

# Kockanje in prometna gneča



SIMON ČOPAR

→ Prometna gneča je voznikom na žalost še predo-  
bro poznan pojav. Naravoslovno navdihnjeni voz-  
nik se med vožnjo v počasni koloni lahko vpraša,  
zakaj do gneče sploh pride in zakaj včasih kolona  
vozil vozi počasi, čeprav je cesta pred njo prosta.  
S kolikšno najvišjo hitrostjo lahko potujemo, če  
smo pri tem odvisni od voznih navad drugih vo-  
znikov pred nami? Pri tem ne moremo predposta-  
viti, da so vsi vozniki in vsa vozila enaki. Vsako  
jutro bomo naleteli na kolono z nekoliko drugačno  
hitrostjo, čeprav so dolžina kolone in vremenske  
razmere enake. Individualnih lastnosti vozil ne po-  
znamo, zato jih obravnavamo kot naključne. V ta-  
kih primerih raje govorimo o verjetnostnih poraz-  
delitvah: poznati želimo verjetnost za vsako vre-  
dnost opazovane količine, ki jih imenujemo tudi  
*naključne spremenljivke*.

Oglejmo si za začetek lažji primer zaporednega  
metanja poštene kocke, kjer je vseh šest izidov ena-  
ko verjetnih. Če po več metih šteje *največje* šte-  
vilo pik, kako se s številom metov spreminja naša  
verjetnost, da dosežemo šestico? Po enem metu so  
vsa števila pik enako verjetna, z večkratnimi meti pa  
vendar povečujemo verjetnosti višjih izidov. Takoj  
opazimo, da vrstni red metov ni pomemben, vržemo  
lahko tudi vse kocke naenkrat.

Poskusimo zdaj na podoben način opisati še pro-  
metno gnečo v poenostavljeni obliki: vožnjo v koloni  
brez prehitevanja. Različna vozila in tudi posamezni  
vozniki vozijo različno hitro. Prvo vozilo v koloni  
lahko vozi, kolikor hitro želi. Če je naslednje vozilo  
počasnejše ali enako hitro kot tisto pred njim, potem  
vozi »po svoje«, če je hitrejša, pa lahko vozi le s hi-

trostjo vozila pred njim. Da ugotovimo hitrost dru-  
gega vozila, vzamemo torej *manjšo* izmed dveh hi-  
trosti: njegove želene hitrosti in hitrosti kolone pred  
njim. Kakšna je verjetnost, da zadnje od  $N$  vozil na  
cesti lahko vozi s hitrostjo  $x$ ?

Primeri kock in vozil sta matematično zelo soro-  
dna – v obeh primerih imamo podano verjetnostno  
porazdelitev  $p_1(x)$  količine  $x$  (največje število pik,  
hitrost kolone) za en poskus, iščemo pa porazdeli-  
tev za  $N$  poskusov. Pri tem ne gledamo povprečja  
vseh poskusov, ampak največjo vrednost (oziroma  
v primeru prometa, najmanjšo). Privzemimo, da že  
poznamo porazdelitev za  $N$  poskusov – recimo ji  
 $p_N(x)$ , kocko pa vmes dobro »pretresemo«, da na-  
slednji met ni odvisen od prejšnjih. Verjetnost, da je  
dosedanji izid  $x_1$ , izid zadnjega meta pa  $x_2$ , je zaradi  
neodvisnosti obeh izidov kar produkt verjetnosti za  
predhodni in novi izid:

$$\blacksquare p(x_1, x_2) = p_N(x_1)p_1(x_2).$$

To je verjetnost le za eno kombinacijo  $x_1$  in  $x_2$ , pri  
upoštevanju novega poskusa pa je lahko rezultat  $x$   
dosežen na različne načine. Upoštevati moramo vse  
primere, v katerih se rezultat ni spremenil, saj je  
novi rezultat slabši od starega, ali kvečjemu enak:  
 $x = x_1 \geq x_2$ , ter primere, v katerem je novi re-  
zultat izboljšava starega:  $x = x_2 > x_1$ . Verjetno-  
sti za vse možne pare starega izida in novega po-  
skusa lahko izrišemo kot kvadratno tabelo, v kateri  
vsi pari vzdolž »kljuk« (unij dveh stranic kvadrata)  
prispevajo k verjetnosti za enega izmed možnih izi-  
dov. Glej sliko 1 za primer meta treh kock. Vse te  
prispevke moramo sešteti v skupno verjetnost,

$$\blacksquare p_{N+1}(x) = p_N(x) \sum_{k \leq x} p_1(k) + p_1(x) \sum_{k < x} p_N(k). \quad (1)$$

Obravnavajmo zdaj konkreten primer meta kock:  
kolikšne so verjetnosti, da pri metu šestih kock naj-  
večja doseže  $x$  pik? Naša osnovna porazdelitev je v  
tem primeru kar  $p_1(x) = \frac{1}{6}$  – enaka za vsa števila



→ pik  $x$ . Za dve kocki imajo vsi pari verjetnost  $\frac{1}{36}$ , dolžine »kljuk« pa so zaporedna liha števila 1, 3, 5, 7, 9, 11, torej  $p_2(x) = \frac{2x-1}{36}$ . Dodajmo naslednjo kocko s pomočjo enačbe 1:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= p_2(x) \sum_{k \leq x} p_1(k) + p_1(x) \sum_{k < x} p_2(k) \\ &= \frac{2x-1}{36} \sum_{k=1}^x \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{x-1} \frac{2k-1}{36}. \end{aligned}$$

V prvi vsoti  $k$  sploh ne nastopa – seštevamo le  $x$  enakih členov. Drugo vsoto razčlenimo na razliko dveh členov  $\frac{2}{6^3} \sum_{k=1}^{x-1} k - \frac{1}{6^3} \sum_{k=1}^{x-1} 1$ . Z uporabo formule za

vsoto zaporednih naravnih števil sledi:

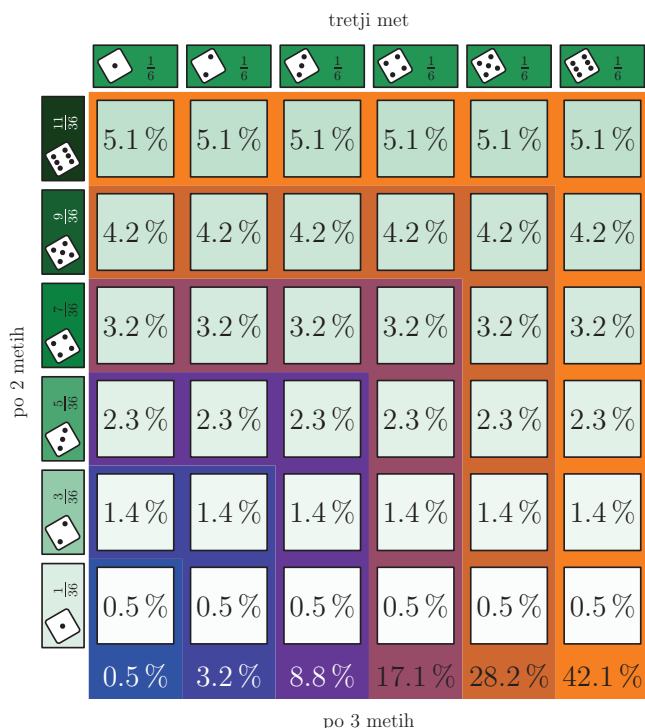
$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(2x-1)}{6^3} x + \frac{2}{6^3} \frac{x(x-1)}{2} - \frac{1}{6^3} (x-1) \\ &= \frac{3x^2 - 3x + 1}{6^3}. \end{aligned}$$

Vsota je ponazorjena tudi na sliki 1, kjer je bolj razviden potek seštevanja. Več kock vržemo, višja je verjetnost, da dobimo vsaj eno šestico, v tem primeru že  $p_3(6) \approx 42\%$ . Za šestico kot najvišje število pik bi sicer isto na lažji način lahko izračunali tudi kot nasprotje izida, da padejo tri kocke z 1-5 pikami:  $p_3(6) = 1 - (5/6)^3$ .

Verjetnostne porazdelitve za večja števila metov lahko dobimo rekurzivno na podoben način, vendar to hitro postane nepregledno. Namesto tega bomo splošnejši rezultat dobili s pomočjo drugačnega razmisleka. Na sliki 1 opazimo, da lahko vsako kljuko vidimo tudi kot odštevanje dveh kvadratov. Ker je vsak novi dogodek neodvisen od prejšnjih, so vnosi v tabeli kar produkti verjetnosti v stolpcih in vrsticah. To pomeni, da verjetnost, da se zgodi katerikoli dogodek v izbranem kvadratu te tabele, lahko enostavno izračunamo kot produkt dveh *kumulativnih* verjetnosti  $C(x) = \sum_{k=1}^x p(k)$ , ki jim rečemo tako, ker štejejo akumulirano vsoto verjetnosti vseh izidov do vključno vrednosti  $x$ . Verjetnost, da pademo v spodnji levi kvadrat s stranico  $x$ , je torej produkt verjetnosti  $C_{N-1}(x)$ , da predhodni rezultat  $N-1$  metov kocke pade v spodnjih  $x$  vrstic (vse prehodne kocke imajo med 1 in  $x$  pik), in verjetnosti  $C_1(x) = \sum_{k=1}^x p_1(k) = x/6$ , da novi izid pade v prvih  $x$  stolpcih (na zadnji kocki vržemo med 1 in  $x$  pik). Skupna verjetnost, da  $N$  metov kocke doseže rezultat  $x$  je potem razlika verjetnosti, da smo v kvadratu velikosti  $x$  in verjetnosti, da smo v kvadratu velikosti  $x-1$ :

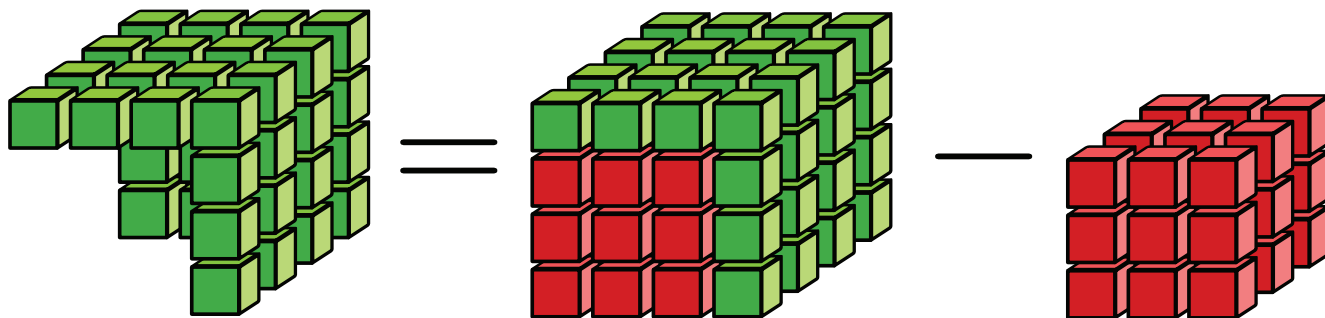
$$p_N(x) = C_{N-1}(x)C_1(x) - C_{N-1}(x-1)C_1(x-1).$$

Zgornja zveza je še vedno rekurzivna, saj zahteva izračun  $C_{N-1}(x)$ . Na podoben način bi za 3 dogodke namesto tabele lahko narisali *kocko* možnih izidov, »kljuke« pa bi postale razlike dveh različno velikih kock (glej sliko 2). Podobno si za  $N$  metov zamislimo kar  $N$ -dimenzionalno tabelo oziroma hiperkocko. V več kot treh dimenzijah si grafično tega ne moremo več predstavljati, še vedno pa velja, da računamo razliko dveh hiperkock, in prostornino kocke znamo izračunati v poljubnem številu dimenzij.



SLIKA 1.

Izračun porazdelitve za 3 mete kocke iz porazdelitve za 2 meta kocke. Seštevamo po poljih z isto barvo ozadja – po »kljukastih« oblikah. Zaradi zaokroževanja se verjetnosti ne seštevajo na vsa decimalna mesta natančno.



SLIKA 2.

Posplošitev »kljuka« na tri dimenzije pomaga pri izračunu verjetnosti za met treh ali več kock.

S tem razmislekom lahko verjetnost za izid  $x$  po  $N$  metih zapišemo kar kot razliko dveh hiperkock:

$$p_N(x) = C_1(x)^N - C_1(x-1)^N = \left(\frac{x}{6}\right)^N - \left(\frac{x-1}{6}\right)^N. \quad (2)$$

Če iščemo najmanjše število pik, lahko uporabimo isti rezultat, če zamenjamo  $6 \leftrightarrow 1$ ,  $5 \leftrightarrow 2$  itd.

S tem smo pa dobili kar splošno formulo za izid igre z  $N$  kockami v zaključni obliki, brez dodatnih vsot. Za bralce, večje računanja s pogojnimi verjetnostmi, navedemo še alternativni način izpeljave istega rezultata. Dogodek, ko je največje število pik na kockah enako  $x$ , lahko razumemo kot presek dogodka  $K$ , da imajo vse kocke med 1 in  $x$  pik, in dogodka  $L$ , da ima vsaj ena kocka  $x$  pik. Po obrazcu za pogojno verjetnost  $P(K \cap L) = P(L|K)P(K)$ , moramo izračunati le verjetnost dogodka  $K$ , ki je enaka kar  $P(K) = (x/6)^N$ , ter pogojno verjetnost  $P(L|K)$ , da vidimo vsaj eno kocko z  $x$  pikami, pri čemer pa višje od  $x$  niso več na voljo. To pa je enostavno, saj je ta dogodek ravno obraten dogodku, da imajo vse kocke med 1 in  $x - 1$  pik. Ker rezultat že poznamo, izračun prepuščamo bralcu.

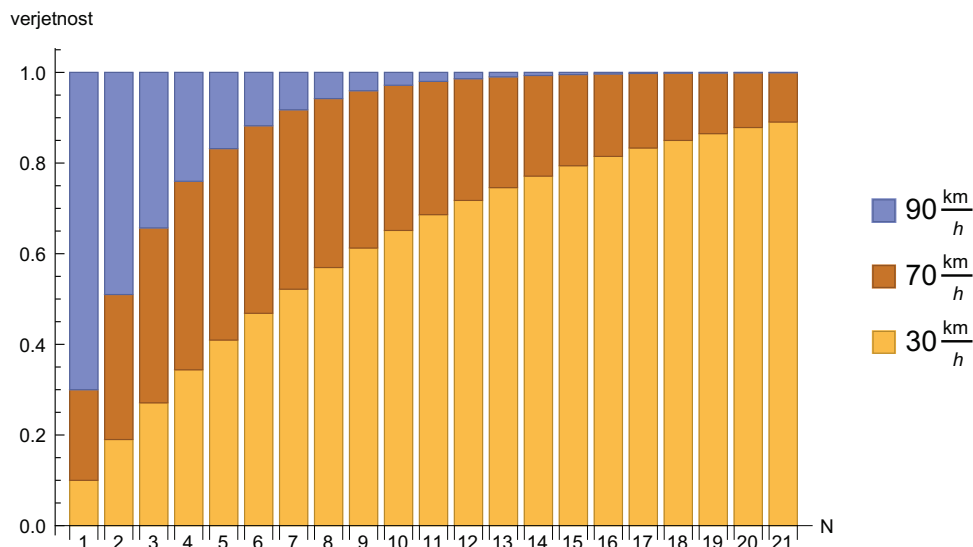
Opremljeni z idejo, kako reševati tovrstne probleme, se zdaj vrnimo še na problematiko vožnje v koloni. Vzemimo primer, ko je na cestah  $p_1(A) = 70\%$  osebnih avtomobilov, ki vozijo 90 km/h,  $p_1(B) = 20\%$  tovornjakov, ki vozijo 70 km/h in  $p_1(C) = 10\%$  traktorjev, ki vozijo 30 km/h. Tokrat seštevamo po »kljukah« z desnega zgornjega kota navzdol, ker šteje minimalna, ne maksimalna vrednost (glej sliko 3).

Pri metu kock smo lahko dobili analitično rešitev za  $N$  metov kock s pomočjo računanja »kljuk« kot razlik dveh kvadratov in posplošitve na  $N$ -dimenzionalni problem, zato se bomo tudi pri vožnji v koloni lotili na enak način. Najlažje dobimo verjetnost, da kolona  $N$  vozil vozi s hitrostjo avtomobila – to se zgodi samo, če je vseh  $N$  vozil avtomobilov:  $p_N(A) = p_1(A)^N$ : to ustreza najmanjšemu kvadratu

|  |     | drugo vozilo |     |     | hitrost kolone |
|--|-----|--------------|-----|-----|----------------|
|  |     |              |     |     |                |
|  | 70% | 10%          | 20% | 70% | 49%            |
|  | 20% | 7%           | 14% | 49% | 32%            |
|  | 10% | 2%           | 4%  | 14% | 19%            |
|  | 10% | 1%           | 2%  | 7%  |                |

SLIKA 3.

Verjetnosti za počasno vožnjo, če smo drugi voznik v koloni.



**SLIKA 4.**

Odvisnost verjetnosti za gibanje z različnimi hitrostmi od števila vozil v koloni.

desno zgoraj na sliki 3. Za verjetnost, da vozimo s hitrostjo tovornjakov, si lahko izračunamo verjetnost, da so vsa vozila bodisi avtomobili ali tovornjaki (verjetnost, da je eden izmed njih avto ali tovornjak je  $p_1(A) + p_1(B) = 90\%$ ), ter odštejemo verjetnost, da so vsi avtomobili, kar za 2 vozili ustreza odštevanju  $1 \times 1$  kvadrata od  $2 \times 2$  kvadrata v tabeli, za  $N$  vozil pa dobimo

$$\blacksquare \quad p_N(B) = [p_1(A) + p_1(B)]^N - p_1(A)^N.$$

Preostanek verjetnosti pripada hitrosti traktorjev:  $p_N(C) = 1 - [p_1(A) + p_1(B)]^N$ . Slika 4 prikazuje odvisnost vseh treh verjetnosti od dolžine kolone  $N$ .

Vidimo torej, da brez prehitevanja pri večji količini vozil neizbežno pride do tega, da hitrost narekujejo najpočasnejši udeleženci v prometu, in dovolj je eden, da ustavi celo kolono. Temu ozkemu grlu se učinkovito izognemo z avtocestami, ker je zaradi več vzporednih pasov vedno na voljo možnost prehitevanja. S tem omogočimo, da vsi udeleženci v prometu lahko dosežejo svojo optimalno hitrost.

Metodi, ki smo ju uporabili, lahko posplošimo na drugačne porazdelitve. Izračun z vsotami, ki smo ga uporabili v primeru kocke, zahteva, da so verjetnostne porazdelitve take, da je vsote enostavno izvršiti. Po drugi strani je način s pomočjo kumulativnih porazdelitev bolj splošen. Z računanjem verjetnosti za vedno večje kvadrate v verjetnostni tabeli

in odštevanjem verjetnosti za kvadrata sosednjih velikosti so lahko verjetnosti za posamezne vrednosti poljubne. Ta način lahko s poznavanjem diferencialnega računa uporabimo tudi za zvezne porazdelitve.

Računanje verjetnosti za največji ali najmanjši izid pri večkratnih ponovitvah pride v poštev tudi pri športu. Raznolikost v uspešnosti različnih tekmovalcev ter raznolikost rezultatov med poskusi vsakega tekmovalca se da opisati kot verjetnostno porazdelitev po rezultatih za vsak poskus. Vsakič, ko nekdo podre rekord, ima naslednji tekmovalec še težjo nalogo. Verjetnost, da je rekord res visok in težko premagljiv, se z vsakim poskusom povečuje. Na koncu opazimo, da se vedno redkeje zgodi, da je prejšnji rekord premagan. Razlika od naših kock je predvsem v tem, da pri kocki vemo, da je šestica največji možen rezultat, pri športu pa nimamo stroge zgornje meje, in vedno obstaja neničelna, čeprav zelo majhna verjetnost za še večji rezultat – sicer bi potegovanje za rekorde izgubilo smisel.

Pojav »padajočih donosov«, pri katerem potrebujemo vedno več poskusov, da dosežemo dodatne izboljšave, opazimo tudi v ekonomiji, ter v optimizaciji izkoristka strojev in naprav. Običajno moramo sprejeti kompromis in sprejeti neoptimalen rezultat, da ne žrtvujemo preveč časa ali denarja v nadaljnje izboljšave.

