PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **6** (1978/1979)
Številka 4
Strani 206–208

Nadja Marušič:

O POJMU DIMENZIJE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/6/372-Marusic.pdf

O POJMU DIMENZIJE

Pojem dimenzije ne predstavlja nobenih nejasnosti tako dolgo, dokler imamo v mislih preproste geometrijske elemente kot točke, premice, trikotnike, poliedre. Posamezna točka ali končna množica točk ima dimenzijo 0, daljica je enodimenzionalna, trikotnik ali krogelna ploskev je dimenzije 2, množica točk, ki napolnjuje notranjost kocke, ima dimenzijo 3.

Toda, čim hočemo pojem dimenzije razširiti na bolj splošne množice točk, potrebujemo natančnejšo definicijo dimenzije.

Prav lahko najdemo primer za tako množico. Kakšno dimenzijo lahko pripišemo množici Q na realni osi, ki vsebuje točke z racionalnimi koordinatami? Zdaj še ne moremo odgovoriti na to vprašanje.

Poincaré je prvi poskusil natančneje definirati pojem dimenzije. Ogledali si bomo samo idejo, ker moramo za podrobno obdelavo poznati pojme iz topologije.

Poincaré je dimenzijo takole definiral:

Premica ima dimenzijo 1 zato, ker moramo premici odvzeti eno točko, ki ima dimenzijo 0, da lahko ločimo dve poljubni točki na premici.

Ravnina ima dimenzijo 2, ker ji moramo odvzeti zaprto krivuljo, ki ima dimenzijo 1, da lahko ločimo dve poljubni točki na ravnini.

Ti dve definiciji nam dasta slutiti induktivni značaj dimenzionalnosti. Prostor je n-dimenzionalen, če mu moramo odvzeti podprostor dimenzije $(n-1)$, da lahko ločimo dve poljubni točki tega prostora in če z odvzemom podprostora manjše dimenzije tega ne moremo storiti.

Induktivno definicijo dimenzije najdemo tudi v Evklidovih Elementih. Enodimenzionalen je tisti objekt, ki ima rob sestavljen iz točk, dvodimenzionalen objekt ima rob sestavljen iz krivulj, trodimenzionalen pa iz ploskev.

V zadnjem času se je teorija dimenzije zelo razmahnila. Preden definiramo dimenzijo, si oglejmo lastnost vsake končne množice točk.

Poljubna končna množica točk T ima lastnost, da lahko vsako točko te množice zapremo v poljubno majhen del prostora, ki ne vsebuje nobene druge točke množice T.

Iz te lastnosti sledi definicija množice dimenzije 0. Po dogovoru ima prazna množica dimenzijo -1.

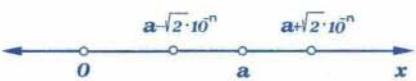
DEFINICIJA: Množica točk S ima dimenzijo 0, če ni prazna in če vsako točko te množice lahko spravimo v poljubno majhno okolico, katere rob seka množico S v množici dimenzije -1 (to pomeni, da rob okolice ne vsebuje nobene točke množice S).

Torej ima množica ulomkov na realni osi dimenzijo 0, saj lahko vsaki racionalni točki a konstruiramo poljubno majhen interval (okolico), ki vsebuje a in ima iracionalni krajišči (rob). Rob okolice torej ne vsebuje elementov množice Q. Taka okolica je na primer $[a - \sqrt{2}.10^{-n}, a + \sqrt{2}.10^{-n}]$, kjer je n poljubno naravno število (slika 1).

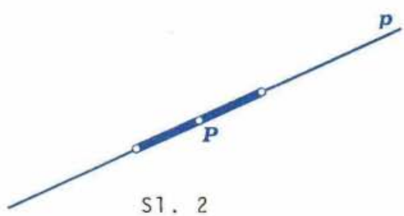
Doslej smo definirali samo dimenziji -1 in 0. Definicija množice dimenzije 1 izhaja iz njiju.

DEFINICIJA: Množica točk S ima dimenzijo 1, če nima dimenzije -1 ali 0 in če vsako točko množice S lahko spravimo v poljubno majhno okolico, katere rob seka množico S v množici dimenzije 0.

Vzemimo točko P na premici p. Rob vsakega intervala, ki vsebuje točko P, sestavljata dve točki (množica dimenzije 0) (slika 2).



Sl. 1



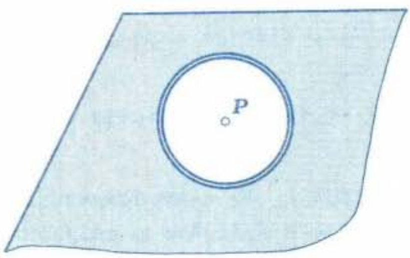
Sl. 2

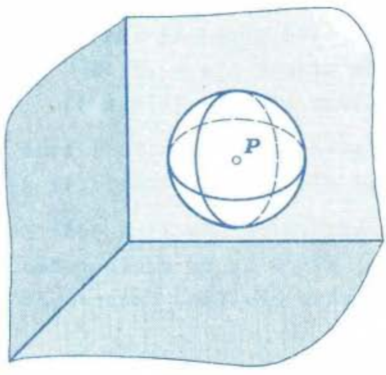
Nadalje lahko definiramo dimenzije 2, 3, 4, ... in splošno:

DEFINICIJA: Množica S ima dimenzijo n, če nima kake manjše dimenzije in če je vsaka njena točka vsebovana v taki poljubno majhni okolici, da njen rob seka množico S v množici dimenzije (n-1).

Tako je ravnina dimenzije 2, saj lahko vsako točko vzamemo na primer za središče kroga poljubno majhnega polmera. Krožnica (rob) seka ravnino v množici dimenzije 1 (slika 3).

V običajnem prostoru nima nobena množica dimenzije večje od 3. Vsako točko prostora lahko namreč vzamemo za središče poljubno majhne krogle in površina krogle (rob) ima dimenzijo 2 (slika 4). Pod pojmom prostora pa ne razumemo samo običajnega prostora. Z razširitvijo pojma prostora lahko pridemo do dimenzije, večje od 3.





Prostor, ki ni dimenzije n za nobeno naravno število n, pravimo, da je neskončno dimenzionalen.

WHAT IS MATHEMATICS
by
Richard Courant and Herbert Robbins
Oxford University Press 1960

Nadja Marušič