Bojan Kuzma
ZBIRKA NALOG IZ MATEMATIKE

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 5)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(079.1)

KUZMA, Bojan
Zbirka nalog iz matematike [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 5)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_5_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-4-0

246643200

Zbirka nalog iz matematike

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor 3

2 Kolokviji - kompleksna analiza 5

3 Kolokviji - diferencialne enačbe 9

4 Kolokviji - diskretna matematika 14

5 Kolokviji - linearna algebra 27

6 Izpiti - kompleksna analiza 42

7 Izpiti - diskretna matematika 73

8 Izpiti - numerične metode 86

9 Izpiti - linearna algebra 95

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje. V pričujoči zbirki so zbrane naloge iz raznovrstnih področij matematike, ki obsegajo linearno algebro, verjetnostni račun, kompleksno analizo diskretne strukture, ter numerične metode. Ta pisanost je posledica dejstva, da je zbirka nastajala skozi več let, ko sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru in kasneje na Univerzi v Ljubljani. Tudi termin predavanja učne snovi je bil na eni univerzi malce drugačen kot na drugi - tako so npr. v curriculumu predmeta, ki v grobem ustreza kompleksni analizi, bila predvidena tudi poglavja iz verjetnosti ter poglavja iz diferencialnih enačb.

Pri urejanju zbirke sem se vseskozi soočal z vprašanjem h kateremu poglvju naj uvrstim kakšen izpit oz. kolokvij, ko pa so na njem naloge iz tako raznovrstnih področij. Nazadnje sem se odločil za naslednji pristop: Tam, kjer je le ena naloga iz verjetnosti, preostale pa iz kompleksne analize, sem ga uvrstil v slednje poglavje. Če so prevladovale diferencialne enačbe, in je bila zraven še kakšna naloga iz kompleksne analize, pa sem ga uvrstil v poglavje o diferencialnih enačbah.

Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Ušćumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

(vi) P. Mizori-Oblak, B. Krušič (avtor dodatnega besedila): Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 1. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1997.

(vii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 2. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1991.

(viii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 3. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1986.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Glede na raznovrstnost snovi sem bil dolgo časa v dilemi, v katerem vrstnem redu naj zbirko uredim. Odločil sem se za kronološki razpored. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Kolokviji - kompleksna analiza

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

20.4.1995

1. Dokaži, da za kompleksni števili a, b velja:

$$|a+b| \leq |1+\overline{a}b|, \quad (|a| \leq 1,\ |b| \leq 1)!$$

   Kdaj velja enačaj ?

2. Pri katerih $x, y \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$u(x,y) := \ln(x^2+y^2)$$

   harmonična? Poišči analitično funkcijo $f(z)$, za katero je

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad (z = x+iy)$$

   in je $f(1) = 2$. Za katere vrednosti z je ta funkcija realna?

3. Izračunaj integral

$$\oint_\Gamma \frac{1}{ze^{\pi z}+z+e^{\pi z}+1}dz;$$

   kjer integriramo v pozitivni smeri po trikotniku z ogljišči

$$z_1 = \frac{1}{3}+2i, \quad z_2 = -8-11\frac{5}{8}i, \quad z_3 = 1+2i$$

4. Razvij funkcijo

$$f(z) := \frac{2z}{1-3z^2+2z^3}$$

   v Laurentovo vrsto

   (a) v okolici točke 0
   (b) v punktirani okolici točke 1!

   V obeh primerih določi tudi območje konvergence dobljenih vrst!

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

17.4.1996

1. Dano je območje $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C};\ \ |z-1| < 1\} \setminus \big\{z \in \mathbb{C};\ \ |z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\big\}$.

   (a) Poišči Möbiusovo preslikavo, ki $\mathcal{D}$ preslika na pas $\{z \in \mathbb{C};\ \ 0 < \mathrm{Im} z < \pi\}$.

   (b) Kam preslika omenjeni pas eksponentna funkcija $z \mapsto e^z$?

   (c) Poišči konformno preslikavo, ki $\mathcal{D}$ preslika v enotski krog!

2. V kompleksni ravnini je dana premica $\mathrm{Re}\, z = 1$. Dokaži, da se s stereografsko projekcijo preslika v krožnico.

3. Dana je funkcija

$$f(z) := \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}; & z \neq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases} \qquad (z = x + iy).$$

   Ali je zvezna v točki 0? Ali je analitična?

4. Razvij funkcijo

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - (3+4i) + 12i}$$

   v Laurentovo vrsto okoli točke $z = \infty$ in izračunaj območje konvergence.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

17.4.1998

1. Za analitično funkcijo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y);\ \ z = x + iy$ je znano, da je
$$u + v = (x+y)^2 - 2\,y^2 + \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$
Poišči funkcijo f!

2. Dano je območje $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C};\ \ |z| < 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Poišči konformno preslikavo, ki ga slika na odprt enotski krog.

3. Poišči integral
$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin z^{-2}},$$
kjer je Γ rob pozitivno orientiranega trikotnika z oglišči v točkah $T_1(1,-1),\ T_2(3,4)$ in $T_3(-1,2)$.

4. Razvij funkcijo
$$f(z) := \frac{z}{(z^2+9)^2\,(z^2-1)}$$
v Laurentovo vrsto na kolobarju $1 < |z| < 3$.

3 Kolokviji - diferencialne enačbe

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

12.6.1998

1. Funkcijo $f(z) := z^{p-1}e^{-z}$; $(p > 0)$ integriramo po krivulji S, ki jo sestavlja daljica od r do R; krožni lok od R do $Re^{i\alpha}$, daljica od $Re^{i\alpha}$ do $re^{i\alpha}$ ter krožni lok od $re^{i\alpha}$ do r. Denimo, da je $R, r > 0$ in $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.
   (a) Pokaži, da gre integral po velikem krožnem odseku proti 0, ko gre $R \to \infty$. Pokaži, da gre integral po malem krožnem odseku proti nič, ko gre $r \to 0$.
   (b) Preveri formulo
   $$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{i\alpha p}\, t^{p-1} e^{-e^{i\alpha} t}\, dt$$
   za $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.
   (c) Ali velja gornja formula tudi če je $\alpha = \pi/2$?

2. Poišči rešitev diferencialno–diferenčne enačbe
   $$y''(x) - y(x-1) = x; \qquad (y(0) = y'(0) = 0)$$
   kjer $y(x), y'(x) = 0$ za $x \leq 0$.

3. Razvij funkcijo $\sin x$ po Laguerrovih polinomih L_n.
   (Nasvet: Najprej zapiši $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, nato uporabi Rodriguesovo formulo. Ko n–krat parcialno integriraš, prideš do integrala, ki ga lahko s pomočjo formule iz naloge (1.b) izraziš z Γ funkcijo.)

4. Na daljici AB dolžine l si slučajno izberemo točki M in N. Izračunaj verjetnost, da je razdalja med M in A manjša od razdalje med N in B.

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

2.6.1995

1. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad U(x,0) = 3\sin 2\pi x, \quad U(0,t) = U(1,t) \equiv 0;$$

   tu je $x \in [0,1]$ in $t \geq 0$.

2. Ali obstaja tak interval $[a,b]$, na katerem so funkcije

$$f_1(t) := \frac{1}{3}, \quad f_2(t) := 3 - 2t, \quad f_3(t) := t + t^2$$

   (a) ortogonalne?

   (b) ortonormirane?

3. Razvij funkcijo

$$f(z) := \frac{2z}{1 - 3z^2 + 2z^3}$$

   v Laurentovo vrsto

   (a) v okolici točke 0

   (b) v punktirani okolici točke 1!

   V obeh primerih določi tudi območje konvergence dobljenih vrst!

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

7.6.1996

1. Reši integralsko enačbo

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du$$

2. Na 1000 metrsko progo sta padla dva leteča krožnika. Ker je šlo za nesrečo, je bil njun padec povsem slučajen in neodvisen drug od drugega. Kakšna je verjetnost, da je prvi krožnik padel bližje začetku proge kot drugi?

3. S pomočjo razvoja v vrsto reši diferencialno enačbo

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

4. Poišči tisto diferenciabilno funkcijo $t(x)$, da bo površina telesa, nastalega z rotacijo funkcije y okoli abscisne osi minimalna. Pri tem naj y povezuje robni točki $T_1(0,1)$ in $T_2(1, \frac{e+e^{-1}}{2})$.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

2.6.1997

1. Reši parcialno diferencialno enačbo nihanja strune dolžine l

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

z začetnim odmikom $u(x,0) := \sin \frac{\pi x}{l}$ in začetno hitrostjo $\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0$. Struna je pritrjena na obeh krajiščih, torej je $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

2. Naj bodo polinomi $q_0, q_1, \ldots$ ortogonalni na intervalu $[-a,a]$ z utežjo $p(x)$, ki je soda funkcija. Denimo še, da so $q_1(x), q_3(x), \ldots$ lihe funkcije spremenljivke x.

   (a) Pokaži, da so $t_n := \frac{1}{\sqrt{x}} q_{2n+1}(\sqrt{x})$ tudi polinomi, in izračunaj njihovo stopnjo.

   (b) Pokaži, da so t_n ortogonalni na intervalu $[0, a^2]$ z utežjo $\pi(x) := \sqrt{x} p(\sqrt{x})$

3. Naj bodo P_n Legendrovi polinomi stopnje n.

   (a) S pomočjo Rodriguesove formule in parcialnega integriranja pokaži, da je

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) e^{i\pi x}\, dx = \frac{(-i\pi)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n e^{i\pi x}\, dx.$$

   (b) Dokaži, da za sode n velja $\int_{-1}^{1} P_n(x) \sin(\pi x)\, dx = 0$

4. Na neki prireditvi je bilo 5 moških in 5 žensk. Poišči verjetnost, da se bodo posedli za ravno mizo tako, da dve osebi istega spola ne bosta sedeli skupaj.

4 Kolokviji - diskretna matematika

1. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

13.12.1994

(a) Ali sta naslednja sklepa veljavna

  i. $\neg p,\ p \quad \models \quad q$

  ii. $p \wedge q,\ \neg p \Rightarrow q \quad \models \quad \neg q$

(b) Naj bodo A,B in C dane množice, za katere velja $B \subseteq A$ in $A \cap C = \emptyset$. Poišči vse rešitve sistema

$$A \setminus X = B, \qquad X \setminus A = C\ !$$

(c) Na množici $\mathbb{N}^+$ je definirana relacija $\sim$, podana z

$$m \sim n \equiv m^2 - n^2 \text{ je deljivo z } 10.$$

Ali je $\sim$ simetrična? Če je, določi ekvivalenčne razrede!

(d) Naj bosta relaciji A in B tranzitivni. Ali je njun kompozitum, $A \circ B$ vedno tranzitivna relacija?
(Navodilo: dokaži, da je to res, ali pa najdi protiprimer.)

2. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

14.3.1995

(a) Dokaži, da sta intervala $[0, r]$ in $[r, \infty)$ enako močna. S pomočjo tega dokaži tudi, da imata množici

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-\gamma)^2+(y-\delta)^2 \leq R^2\} \quad \text{in} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \geq S^2\}$$

enako moč. (Tu je $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R, S \in \mathbb{R}$).

(b) Naj bo $R \subset A \times B$ funkcija.

i. Pokaži, da v splošnem $R \circ R^{-1}$ <u>ni</u> funkcija!
ii. Pokaži, da je $R \circ R^{-1}$ ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede!

(c) Naj bo $(M, \vee, \wedge)$ omejena (tj. obstajata elementa 0 in 1), distributivna mreža. Označimo z M^* množico vseh elementov iz M, ki imajo komplement.

i. Dokaži, da je M^* tudi mreža za isti operaciji!
ii. Če je $M = DEL(60) = \{\alpha \in \mathbb{N};\ \alpha \mid 60\}$, določi M^*!

(d) Naj za grupoid $(A, *)$ velja sledeče:

$$(a * b) * b = a \quad \forall\, a, b \in A$$
$$b * (b * a) = a \quad \forall\, a, b \in A$$

Dokaži da tedaj za poljubna $c, d \in A$ obstaja natanko ena rešitev enačbe

$$c * x = d$$

in natanko ena rešitev enačbe

$$y * c = d\,!$$

3. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

21.5.1995

(a) Na ciklični grupi $\mathbb{Z}_{12}$ naj bo definirana preslikava

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z}_{12} &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ a &\mapsto a^3. \end{aligned}$$

Dokaži, da je h homomorfizem, in določi njegovo jedro, $\operatorname{Ker} f$. Kateri znani grupi je izomorfna grupa $\mathbb{Z}_{12}/\operatorname{Ker} f$?

(b) Zapiši polinom $1+2x+5x^2+x^4$ kot produkt nerazcepnih faktorjev nad obsegom $\mathbb{Z}_7$!

(c) Naj bo G enostaven graf na n točkah, v katerem ima vsaka točka stopnjo k ali $k+1$. Dokaži, da je število točk stopnje k enako $(k+1)n - 2\epsilon$; tu je ϵ število vseh povezav v grafu G.

(d) Dokaži, da v vsakem enostavnem grafu G, za katerega je $\delta \geq k$, obstaja pot dolžine k.

1. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR za VIŠJEŠOLCE

(a) Na množici $\mathbb{Z}$ uvedemo relacijo R, podano s predpisom

$$xRy \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} x + 2y \equiv 0 \pmod{10}$$

i. Ali je R refleksivna?
ii. Ali je tranzitivna?
iii. Ali je simetrična?
iv. Ali je antisimetrična?
v. Ali je asimetrična?

(b) Dokaži, da je

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

(c) Dana je množica $A := \{-5, \cdots, 5\}$ in funkciji $f, g : A \to A$, podani s tabelo

$$f := \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 & -5 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oz.}$$

$$g := \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 3 & -1 & 5 & -4 & -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ali obstaja takšna funkcija $h : A \to A$, da je $f = h \circ g$? Če obstaja, koliko jih je?

(d) Ali velja naslednji sklep?
»Če se bom učil, bom naredil izpit. Nisem se učil, torej izpita ne bom naredil.«
(Navodilo: Napiši hipoteze, napiši sklep in preveri veljavnost. Vsak korak pri preverjanju veljavnosti mora biti utemeljen!)

1. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

(a) Na množici $\mathbb{Z}$ uvedemo relacijo R, podano s predpisom

$$xRy \overset{\text{DEF}}{\iff} x + 2y \equiv 0 \pmod{10}$$

i. Ali je R refleksivna?
ii. Ali je tranzitivna?
iii. Ali je simetrična?
iv. Ali je antisimetrična?
v. Ali je asimetrična?

(b) Dokaži, da je

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

(c) Dana je funkcija f,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned}$$

Izračunaj naslednje množice:

i. $f^{-1}\Big(f(\mathbb{N})\Big)$
ii. $f\Big(f^{-1}(\mathbb{N})\Big)$
iii. $f^{-1}\Big(f([0,1])\Big)$
iv. $f\Big(f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\Big)$

(d) Ali velja naslednji sklep?
»Če se bom učil, bom naredil izpit. Nisem se učil, torej izpita ne bom naredil.«
Vsak korak pri preverjanju veljavnosti mora biti utemeljen!

2. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

22.12.1995

(a) Ali ima množica

$$\Omega_{p_1,q_1;\,p_2,q_2} := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ p_1 \le x \le q_1 \;\&\; p_2 \le y \le q_2\big\}$$

(tu je $p_1 < q_1$ & $p_2 < q_2$) isto moč kot enotski kvadrat?
(Nasvet: poišči bijekcijo med njima, in *dokaži*, da je predlagana funkcija res bijektivna, ali pa *dokaži,* da take funkcije ni.)

(b) V množico DEL(30) vseh pozitivnih deliteljev števila 30 uvedemo operaciji $\cap$ in $\cup$ s predpisoma:

$$a \cap b := D(a,b) \quad \text{in} \quad a \cup b := v(a,b);$$

tu je D največji skupni delitelj in v najmanjši skupni večkratnik. Dokaži, da je struktura $\big(\mathrm{DEL}(30), \cap, \cup\big)$ mreža. Ali je distributivna? Ali je komplementirana?

(c) Na intervalu $[0,1]$ je definirana operacija

$$a \circ b := \frac{a+b}{1+ab}.$$

i. Dokaži, da je $([0,1], \circ)$ algebrska struktura (tj. operacija je notranja)
ii. Dokaži, da obstaja enota
iii. Ali obstaja absorbcijski element?
iv. Ali je operacija asociativna?
v. Ali je $([0,1], \circ)$ grupa?

(d) Koliko elementov ima grupa G, generirana z elementoma a in b med katerima veljata relaciji

$$a^3 = b^2 = e \quad (ab)^2 = a^2 b^2$$

Kateri znani grupi je izomorfna?
(Nasvet: spomni se, da obstajata le dve grupi take moči, kot jo ima G.)

2. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR za višješolce

22.12.1995

(a) Koliko je vseh naravnih števil med 1 in 10000, ki so deljiva z 14 in 18, pa niso deljiva s 3?

(b) V množico DEL(30) vseh pozitivnih deliteljev števila 30 uvedemo operaciji $\cap$ in $\cup$ s predpisoma:

$$a \cap b := D(a, b) \quad \text{in} \quad a \cup b := v(a, b);$$

tu je D največji skupni delitelj in v najmanjši skupni večkratnik. Dokaži, da je struktura $\big(\mathrm{DEL}(30), \cap, \cup\big)$ mreža. Ali je distributivna? Ali je komplementirana?

(c) Na intervalu $[0, 1]$ je definirana operacija

$$a \circ b := \frac{a + b}{1 + ab}.$$

i. Dokaži, da je $([0, 1], \circ)$ algebrska struktura (tj. operacija je notranja)
ii. Dokaži, da obstaja enota!
iii. Ali obstaja absorbcijski element?
iv. Ali je operacija asociativna?
v. Ali je $([0, 1], \circ)$ grupa?

(d) Določi vse podgrupe moči 3 od grupe $\mathbb{Z}_{18}$.

3. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR za višješolce

19.1.1996

(a) Poišči najmanjši podkolobar v $\mathbb{C}$, ki vsebuje element $\sqrt{-1}$.

(b) Poišči permutacijo $\pi \in S_3$, da bo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

(c) V kolobarju $\mathbb{Z}_{12}$ poišči <u>vse</u> rešitve enačbe

$$(x - 11)(x + 4) = 2$$

(d) Koliko je vseh netrivialnih deliteljev niča v kolobarju $\mathbb{Z}_{30}$?

3. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

23.1.1996

(a) Poišči najmanjši podkolobar v $\mathbb{C}$, ki vsebuje element $\sqrt{-1}$.

(b) Ali obstaja permutacija $\pi \in S_3$, da bo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} ?$$

(c) Kateri znani grupi je izomorfna grupa

$$\big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4\big)/H \ ,$$

kjer je H edinka, generirana z elementom $(1, 2) \in \big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4\big)$? (Nasvet: Najprej ugotovi, kolikšna je njena moč, nato pa, kolik je red njenih elementov.)

(d) Naj bosta G in njegov komplement, $\overline{G}$ med sabo izomorfna grafa na petih točkah.

i. Koliko povezav ima G?

ii. Koliko je takih grafov, pri katerih dodatno zahtevamo, da imajo vse točke stopnjo, manjšo od 3?

iii. Koliko je takih grafov, ki imajo vsaj eno točko stopnje 3?

iv. Koliko je takih grafov, ki imajo vsaj eno točko stopnje 4?

v. Nariši vse take paroma neizomorfne grafe G na 5 točkah, ki so izomorfni svojemu komplementu. (Tj. G in $\overline{G}$ morata biti izomorfna.)

1. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

22.11.1996

(a) Dokaži, da lahko vsako izjavo napišemo samo s pomočjo izjavnih črk in znakov za implikacijo, negacijo ter oklepaja.
(Nasvet: Vemo, da lahko vsako izjavo napišemo s pomočjo konjunkcije, disjunkcije in negacije. Izrazi omenjene operatorje s pomočjo implikacije in negacije.)

(b) Za množico M vzemimo

$$M := \{00001, 00002, \ldots, 99999\} ;$$

M torej sestavljajo natanko vsa zaporedja cifer dolžine pet brez zaporedja '00000'. V množico M uvedemo relacijo R z naslednjim predpisom: $m\,R\,n$ natanko tedaj, ko lahko *element* m dobimo tako, da permutiramo cifre elementa n. Tako sta npr. z elementom $00123 \in M$ v relaciji 30021, 01302, itd.

i. Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
ii. Koliko različnih ekvivalenčnih razredov dobimo?

(c) Naj bo $f : A \to B$ *funkcija* in $X, Y \subseteq A$ poljubni množici. Dokaži, da je

$$f(X \backslash Y) = f(X) \backslash f(Y),$$

ali pa najdi protiprimer, ko to ne drži.

(d) Dokaži, da sta kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ in pravokotnik, ki ga določajo oglišča $T_1(1, 1)$, $T_2(1, 4)$, $T_3(3, 4)$, množici z isto močjo.
(Nasvet: Poišči bijektivno funkcijo med gornjima množicama *in dokaži*, da je funkcija res bijekcija.)

3. KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

24.1.1997

(a) Dokaži, da ima vsaka končna Boolova algebra z vsaj dvema elementoma sodo mnogo elementov.

(b) Poišči vse avtomorfizme simetrične grupe S_3.

(c) Koliko je vseh paroma neizomorfnih grafov na šestih točkah, kjer ima vsaka točka stopnjo 1 ali 3?

(d) V množico $\mathbb{R}^+$ vpeljemo operacijo $\circ$ s pravilom:

$$a \circ b := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

i. Ali je $\circ$ asocoativna?
ii. Ali obstaja nevtralni element?
iii. Ali obstaja absorbcijski element?
iv. Ali je $(\mathbb{R}^+, \circ)$ grupa?

KOLOKVIJ IZ DISKRETNIH STRUKTUR

5.12.1997

(a) Ali velja sklep

$$p \vee q \Rightarrow r \wedge s,\ r \vee t \Rightarrow u \quad \models \quad p \Rightarrow u$$

(b) Preveri, da za poljubne množice A, B, C velja

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

Ali velja tudi enačaj? Poišči potrebne in zadostne pogoje!

(c) Dokaži, da ima rob kvadrata, ki ga določajo oglišča v točkah $T_1(0,0)$ in $T_2(0,1)$ in $T_3(1,1)$ isto moč kot rob trikotnika Δ_0 z oglišči v točkah $T_1(0,0), T_2(1,0), T_3(0,1)$.

(d) Induktivna razreda $\mathcal{I}$ in $\mathcal{P}$ nad abecedo $\Sigma := \{a, b, (,), [,]\}$ sta podana na naslednji način:

$$\begin{array}{ll} B_1 & a \in \mathcal{P} \\ P_1 & X \in \mathcal{P} \Rightarrow X \in \mathcal{I} \\ P_2 & X \in \mathcal{P},\ Y \in \mathcal{I} \Rightarrow XbY \in \mathcal{I} \\ P_3 & X \in \mathcal{I} \Rightarrow (X) \in \mathcal{P} \\ P_4 & X \in \mathcal{I} \Rightarrow [X] \in \mathcal{P} \end{array}$$

Kateri od nizov

a1. $[ab([(ab(aba)])ba)]$ a2. $([aba]a)ba$

pripadajo razredu $\mathcal{I}$?
(Nasvet: Kakšna je zveza med številom a in številom b)

5 Kolokviji - linearna algebra

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

27.1.1998

(a) Izračunaj integrala

$$\text{a). } \int \frac{2t}{(1-t)(1+t^2)}\,dt \qquad \text{b). } \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,dx$$

(Nasvet: V zadnji integral upelji primerno substitucijo.)

(b) Poišči inverz matrike

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(c) Določi vsa števila a, pri katerih ima sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{lclclcl} 2ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2ay & & & = & 0 \\ ax & + & (1-a)y & + & z & = & 0 \end{array}$$

neskončno mnogo rešitev? Te rešitve tudi izračunaj.

(d) Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $60°$; prvi meri 4 drugi pa 5 enot. Kakšna je dolžina vektorja

$$2\vec{a} - \vec{b}$$

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE
A

25.11.1997

(a) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(2,0,-3)$, seka premico $\frac{4x-4}{3}=z,\ y=-1$ pri $x=2$, in oklepa z njo kot $30°$.

(35 točk)

(b) Dana sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Poišči vse vektorje $\vec{x}$, ki zadoščajo enačbi

$$\vec{a}\times(\vec{x}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{x})\times\vec{b}$$

in preveri, da je rešitev res prava. (Navodilo: Upoštevaj različne možnosti glede vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, npr., da sta kolinearna, da je eden izmed njiju enak nič, ter da sta linearno neodvisna. Mogoče ti bo v pomoč identiteta $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=(\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y}-(\vec{y}\cdot\vec{z})\vec{x}$)

(35 točk)

(c) V trikotniku ABC je točka F razpolovišče daljice BC, točka E pa deli stranico AC v razmerju $2:1$. Bodi S presečišče daljic AF in BE. Izračunaj razmerje $AS:SF$, in primerjaj ploščini trikotnikov ABC in ASB!

(30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE
B

25.11.1997

(a) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(0, 2, -3)$, seka premico $\frac{4y-4}{3} = z,\ x = -1$ pri $y = 2$, in oklepa z njo kot $30°$.

(35 točk)

(b) Dana sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Poišči vse vektorje $\vec{x}$, ki zadoščajo enačbi

$$(\vec{x} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{x})$$

in preveri, da je rešitev res prava. (Navodilo: Upoštevaj različne možnosti glede vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, npr., da sta kolinearna, da je eden izmed njiju enak nič, ter da sta linearno neodvisna. Mogoče ti bo v pomoč identiteta $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$)

(35 točk)

(c) V trikotniku ABC je točka F razpolovišče daljice BC, točka E pa deli stranico AC v razmerju $1 : 2$. Bodi S presečišče daljic AF in BE. Izračunaj razmerje $AS : SF$, in primerjaj ploščini trikotnikov ABC in ASE!

(30 točk)

2. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE (študij ob delu)

17.5.1999

(a) Poišči vse vrednosti parametra a, za katere ima sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & 2+a \\ -2x & - & (3-a)y & - & (1-a-a^2)z & = & a^2+4a-1 \end{array}$$

več kot eno rešitev. (10 točk)
Pri vsakem takem parametru poišči tudi vse rešitve ustreznega sistema. (10 točk)

(b) Dani sta matriki

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Poišči vse rešitve matrične enačbe $XB = C$. (10 točk)

(c) Poišči lastne vrednosti matrike

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(10 točk)
Pri vsaki lastni vrednosti poišči tudi bazo ustreznega lastnega podprostora. (10 točk)

(d) Poišči odvod funkcije

$$f(x) := \ln \cos^2(x^2) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

(10 točk)

(e) Funkcijo $f(x) := \sin(2x)$ razvij v Taylorjev polinom reda 6. (10 točk)
Oceni pri tem narejeno napako, če vemo, da je $x \in [-1, 1]$. (10 točk)

(f) Poišči dve pozitivni števili, katerih vsota je 1, da bo njun produkt minimalen. (10 točk)

(g) Integral

$$\int_0^2 2x \sin(x^2)\, dx$$

izračunaj z uvedbo nove spremenljivke $x^2 = t$. (10 točk)

(h) Poišči volumen vrtenine, ki jo dobiš, če funkcijo $y = \cos(x^2)$; $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$ zarotiraš okoli *ordinate (tj. y–osi)*. (10 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE A

11.12.2000

(a) V trikotniku ABC točka P deli stranico AC v razmerju $1:4$, točka Q pa stranico BC v razmerju $1:3$. Naj bo S presečišče daljic BP in AQ. Izrazi vektor $\overrightarrow{CS}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. (30 točk)

(b) i. Obravnavaj sistem v odvisnosti od parametra a, ter zapiši vse njegove rešitve:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5 \\ x + 4y - z &= -3 \\ 2x + 2y - (5-2a)z &= 24 + 4a \end{aligned}$$

(20 točk)

ii. Reši matrično enačbo $A^\top X A = B$, pri čemer sta matriki A in B dani z

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(20 točk)

(c) Premica p je določena s presekom ravnin z enačbama $3x+2y+z = 10$ ter $x - 2y + z = 2$. Zapiši njeno enačbo v parametrični obliki in izračunaj razdaljo od p do koordinatnega izhodišča. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE B

11.12.2000

(a) V trikotniku ABC točka M deli stranico AB v razmerju $1:4$, točka N pa stranico BC v razmerju $2:3$. Naj bo P presečišče daljic CM in AN. Izrazi vektor $\overrightarrow{CP}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. V kakšnem razmerju deli točka P daljico CM? (30 točk)

(b) i. Obravnavaj sistem v odvisnosti od parametra b, ter zapiši vse njegove rešitve:

$$\begin{aligned} x + 4y - (4+2b)z &= -(9+4a) \\ 2x + 6y - 4z &= 2 \\ -2x - 6y + (7+2b)z &= 4 + 4b \end{aligned}$$

(20 točk)

ii. Reši matrično enačbo $CXC^\top = A$, pri čemer sta matriki A in C dani z

$$C := \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(20 točk)

(c) Premica p je določena s presekom ravnin z enačbama $x+2y+3z = 1$ ter $x - 2y + z = -1$. Zapiši njeno enačbo v parametrični obliki in izračunaj razdaljo od p do koordinatnega izhodišča. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE (študij ob delu)

14.3.2001

(a) V trapezu $ABCD$ je vektor $\overrightarrow{AB}$ dvakrat daljši kot vektor $\overrightarrow{DC}$ Naj bo S presečišče obeh diagonal. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ s pomočjo vektorjev $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ ter $\vec{d} := \overrightarrow{AD}$. (10 točk)

(b) Poišči vektor težiščnice na T_1 trikotnika z oglišči v točkah $T_1(1,2,3)$, $T_2(1,3,3)$ in $T_3(0,1,2)$. (10 točk)

(c) Poišči točko, na ravnini $\Pi : x + y - 2z = 6$, ki je najbliže koordinatnemu izhodišču.

(10 točk)

(d) Poišči vse vrednosti parametra a, za katere ima sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3ax & & & + & (3-5a)z & = & 3-6a \end{array}$$

več kot eno rešitev. (10 točk)

Pri vsakem takem parametru poišči tudi vse rešitve ustreznega sistema. (10 točk)

(e) Dani sta matriki

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Poišči vse rešitve matrične enačbe $BX = C$. (10 točk)

(f) Poišči lastne vrednosti matrike

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(10 točk)

Pri vsaki lastni vrednosti poišči tudi bazo ustreznega lastnega podprostora. (10 točk)

(g) Poišči kompozitum $(f \circ f)(x)$, če je $f(x) = x^2 - 2x + 1$. (10 točk)

(h) Preveri, da je za vsako naravno število n izraz $5 \cdot 4^n - 2$ vedno deljiv s 3. (10 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE A

10.12.2001

(a) V pravilni štiristrani piramidi $ABCDE$ naj bo T središče kvadrata $ABCD$, in S središče stranice AE. Preveri, da se daljici ET in SC sekata. Nato izrazi vektor $\overrightarrow{BY}$ z vektorji $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} := \overrightarrow{AE}$ (Y je presečišče ET in SC.) (35 točk)

(b) Poišči pravokotno projekcijo premice $\frac{x-1}{2} = y = z$ na ravnino $y + z = 0$. (30 točk)

(c) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE B

10.12.2001

(a) V pravilni štiristrani piramidi $ABCDE$ naj bo M središče kvadrata $ABCD$, in S središče stranice AE. Preveri, da se daljici EM in SC sekata in izrazi vektor $\overrightarrow{AX}$ z vektorji $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} := \overrightarrow{AE}$ (X je presečišče EM in SC.) (35 točk)

(b) Poišči pravokotno projekcijo premice $x = y = \frac{z-1}{2}$ na ravnino $x + y = 0$. (30 točk)

(c) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti matrike

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE (študij ob delu)

20.12.2001

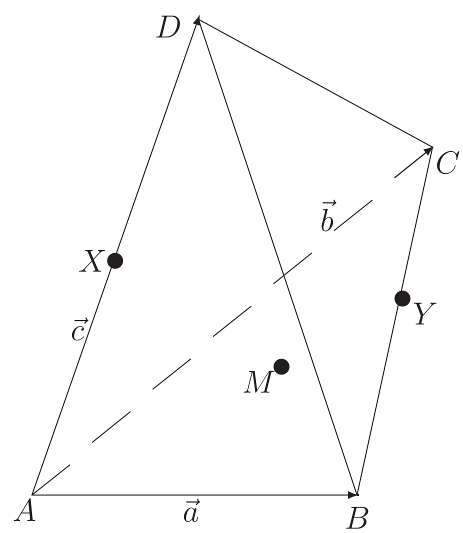
(a) Naj bo $ABCD$ pravilni tetraeder. Denimo, da je M središče enakostraničnega trikotnika ABC, in sta X ter Y razpolovišči daljic AD in BC. Naj bo S presečišče daljic DM ter XY.

   i. Izrazi vektor $\overrightarrow{MD}$ z vektorji $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} := \overrightarrow{AD}$. (5 točk)

   ii. Izrazi vektor $\overrightarrow{XY}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. (5 točk)

   iii. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. (10 točk)

   (Nasvet: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AY}$.)



(b) Poišči enačbo ravnine, ki vsebuje premico $p_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ in je vzporedna premici $p_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. (10 točk)

(c) Poišči ploščino trikotnika z oglišči v točkah $T_1(3, 3, -3)$, $T_2(3, 1, 0)$ in $T_3(2, 1, 0)$. (10 točk)

(d) Poišči pravokotno projekcijo premice $x = \frac{y+1}{2} = z$ na ravnino $x + z = 0$. (20 točk)

(e) Reši matrično enačbo $A + 2X = BX$, kjer je

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(30 točk)

(f) Poišči vse rešitve sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 3z & = & 2 \\ -2x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

(20 točk)

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE
A

18.11.2002

(a) V trikotniku ABC je točka F razpolovišče daljice BC, točka E pa deli stranico AC v razmerju $2:1$. Bodi S presečišče daljic AF in BE. Izračunaj razmerje $AS:SF$, in primerjaj ploščini trikotnikov ABC in ASB!

(35 točk)

(b) V standardni bazi je $\vec{a}=(1,2,0)$ in $\vec{b}=(1,0,-1)$. Vektor $\vec{c}$ oklepa z ravnino Σ, v kateri ležita $\vec{a},\vec{b}$ kot $\phi=30°$. Poišči njegovo dolžino, če veš, da je volumen paralelepipida, ki ga razpenjajo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ enak 1.

(35 točk)

(c) Poišči enačbo premice skozi točko $T(1,2,0)$, ki pravokotno seka premico $p: \frac{x-1}{2}=1-y=-z$. V kateri točki se premici sekata?

(35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE
B

25.11.1997

(a) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(0, 2, -3)$, seka premico $\frac{4y-4}{3} = z,\ x = -1$ pri $y = 2$, in oklepa z njo kot $30°$.

(35 točk)

(b) Dana sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Poišči vse vektorje $\vec{x}$, ki zadoščajo enačbi

$$(\vec{x} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{x})$$

in preveri, da je rešitev res prava. (Navodilo: Upoštevaj različne možnosti glede vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, npr., da sta kolinearna, da je eden izmed njiju enak nič, ter da sta linearno neodvisna. Mogoče ti bo v pomoč identiteta $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$)

(35 točk)

(c) V trikotniku ABC je točka F razpolovišče daljice BC, točka E pa deli stranico AC v razmerju $1 : 2$. Bodi S presečišče daljic AF in BE. Izračunaj razmerje $AS : SF$, in primerjaj ploščini trikotnikov ABC in ASE!

(30 točk)

6 Izpiti - kompleksna analiza

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

21.8.1994

1. Dokaži, da je
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c}\,dx = \frac{2\pi\,\mathrm{sgn}\,c}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}; \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ c\neq 0 \text{ in } c^2-a^2-b^2>0)\,.$$

2. Dana je funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin(z^2)}$.
   (a) Poišči vse njene singularnosti in residue v teh singularnostih!
   (b) Reši nalogo tudi za funkcije $f_\nu(z) := \frac{1}{\sin(z^\nu)}$; $(\nu\in\mathbb{Z})$ in preuči vedenje f_ν okoli točke $z=\infty$!

3. Enačbo $y' = y$ z začetnim pogojem $y(0)=1$ rešujemo s pomočjo Eulerjeve osnovne metode. Tako izračunaj približek za $y(1)$ na 2 decimalke! (Nasvet: interval $[0,1]$ razdeli na n enakih podintervalov dolžine h in nato uporabi Eulerjevo metodo. Oceni, kako velik je lahko h, da bo napaka metode manjša od npr. 4. decimalk. Nato oceni še, na koliko mest lahko zaokrožuješ delne rezultate.
   Mogoče ti bo pomagalo dejstvo, da je funkcija $x\mapsto (1+\frac{1}{x})^x$ naraščajoča za $x>0$.)

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto
$$\rho(x) := \begin{cases} a\frac{1}{x}; & x\in[1,2) \\ ax; & x\in[2,3) \end{cases}.$$
   Določi parameter a, skiciraj njeno porazdelitveno funkcijo ter izračunaj matematično upanje in $P(|X|\le 2)$!

5. Izračunaj integral
$$\int_0^1 \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\,dx$$
   na 3 decimalke natančno!
   (Nasvet: Najprej določi število potrebnih korakov, da izračunaš integral na 4 decimalke. Nato izračunaj še na koliko decimalk lahko zaokrožuješ rezultate.)

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

8.9.1994

1. Izračunaj $\oint_\Gamma (z^3+8)^{-2}\,dz$, kjer integriramo v negativni smeri po sklenjeni krivulji Γ podani z enačbo $|z+3i| = 2|z+3|$!

2. Območje $\mathcal{D} := K(i,1)\backslash K(0,1)$ preslikaj povratno konformno na enotski krog !

3. Izračunaj integral $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ na 4 decimalke. Vsak korak mora biti utemeljen !
   (Nasvet: najprej določi število korakov, da bo napaka metode manjša od npr. 5 decimalk, nato določi še, na koliko decimalk lahko zaokrožuješ delne rezultate.)

4. Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X je podana z

$$p(x) := Ax^6|x|e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Določi konstanto A, izračunaj disperzijo ter matemetično upanje spremenljivke X^n; $n \in \mathbb{N}$!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

6.12.1994

1. Izračunaj $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ na pet decimalk natančno.
   (Nasvet: najprej oceni koliko členov je treba vzeti, da bo napaka metode manjša od npr. 10^{-6}, nato pa še, na koliko decimalk moramo zaokroževati delne rezultate, da bo rezultat točen na pet decimalk.)

2. Ugotovi vse možne limite in red konvergence zaporedja

$$x_{r+1} := \frac{2x_r^3 + (a+2)x_r^2 - a}{3x_r^2 + 2(a+2)x_r + (2a+1)} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

   (Nasvet: eden izmed korenov enačbe $a + (1+2a)x + (2+a)x^2 + x^3 = 0$ je tudi $x = -1$.)

3. Kam se preslika območje $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z-3| \leq 3,\ |z-2| \geq 2,\ |z-5| \geq 1\}$ pri preslikavi $w(z) := \frac{1}{z}$?

4. Slučajna spremenljivka X ima verjetnostsno gostoto podano z

$$p(x) := \begin{cases} \frac{a}{1+x^4;} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

   Določi konstanto a in izračunaj matematično upanje ter disperzijo spremenljivke X.

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

6.2.1995

1. Izračunaj $\oint_\Gamma \frac{z}{(z^3+8)^2}\,dz$, kjer integriramo v negativni smeri po sklenjeni krivulji Γ podani z enačbo $|z+3i| = 2|z+3|$!

2. Območje $\mathcal{D} := K(i,1)\backslash K(0,1)$ preslikaj povratno konformno na enotski krog !

3. Po osnovni Eulerjevi metodi rešujemo diferencialno enačbo

$$y' = yx; \quad y(0) = 1.$$

   Z njeno pomočjo izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\left(1+\frac{8}{n^2}\right)\left(1+\frac{12}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{4n}{n^2}\right) \;!$$

4. Palico dolžine a slučajno prelomimo. Naj slučajna spremenljivka X meri dolžino krajšega izmed dobljenih delov. Izračunaj njeno porazdelitev in gostoto porazdelitve!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

21.2.1995

1. Bodi f holomorfna funkcija in $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ kompleksne konstante. Ali je funkcija

$$g(x) := \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) + \beta \cdot \operatorname{Re} f(x) + i\Big(\gamma \cdot \operatorname{Im} f(x) + \delta \cdot \operatorname{Im} f(x)\Big)$$

analitična?

2. Naj bodo $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ števila, za katere je

$$x_n + iy_n = (1 + i\sqrt{3})^n \qquad (i^2 = -1;\ n \in \mathbb{N}).$$

Dokaži, da je

$$x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} = 2^{2n-2}\sqrt{3}$$

3. Izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \left(e^{\cos t}\cos(\sin t) - ie^{-\cos t}\sin(\sin t)\right) \cdot (i\cos t - \sin t)\, dt$$

(Nasvet: Poizkusi ga preoblikovati na kompleksni integral)

4. Kam se preslika območje

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 2 \,\&\, |z-1| > 1\}$$

pri preslikavi

$$f(z) := e^{\frac{2\pi i z}{z-2}} \ ?$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

21.2.1995

1. Bodi f holomorfna funkcija in $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ kompleksne konstante. Kdaj je funkcija

$$g(x) := \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) + \beta \cdot \operatorname{Im} f(x) + i\Big(\gamma \cdot \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Im} f(x)\Big)$$

analitična?

2. Poišči tako funkcijo ϕ, da bo rešila enačbo

$$\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\phi(t)\,dt = x.$$

(Nasvet: Poiskusi z Laplaceovo transformacijo)

3. Kam se preslika območje

$$\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 2 \,\&\, |z-1| > 1\}$$

pri preslikavi

$$f(z) := e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}\ ?$$

4. Janko in Metka se igrata igrico s kovancem, ki ga mečeta izmenoma. Pri tem tisti, ki je vrgel grb dobi en dodatni kovanec, če pa je vrgel cifro, ne dobi ničesar. Igra se konča, ko ima eden izmed njiju n–kovancev več kot drugi. Izračunaj verjetnost, da zmaga Janko, če

   (a) Je prvi začel Janko

   (b) Je prva začela Metka!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

18.5.1995

1. Območje $\mathcal{D} := K(i,1)\backslash K(0,1)$ preslikaj povratno konformno na enotski krog !

2. Dana je funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin(z^2)}$.

   (a) Poišči vse njene singularnosti in residue v teh singularnostih!

   (b) Reši nalogo tudi za funkcije $g(z) := \frac{1}{\sin(z^2)}$ in preuči vedenje g okoli točke $z = \infty$!

3. Enačbo $y' = y$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$ rešujemo s pomočjo Eulerjeve osnovne metode. Tako izračunaj približek za $y(1)$ na 2 decimalke! (Nasvet: interval $[0,1]$ razdeli na n enakih podintervalov dolžine h in nato uporabi Eulerjevo metodo. Oceni, kako velik je lahko h, da bo napaka metode manjša od npr. 4. decimalk. Nato oceni še, na koliko mest lahko zaokrožuješ delne rezultate.
   Mogoče ti bo pomagalo dejstvo, da je funkcija $x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$ naraščajoča za $x > 0$.)

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto
$$\rho(x) := \begin{cases} a\frac{1}{x}; & x \in [1,2) \\ ax; & x \in [2,3) \end{cases}.$$
   Določi parameter a, skiciraj njeno porazdelitveno funkcijo ter izračunaj matematično upanje in $P(|X| \leq 2)$!

5. Izračunaj integral
$$\int_0^1 \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\, dx$$
   na 3 decimalke natančno!
   (Nasvet: Najprej določi število potrebnih korakov, da izračunaš integral na 4 decimalke. Nato izračunaj še na koliko decimalk lahko zaokrožuješ rezultate. Najenostavneje gre s Taylorjevo formulo!)

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

6.6.1995

1. Poišči vse funkcije Φ, da bo
$$u(x,y) := \Phi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$$
realni del neke analitične funkcije f. Določi tudi f !

2. Poišči prvih pet, od nič različnih členov pri razvoju funkcije
$$f(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$
v Legendrove polinome na intervalu $[-1,1]$.

3. Naj bo $p(a) = a$ in $p(b) = b$. Za katere vrednosti konstant $a, b \in [0,1]$ je
$$p(A/B) < \frac{a+b-1}{b}?$$

4. Izračunaj inverzno Laplaceovo transformiranko od
$$F(p) := \frac{1}{p^3+1}!$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

31.8.1995

1. Naj bo α poljuben koren enačbe

$$(1+z)^n + z^n = 0, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dokaži, da je $\operatorname{Re}\alpha = -\frac{1}{2}$.

2. Poišči vse singularne točke diferencialne enačbe II reda

$$(3z^2 + 7z + 4)\omega'' + (18z + 22)\omega' + 18\omega = 0.$$

V okolici celoštevilske pravilne singularne točke poišči tudi splošno rešitev gornje enačbe!

3. Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X je podana z

$$p(x) := Ax^6|x|e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Določi konstanto A, ter izračunaj disperzijo in matematično upanje spremenljivke X !

4. Izračunaj inverzno Laplaceovo transformiranko funkcije

$$f(z) := \frac{-2 + z - z^2}{-1 + z - z^2 + z^3}$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

14.9.1995

1. Naj bo C enostavno sklenjena krivulja in točka a leži znotraj C. Izračunaj integral
$$\oint_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^k}$$
v odvisnosti od $k \in \mathbb{Z}$!

2. Dokaži, da je $y = x^\alpha[AJ_\nu(\beta x^\gamma) + BN_\nu(\beta x^\gamma)]$ splošna rešitev diferencialne enačbe
$$x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + [(\beta\,\gamma x^\gamma)^2 + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)]y = 0.$$
S pomočjo dokazanega zapiši splošno rešitev Riccatijeve enačbe $u' = u^2 + 9x^3$ s pomočjo Besselovih funkcij!
(Nasvet: $u = -\frac{y'}{y}$)

3. S pomočjo Laplaceove transformacije poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y(x) + y''(x) = x\,\sin(x)$$
z začetnimi pogoji $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. Dva igralca zaporedoma pobirata kroglice iz žare, v kateri je bilo v začetku n belih in m črnih krogel. Zmaga tisti, ki prej potegne belo. Kolikšna je verjetnost, da zmaga tisti igralec, ki je igro začel, če
   (a) kroglice vsakič vrneta nazaj v žaro;
   (b) kroglic ne vračata ?

   Ali sta ti dve verjetnosti enaki?

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

23.1.1996

1. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(x,0) = \sin 2\pi x, \quad U(0,t) = U(1,t) \equiv 0;$$

   tu je $x \in [0,1]$ in $t \geq 0$.

2. Izračunaj $\oint_\Gamma \frac{1}{64z+16z^4+z^7}\,dz$, kjer integriramo v negativni smeri po sklenjeni krivulji Γ podani z enačbo $|z+3i| = 2|z+3|$!

3. Dokaži, da je $y = x^\alpha[AJ_\nu(\beta x^\gamma) + BN_\nu(\beta x^\gamma)]$ splošna rešitev diferencialne enačbe

$$x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + [(\beta\,\gamma x^\gamma)^2 + (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)]y = 0.$$

   S pomočjo dokazanega zapiši splošno rešitev Riccatijeve enačbe $u' = u^2 + 9x^3$ s pomočjo Besselovih funkcij!
   (Nasvet: $u = -\frac{y'}{y}$)

4. Dva igralca zaporedoma pobirata kroglice iz žare, v kateri je bilo v začetku n belih in m črnih krogel. Zmaga tisti, ki prej potegne belo. Kolikšna je verjetnost, da zmaga tisti igralec, ki je igro začel, če kroglice vsakič vrneta nazaj v žaro ?

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

18.6.1996

1. Dokaži, da za vsako analitično funkcijo f velja

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 \equiv 4\left|f'(z)\right|^2 \quad (z = x + iy).$$

2. Izračunaj funkcijo

$$\phi(r) := \oint_{|z-(1+i)|=r} \frac{dz}{1+z^2},$$

   v odvisnosti od parametra r.

3. Za kakšne dogodke A in B velja enakost

$$P[A] = P[A|B] + P[A|\overline{B}]\ ?$$

   Tu nam $P[X]$ pomeni verjetnost dogodka X.
   (Nasvet: Upoštevaj, da mora biti $P[A] \geq P[AB]$.)

4. Hitrost telesa v točki $T(x, y)$ je enaka razdalji med to točko in koordinatnim izhodiščem. Poišči krivuljo, po kateri se mora gibati telo, da bo najhitreje prišlo iz $T_1(1, 0)$ v $T_2(0, e)$.
   (Nasvet: V dobljeno Eulerjevo enačbo vstavi polarne koordinate $x = r\cos\phi(r)$, $y = r\sin\phi(r)$.)

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

2.7.1996

1. Izračunaj integral
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 10x}{2+\cos x}\, dx$$

2. Poišči inverzno Laplaceovo transformiranko od funkcije
$$F(p) := \ln(\frac{p+1}{p-1}).$$
(Nasvet: Pomagaj si s pravilom o odvajanju Laplaceove transformiranke.)

3. Na 1000 metrsko progo sta padla dva leteča krožnika. Ker je šlo za nesrečo, je bil njun padec povsem slučajen in neodvisen drug od drugega. Kakšna je verjetnost, da je prvi krožnik padel bližje začetku proge kot drugi?

4. S pomočjo razvoja v vrsto reši diferencialno enačbo
$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad y(0) = 1/2,\ y'(0) = 0$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

2.7.1996

1. Izračunaj integral
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 10x}{3+\cos x}\, dx$$

2. Poišči inverzno Laplaceovo transformiranko od funkcije
$$F(p) := \ln(\frac{p+1}{p-1}).$$
(Nasvet: Pomagaj si s pravilom o odvajanju Laplaceove transformiranke.)

3. Na enotski krog so padla tri zrnca peska. Kakšna je verjetnost, da oblikujejo trikotnik, v katerem so vsi koti manjši od 90°?
(Nasvet: Z morebitnim vrtežem kroga lahko dosežeš, da je eno zrnce točno na točki 1; ostala dva pa sta seveda še naključna.)

4. S pomočjo razvoja v vrsto reši diferencialno enačbo
$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

2.9.1996

1. Izračunaj integral
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx;$$
pomagaj si z $4\sin^3 x = -\sin 3x + \cdots$.

2. Reši diferencialno-diferenčno enbačbo
$$y'(x) = y(x-1) + 1; \quad y(0) = 0$$
(Nasvet: Pomagaj si z $\frac{1}{p-e^{-p}} = \sum a_k \frac{e^{-kp}}{p^k}$.)

3. S pomočjo razvoja v vrsto okoli točke 0 poišči rešitev enačbe
$$y'' + x^2 y = 1 + x + x^2 \qquad y(0) = 0$$
in poišči konvergenčni polmer dobljene vrste.

4. Kocka, ki ima pobarvane stranice, je razdeljena na 1000 enakih kockic; v notranjosti velike kocke ni nobene barve. Veliko kocko razdremo in na slepo izvlečemo eno malo kockico. Poišči verjetnost, da bo imela dve stranici pobarvani!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

17.9.1996

1. S pomočjo Laplaceove transformiranke reši parcialno diferencialno enačbo
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \qquad (x, t > 0)$$
z začetnim pogojem $u(x, 0) = 0$ in robnim $u(0, t) = u_0$.

2. Razvij
$$\frac{1 + z^2(z-1)\sqrt{z^2 - 2z + 2}}{z - 1}$$
v Laurentovo vrsto okoli točke $z_0 = 1$ in določi območje konvergence. (Pri kvadratnem korenu vzamemo tisto vejo, za katero je $\sqrt{1} = 1$.)

3. Poišči množico točk z, ki se pri preslikavi
$$w : z \mapsto \frac{z + 2i}{2iz - 1}$$
preslikajo na množico $\{w;\ \ |w| = 1\}$.

4. Poišči verjetnost, da bodo koreni kvadratne enačbe
$$x^2 + 2ax + b$$
   (a) realni.
   (b) pozitivni.

   (Tu sta a in b realni števili; $|a| \leq n$ in $|b| \leq m$.)

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

21.1.1997

1. Funkciji f in g sta definirani z

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 1} \quad \phi(z) := \frac{z}{1 - z}$$

   Izračunaj integral

$$\int_\Delta \left(e^{g(z)} + f(z)\right) \, dz,$$

   kjer integriramo po trikotniku Δ z oglišči v točkah $2 + t,\ i - t,\ -i - t$; tu je $t \in \mathbb{R}^+$. Kaj se zgodi pri $t = 1$?

2. Dana je funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin(z^2)}$. Poišči vse njene singularnosti in residue v teh singularnostih!

3. Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti

$$\rho(x) := \begin{cases} a\frac{1}{x}; & x \in [1, 2) \\ ax; & x \in [2, 3) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določi parameter a, skiciraj njeno porazdelitveno funkcijo ter izračunaj matematično upanje in $P(X \leq 2)$!

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo

$$\ddot{x} - x = \begin{cases} 2\mathrm{sh}(t - 1); & t \geq 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases} \qquad \big(x(0) = \dot{x}(0) = 0\big).$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

27.1.1997

1. Bodi f holomorfna funkcija in $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ kompleksne konstante. Kdaj je funkcija

$$g(x) := \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) + \beta \cdot \operatorname{Im} f(x) + i\Big(\gamma \cdot \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Im} f(x)\Big)$$

analitična?

2. S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo

$$\ddot{x} + 4x = t\sin(2t); \qquad \dot{x}(0) = x(0) = 0.$$

3. Bodi $a > 0$. Razvij funkcijo $f(x) := e^{-ax}$ po Laguerrovih polinomih (le–ti so ortogonalni na $[0, \infty)$ z utežjo e^{-x}).

4. Kolikokrat poprečno moramo seči v žep, da bomo lahko stopili v stanovanje, če imamo v žepu k na pogled enakih ključev, od katerih pa je natanko eden pravi. Pri tem ključe ne vračamo nazaj.

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

4.2.1997

1. Bodi $a > 0$ konstanta. Poišči ekstremalo funkcionala

$$F(y) := \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx; \qquad y(0) = y(a) = 0.$$

1'. Dokaži, da za kompleksni števili a, b velja:

$$|a + b| \leq |1 + \overline{a}b|, \quad (|a| \leq 1,\ |b| \leq 1)!$$

Kdaj velja enačaj ?

2. Izračunaj integral

$$\oint_\Gamma \frac{1}{ze^{\pi z} + z + e^{\pi z} + 1} dz;$$

kjer integriramo v pozitivni smeri po trikotniku z oglišči

$$z_1 = \frac{1}{3} + 2i, \quad z_2 = -8 - 11\frac{5}{9}i, \quad z_3 = 1 + 2i$$

3. Poišči tako funkcijo ϕ, da bo rešila enačbo

$$\int_0^x \mathrm{ch}(x - t)\phi(t)\,dt = 2x.$$

4. Z metodo nedoločenih koeficientov poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' + x^2y'' + 5xy' + 3y = 0.$$

Določi tudi konvergenčni polmer dobljene vrste !

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

6.6.1997

1. Poišči vse funkcije Φ, da bo

$$u(x,y) := \Phi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$$

realni del neke analitične funkcije f. Določi tudi f !

2. Izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(a-\cos x)^2}\,dx, \qquad (a>1).$$

2'. Poišči prvih pet, od nič različnih členov pri razvoju funkcije

$$f(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

v Legendrove polinome na intervalu $[-1,1]$.

3. Dano je pet dolžin: $1, 3, 5, 7, 9$. Na slepo srečo vzamemo tri med njimi. Izračunaj verjetnost, da bomo iz njih lahko sestavili trikotnik.

4. S pomočjo Laplaceove transformacije poišči rešitev diferencialno–diferenčne enačbe

$$y'(x) = y(x-1) + 1; \qquad y(0) = 0$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

20.6.1997

1. Dana je večlična funkcija
$$f(z) := \sin \tfrac{1}{z-1} \, \ln z$$
Poišči residuum funkcije f pri logaritemski veji, določeni z $\ln 1 = 2k\pi\, i$.

2. Bodi f holomorfna funkcija in $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ kompleksne konstante. Kdaj je funkcija
$$g(x) := \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) + \beta \cdot \operatorname{Im} f(x) + i\Big(\gamma \cdot \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Im} f(x)\Big)$$
analitična?

3. S pomočjo Laplaceove transformacije poišči tako funkcijo ϕ, da bo rešila enačbo
$$\frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)e^{-(t-x)}\phi(t)\, dt = \phi(x).$$

4. Vsaka od 9 kroglic se lahko z enako verjetnostjo znajde v eni izmed treh, na začetku praznih, škatel. Poišči verjetnost, da
   (a) bodo v vsaki škatli po tri kroglice
   (b) bodo v *eni škatli* 4 kroglice, in v drugi 3 (in v tretji 2).

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

20.8.1997

1. S pomočjo Laplaceove transformiranke reši sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} + \dot{y} = t, \quad \ddot{x} - y = e^{-t}$$

   z začetnimi pogoji $x(0) = 3,\ \dot{x}(0) = -2,\ y(0) = 0$.

2. Naj bosta p in q realni števili. Za katere vrednosti p, q ima enačba

$$pz^2 - qz + 1 = 0$$

   rešitve, za katere je $|z| > 1$?
   (Nasvet: Najprej obravnavaj primer, ko je vsaj ena rešitev kompleksna, nato pa še, ko sta obe realni.)

3. S pomočjo razvoja v vrsto reši diferencialno enačbo

$$(1 + x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$$

   v okolici točke 0. Poišči tudi konvergenčni polmer!

4. Poišči povprečno število metov uteženega kovanca, da bo prvič padel grb, če je verjetnost, da pade grb, enaka p.

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

29.8.1997

1. S pomočjo Laplaceove transformacije reši sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} + \dot{y} = t, \quad \ddot{x} - y = e^{-t}$$

   z začetnimi pogoji $x(0) = 3,\ \dot{x}(0) = -2,\ y(0) = 0.$

2. Naj bosta p in q realni števili. Za katere vrednosti p, q ima enačba

$$pz^2 - qz + 1 = 0$$

   rešitve, za katere je $|z| > 1$?
   (Nasvet: Najprej obravnavaj primer, ko je vsaj ena rešitev kompleksna, nato pa še, ko sta obe realni.)

3. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + r^2}\, dx \qquad (a, r > 0)$$

4. S pomočjo razvoja v vrsto reši diferencialno enačbo

$$(1 + x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$$

   v okolici točke 0. Poišči tudi konvergenčni polmer!

5. Poišči povprečno število metov uteženega kovanca, da bo prvič padel grb, če je verjetnost, da pade grb, enaka $p = \frac{1}{4}$.

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

12.9.1997

1. Izračunaj $\oint_\Gamma \frac{z}{(z^3+8)^2}\, dz$, kjer integriramo v negativni smeri po sklenjeni krivulji Γ podani z enačbo $|z+3i| = 2|z+3|$!

2. Poišči rešitev naslednje diferencialno–diferenčne enačbe:

$$y'(x+1) = y(x) + 1; \quad y(0) = 0$$

3. S pomočjo funkcije Γ izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

(Nasvet: Mogoče bi bila uporabna formula $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$.)

4. Palico dolžine a slučajno prelomimo. Naj slučajna spremenljivka X meri dolžino krajšega izmed dobljenih delov. Izračunaj njeno porazdelitev in gostoto porazdelitve!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

27.1.1997

1. Bodi f holomorfna funkcija in $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ kompleksne konstante. Kdaj je funkcija

$$g(x) := \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) + \beta \cdot \operatorname{Im} f(x) + i\Big(\gamma \cdot \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Im} f(x)\Big)$$

analitična?

2. S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo

$$\ddot{x} + 4x = t\sin(2t); \qquad \dot{x}(0) = x(0) = 0.$$

3. Bodi $a > 0$. Razvij funkcijo $f(x) := e^{-ax}$ po Laguerrovih polinomih (le–ti so ortogonalni na $[0, \infty)$ z utežjo e^{-x}).

4. Kolikokrat poprečno moramo seči v žep, da bomo lahko stopili v stanovanje, če imamo v žepu k na pogled enakih ključev, od katerih pa je natanko eden pravi. Pri tem ključe ne vračamo nazaj.

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

25.2.1998

1. Območje
$$\mathcal{D} := \left\{ z \in \mathbb{C};\ \ |z| > 2,\ |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2} \right\}$$
preslikaj konformno na zgornjo polravnino.

2. Dana je funkcija $f(z) := \frac{1}{\sin(z^2)}$. Poišči vse njene singularnosti in residue v teh singularnostih!

3. Poišči rešitev diferencialno–diferenčne enačbe
$$y''(x) - y(x-1) = x \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena z gostoto
$$\rho(x) := \begin{cases} a\frac{1}{x}; & x \in [1,2) \\ ax; & x \in [2,3) \end{cases}.$$
Določi parameter a, skiciraj njeno porazdelitveno funkcijo ter izračunaj matematično upanje in $P(X \le 2)$!

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

3.6.1997

1. Bodi $f = u + iv$ razcep analitične funkcije na realni in imaginarni del. Denimo, da je

$$u(x,y) - v(x,y) = x^2 + \frac{x+y}{x^2+y^2} - y(y+2x). \qquad (z = x + iy)$$

   Poišči f.

2. Razvij funkcijo e^{-x} po Laguerrovih polinomih L_n.
   (Nasvet: Pomagaj si z Rodriguesovo formulo.)

3. Na daljici dolžine 1 slučajno izberemo tri točke. Kakšna je verjetnost, da prva izbrana točka leži med zadnjima dvema?

4. Izračunaj inverzno Laplaceovo transformiranko od

$$F(p) := \frac{1}{p^3+1}!$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

24.6.1998

1. Poišči konformno preslikavo, ki območje

$$\mathscr{D} := \{z \in \mathbb{C};\ \ \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \ |z - i| \leq 1\}$$

   povratno enolično preslika na enotski krog.

2. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(x,0) = 3 \sin 2\pi x, \quad U(0,t) = U(1,t) \equiv 0;$$

   tu je $x \in [0,1]$ in $t \geq 0$.

3. Integrala

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{in} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^5}$$

   izrazi s pomočjo funkcije Γ. Drugi integral lahko tudi eksplicitno izračunaš!

4. Diskretna slučajna spremenljivka X ima gostoto verjetnosti

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{A}; \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

   pri neki konstanti n. Izračunaj A ter določi matematično upanje in disperzijo X. Kakšna je verjetnost, da X zavzame le soda števila?

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

20.8.1998

1. Funkciji f in g sta definirani z
$$f(z) := \frac{1}{z^2-1} \quad g(z) := \frac{z}{1+z}$$
Izračunaj integral
$$\int_\Delta \left(e^{g(z)} + f(z)\right)\, dz,$$
kjer integriramo po robu trikotnika Δ z oglišči v točkah $1+t,\ i-t,\ -i-t$; tu je $t>0$. Kaj se zgodi pri $t=1$?

2. Razvij funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} 0; & -1<x<0 \\ 1; & 0<x<1 \end{cases}$$
v vrsto iz Legendrovih polinomov
(Nasvet: Uporabi Rodriguesovo formulo. Po integriranju moraš izračunati še vrednost $\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k$ v točki 0. Najlažje se to stori z razvojem v binomsko vrsto.)

3. Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena z gostoto verjetnosti
$$\rho(x) := \begin{cases} a\frac{1}{\sqrt{x}}; & x \in [0,2) \\ ax; & x \in [2,4) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$
Določi parameter a, skiciraj njeno porazdelitveno funkcijo ter izračunaj matematično upanje in $P(1 \le X \le 3)$!

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši Cauchyjevo nalogo
$$\ddot{x} - x = \begin{cases} 2\operatorname{ch}(t-1); & t \ge 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}; \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

IZPIT IZ MATEMATIKE IV

7.9.1998

1. Poišči konformno preslikavo, ki območje

$$\mathcal{D} := \Big\{z \in \mathbb{C};\ \ -5/8\,\pi < \arg\big(z - (1+i)\big) < -\pi/4\Big\}$$

preslika na prvi kvadrant kompleksne ravnine. (Tu je $\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to (-\pi, \pi]$.)

2. Reši naslednji sistem integralskih enačb:

$$\begin{aligned} v(x) &= 1 + \int_0^x \sinh(t-x)\,u(t)\,dt - \int_0^x e^{-t+x}\,v(t)\,dt \\ u(x) &= x + \int_0^x e^{t-x}\,u(t)\,dt + \int_0^x (-t+x)\ v(t)\,dt \end{aligned}$$

3. Poišči funkcijo f, da bo diferencialna enačba

$$xy'' + f(x)y' + \lambda y = 0$$

generirala ortogonalne polinome na intervalu $[0, \infty)$ z utežjo $p(x) := x^2 e^{-x}$. Poišči tudi ustrezne lastne vrednosti.

4. Dva tanka vsako časovno enoto istočasno ustrelita drug proti drugemu; prvi zadene z verjetnostjo p_1 drugi pa s p_2; $0 < p_1, p_2 < 1$. Poišči porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X, ki meri število potrebnih strelov, da se dvoboj konča. Določi tudi poprečen čas do končanja.

7 Izpiti - diskretna matematika

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

6.2.1996

1. Za število $\pi(\approx 3.14)$ je znano, da je *transcendentno*; to pomeni sledeče: Če je
$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$
polinom, in so $a_n, \ldots, a_0$ cela števila, potem $p(\pi) \neq 0$.
   (a) Poišči najmanjši podkolobar v $\mathbb{R}$, ki vsebuje število π.
   (b) Poišči presek tega kolobarja s kolobarjem celih števil $\mathbb{Z}$.

2. Poišči *vse* podgrupe v permutacijski grupi S_3!

3. Iz grafa K_5 odstranimo poljubno povezavo. Ali je ravninski? V koliko potezah ga lahko narišemo, ne da bi odmaknili svinčnik od papirja?

4. Na množici $\mathbb{N} \cup \{0\}$ je definirana relacija R s predpisom
$$(a, b) \in R \equiv 6\Big|(a + 3b)|.$$
Ali je R ekvivalenčna? Ali je relacija delne urejenosti?

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

27.8.1996

1. Napiši vse elemente množice A_3, ki jo sestavljajo natanko vse sode permutacije grupe S_3. Dokaži, da je A_3 podgrupa edinka v S_3. Kateri znani grupi je izomorfna S_3/A_3?

2. Poišči vsa naravna števila n, za katera je graf K_n Eulerjev. Za katere n ima K_n Eulerjev sprehod, pa nima Eulerjevega obhoda? Vsak korak mora biti utemeljen!

3. V mreži $(A, \cap, \cup)$ velja pri vsakem $a \in A$ enakost $a \cup x = a \cup y$. Dokaži, da je tedaj nujno $x = y$.

4. Naj bo preslikava $f : A \to A$ bijekcija. Za vsak $a \in A$ lahko definiramo množico

$$\begin{aligned} T(a) &:= \{f^n(a);\ \ n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots, (f^{-1} \circ f^{-1})(a), f^{-1}(a), f(a), (f \circ f)(a), (f \circ f \circ f)(a), \ldots\}. \end{aligned}$$

Dokaži, da velja sledeč sklep:

$$\text{Če je } T(a) \cap T(b) \neq \emptyset, \text{ potem je } T(a) = T(b).$$

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR za višješolce

27.8.1996

1. Napiši grupi $S(\alpha)$ in $S(\beta)$, ki sta generirani s permutacijama

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oz.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   in dokaži, da sta izomorfni.

2. Poišči vsa naravna števila n, za katera je graf K_n Eulerjev. Za katere n ima K_n Eulerjev sprehod, pa nima Eulerjevega obhoda? Vsak korak mora biti utemeljen!

3. V mreži $(A, \cap, \cup)$ velja pri vsakem $a \in A$ enakost $a \cap x = a \cap y$. Dokaži, da je tedaj nujno $x = y$.

4. Dokaži, da za poljubne množice A, B, C velja sledeča enakost:

$$(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B.$$

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

13.9.1996

1. V množico $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ uvedemo dvomestno operacijo $*$:

$$a * b := |a - b|.$$

   (a) Ali je operacija $*$ asociativna?

   (b) Ali obstaja enota v $(\mathbb{N}, *)$?

   (c) Ali ima vsak element iz $(\mathbb{N}, *)$ svoj inverz?

   (d) Ali je $(\mathbb{N}, *)$ izomorfna standardni strukturi $(\mathbb{N}, +)$ z navadnim seštevanjem?

2. Naj bodo A,B in C dane množice, za katere velja $B \subseteq A$ in $A \cap C = \emptyset$. Poišči vse rešitve sistema

$$A \setminus X = B, \qquad X \setminus A = C\ !$$

3. Poišči vse izomorfizme med grupama $\mathbb{Z}_6$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

4. Ana in Branka sta na večerjo povabile 10 prijateljev. V tem dvanajstčlanskem društvu se vsak pozna vsaj s šestimi drugimi osebami. Dokaži, da se lahko posedejo za okroglo mizo na tak način, da bo vsak poznal svoja dva soseda!
(Nasvet: Graf je Hamiltonov, če je $\delta \geq \frac{v}{2}$.)

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR za višješolce

13.9.1996

1. Ali sta naslednja sklepa veljavna

   (a) $\neg p,\ p \quad \models \quad q$

   (b) $p \wedge q,\ \neg p \Rightarrow q \quad \models \quad \neg q$

2. Ana in Branka sta na večerjo povabile 10 prijateljev. V tem dvanajstčlanskem društvu se vsak pozna vsaj s šestimi drugimi osebami. Dokaži, da se lahko posedejo za okroglo mizo na tak način, da bo vsak poznal svoja dva soseda!
   (Nasvet: Graf je Hamiltonov, če je $\delta \geq \frac{v}{2}$.)

3. Na množici $\mathbb{N}^+$ je definirana relacija $\sim$, podana z

   $$m \sim n \equiv m^2 - n^2 \text{ je deljivo z } 10.$$

   Ali je $\sim$ simetrična? Če je, določi ekvivalenčne razrede!

4. Permutacija $\pi \in S_{12}$ je določena s predpisom

   $$\pi : i \mapsto (i \bmod 12) + 1.$$

   Ali je permutacija π^7 soda ali liha?

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

15.5.1997

1. Naj bosta A, B množici in $f : A \to B$ ter $g : B \to A$ funkciji, za kateri je $fg = \mathrm{Id}_A$. Ali je tedaj nujno tudi $gf = \mathrm{Id}_B$?

2. Napiši množico $\mathcal{A}$ vseh podgrup od $C_2 \times C_2$. V množico $\mathcal{A}$ vpeljemo relacijo "je podmnožica od". Ali je $\mathcal{A}$ v tej relaciji mreža? Če je, ali je distributivna oz. komplementirana?

3. Naj množice A, B, C zadoščajo relaciji $A = B \cap C$.

   (a) Ali velja $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$?

   (b) Ali velja $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$?

4. Najmanj koliko barv je potrebno, da pobarvamo točke grafa

   (a) $K_{3,3}$

   (b) K_5

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

20.6.1997

1. Naj bo $n > 0$ neko naravno število. V množico $\mathbb{N}_0^n$ uvedemo leksikografsko relacijo $\preceq$ na podoben način, kot so urejene besede v slovarju, torej

$$\bigl(i_1, i_2 \ldots, i_n\bigr) \preceq \bigl(j_1, j_2, \ldots, j_n\bigr) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l}\text{če je } i_m > j_m \text{ za nek } m\text{, potem}\\ \text{obstaja } k < m\text{, da je } i_k < j_k\end{array}$$

   Pokaži, da ima vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}_0^n$ minimalen element!

2. Bodi $\mathbb{Z}_{30}$ kolobar vseh ostankov pri deljenju s 30 in $S := \{1, 3, 5, 15\} \subseteq \mathbb{Z}_{30}$. V množico $A := \mathbb{Z}_{30} \times S$ vpeljemo relacijo $\sim$ s predpisom:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow \exists\, s \in S :\ (ad - bc)s = 0 \in \mathbb{Z}_{30}.$$

   Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija?

3. Poišči π^{1997}, kjer je $\pi \in S_9$ podana z

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 9 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. V grafu G naj ima vsaka točka stopnjo vsaj 3. Pokaži, da G vsebuje vsaj en cikel!

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

29.8.1997

1. Koliko je vseh bijekcij iz množice s sedmimi elementi $\mathbb{N}_7$ vase, ki ohranjajo element 5? Ali te bijekcije z operacijo „kompozitum„ tvorijo grupo?

2. Naj bosta $a, b \geq 0$ dve realni števili. Množico točk

$$P_{a,b} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\right\}$$

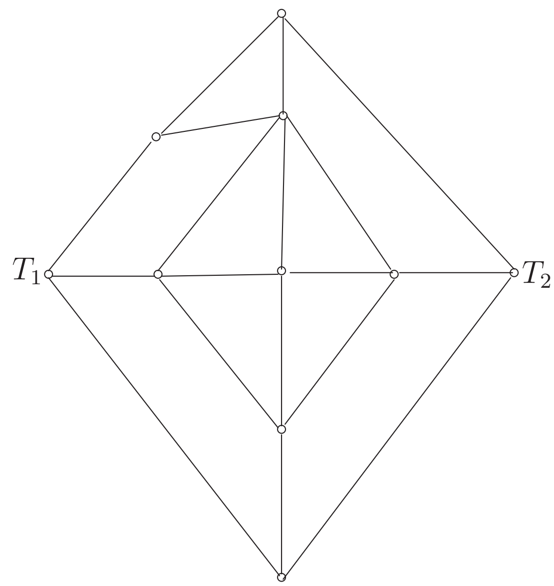
imenujemo *pravokotnik*. Pokaži, da je množica pravokotnikov

$$A := \left\{P_{a,b};\ \ a, b \geq 0\right\}$$

mreža za relacijo $\subseteq$; tj. „je vsebovan v“. Določi tudi infimum in supremum poljubnih dveh elementov množice A.

3. Poišči najmanjši podkolobar v $\mathbb{C}$, ki vsebuje število $\alpha := (1 + i)$

4. Ali lahko graf na sliki pobarvamo s tremi barvami tako, da bosta točki T_1 in T_2 različne barve?


T_1
T_2

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

29.8.1997

1. Koliko je vseh bijekcij iz množice s sedmimi elementi $\mathbb{N}_7$ vase, ki ohranjajo element 5? Ali te bijekcije z operacijo „kompozitum„ tvorijo grupo?

2. Naj bosta $a, b \geq 0$ dve realni števili. Množico točk

$$P_{a,b} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\right\}$$

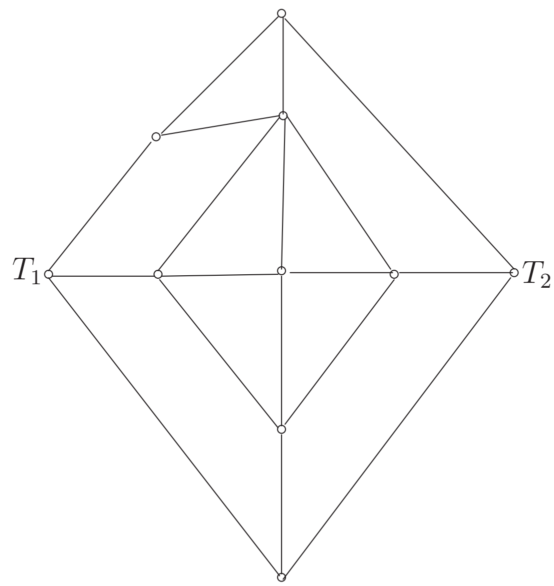
imenujemo *pravokotnik*. Pokaži, da je množica pravokotnikov

$$A := \left\{P_{a,b};\ \ a, b \geq 0\right\}$$

mreža za relacijo $\subseteq$; tj. „je vsebovan v". Določi tudi infimum in supremum poljubnih dveh elementov množice A.

3. Poišči najmanjši podkolobar v $\mathbb{C}$, ki vsebuje število $\alpha := (1 + i)$

4. Ali lahko graf na sliki pobarvamo s tremi barvami tako, da bosta točki T_1 in T_2 različne barve?


T_1
T_2

IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR

15.9.1997

1. Bodi $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ kolobar vseh 2×2 matrik z realnimi koeficienti. Vanj uvedemo relacijo $\mathcal{R}$ s predpisom

$$(A, B)\, \mathcal{R}\, (C, D), \text{ če je } AD = BC.$$

   (Pazi na vrstni red množenja!). Ali je $\mathcal{R}$ ekvivalenčna relacija? V posebnem: ali je refleksivna? Ali je simetrična?

2. Naj bo G povezan graf. Pokaži, da obstaja v G taka točka v, da je $G \backslash \{v\}$ še vedno povezan.
   (Nasvet: Vzemi najdaljšo pot v G in bodi v začetna točka te poti.)

3. V polgrupi $(A, \circ)$ naj bosta za vsaka $a, b \in A$ rešljivi enačbi $ax = b$ ter $ya = b$. Pokaži, da je A grupa.

4. Naj množice A, B, C zadoščajo relaciji $A = B \cup C$.

   (a) Kdaj velja $A \times A = (B \times B) \cup (C \times C)$?

   (b) Kdaj velja $A \times A = (B \times C) \cup (C \times B)$?

8 Izpiti - numerične metode

IZPIT IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

9.6.1997

1. Določi koeficiente v kvadratni formuli

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = A\,f(0) + B\,f(\pi) + C\,f(2\pi) + R$$

   in nato izračunaj $\int_0^{2\pi} \ln(1+x^2)\sin x\,dx$. Oceni napako.

2. Rešujemo sistem enačb

$$\begin{array}{rcrl} x & - & y & = 1 \\ 1{\cdot}1x & - & y & = 2{\cdot}1 \end{array}$$

   Ocenite relativno napako v rešitvi, če v prvi enačbi desno stran nadomestimo z $1{\cdot}1$!

3. Poiščite vse realne korene enačbe

$$2{\cdot}6\,e^x = x^3 - 4{\cdot}1\,x$$

   na 5 decimalk natančno.

Izpit IZ NUMERIČNIH METOD

2.6.1997

1. Matriko A razcepi na produkt $A = L \cdot U$ in nato s pomočjo razcepa reši sistem $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Poišči realne korene enačbe $5x - 5 + \sin x = 0$ na 4 decimalke natančno.

3. Na osnovi podatkov

x	1˙0	1˙1	1˙2
y	1˙0	1˙5	1˙9

izračunaj $y'(1˙1)$ in oceni napako!

Izpit IZ NUMERIČNIH METOD

1.9.1997

1. Na osnovi podatkov

x_i	0	$0{\cdot}6$	$1{\cdot}2$	$1{\cdot}8$	$2{\cdot}4$	$3{\cdot}0$
y_i	0	$0{\cdot}59$	$1{\cdot}95$	$0{\cdot}95$	$0{\cdot}59$	0

   (a) Določite prve tri ortogonalne polinome na mreži ekvidistantnih točk $x_i;\ \ i = 0, 1, \ldots, 5$.

   (b) Za funkcijo f iz tabele konstruirajte aproksimacijski polinom $p(x)$ druge stopnje.

   (c) Izračunajte $\int_0^3 p(x)\,dx$ eksaktno!

   (d) Izračunajte $\int_0^3 f(x)\,dx$ po trapezni formuli tako, da upoštevate vse vrednosti v tabeli.

2. Poiščite vse korene enačbe $\sin(x+1) - \ln x = -1{\cdot}5$ na pet decimalk natančno.

3. Izpeljite kvadraturno formulo, ki je eksaktna za polinome čim višje stopnje:

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = A\,f(-\tfrac{\pi}{4}) + B\,f(0) + C\,(\tfrac{\pi}{4})$$

   Nato izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+x^2}\,dx$.

Izpit IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

1.9.1997

1. (a) Določite prve tri ortogonalne polinome na mreži šestih ekvidistantnih točk $x_i = a + ih$; $i = 0, 1, \dots, 5$.

   (b) Za funkcijo f, ki v točkah mreže po vrsti zavzame vrednosti $y_0, y_1, \dots, y_5$ konstruirajte aproksimacijski polinom $p(x)$ druge stopnje.

   (c) Poiščite polinom $p(x)$ za tabelo

x_i	0	0·6	1·2	1·8	2·4	3·0
y_i	0	0·59	1·95	0·95	0·59	0

   (d) Izračunajte $\int_0^3 p(x)\,dx$ eksaktno!

   (e) Izračunajte $\int_0^3 f(x)\,dx$ po trapezni formuli tako, da upoštevate vse vrednosti v tabeli.

2. Robni problem $y'' - \sqrt{x}\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ rešite z diferenčno metodo. Za h vzemite 0·25.

3. Izpeljite kvadraturno formulo, ki je eksaktna za polinome čim višje stopnje:

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = A\big[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big]$$

   Nato izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+x^2}\,dx$.

Izpit IZ NUMERIČNIH METOD

15.9.1997

1. Poiščite vse korene enačbe $x \ln x = 1$ z navadno iteracijo in Newtonovo metodo. Primerjajte obe metodi s stališča števila korakov potrebnih za natančnost 10^{-5}.

2. Izpeljite kvadraturno formulo oblike stopnje:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = A\, y_0 + B\, y_1 + C\, y_2 + D\, y_1'$$

   Nato izračunajte $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ za $h = 0{\cdot}1$.

3. Za tabelo

x	1	1·5	2	2·5	3
y	3	1·9	1·5	1·3	1·2

   Poiščite aproksimacijsko funkcijo oblike $g(x) := a + \frac{b}{x^2}$ po metodi najmanjših kvadratov. Izračunajte tudi vsoto kvadratov odstopanj.

Izpit IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

15.9.1997

1. Poiščite najmanjša pozitivna korena enačbe $x \cos x = 0{\cdot}2$ z navadno iteracijo in Newtonovo metodo. Primerjajte obe metodi s stališča števila korakov potrebnih za natančnost 10^{-5}.

2. Izpeljite kvadraturno formulo oblike stopnje:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = A\,y_0 + B\,y_1 + C\,y_2 + D\,y_1' \; + R$$

   Nato izračunajte $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$ za $h = 0{\cdot}1$, ocenite napako in jo primerjajte z dejansko.

3. Za tabelo

x	1	1·5	2	2·5	3
y	3	1·9	1·5	1·3	1·2

   Poiščite aproksimacijsko funkcijo oblike $g(x) := a + \frac{b}{x^2}$ po metodi najmanjših kvadratov. Izračunajte tudi vsoto kvadratov odstopanj.

Izpit IZ NUMERIČNE MATEMATIKE

3.2.1998

1. Izpeljite kvadraturno formulo

$$\int_0^h f(x)\,dx = A\,f(\tfrac{h}{3}) + B\,f(h) + R.$$

   (a) Na osnovi te formule izpeljite še formulo za izračun integrala $\int_a^b f(x)\,dx$

   (b) Izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}$ pri delitvi integracijskega intervala na 1, 2, 5 podintervalov.

   (c) Ocenite napako vsakega od približkov in jo primerjajte z dejansko.

   (d) Primerjajte to integracijsko pravilo s trapeznim in Simpsonovim.

2. Rešujemo sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer za matriko $A = \big(a_{ij}\big)$ velja, da je $a_{ij} = 0$ za $i - j > 1$.

   (a) Zapišite eno tako matriko reda 5.

   (b) Algoritem za Gaussovo eliminacijo predelajte za reševanje takega sistema.

   (c) Preštejte potrebne operacije (deljenja in množenja).

   (d) Izračunajte LU razcep matrike reda 4, katere elementi so

$$a_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{|i-j|+1;} & i-j \le 1 \\ 0; & i-j > 1 \end{cases}$$

9 Izpiti - linearna algebra

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

26.1.1999

1. Določi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{b} = 2\vec{c} - \vec{d}, \quad \|\vec{d}\| = \|2\vec{c}\|, \quad \|\vec{c} \times \vec{d}\| = \sqrt{3}\,\vec{c} \cdot \vec{d}$$

(Nasvet: Uporabi identiteto $\|\vec{c} \times \vec{d}\|^2 + (\vec{c} \cdot \vec{d})^2 = \|\vec{c}\|^2\,\|\vec{d}\|^2$.)

2. Poišči presečišče premice $p: \ \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{2} = z$ in ravnine $\Pi: \ x+y+z = 6$. Določi tudi kot pod katerim premica prebode ravnino.

3. Poišči bazo prostora $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$, kjer je

$$A := \begin{pmatrix} -15 & -10 & -5 & -5 \\ 30 & 20 & 10 & 10 \\ -30 & -20 & -10 & -10 \\ 15 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Poišči matriko preslikave v $\mathbb{R}^2$, ki točko najprej zavrti za 60° v pozitivni smeri okoli koordinatnega izhodišča, nato pa jo še prezrcali prek premice $y = 3x$. Ali je ta matrika enaka matriki, ki jo dobimo, če vrstni red operacij zamenjamo?

5. Poišči razdaljo med polinomom $p(t) := t^2$ in podprostorom V, določenim z

$$V := \left\{a + bt; \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

če je skalarni produkt definiran z

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 xp(x)q(x)\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

16.4.1999

1. Dana sta vektorja $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ in $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$, pri čemer poznamo dolžine vektorjev: $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{2}$, ter kote med njimi: $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \frac{\pi}{4}$. Vektorja $\overrightarrow{m}$ in $\overrightarrow{n}$ razpenjata paralelogram. Poišči njegovo ploščino. (Nasvet: Poišči dolžini obeh stranic in kot med njima.)

2. Ravnina Π gre skozi točko $T(3,4,1)$ in je vzporedna premicama:
$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}, \quad \text{in} \quad q: x = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}.$$
Poišči enačbo ravnine Π, ter ugotovi, kam se preslika točka $S(1,-2,1)$ pri zrcaljenju čez Π. Izračunaj še razdaljo premice p od ravnine Π.

3. Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma:
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x,y,z) &= (x-y, y-z, z-x), \\ \mathcal{B}(x,y,z) &= (x-2y, y-2z, z-2x). \end{aligned}$$
Naj bo $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathcal{A}$.
   (a) Zapiši matrike preslikav $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$!
   (b) Poišči bazo prostorov $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A} + \operatorname{Im}\mathcal{C}$.

4. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Poišči pravokotno projekcijo polinomoma $p(t) := t^2$ na podprostor V, določen z
$$V := \left\{a + b(t - t^2);\ \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$
če je skalarni produkt definiran z
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

6.9.1999

1. Dan je trapez $ABCD$, pri katerem sta osnovnici v zvezi $\overline{CD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, za kraka pa velja: $\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{1}{4}\overline{AB}$. Simetrala kota z vrhom v točki A seka daljico DC v točki X. Preveri, če je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{8}\overline{AB}^2$. Nato poišči razmerje $\overline{DX} : \overline{XC}$.

2. Pri danih prostorskih vektorjih $\vec{a}, \vec{b}$ poišči vse rešitve enačbe

$$\vec{x} + \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$$

(Nasvet: enačbo pomnoži skalarno in vektorsko s primernim vektorjem. Mogoče ti bo v pomoč identiteta $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$)

3. Poišči pravokotno projekcijo premice $p : x + y - z = 1,\ x + z = 2$ na ravnino $\Pi : x - y + z = 3$.

4. Poišči lastne vrednosti matrike

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pri vsaki lastni vrednosti poišči tudi vse linearno neodvisne lastne vektorje.

5. Poišči pravokotno projekcijo polinomoma $p(t) := t^2$ na podprostor V, določen z

$$V := \left\{a + b(t - t^2);\ \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

če je skalarni produkt definiran z

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE

25.10.1999

1. Dan je trikotnik ABC z dolžinami stranic $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 4$ in $|\overrightarrow{BC}| = 5$. Točka X deli daljico $\overline{AB}$ v razmerju $1:1$, točka Y pa daljico $\overline{AC}$ v razmerju $1:2$. Bodi Z presečišče premic $\overline{CX}$ in $\overline{BY}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AZ}$ z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$.

2. Dani sta ravnini

$$\Pi_1 : 2x + 2y + z = 3 \quad \text{in} \quad \Pi_2 : x + 2y + 2z = 6$$

   Poišči enačbo premice, ki je od obeh ravnin oddaljena za tri enote. (Rešitev je več!)

3. Naj bo $\mathcal{P}_3$ prostor vseh polinomov stopnje največ 3. Na njem sta dana linearna funkcionala $F, G : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F : p \mapsto p(1) \quad \text{in} \quad G : p \mapsto p'(1)$$

   Poišči bazo preseka njunih jeder.

4. Bodi $\mathcal{Z}$ preslikava, ki točko prezrcali preko premice $y = -3x$, $\mathcal{V}$ pa preslikava, ki točko zavrti za $45°$ v pozitivni smeri okoli koordinantnega izhodišča. Poišči matriko za preslikavo $\mathcal{U} := \mathcal{Z} \circ \mathcal{V}$ v standardni bazi, nato pa še preveri, da je $\mathcal{U}$ tudi zrcaljenje. Okoli katere premice? (Nasvet: Preveri, da ima $\mathcal{U}$ lastni vrednosti ± 1 in da sta ustrezna lastna vektorja pravokotna)

5. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ s standardnim skalarnim produktom poišči ortogonalno projekcijo vektorja $a = (1, 2, 3, 4)$ na prostor

$$V := \{(x, y, z, k);\ \ x + y = 2z - k\}$$