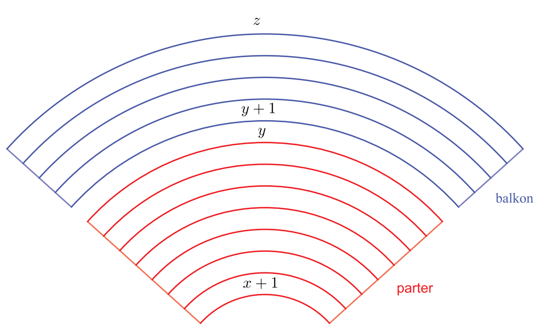
Sedežni red v nekem gledališču

Marko Razpet

→ Neko gledališče ima sedeže razporejene v krožnih lokih v parterju in na balkonu. Krožni loki predstavljajo vrste in so oštevilčene neprekinjeno od 1 naprej, ne glede na to, ali so v parterju ali na balkonu, v vsaki vrsti posebej pa je oštevilčen, tako kot je v navadi, še vsak sedež posebej.

Med počitnicami je direktor gledališča ukazal, naj se sedežni red preuredi tako, da bo v vsaki naslednji vrsti en sedež več, poleg tega pa mora biti število sedežev v parterju in na balkonu enako. Naša naloga je odgovoriti na vprašanje, kdaj in kako je to sploh mogoče.



SLIKA 1.
Parter in balkon v tlorisu

Vzemimo, da je v prvi vrsti parterja $x+1$ sedež, v drugi vrsti parterja $x+2$ sedeža in tako dalje, v zadnji vrsti parterja pa y sedežev. Število vseh sedežev v parterju označimo s P. Prav tako vzemimo, da je v prvi vrsti balkona $y+1$ sedež, v drugi vrsti balkona $y+2$ sedeža in tako dalje, v zadnji vrsti balkona pa z sedežev. Število vseh sedežev na balkonu označimo z B. Pri tem so x, y, z nenegativna cela števila in $x < y < z$. Potemtakem lahko zapišemo:

$$P = (x+1) + (x+2) + \ldots + y,$$
$$B = (y+1) + (y+2) + \ldots + z.$$

V vsoti za število P je $y - x$ zaporednih členov aritmetičnega zaporedja, v vsoti za B pa $z - y$. Vemo pa, kako se sešteje zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Njihova vsota je enaka produktu aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov. V našem primeru dobimo

$$P = \frac{1}{2}(x+y+1)(y-x),$$
$$B = \frac{1}{2}(y+z+1)(z-y).$$

Naša zahteva je $P = B = N$, torej

$$(x+y+1)(y-x) = (y+z+1)(z-y) = 2N.$$

Iz prvega dela te relacije izpeljemo enačbo

$$(y^2 - x^2) + (y - x) = (z^2 - y^2) + (z - y).$$

Pomnožimo jo na obeh straneh s 4 in nato dobljeni rezultat predelamo v

$$(2x+1)^2 + (2z+1)^2 = 2(2y+1)^2.$$

Nato vpeljemo naravna števila

- $X = 2x + 1, \quad Y = 2y + 1, \quad Z = 2z + 1,$

ki zadoščajo kvadratni diofantski enačbi

- $X^2 + Z^2 = 2Y^2.$

Pri tem so X, Y, Z liha števila in zanje velja $X < Y < Z$. Z njimi izrazimo

- $x = \frac{1}{2}(X-1), \quad y = \frac{1}{2}(Y-1), \quad z = \frac{1}{2}(Z-1).$

Ker lahko zapišemo

- $(Z-X)^2 + (Z+X)^2 = 2(X^2+Z^2) = 4Y^2 = (2Y)^2,$

sestavljajo soda naravna števila $Z - X, Z + X$ in $2Y$ pitagorejsko trojico. To pomeni, da obstajata primitivna pitagorejska trojica (a, b, c), kjer je $a < b$, in naravno število μ, tako da veljajo enačbe

- $Z - X = 2\mu a, \quad Z + X = 2\mu b, \quad 2Y = 2\mu c,$

iz katerih sledi

- $X = \mu(b-a), \quad Y = \mu c, \quad Z = \mu(a+b),$

in nazadnje

- $$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\mu(b-a)-1), \\ y &= \frac{1}{2}(\mu c - 1), \\ z &= \frac{1}{2}(\mu(b+a)-1). \end{aligned}$$

Število $2N$ nato brez večjih težav izrazimo takole:

- $$\begin{aligned} 2N = (x+y+1)(y-x) &= \frac{1}{4}(Y^2 - X^2) \\ &= \frac{\mu^2}{4}(c^2 - (b-a)^2) = \frac{1}{2}\mu^2 ab. \end{aligned}$$

Nazadnje je pred nami preprosta formula

- $N = \frac{1}{4}\mu^2 ab.$

Ponovimo (več o tem najdemo na primer v [1, 2]). V primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) so števila a, b in c naravna, brez skupnega faktorja, in zanje velja zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Trikotnik s stranicami a, b, c je pravokotni, a in b sta njegovi kateti, c pa hipotenuza. Brez škode za splošnost vzamemo, da je $a < b$. Eno od števil a in b je liho, eno sodo, število c pa je vedno liho. Primitivne pitagorejske trojice (a, b, c) generiramo z dvema naravnima številoma m in n s formulami

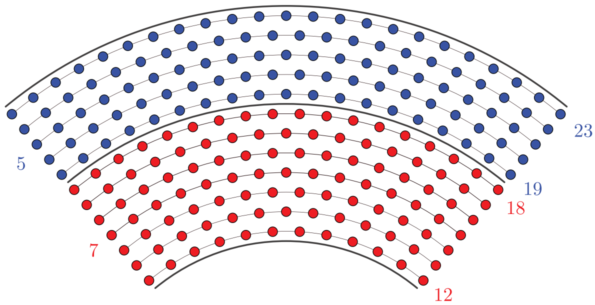
- $a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$

kjer sta si m in n tuji števili različnih parnosti ter $m > n$. Če se zgodi, da je $a > b$, števili a in b za potrebe naše naloge med seboj zamenjamo. Vsaka pitagorejska trojica je produkt neke primitivne z nekim naravnim številom.

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti x, y, z v naši nalogi naravna števila, zato mora biti faktor μ liho število. Za najmanjšo primitivno pitagorejsko trojico $(3, 4, 5)$ dobimo za $\mu = 1$ števila $x = 0, y = 2, z = 3$ in $N = 3$, ki nam dajo zelo majhen sedežni red s šestimi sedeži, tremi v parterju in tremi na balkonu.

μ	a	b	c	x	y	z	N
1	3	4	5	0	2	3	3
1	5	12	13	3	6	8	15
3	3	4	5	1	7	10	27
1	8	15	17	3	8	11	30
1	7	24	25	8	12	15	42
5	3	4	5	2	12	17	75
1	9	40	41	15	20	24	90
1	12	35	37	11	18	23	105
3	5	12	13	10	19	25	135
7	3	4	5	3	17	24	147
1	11	60	61	24	30	35	165
9	3	4	5	4	22	31	243
1	16	63	65	23	32	39	252
3	8	15	17	10	25	34	270

TABELA 1.
Nekaj rešitev naloge



SLIKA 2.
Parter in balkon s skupno $2N = 210$ sedeži

Večjega dobimo z isto trojico za $\mu = 3$, in sicer $x = 1, y = 7, z = 10$ in $N = 27$.

Za pitagorejsko trojico $(12, 35, 37)$ in $\mu = 1$ je $x = 11, y = 18, z = 23$ in $N = 105$. S tem smo našli sedežni red z 210-imi sedeži, 105-imi v parterju in 105-imi na balkonu (slika 2).

Takih zgledov je nešteto. V poštev pride vsaka primitivna pitagorejska trojica (a, b, c) in liho število μ. Nekaj primerov je zbranih v tabeli 1, ki je urejena glede na naraščajoče N in je lahko direktorju gledališča v pomoč pri načrtovanem sedežnem redu.

Naloga. Dokaži, da je število N v naši nalogi vedno deljivo s 3.

Literatura

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA, Ljubljana 1984.

[2] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

× × ×

Srečanje

Ivan Lisac

Uvod

Skupina prijateljev živi vzdolž daljše lokalne ceste. Za skupna srečanja želijo izbrati tak kraj x, da bo skupna poraba oz. kar skupna prevožena razdalja čim manjša. Jim lahko pri izbiri tega kraja kako pomagamo?

Srečanje vzdolž premice

Zravnajmo v mislih cesto v premico in opremimo kraje ob tej cesti s koordinatami

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n. \quad (1)$$

Za poljuben realni x lahko izračunamo vsoto

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|, \quad (2)$$

ki nam pove vsoto razdalj točke x od točk a_i.

Primer. Vzemimo

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 4, 7, 8, 13).$$

Potem je npr. $S(5) = 3 + 1 + 2 + 3 + 8 = 17$.

Poskusimo poenostaviti izraz za $S(x)$. Točke $a_1, \ldots, a_n$ nam razdelijo premico na (največ) $n + 1$ intervalov. Od teh sta prvi in zadnji neomejena. Vzemimo k med 1 in $n - 1$ in si oglejmo zožitev $S_k(x)$ funkcije $S(x)$ na interval $[a_k, a_{k+1}]$. Za x na tem intervalu velja $a_k \le x \le a_{k+1}$ in zato (upoštevamo še definicijo absolutne vrednosti)

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \sum_{i=1}^{k} (x - a_i) + \sum_{j=k+1}^{n} (a_j - x) \quad (3) \\ &= (k - (n - k))x - \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_j \\ &= (2k - n)x - S_k + (S_n - S_k) \\ &= (2k - n)x + (S_n - 2S_k), \end{aligned}$$