PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 4
Strani 220–222

Vilko Domajnko:

KONVEKSNI TANGRAMSKI LIKI

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1094-Domajnko.pdf

KONVEKSNI TANGRAMSKI LIKI

Kombinatorični pristop k igri tangram je lahko za matematika še posebej zanimiv. Poglejmo.

Eno izmed najenostavnejših tovrstnih vprašanj se glasi:

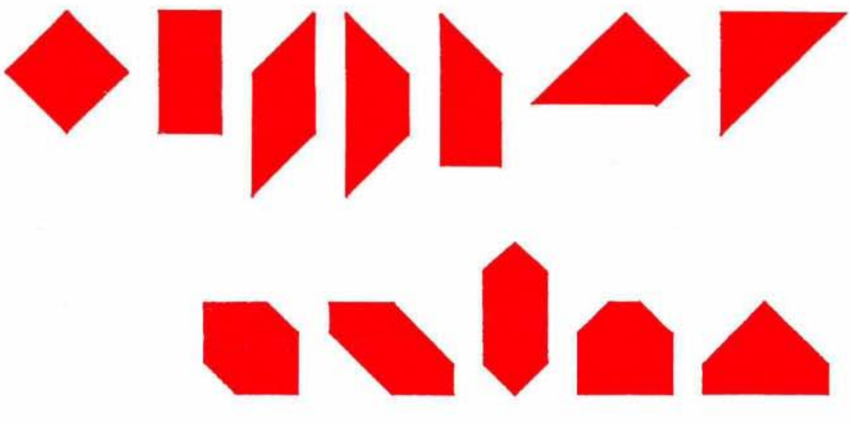
Koliko je vseh konveksnih tangramskih likov?

Konveksen tangramski lik (recimo mu kar *kotalí*) je večkotnik, ki ima vse notranje kote manjše od 180°. Med vsemi tangramskimi liki, kar smo jih doslej objavili v Preseku, smo srečali le dva konveksna. To sta bila kvadrat in paralelogram. (Poišči ju!)

Na zgornje vprašanje sta prva odgovorila kitajska matematika **Fu Tsiang Wang** in **Chuan-Chih Hsiung**. Leta 1942 sta objavila dokaz, da obstaja natanko trinajst kotalíjev. Dvanajst jih lahko vidite na sliki 1, trinajstega pa poskusite poiskati sami. Kdor bo pazljivo prebral članek, bo najbrž manjkajoči lik hitro našel. Seveda pa poskusite objavljenih dvanajst kotalíjev tudi sestaviti.

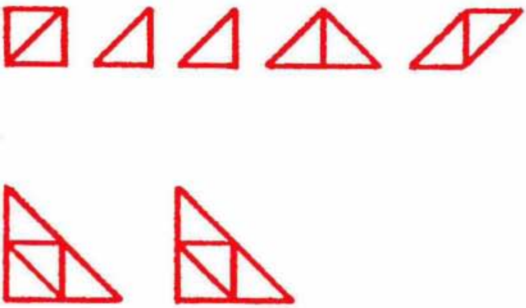
Oglejmo si vsaj košček poti, ki sta jo ubrala kitajska matematika pri iskanju vseh kotalijev.

Slika 2 prikazuje, kako lahko vseh sedem tangramskih ploščic razrežemo tako, da dobimo 16 med seboj skladnih osnovnih trikotnikov. Naj bo dolžina katete vsakega izmed teh trikotnikov 1. Dolžina njegove hipotenuze je potem



Slika 1

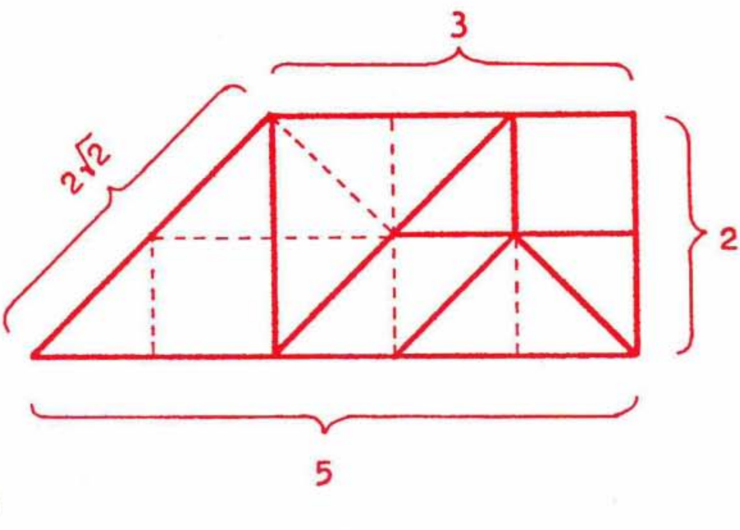
$\sqrt{2}$, torej iracionalno število. Če poskusimo sedaj teh 16 osnovnih trikotnikov sestaviti v kotalí, nam brž postane jasno, da hipotenuza kateregakoli izmed osnovnih trikotnikov v nobenem primeru ne more ležati ob kateti nekega drugega osnovnega trikotnika. V nasprotnem bi nastali lik namreč ne bil konveksen, saj bi imel notranji kot velikosti 225° (glej sliko 3).



Slika 2

Slika 3

Od tod sklepamo, da so tiste stranice kotalíja, ki imajo racionalno dolžino, sestavljene zgolj iz katet osnovnih trikotnikov, stranice kotalíja, ki imajo iracionalno dolžino, pa le iz hipotenuz osnovnih trikotnikov. Imenujmo prve stranice v kotalíju racionalne stranice, druge pa iracionalne stranice.



Slika 4

Če je kot med sosednjima stranicama kotalíja 90°, sta torej ali obe racionalni ali pa obe iracionalni. Podobno velja, da je ena racionalna, druga pa iracionalna, če je kot med njima 45° ali 135°. Trditev ilustrira kotalí na sliki 4.

Recimo sedaj, da ima neki izbrani kotalí n kotov, pri čemer je med njimi p ostrih, q pravih in r topih. Potem velja

$$p + q + r = n.$$

Za konveksne poligone z n stranicami vemo, da je vsota njihovih notranjih kotov enaka $(n-2) \cdot 180^\circ$. Torej velja za vsak kotalí enačba

$$p \cdot 45^\circ + q \cdot 90^\circ + r \cdot 135^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Če upoštevamo še prejšnjo enačbo, dobimo $2p + q = 8 - n$. Sedaj vemo o lastnostih kotalíjev že dovolj, da lahko sestavimo tabelo vseh možnih primerov za parametre p, q, r in n.

p	q	r	n
0	0	8	8
0	1	6	7
0	2	4	6
1	0	5	6
0	3	2	5
1	1	3	5
0	4	0	4
2	0	2	4
1	2	1	4
2	1	0	3

Poskusite poiskati vsakemu izmed dvanajstih objavljenih kotalíjev mesto v tej tabeli. Ugotovili boste, da nekatere izmed četveric p, q, r, n opisujejo več različnih kotalíjev, nekatere pa sploh nobenega.

Mislim, da vam bo ta tabela precej olajšala tudi iskanje neobjavljenega trinajstega kotaíja. V pomoč naj vam povem, da samo prva, druga in četrta vrstica v tabeli ne opisujejo nobenega kotalíja.

Vilko Domajnko