Nekaj srednješolskih astrofizikalnih nalog

↓↓↓
DUNJA FABJAN IN ANDREJ GUŠTIN

→ **Med srednješolskimi mentorji je veliko zanimanje za težje astrofizikalne naloge, predvsem kozmološke, s katerimi bi zadostili radovednosti dijakov in dijakinj. S to mislijo objavljamo nekaj nalog 5. tekmovanja treh dežel, ki smo ga v letu 2019 v okviru DMFA Slovenije organizirali v Avberju in Braniku.**

Naloga

Zvezdana si je zamislila čisto svoj kozmološki model. Predpostavila je, da je vesolje neskončno staro, neskončno veliko, in ima v vseh delih in dobah v povprečju enako gostoto. Kolegi so jo opozorili, da se vesolje širi, zato je morala svoj model popraviti. Širjenje vesolja namreč pomeni, da se njegova gostota s časom manjša, zato je Zvezdana predpostavila, da snov v vesolju ves čas nastaja. Predpostavi, da se vesolje širi s konstantno hitrostjo, ki jo *opiše* Hubblova konstanta $H = 70$ km/s/Mpc, da je njegova gostota konstantna in znaša maso 1 atoma vodika na kubični meter. Koliko atomov vodika mora nastati v kubičnem Mpc prostora na leto, da bo gostota vesolja kljub njegovemu širjenju ostala konstantna?

Rešitev

Podatki:
$H = 70$ km/s/Mpc
$\rho_V = 1 m_H/m^3$
$t = 1$ leto

Najprej izrazimo gostoto vesolja v časih t_1 in t_2:

- $$\begin{aligned}\rho(t_1) &= \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\\ \rho(t_2) &= \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi(R + R\cdot H\cdot t)^3}\\ &= \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R^3(1 + H\cdot t)^3}.\end{aligned}$$

Zaradi širjenja vesolja se njegova prostornina poveča za faktor $(1+Ht)^3$. Ker model zahteva, da je gostota vesolja konstantna, se mora njegova masa povečati za enak faktor. Iščemo število novonastalih atomov vodika v prostornini Mpc^3 (dodatno nastala masa), zato:

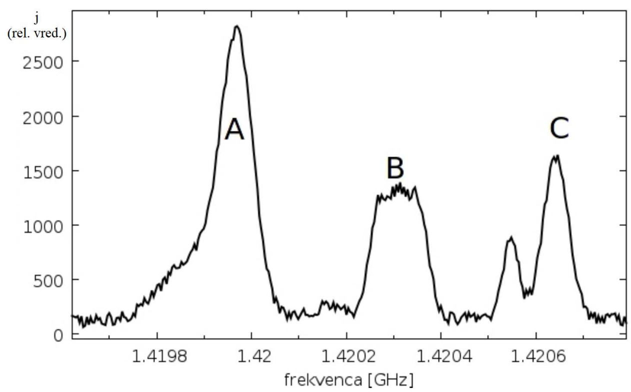
- $$\begin{aligned}\Delta M &= M_2 - M_1\\ &= \rho_V\frac{4}{3}\pi R^3(1+Ht)^3 - \rho_V\frac{4}{3}\pi R^3\\ &= \rho_V\frac{4}{3}\pi R^3((1+Ht)^3 - 1)\\ &= \rho_V(1\mathrm{Mpc})^3((1+Ht)^3 - 1)\\ &= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3}((1\mathrm{Mpc} + 70\mathrm{km/s}\cdot 1\mathrm{yr})^3 - 1\mathrm{Mpc}^3)\\ &= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3}(3{,}08\cdot 10^{22}\mathrm{m} + 2{,}2\cdot 10^{12}\ \mathrm{m})^3 -\\ &\quad - 3{,}08\cdot 10^{22}\mathrm{m}\\ &= \frac{m_H}{\mathrm{m}^3}6{,}261\cdot 10^{57}\mathrm{m}^3\\ &= 6{,}261\cdot 10^{57} m_H\end{aligned}$$

Naloga

Na sliki 1 je spekter, ki ga posnamemo, ko z radijskim teleskopom gledamo vzdolž galaktične ravnine pri galaktični dolžini $l = 320°$.

- Izračunaj, kje v Galaksiji (na kateri razdalji od središča Galaksije) se nahajajo oblaki nevtralnega vodika, ki jih vidimo kot vrhove označene z A, B in C.
- Oceni velikost oblaka B.

Mirovna frekvenca, ki jo izseva atom vodika, je 1,42040 GHz. Predpostavi, da je rotacijska krivulja na razdaljah, kjer se nahajajo oblaki, ravna in da znaša $v_{rot} = 218$ km/s in razdalja Sonca od središča Galaksije je 8 kpc. Vse ocene iz grafa naj bodo jasno navedene.



SLIKA 1.
Svetlobni tok v HI črti za oblake v Galaksiji v odvisnosti od frekvence

Rešitev

Najprej ocenimo, na kateri frekvenci so oblaki A, B in C

- A: $\nu = 1{,}41998$ GHz; $z = 0{,}000295779$; $v_{\mathrm{rel}} = 88{,}733$ km/s
- B: $\nu = 1{,}42030$ GHz; $z = 0{,}000070408$; $v_{\mathrm{rel}} = 21{,}12$ km/s
- B_{min}: $\nu = 1{,}42025$ GHz; $v_{\mathrm{rel}} = 31{,}68$ km/s
- B_{max}: $\nu = 1{,}42035$ GHz; $v_{\mathrm{rel}} = 10{,}56$ km/s
- C: $\nu = 1{,}42065$ GHz; $z = -0{,}000175976$; $v_{\mathrm{rel}} = -52{,}79$ km/s

Pri tem smo upoštevali, da je

- $$z = \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1/\nu - 1/\nu_0}{1/\nu_0}.$$

Uporabimo formulo

- $$v_{\mathrm{rel}} = (\omega(r) - \omega(r_\odot)) r_\odot sin\theta = \left(\frac{v(r)}{r} - \frac{v(r_\odot)}{r_\odot}\right) r_\odot sin\theta.$$

Če uporabimo $v(r) = v(r_\odot) = 218$ km/s in $r_\odot = 8{,}5$ kpc ter $\theta = 320°$, dobimo:

- A: $r = 23{,}1$ kpc
- B: $r = 10{,}0$ kpc
- C: $r = 6{,}17$ kpc
- $\mathrm{B_{min}}$: $r = 10{,}9$ kpc
- $\mathrm{B_{max}}$: $r = 9{,}19$ kpc

Ocenjena velikost oblaka je 1,71 kpc v premeru oziroma približno 0,855 kpc v polmeru.

Naloga

Spiralna galaksija, ki je vidna s strani, ima razmerje med veliko in malo polosjo 1,74. Poznamo izmerjeno rotacijsko hitrost galaksije, 300 km/s, in vemo, da je njena navidezna magnituda v H filtru 18,0. Pri izračunih upoštevaj, da je absolutna magnituda Sonca v H filtru $M_{H,\odot} = 3{,}48$.

- Kolikšna je inklinacija galaksije? Kolikšna je maksimalna rotacijska hitrost?
- Kolikšna je absolutna magnituda galaksije (v H filtru)? Upoštevaj Tully-Fisherjevo relacijo (za H filter) v zapisu
  - $$\log L_{[L_\odot]} = 3{,}44 \cdot \log v_{\mathrm{rot,max[km/s]}} + 0{,}83,$$

  kjer je izsev podan v Sončevih izsevih in hitrost v km/s.
- Iz spektra galaksije razberemo rdeči premik, ki je $z = 0{,}15$. Kolikšna je izmerjena Hubblova konstanta?

Rešitev

Podatki:
$v_{rot} = 300$ km/s
$M_{H,\odot} = 3{,}48$

- Ker poznamo razmerje med veliko in malo polosjo izračunamo, da je $i = \arccos(1/1,74) = 54,9^\circ$. Maksimalna rotacijska hitrost je enaka $v_{max,rot} = v_{rot}/\sin i = 366,5$ km/s.
- Absolutna magnituda galaksije je

- $$\begin{aligned} M_H - M_{H,\odot} &= -2{,}5 \cdot \log(L/L_\odot) \\ &= -2{,}5 \cdot (3{,}44 \log(v_{\mathrm{max,rot}}) + 0{,}83) \\ &= -24{,}12 \\ M_H &= -24{,}12 + 3{,}48 = -20{,}64. \end{aligned}$$

- Oddaljenost galaksije izračunamo iz $m_H - M_H = -5 + 5\log d$ in dobimo, da je $(18 + 20{,}64 + 5)/5 = \log d$ in torej $d = 10^{8,73}$Mpc $= 534{,}5$ Mpc. Ker poznamo rdeči premik lahko izračunamo Hubblovo konstanto, $H_0 = c \cdot z/d = 83{,}19$ km/s Mpc^{-1}.

Naloga

Opazujemo zvezdo, ki ima temperaturo $T = 5000$ K in radij $R = 0{,}9R_\odot$ in se nahaja v kroglasti kopici na razdalji 8 kpc. Opazujemo jo s teleskopom, katerega premer zrcala meri $D = 2$ m in CCD kamero s filtrom B ($\lambda_B = 440$ nm, $\Delta\lambda = 100$ nm). Koliko fotonov na sekundo ujamemo?

Gostota svetlobnega toka z zvezde v ozkem pasu valovnih dolžin (pri izbranem filtru) naj bo

- $$j_{\lambda_B,\star} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda_B}} - 1} \Delta\lambda.$$

Rešitev

Gostota svetlobnega toka, na detektorju:

- $$\begin{aligned} j_\lambda &= \frac{L}{\pi (D/2)^2} \\ &= \frac{dE}{dt} \frac{4}{\pi D^2} \\ &= h\nu \frac{dN}{dt} \frac{4}{\pi D^2}. \end{aligned}$$

Gostota svetlobnega toka, ki ga prejmemo z zvezde:

- $$\begin{aligned} j_\lambda &= j_{\lambda,\star} \frac{R_\star^2}{d^2} \\ j_\lambda &= j_{\lambda_B,\star} \frac{R_\star^2}{d^2} \\ &= \frac{2\pi hc^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ h\nu \frac{dN}{dt} \frac{4}{\pi D^2} &= \frac{2\pi hc^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\pi D^2}{4h\nu} \frac{2\pi hc^2}{\lambda_B^5} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Delta\lambda \frac{R_\star^2}{d^2} \\ &= 149. \end{aligned}$$

×××

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

		1	8		3		
		7			8		
						1	
2			3		1		7
			1	4		2	
7				2			6
	2	4		8			

×××