POMURSKA OBZORJA
Vol. 11, No. 21, pp. 1–8, november 2024

Kako določiti dimenzijo 3D kompleksnim strukturam oblike reliefa?

Sprejeto
24. 9. 2023

Izdano
22. 11. 2024

Matej Babič

Matej Babič, Univerza Novo mesto, Fakulteta za informacijske študije, Novo mesto, Slovenija, e-pošta: babicster@gmail.com

Dopisni avtor

E-pošta: babicster@gmail.com

Povzetek V naravi imamo veliko geometrijskih objektov, ki so nepravilni in jih ni mogoče opisati s klasično evklidsko geometrijo. Zato potrebujemo novo metodo za opis nepravilnosti takih objektov. Taka nova metoda je fraktalna geometrija. V zadnjem času je koncept fraktalne geometrije, ki je bil prvotno razvit za analizo nepravilnih značilnosti v naravi, našel vse večjo uporabo na področju naravoslovja tudi za karakterizacijo oblik naravnega terena. Ključ fraktalne geometrije je fraktalna dimenzija, ki opisuje kompleksnost fraktalov in geometrijsko nepravilnost objektov. Merjenje fraktalnih dimenzij je postalo običajna praksa za opis strukturnih lastnosti kot je na primer hrapavost površine.

Ključne besede:
fraktalna geometrija,
relief,
3D kompleksne strukture,
Fraktalna dimenzija

https://doi.org/11.18690/po.11.21.1-8.2024

1 Uvod

Vprašajmo se kaj je dimenzija prostora? Dimenzija matematičnega prostora (ali predmeta) je določena kot najmanjše število koordinat, potrebnih za določitev katere koli točke znotraj nje. Primer, točka ima dimenzijo 0, premica ima dimenzijo 1, ravnina ima dimenzijo 2, prostor ima dimenzijo 3, hiper-prostor ima dimenzijo 4, itd.

Kako pa določiti dimenzijo oblikam, ki niso matematično pravilne?
Fraktalna geometrija temelji na ideji invariantnosti povečave, kar pomeni, da je opazovana slika enaka ne glede na to, pod kako močnim mikroskopom jo gledamo. Fraktal je izpeljanka iz latinske besede fractus, kar v prevodu pomeni zlomljen, razlomljen ali nepovezan. Natančno definicijo fraktala in fraktalne dimenzije je težko podati. Beseda fraktal pomeni, da objekti kažejo samo-podobnost pri različnih povečavah in imajo fraktalno dimenzijo. Vendar pa je zanimivo, da je večina fraktalnih objektov v naravi samo-afinih, kar pomeni, da niso ustvarjeni po determinističnih pravilih, kot recimo trikotnik Sierpinskega. Številni objekti v naravi niso samo-podobni, ampak so statistično samo-podobni. Statistična samo-podobnost pa pomeni, da so objekti samo-podobni le na določenem mestu pri različnih povečavah. Takim fraktalom pravimo samo-afini (samo-sorodni) fraktali. Self-afini fraktali so fraktali, ki niso samo-podobni, lahko pa tako lastnost dosežejo s ustreznim transformiranjem.

Pri transformaciji vseh dimenzij objekta ne povečamo ali zmanjšamo z istim razmerjem, temveč z različnimi. Zato potrebujemo dve dimenziji za njihov opis. Primer samo-afinih fraktalov so površine terena. Fraktalna dimenzija je vrednost, ki nam daje vpogled v kolikšni meri fraktalne zapolni prostor, v katerem se nahaja. Fraktalna dimenzija je lastnost fraktala, ki se ohranja prek vseh povečav in je zato dobro definirana, poleg tega nam pa tudi pove, kako kompleksen je fraktal. Fraktalne dimenzije se v splošnem ne da računati za objekte v naravi, saj je to mogoče le na čistih matematičnih konstruktih, ki pa jih v naravi ni. Fraktalna dimenzija je objektivno sredstvo za primerjavo fraktalov. Uvedena je bila kot karakteristična značilnost kompleksnih naravnih in abstraktnih sistemov. Fraktal je skupek točk katerih je fraktalna dimenzija večja od topološke dimenzije. Temeljita razlaga fraktala je torej samopodoba. Če bi pa naredili najbolj preprosto definicijo fraktala, bi se glasila nekako takole: Fraktal je nekaj kar se ponavlja v neskončnost. Nekaj, kar se nikoli ne konča in se spreminja z istim procesom znova in znova. Lahko bi rekli, da je fraktal grafična rešitev matematične enačbe ali algoritma v kompleksi ravnini.
Številni naravni pojavi imajo statistično podobnost, ki jo lahko modeliramo s pomočjo fraktalne površine. Prave pokrajine imajo statistične vzorce različno od kraja do kraja, na primer peščene plaže ne kažejo enakih fraktalnih lastnosti kot gorske verige. Vsak realen pristop k modeliranju pokrajin zahteva zmožnost prostorskega modeliranja fraktalnega vzorca. Tehnično gledano ima vsaka površina v tridimenzionalnem prostoru topološko dimenzijo 2, zato ima vsaka fraktalna površina v tridimenzionalnem prostoru Hausdorffovo dimenzijo med 2 in 3. Fraktali so oblike, ki so v osnovi enake na vseh lestvicah povečave; so samo-podobne. Statistična samopodoba fraktalnih oblik je značilna za naravni svet in jo je mogoče uporabiti za simuliranje naravnih procesov. V tem delu predstavljamo rešitev

odprtega problema »kako opisati kompleksnost različnih površin terena«. Naša hipoteza je: Z znanimi koordinatami površine terena lahko opišemo njegovo kompleksno strukturo. Hurstov eksponent H se razume kot korelacija med naključnimi koraki X_1 in X_2, ki ji sledi časovna ali prostorska razlika t. Ena izmed najpogosteje uporabljenih statističnih podatkov za opis šibkega stacionarnega stohastičnega procesa, ki ima dolg spomin, je ravno Hurstov eksponent H. Študije, ki vključujejo Hurstov eksponent H, so bile prvotno razvite v hidrologiji za praktično določitev optimalne velikosti nasipa za spremenljive reke Nil dežja in suše, ki so jih opazili v daljšem obdobju. Hurstov eksponent H se pojavlja na več področjih uporabne matematike, vključno s fraktali in teorijo kaosa in spektralno analizo. Hurstov eksponent H se uporablja na področjih od biofizike do računalniškega omrežja. Vendar sodobne tehnike ocenjevanja Hurstovega eksponenta H izhajajo iz fraktalne matematike.

Naključni postopek se statistično ovrednoti s Hurstovim eksponentom H ali z določitvijo porazdelitvene funkcije. Hurstovega eksponenta H kot kriterijev podobnosti ni mogoče natančno izračunati, ampak ga je mogoče le oceniti. Obstaja več različnih metod za oceno parametra H, ki skupaj bolj ali manj odstopajo. Pri tem nimamo meril, ki bi določali, katera metoda nam daje najboljši rezultat. Metode za ocenjevanje Hurstov parameter H lahko „grobo" razdelimo na dve kategoriji, in sicer oceno v časovni domeni in oceno v frekvenčnem ali valovnem prostoru. R/S (Rescaled range analysis) metoda je prilagojena metoda spremenjenega obsega ali prilagojena lestvica, ki je grafična metoda in temelji na lastnostih Hurstovega pojava.

2 Metodologija

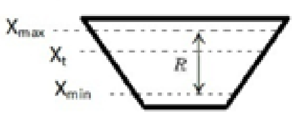
Rescaled range analysis je statistična metoda, ki jo je razvil Hurst leta 1965, da bi ugotovil ali je pritok vode (slika) (ne)naključni proces. Hurst je podatke o gibanju rečnega vodostaja razvrstil v več odsekov in izračunal kumulativni odklon Z_t od letnega povprečja za določeno število let.

Najprej izračunamo povprečni pretok m vode v obdobju $X=X_1, X_2, \ldots, X_n$:

1.) $$\mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X_i}$$

2.) $$Z_t \sum_{u=1}^{t} (X_i - m)$$

kjer je
X_i ... pretok vode v enem letu
n ... število let



Potem izračunamo razpon *R* med največjo in najmanjšo vrednostjo spremenljivke X_n

3.)$R(n)=\max(Z_1, Z_2,\ldots,Z_n)-\min(Z_1, Z_2,\ldots,Z_n)$

Nato izračunamo še standardni odklon:

2.) $$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{t}(X_i - m)^2}$$

Hurst je ugotovil, da je razmerje R/S zelo dobro opisano za številne naravne pojave z naslednjo zvezo:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{n}{2}\right)^H$$

kjer je H Hurstov eksponent.

Razmerje med fraktalno dimenzijo D in H Hurst parametrom je podana z enačbo D = 2-H za 2D objekte in D = 3-H za 3D objekte. To pomeni, da moramo najprej določiti eksponent H za 3D objekte.
Predstavljam metodo za ocenitev fraktalne dimenzije v 3D prostoru z estimacijo Hurstovega eksponentna H. V prispevku analiziram različne površine terena z dvema metodama in ju primerjam.
Za določitev dimenzije najprej potrebujemo koordinate 3D objekta. Ko imamo koordinate 3D objekta, imamo dve možnosti. Najprej ocenimo Hurstov eksponent H_{XZ} za 3D objekte po grafih v smeri xz.
Najprej transformiramo koordinate (xi, y1, zi) v koordinate (xi, zi) za ∀i. Te koordinate predstavljajo graf prostorske komponente y1. Nato transformiramo koordinate (xi, y2, zi) v koordinate (xi, zi) za ∀i. Te koordinate predstavljajo graf prostorske komponente y2. Ta postopek ponovimo za yj za ∀j. Tako dobimo j grafov prostorskih komponent. Vse te grafe prostorskih komponent zaporedoma zlepimo v eno sam graf prostorske komponente. Torej k grafu prostorske komponente y1 zlepimo graf prostorske komponente y2, k grafu prostorske komponente y2 zlepimo graf prostorske komponente y3 itd. Tako dobljen graf zlepljenih prostorskih komponent predstavlja graf prostorske komponente celotnega 3D objekta. Nato ocenimo Hurstov eksponent H za graf prostorske komponente celotnega 3D objekta z metodo Rescaled range analysis. Tako dobljen Hurstov eksponent H predstavlja H_{XZ} v smeri xz. Ko imamo Hurstov eksponent H_{XZ}, lahko izračunamo dimenzijo $D=3-H_{XZ}$.
Postopek ponovimo v smeri yz, torej ocenimo Hurstov eksponent H_{YZ} za 3D objekte po grafih v smeri yz.
Najprej transformiramo koordinate (x1, yi, zi) v koordinate (yi, zi) za ∀i. Te koordinate predstavljajo graf prostorske komponente x1. Nato transformiramo koordinate (x2, yi, zi) v koordinate (yi, zi) za ∀i. Te koordinate predstavljajo graf prostorske komponente x2. Ta postopek ponovimo za xj za ∀j. Tako dobimo j grafov prostorskih komponent. Vse te grafe prostorskih komponent zaporedoma zlepimo v eno sam graf prostorske komponente. Torej k grafu prostorske komponente x1 zlepimo graf prostorske komponente x2, k grafu prostorske komponente y2 zlepimo graf prostorske komponente x3 itd. Tako dobljen graf zlepljenih prostorskih komponent predstavlja graf prostorske komponente celotnega 3D

objekta. Nato ocenimo Hurstov eksponent H za graf prostorske komponente celotnega 3D objekta z metodo Rescaled range analysis. Tako dobljen Hurstov eksponent H predstavlja H_{YZ} v smeri yz. Ko imamo Hurstov eksponent H_{YZ}, lahko izračunamo dimenzijo $D=3-H_{YZ}$.

3 Primeri iz prakse

Primer te študije je zelo uporaben za analizo površin terena. Ocenjujemo Hurstov eksponent *H* za različne površine terena. S predstavljeno metodo fraktalne geometrije opisujemo nepravilno in zapleteno strukturo različnih površinskih terenov, in sicer; površina terena kraterja lune, površina terena puščave, površina kosti in površina vršaja. V spodnjih primerih lahko vidimo, kako pomembna je analiza površine terena, saj ima vsaka površina terena različno vrednost Hurstovega eksponenta H in posledično tudi različno fraktalno dimenzijo oz kompleksnost.

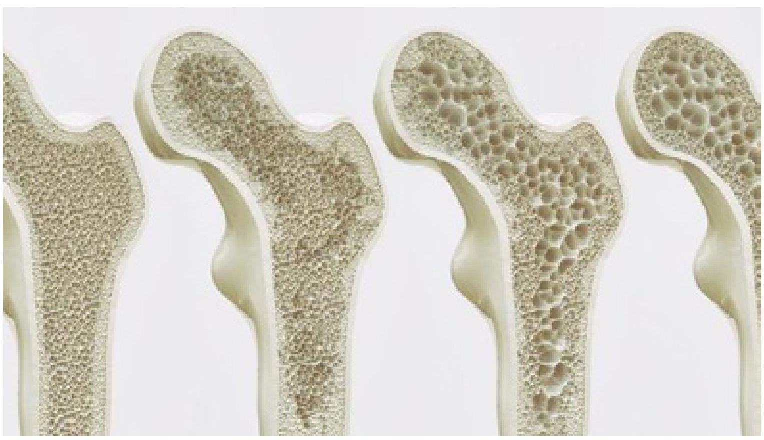
Veliko število kraterjev vpliva na teksturo površine. Na površinah so razširjeni majhni sveži lunarni kraterji z različnimi geometrijskimi oblikami, kot so ravno dno, krogle in elipsoidi. Lunina površina ima številne zanimive lastnosti, vključno z različnimi kraterji, grebeni in terenci, od močno zaprtih do skoraj brez kraterjev. Površina kraterja Lune je prikazana na sliki 4 in ima fraktalno dimenzijo FD_{XZ} 2.68 ter FD_{YZ} 2.65.

Slika 4: Površinski teren kraterjev lune
Vir: https://ts2.space/sl/novo-mozaik-slike-juznega-pola-lune-razkriva/

Puščavska površina je prekrita s tesno zapakiranimi in prepletajočimi kotnimi ali zaobljenimi kamnitimi drobci kamenčkov. Formalno opredeljeno, gre za določeno vrsto terena, ki je znan zaradi svoje suhosti zaradi pomanjkanja dežja. Tako eksogene sile v naravi vplivajo na oblikovanje geometrijskih površin. V zadnjih letih je površinsko fraktalno raziskovanje pokazalo posebne prednosti in uspešne aplikacije na številnih področjih za preučevanje strukture površine puščav. Terenska površina puščave je prikazana na sliki 5 in ima fraktalno dimenzijo FD_{XZ} 2.38 in FD_{YZ} 2.37.

Mikrostruktura trabekularne kosti je pomemben dejavnik, ki vpliva na trdnost kosti, kar je najpomembnejši kostni parameter, ki kaže na tveganje zloma kosti. Mikroarhitekturno slikanje kosti je nedestruktiven, neinvaziven in natančen postopek, s katerim je mogoče v eni meritvi oceniti tako navidezno gostoto kot tudi trabekularno mikrostrukturo nepoškodovanih kosti in vzorcev kosti. Postopek lahko pomaga izboljšati napovedi tveganja za zlom, razjasniti patofiziologijo skeletnih bolezni in določiti odziv na terapijo in posege. Površina kosti je zelo zapletena, zato za njeno opisovanje lahko uporabimo metodo za oceno fraktalne dimenzije v 3D prostoru. Terenska površina kosti je prikazana na sliki 6 in ima fraktalno dimenzijo FD_{XZ} 2.55 in FD_{YZ} 2.53.

Slika 5: Puščavska površina
Vir: https://www.hippopx.com/sl/desert-ground-cracked-drought-summer-145698



Slika 6: Površina kosti
Vir: https://viva.bhc.si/8991559/Novost-pri-ugotavljanju-kakovosti-in-trdnosti-kosti-Metoda-TBS

4 Zaključek

Večina terena je zelo zapletena in težko merljiva. Fraktali se uporabljajo v mnogih oblikah za ustvarjanje teksturiranih pokrajin. Mogoče je ustvariti vse vrste realističnih fraktalnih ponaredkov, podob naravnih prizorov, kot so lunarne pokrajine, gorske verige in obale, če naštejemo le nekaj. Metoda za ocenitev Hurstovega eksponenta H in njegova uporaba v 2D prostoru je znana, vendar v tem članku predstavljamo metodo za oceno Hurstovega eksponente H in njegovo uporabo za analizo 3D kompleksnih struktur, površin različnih terenov. Za nadaljevanje raziskovanja prostora je veliko dobrih razlogov. Eden izmed znanih objektov v vesolju je luna. Predstavljena metoda je uporabna pri raziskavi topografije terenska površine kraterja lune. Na Zemlji imamo veliko različnih površin, ki jih še nismo odkrili. Ena od takih so površine terena puščave. S pomočjo predstavljene metode lahko modeliramo, kako eksogene in endogene sile vplivajo na relief površin terena na zemlji. Druga uporaba predstavljene metode je v strojništvu za modeliranje topografskih lastnosti materialov po postopku toplotne obdelave. Na zadnjem predstavljamo uporabo metode v medicini. Eden od težav v medicini je, kako zapleten je zlom kosti. S predstavljenimi metodami lahko ocenimo zapletenost zloma kosti. Predstavljeno metodo za oceno fraktalne dimenzije v 3D prostoru lahko uporabimo še na mnogih drugih mestih.

Viri in literatura

Mandelbrot, B. (1967). »How Long Is the Coast of Britain?«. Science. 156 (3775): 636–638.

Feder, J. (1988). Fractals. Plenum Press, New York, London.

Qian, Bo; Rasheed, Khaled (2004). Hurst exponent and financial market predictability. IASTED conference on Financial Engineering and Applications (FEA 2004). pp. 203–209. CiteSeerX 10.1.1.137.207

Kamenshchikov, S. (2014). »Transport Catastrophe Analysis as an Alternative to a Monofractal Description: Theory and Application to Financial Crisis Time Series«. Journal of Chaos. 2014: 1–8. doi:10.1155/2014/346743

Hurst, H.E., Black, R.P. and Simaika, Y.M. (1965). Long-Term Storage: An experimental Study. Constable, London.

O avtorju*

Matej Babič je doktoriral iz računalništva in informatike na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo Univerze v Mariboru, Slovenija. Študiral je matematiko na fakulteti za naravoslovje in matematiko v Mariboru. Trenutno je docent na Fakulteti za informacijske študije Novo mesto. Njegov raziskovalni interes je fraktalna geometrija, teorija grafov, omrežja, inteligentni sistemi, hibridno strojno učenje, topografija materialov po kaljenju in javni potniški promet.