si darà ad un piccolo cono di alabastro, onde esso pesi 10 once ed abbia la base di 1″ in diametro.

60) La pressione atmosferica sopra di una superficie qualunque equivale a peso di una colonna di mercurio la quale ha per base la superficie proposta e l' altezza di 28″. Quale è dunque la pressione esercitata dall' atmosfera sopra un piede quadrato di superficie?

§. 333. 61) A quanto ascenderà la spesa per l' erezione di un obelisco piramidale di granito alto 15′, la cui base quadrata abbia 4′ di lato, supponendo che pel piede quadrato si paghino fior. 4 e sol. 85?

62) Quante libbre pesa una piastra di ferro fuso lunga 6′ 2″, larga 1′ 8″ e grossa 7″?

63) Un cassone è lungo internamente 5′, largo 3′ ed alto 4′, quante metadelle di frumento vi si possono conservare, se una di esse occupa 1·9471′ cubici?

64) Abbiasi da fondere un tubo di rame della lunghezza di 10·5′, avente il diametro esterno di 0·8′ e quello interno di 0·7′; quante libbre di rame occorrono a tale scopo?
65) Quanto pesa una palla di cannone del diametro di 5″, se ogni pollice cubico pesa once 8 e $\frac{3}{4}$?
66) Volendosi costruire un recipiente cilindrico alto 8″ che contenga una metadella, qual diametro conviene dargli?
67) Qual raggio si darà ad una sfera onde essa ottenga un volume uguale a quello
   a) di un dado che abbia 3′ 1″ di lato,
   b) di un cilindro alto 5′ e del diametro di 2·4′,
   c) di un cono retto che abbia il diametro di 4′ 7″ alla base e l' altezza di 5′ 5″?
68) Quanto peserà un pezzo di rame battuto che abbia la forma di un parallelepipedo rettangolo lungo 13′, largo 5″ e $\frac{1}{4}$ e grosso 1″ e $\frac{1}{4}$?
69) Un trave lungo 16′, largo 9″ ed alto 8″ è scavato internamente lungi tutta la sua lunghezza a modo di cilindro; quale è il suo volume se l' incavo cilindrico ha il diametro di 5″?
70) Quante cataste di legna lunga 36″ si possono ricavare da un abete, che abbia all' estremità inferiore 2′ 8″ di diametro e 9° 5′ di altezza, ammettendo che il volume del legno aumenti di $\frac{1}{4}$ collo stivarlo dopo la spaccatura?
71) Dovendo scavare una cantina lunga 7° 2′, larga 4° 3′ e profonda 2° 1′; a quanti piedi cubici ascenderà lo sterro, e quante carra di terra si dovranno esportare, calcolando per ciascun carro 24′ cubici?
72) Quale è il volume di una palla di ferro vuota, se il suo diametro interno è di 1′ 6″ e lo spessore di 1″ ed $\frac{1}{4}$, e quale è il suo peso?
73) La base di una piramide regolare alta 2′ 9″ è un esagono che ha 10″ di lato; quale dev' essere il lato del dado di ugual volume?
74) Quante palle del diametro di $\frac{1}{2}$″ si possono fondere da 5 libbre di piombo?

75) Si hanno due palle del diametro di 3′ e di 1′ 8″; qual diametro si darà ad una terza, onde il suo volume sia uguale a quello delle altre due prese insieme?

76) Un cassone lungo 3′ e largo 2′ 8″ era in parte riempito d' acqua. Allorchè vi si sommerse una pietra il livello dell' acqua si alzò di 10″; quale era il volume della pietra?

77) Un corpo affatto irregolare fu per intero sommerso in un cassone lungo 3′ 6″ e largo 3′ che era in parte riempito d' acqua; al momento della sommersione l' acqua si portò al livello di 1′ 2″; estrattone poi il corpo il livello dell' acqua discese fino a 9″; si desidera sapere il volume occupato dal corpo sommerso.

78) Quale lunghezza si darà ad un cilindro di ottone, se esso deve pesare esattamente una libbra ed avere 2″ di diametro?

79) Un tronco d' albero lungo 4^0 4′ ha 8′ 2″ di circonferenza in una delle sue estremità, e 5′ 10″ nell' altra; quanto costerà il tronco, calcolando il piede cubico a fior. 1 e $\frac{3}{10}$?

80) Un muro deve ricevere la lunghezza di 15^0 4′, la grossezza di 1′ e $\frac{1}{2}$ e l' altezza di 8′; quanti mattoni lunghi 1′, larghi 6″ e grossi 1′ e $\frac{3}{4}$ vi si impiegeranne, calcolando il cemento a $\frac{1}{2}$″ di spessore?

81) Una palla vuota di latta, che ha internamente 10″ di diametro, pesa 12 libbre, quale grossezza ha la rispettiva lamiera di latta?

82) In un serbatojo lungo 1′ e largo 8″ si vuota 15 volte l' acqua di un recipiente della capacità di 25′ cubici; a quale altezza s' innalzerà l' acqua nel detto serbatojo?

83) Un cilindro a vapore e largo 2′ 10″, lungo 5′ ed ha alle estremità due emisferi perfetti; quanti piedi cubici di vapore può esso contenere?

84) Si hanno due pezzi di piombo de' quali l' uno pesa 5 e l' altro 3 libbre, quale diametro otterranno le due palle che si possono fondere con questi due pezzi separata-

mente, quale diametro otterrebbe poi la palla ricavabile dalla fusione complessiva di tutti e due i pezzi di piombo?

85) Da un cilindro di legno di quercia si debba tagliare, mediante una sezione parallela alle basi, porzione tale, che il peso del cilindro riesca diminuito di 100 libbre; a quale distanza da una delle basi deve eseguirsi il taglio, importando il diametro delle basi 2′ 2″?

86) Una misura da biada del diametro di 1′ 8″ e della profondità di 8″ dev' essere riempita di frumento in modo che sopravanzi alla base superiore della misura un cilindro alto 4″; quante staja di frumento conterrà la misura proposta talmente riempiuta?

87) Un tubo di ferro fuso che ha 3′ 10″ di circonferenza all' esterno e 10′ di lunghezza, pesa 1842 libbre, quale è la grossezza del metallo?

88) Un tetto a padiglione ha al comignolo 8^0 5′ di lunghezza, alla grondaja poi 14^0 5′; la sua altezza è di 3^0 e la larghezza del fabricato di 6^0; quanto grande è lo spazio sottoposto al tetto?

89) Un bicchiere cilindrico alto internamente 4″ e del diametro di 5″ e $\frac{1}{2}$ è riempito d' acqua. Se ora vi si immerge una palla del diametro di 3″, una parte dell' acqua trabocca; si domanda a quale altezza si ritroverà situato il livello dell' acqua nel bicchiere, estratta che ne sia di bel nuovo la palla?

90) Una pompa d' acqua ha due cilindri di cuojo, o maniche del diametro interno di 7″; in ognuno di essi la colonna d' acqua si alza in ciascun minuto secondo di 240″; quante secchie verserà la pompa durante mezz' ora?