Po sledi neke naloge o trikotniku

Dragoljub M. Milošević

→ **Med pripravami na tekmovanje iz matematike sta Majda in Ciril reševala naslednjo nalogo.**

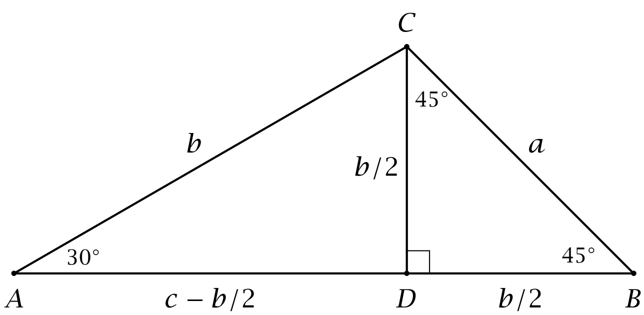
Naloga. V trikotniku ABC je dano: 1) $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$; 2) $\alpha = 20°$ in $\beta = 60°$. Dokaži, da za stranice tega trikotnika velja enakost $a^2 + bc = c^2$.

Dogovorila sta se, da bo Majda reševala prvi del naloge, Ciril pa drugi del.

Majdina rešitev. Tretji kot trikotnika ABC je $\gamma = 180° - (30° + 45°) = 105°$. Pravokotnica CD iz oglišča C na stranico AB razdeli trikotnik ABC na dva pravokotna trikotnika ADC in BCD (slika 1). Nasproti kota $30°$ v pravokotnem trikotniku je kateta, ki je enaka polovici hipotenuze, zato v trikotniku ADC velja $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$. Pravokotni trikotnik BCD je tudi enakokraki, saj je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DBC = 45°$, zato je $BD = CD = \frac{b}{2}$.

Ker je $AB = c$, $BD = \frac{b}{2}$ in $AD = AB - BD$, je $AD = c - \frac{b}{2}$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih ACD in BCD dobimo $AD^2 + DC^2 = AC^2$ in $BD^2 + DC^2 = BC^2$ ali

- $$\left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2$$



SLIKA 1.

oziroma

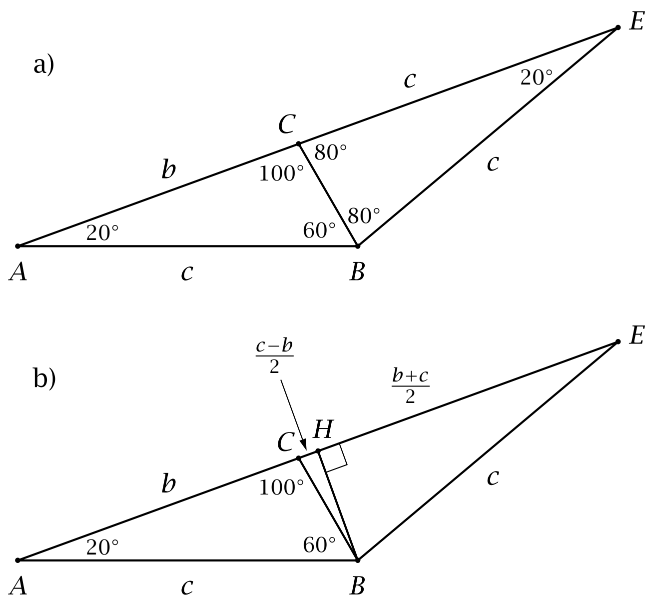
- $$c^2 - bc = \frac{b^2}{2} \quad \text{in} \quad \frac{b^2}{2} = a^2.$$

Od tod sledi

- $$c^2 - bc = a^2, \quad \text{oz.} \quad a^2 + bc = c^2.$$ ■

Cirilova rešitev. Tretji kot danega trikotnika meri $100°$. Nad stranico BC konstruiramo enakokraki trikotnik BEC, v katerem je $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCE = 80°$ (slika 2a). Potem je $\sphericalangle BEC = 20° = \sphericalangle BAC$, torej je trikotnik ABE enakokraki ($BE = AB = c$). Ker je $CE = BE$, je $CE = c$, to pa pomeni, da je $AE = AC + CE = b + c$.

Naj bo $BH \perp AE$, $H \in AE$ (slika 2b). Ker je $\triangle ABE$ enakokraki, je točka H središče njegove stranice AE.



SLIKA 2.

Ker je $CE = c$ in $HE = \frac{AE}{2} = \frac{b+c}{2}$, je $CH = c - \frac{b+c}{2} = \frac{c-b}{2}$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih BHC in BHE dobimo

$$BH^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \quad \text{in} \quad BH^2 = c^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

Od tod sledi

$$a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

iz česar po preurejanju dobimo $a^2 + bc = c^2$. ■

Vidimo, da sta Majda in Ciril reševala nalogi z različnimi podatki (Majda je imela $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$, Ciril pa $\alpha = 20°$ in $\beta = 60°$) ter da sta oba prišla do istega zaključka ($a^2 + bc = c^2$). To nam daje misliti, da je nalogo mogoče posplošiti, če najdemo odvisnost med koti trikotnika, ki ji bosta ustrezala oba primera, tako Majdin kot Cirilov. Opazimo, da je najmanjši kot (α) v trikotniku enak polovici razlike ostalih dveh kotov, t. j. 1) $30° = \frac{105°-45°}{2}$, 2) $20° = \frac{100°-60°}{2}$. Pogoju $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ oz. $\gamma - \beta = 2\alpha$ ustrezata oba primera.

Preidimo sedaj na drugi korak in preverimo pravilnost naslednje trditve:

Trditev. Če v trikotniku ABC velja $\gamma - \beta = 2\alpha$, potem je $a^2 + bc = c^2$.

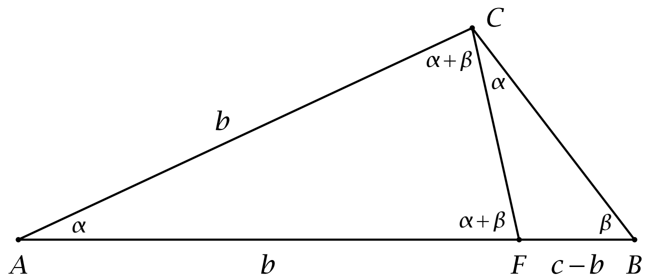
Dokaz trditve. Pogoj $\gamma - \beta = 2\alpha$ zapišimo v obliki $\gamma = 2\alpha + \beta$. Vsota kotov v trikotniku je potem $\alpha + \beta + (2\alpha + \beta) = 3\alpha + 2\beta = 180°$. Izraz $a^2 + bc = c^2$ zapišimo v ekvivalentni obliki $a^2 = c(c - b)$. Na sliki torej potrebujemo tako odsek $c - b$ kot tudi dva podobna trikotnika.

Na stranici AB trikotnika ABC izberimo točko F tako, da je $AF = b$. Potem je $BF = c - b$ (slika 3). Trikotnik AFC je enakokraki, kar pomeni, da je

$$\sphericalangle AFC = \sphericalangle ACF = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{3\alpha + 2\beta - \alpha}{2} = \alpha + \beta.$$

Potem je $\sphericalangle BCF = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$. Trikotnika ABC in CBF sta podobna, ker imata enake kote. Zaradi tega je $AB : BC = BC : BF$ ali $c : a = a : (c - b)$ oziroma $c(c - b) = a^2$.

S tem je dokazana navedena trditev, ki predstavlja posplošitev prvotne naloge. ■



SLIKA 3.

Priporočamo, da z uporabo dokazane trditve rešite naslednje tri naloge.

1. Dokaži, da v pravilnem petkotniku s stranico a in diagonalo d velja enakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.
2. Če je d najkrajša in D najdaljša diagonala pravilnega devetkotnika ter a njegova stranica, dokaži, da je $D - d = a$.
3. Če so d, e in D ($d < e < D$) diagonale pravilnega devetkotnika in a njegova stranica, dokaži, da je $\frac{e}{d} + \frac{d}{D} = 2$.

× × ×

Naloga

Marko Razpet

→ Poišči taki števili α in β, za kateri je polinom

$$P(x) = 6x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + 7x + 12$$

deljiv s trinomom

$$Q(x) = 3x^2 - x + \beta;$$

nato pa za dobljeni števili zapiši še kvocient $P(x)/Q(x)$.

× × ×