Kako so Babilonci računali kvadratne korene

Marjan Jerman

Babilonska matematika

Mezopotamija je ozemlje med rekama Evfrat in Tigris, ki se približno prekriva z današnjim južnim delom Iraka in Kuvajtom. Zaradi ugodne klime in rodovitne prsti so se na tem območju razvile pomembne civilizacije več kot 5000 let pred našim štetjem. Proučevanje zgodovine teh predelov je olajšano, saj so tam živeči narodi pisali najprej na kamene, kasneje pa na precej obstojne glinaste tablice, ki so se ohranile do danes. Tako vemo nenavadno veliko o sumerskem, akadskem, babilonskem in asirskem imperiju.

Matematično je zelo zanimiva približno osem centimetrov velika tablica, kasneje poimenovana YBC 7289, približno iz let 1800–1600 pred našim štetjem, ki jo hranijo v knjižnici ameriške univerze Yale. Njena fotografija je na zgornjem delu slike 1. Na spodnjem delu iste slike je tablica ilustrirana shematsko, babilonske števike pa so prevedene v arabske.

Za razumevanje tablice moramo vedeti, da so Babilonci uporabljali šestdesetiški sistem, ki se je ohranil do danes pri merjenju časa in kotov. Tako je

$$1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1{,}41421296,$$

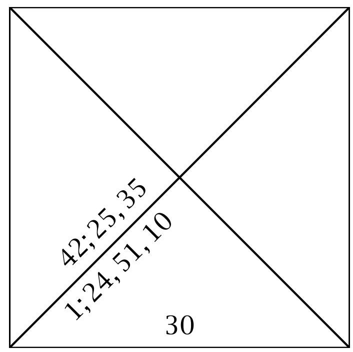
$$42;25,35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \doteq 42{,}42638889.$$

Malo bolj natančno si poglejte shematsko sliko in prvo od števil!

Verjetno ste opazili, da slika kaže, kako izračunati diagonalo kvadrata s stranico 30. Število $1;24,51,10$ je nenavadno blizu natančni vrednosti števila

$$\sqrt{2} \doteq 1,41421356,$$

število $42;25,35$ pa zelo dobro ustreza dolžini diagonale $30\sqrt{2}$. Še več, pri izbrani natančnosti v šestdesetiškem sistemu sta obe števili najboljša približka za števili $\sqrt{2}$ in $30\sqrt{2}$.



SLIKA 1.
Zgoraj: originalna tablica YBC 7289, spodaj: njena shema s prevodom.

Računanje kvadratnega korena

Predstavljajte si, da se nahajate pred 4000 leti v Babilonu, nimate kalkulatorja, ne poznate oznak za osnovne računske operacije, pomagate pa si lahko le s pomožnimi računi, zapisanimi v klinopisu na glineno tablico. Za množenje števil so Babilonci zelo zvito uporabljali tabele kvadratov in eno izmed formul

$$ab = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2),$$

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Prva formula potrebuje tri kvadrate in razpolavljanje, pri drugi formuli pa sta dovolj dva kvadrata, a je treba rezultat razpoloviti dvakrat. Za deljenje števil so uporabljali tabelice recipročnih vrednosti in produkt

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Kako so Babilonci prišli do tako natančnega približka števila $\sqrt{2}$? Najbolj enostavna in naravna bisekcija je zamudna in v povprečju zahteva vsaj tri korake za vsako novo decimalko.

Nekateri zgodovinarji matematike domnevajo, da so Babilonci uporabljali zelo učinkovito metodo za iskanje korenov, ki jo je veliko kasneje zapisal starogrški matematik Heron iz Aleksandrije (pribl. 10–70 našega štetja). Recimo, da želimo izračunati kvadratni koren pozitivnega realnega števila a. Za prvi približek x_1 vzamemo najmanjše celo število, ki je večje ali enako $\sqrt{a}$, vse naslednje približke pa dobimo z rekurzivno formulo

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{1}$$

V primeru $a = 2$ gre postopek takole:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(2 + \tfrac{2}{2}) = \tfrac{3}{2} = 1,5 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2\cdot 2}{3}) = \tfrac{17}{12} \doteq 1,41666667 \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{17}{12} + \tfrac{2\cdot 12}{17}) = \tfrac{577}{408} \doteq 1,41421569 \\ x_5 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{577}{408} + \tfrac{2\cdot 408}{577}) = \tfrac{665857}{470832} \doteq 1,41421356 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Če dobro pogledamo številke, opazimo, da se vrednosti zaporedja presenetljivo hitro bližajo točni vrednosti števila $\sqrt{2}$.

Babilonci so seveda računali v šestdesetiškem sistemu. Tako so zapisali $x_1 = 2$, $x_2 = 1;30$ in $x_3 = 1;25$. Pri četrtem približku pa se stvari zapletejo, ker je treba deliti s številom 17. V šestdesetiškem sistemu imajo končen zapis le ulomki, katerih imenovalec ima enake prafaktorje kot število 60, torej 2, 3 ali 5. Zato so njihovi zaokroženi približki drugačni, na primer

$$\frac{24}{17} \doteq \frac{304941}{60^3} = 1;24,42,21$$

in že v četrtem koraku dobimo približek

$$x_4 = \frac{1}{2}(1;25 + 1;24,42,21) = 1;24,51,10,30,$$

ki smo ga našli na glineni tablici.

Babilonci so bili zadovoljni, ker je postopek v praksi zelo hitro dal zelo natančne približke, danes pa so matematični standardi strožji, zato bi želeli pokazati, da postopek vedno deluje.

Napaka približka

Postopek bo deloval, če pokažemo, da se števila x_n poljubno približajo številu $\sqrt{a}$. Drugače, števila x_n^2 se morajo z rastočim indeksom n poljubno malo razlikovati od števila a. Zato uvedimo novo zaporedje

$$y_n = x_n^2 - a, \tag{2}$$

ki bo merilo odstopanje n-tega člena zaporedja približkov od pravilne vrednosti.

Rekurzivno formulo (1) napišimo malo drugače:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{y_n}{2x_n}. \end{aligned}$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1}^2 - a = x_n^2 - y_n + \frac{y_n^2}{4x_n^2} - a \\ &= \Big((x_n^2 - a) - y_n\Big) + \frac{y_n^2}{4x_n^2} = \frac{y_n^2}{4x_n^2}. \end{aligned}$$

Prvi oklepaj je po definiciji (2) enak 0. Zadnjo formulo pojasnimo z besedami: če je bila napaka v n-tem koraku enaka y_n, je v naslednjem le še $\frac{y_n^2}{4x_n^2}$. Ker so napake glede na izbiro prvega člena manjše od 1, jih kvadriranje zelo zmanjša (npr. napaka na tretji decimalki se premakne na šesto decimalko), dodatno pa delimo še s 4 in z x_n^2. Tako v primeru $a \geq 1$ v vsakem koraku vsaj podvojimo število točnih decimalk in zaporedje x_n izjemno hitro konvergira k točni vrednosti $\sqrt{a}$.

Analiza zaporedja

Zaporedje približkov lahko opazujemo tudi takole: Če upoštevamo znano neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino pozitivnih števil

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

ugotovimo, da je zaporedje navzdol omejeno s $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Ker je zato

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

vidimo, da zaporedje pada, to je $x_{n+1} \leq x_n$.

Za padajoče zaporedje s spodnjo mejo vemo, da je konvergentno. Iz ocene za napako lahko vidimo, da je limita zaporedja enaka $\sqrt{a}$. To je mogoče videti tudi neposredno. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja limita

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Če v definiciji (1) pošljemo n proti neskončno, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

zato mora število L izpolnjevati enakost

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right).$$

Po množenju enakosti z $2L$ dobimo enačbo $2L^2 = L^2 + a$, kar pomeni, da mora limita L zadoščati enačbi

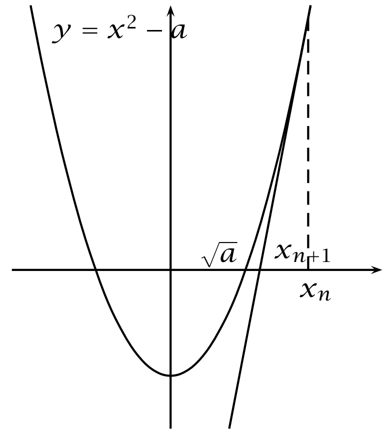
$$L^2 = a.$$

Ker vemo, da so členi zaporedja nenegativni, je ustrezna le pozitivna rešitev $L = \sqrt{a}$.

Tangentna metoda

Poglejmo si, kako lahko zaporedje približkov vidimo še malo drugače. Parabola

$$y = x^2 - a \tag{3}$$



SLIKA 2.
Heronova metoda je v tem primeru ekvivalentna iskanju pozitivne ničle funkcije $y = x^2 - a$ s tangentno metodo.

seka pozitivni del abscisne osi pri $x = \sqrt{a}$. Prvi člen zaporedja x_1 je prvo celo število na abscisni osi, ki stoji za parabolino pozitivno ničlo.

Iz točke $(x_n, x_n^2 - a)$ na paraboli (3) spustimo tangento na parabolo. Intuitivno in grafično je jasno, da tangenta seka abscisno os nekje med ničlo $\sqrt{a}$ in x_n, precej bližje $\sqrt{a}$ kot x_n. Tangenta ima za naklonski koeficient odvod $2x_n$, zato je njena enačba

$$y - (x_n^2 - a) = 2x_n(x - x_n).$$

Tangenta seka abscisno os pri $y = 0$, torej v točki x, ki zadošča enačbi

$$-x_n^2 + a = 2x_n(x - x_n).$$

Ko iz enačbe izrazimo x, dobimo

$$x = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

kar presenetljivo pomeni, da smo tako dobili naslednji člen zaporedja x_{n+1}.

Tako smo dobili še geometrično predstavo Heronove metode. Iskanju ničel funkcije s pomočjo spuščanja tangent pravimo tudi Newtonova metoda. V numerični matematiki je zelo priljubljena, ker pri razumnih pogojih za funkcijo zelo hitro daje zelo natančne približke ničle. Podobno kot v našem posebnem primeru so v primeru enostavnih ničel napake v vsakem naslednjem koraku velikostnega razreda kvadratov napak v prejšnjem koraku.

× × ×