PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 140–145

Boris Lavrič:

VEČKOTNIKI NA KVADRATNI MREŽI

Ključne besede: matematika, geometrija.

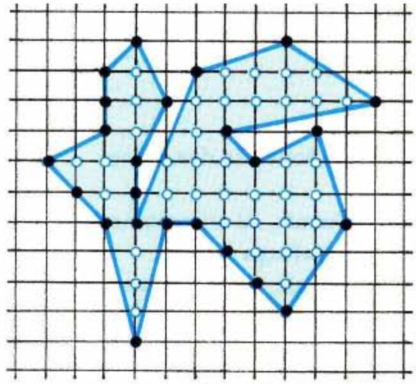
Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1036-Lavric.pdf

VEČKOTNIKI NA KVADRATNI MREŽI

Na mreži iz kvadratkov ploščine 1 leži večkotnik, ki ima oglišča v križiščih te mreže. Koliko meri njegova ploščina? Nekaj spretnosti zadostuje, da jo določimo brez večjih težav; formula, ki jo nameravamo obravnavati v tem prispevku, pa nam delo zelo olajša. Ploščina je namreč enaka

$$p = r/2 + k - 1$$

kjer je r število križišč mreže, ki leže na robu lika, k pa število križišč v notranjosti večkotnika.



$r = 24 \qquad k = 39$

Zapisano enakost je odkril leta 1899 matematik Pick in se zato imenuje *Pickova formula.* Lani je to formulo angleški dijak Skevington z majčkeno pomočjo svojega učitelja matematike posplošil na večkotnike z večkotniškimi luknjami. Ugotovil je, da ploščina večkotnika z l luknjami meri $p = r/2 + k + l - 1$.

Najprej bomo postopoma dokazali Pickovo formulo, do posplošitve pa bo potem potreben le še korak.

1. *Enostavni paralelogrami in trikotniki*

Položimo na obravnavano kvadratno mrežo ravnino $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, tako da bodo točke s celoštevilskimi koordinatami pokrile točno vsa križišča mreže. Seveda tedaj križišča tvorijo množico $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

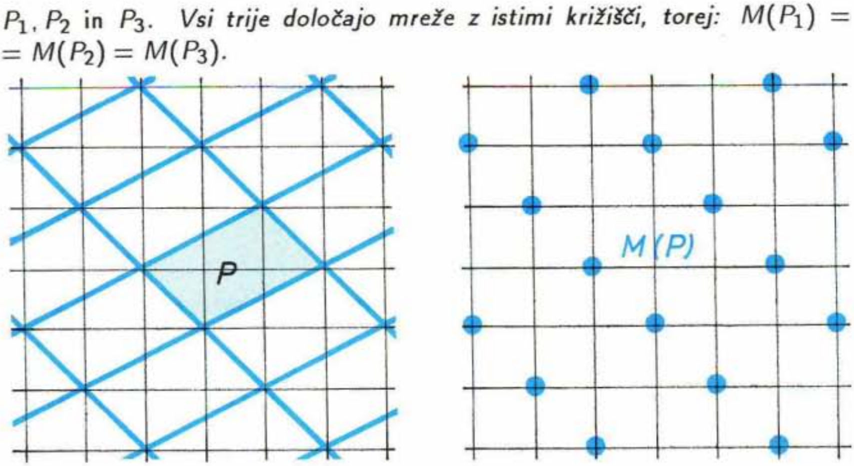
Namenimo zdaj nekaj besed paralelogramom z oglišči v $\mathbb{Z}^2$. Naj bo P takšen paralelogram. Ta določa novo mrežo, sestavljeno iz skladnih paralelogramov, ki jih dobimo z vzporednimi premiki paralelograma P (glej sliko).

Označimo z $M(P)$ množico vseh križišč te mreže in povabimo bralca, da dokaže naslednji trditvi.

T1 *Množica $M(P)$ je vsebovana v $\mathbb{Z}^2$.*

T2 *Tri različne točke iz $\mathbb{Z}^2$ so oglišča treh različnih paralelogramov*

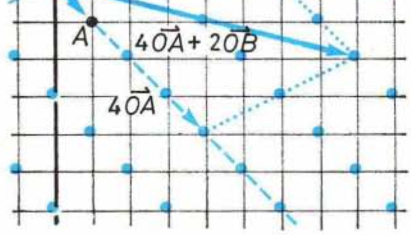
P_1, P_2 in P_3. *Vsi trije določajo mreže z istimi križišči, torej:* $M(P_1) = M(P_2) = M(P_3)$.



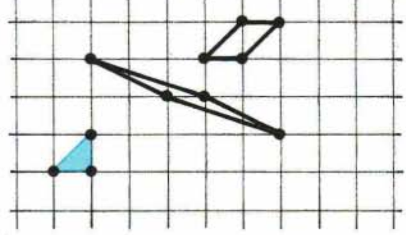
Naj ima paralelogram P eno oglišče v točki $O = (0, 0)$, dve drugi pa v točkah A in B. Z uporabo rezultata druge trditve vidimo, da se celoštevilski večkratniki vektorja $\mathbf{OA}$ končajo v tistih točkah množice $M(P)$, ki ležijo na nosilki daljice OA. Podobno velja za celoštevilske večkratnike vektorja $\mathbf{OB}$. Od tod hitro sledi, da konci vektorjev oblike

$$m\mathbf{OA} + n\mathbf{OB}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \tag{$*$}$$

tvorijo množico $M(P)$.



Slika 1.



Enostavni paralelogrami in trikotniki
Slika 2.

Naslednja definicija nam bo skrajšala nadaljnje pisanje.

Paralelogram (oziroma trikotnik) z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je *enostaven*, če razen oglišč ne vsebuje nobene točke iz $\mathbb{Z}^2$.

Bralec se bo brez težav prepričal o naslednjih lastnostih enostavnih paralelogramov in trikotnikov.

T3 *Če je trikotnik z oglišči A, B, $C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven, so vsi paralelogrami z oglišči v točkah A, B in C enostavni.*

T4 *Paralelogram P z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je enostaven natanko takrat, kadar množica $M(P)$ sovpada z $\mathbb{Z}^2$.*

Ploščino p trikotnika z oglišči $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ lahko izračunamo po znani formuli

$$2p = | a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2) | \qquad (F)$$

Če oglišča leže v množici $\mathbb{Z}^2$, je na desni strani formule celo število, torej ploščina takšnega trikotnika meri vsaj $1/2$. Kateri trikotniki imajo ploščino enako $1/2$? Odgovor da naslednji izrek.

IZREK 1. *Trikotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ ima ploščino enako $1/2$ natanko takrat, kadar je enostaven.*

Dokaz. Denimo, da trikotnik z oglišči A, B, $C \in \mathbb{Z}^2$ ni enostaven. Potem vsebuje vsaj eno točko $D \in \mathbb{Z}^2$, ki ni njegovo oglišče. Če D leži v notranjosti trikotnika ABC, ta razpade na trikotnike ABD, BCD in CAD, zato meri njegova ploščina vsaj $3/2$. Če pa D leži na stranici trikotnika ABC, je ta sestavljen iz dveh manjših, zato njegova ploščina meri vsaj 1. Torej je trikotnik ABC s ploščino $1/2$ nujno enostaven.

Naj bo zdaj trikotnik z oglišči A, B, $C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven in P paralelogram z oglišči A, B, C in D. Po trditvi T3 je tudi paralelogram P enostaven, torej T4 pove, da velja $M(P) = \mathbb{Z}^2$.

Brez škode za splošnost dokaza smemo privzeti, da oglišče C leži v izhodišču $O = (0, 0)$. Ker konci vektorjev oblike (*) tvorijo $\mathbb{Z}^2$, obstajata taki celi števili m in n, da velja

$$m\mathbf{OA} + n\mathbf{OB} = \mathbf{OS}, \text{ kjer je } S = (1, 0)$$

Za $A = (a_1, a_2)$ in $B = (b_1, b_2)$ je zato

$$ma_1 + nb_1 = 1$$
$$ma_2 + nb_2 = 0$$

Od tod brez težav dobimo enakosti

$$m(a_1 b_2 - a_2 b_1) = b_2$$
$$n(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -a_2$$

ki povesta, da celo število

$$d = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

deli b_2 in a_2. Če namesto točke S vzamemo točko $T = (0, 1)$, na enak način kot prej vidimo, da d deli tudi a_1 in b_1. Potem pa je $d = a_1 b_2 - a_2 b_1$ deljiv z d^2 in zato enak -1, 0 ali 1. Ploščina trikotnika ABC je različna od nič in po formuli (F) meri

$$p = (1/2) \mid a_1 b_2 - a_2 b_1 \mid = \mid d \mid /2$$

torej je enaka 1/2. S tem je dokaz sklenjen.

2. *Pickova formula in njena posplošitev*

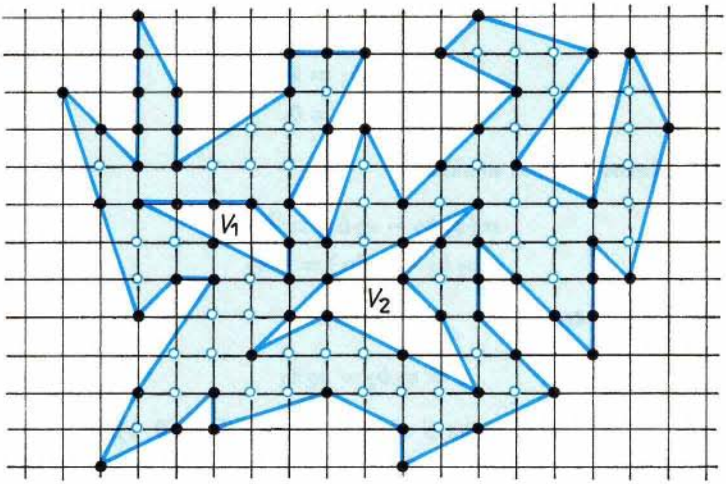
Dokaz Pickove formule bomo naslonili na prvo poglavje in na članek *Triangulacije večkotnikov* iz te številke Preseka.

Naj bo r točk iz $\mathbb{Z}^2$ na robu večkotnika z oglišči v $\mathbb{Z}^2$, k pa v njegovi notranjosti. Napravimo triangulacijo z oglišči v teh $r + k$ točkah. Vsak trikotnik iz triangulacije ima le oglišča v $\mathbb{Z}^2$, zato je enostaven in ima po izreku 1 ploščino enako 1/2. Izrek 2 iz prej omenjenega članka pove, da je v triangulaciji $r + 2k - 2$ trikotnikov, torej meri ploščina večkotnika $p = = r/2 + k - 1$.

Pickova formula je tu, njeno posplošitev pa strnimo v naslednji izrek.

IZREK 2. *Večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ naj ima l večkotniških lukenj, ki se ne dotikajo ena druge ali roba večkotnika in imajo oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Če je r točk množice $\mathbb{Z}^2$ na robu preluknjanega večkotnika, k pa v njegovi notranjosti, meri njegova ploščina*

$$p = r/2 + k + l - 1$$



Dokaz. Označimo večkotniške luknje z $V_1, V_2, \ldots, V_l$, nepreluknjani večkotnik pa z V_0. Naj r_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ leži na robu večkotnika $V_i (i = 1, 2, \ldots, l)$, k_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ pa v njegovi notranjosti. Preštejmo točke iz $\mathbb{Z}^2$ narobu preluknjanega večkotnika:

$$r = r_0 + r_1 + \ldots + r_l$$

nato pa še vse točke iz $\mathbb{Z}^2$, ki ležijo v notranjosti nepreluknjanega večkotnika V_0:

$$k_0 = k + (r_1 + k_1) + \ldots + (r_l + k_l)$$

Po Pickovi formuli je ploščina V_i enaka $p_i = r_i/2 + k_i - 1$, zato ploščina preluknjanega večkotnika meri

$$\begin{gathered} p = p_0 - (p_1 + \ldots + p_l) = \\ = r_0/2 + k_0 - 1 - (r_1/2 + \ldots + r_l/2 + k_1 + \ldots + k_l) + l = \\ = r_0/2 + k + (r_1 + \ldots + r_l) + (k_1 + \ldots + k_l) - (r_1 + \ldots + r_l)/2 - (k_1 + \ldots + k_l) + l - 1 = \\ = (r_0 + r_1 + \ldots + r_l)/2 + k + l - 1 = r/2 + k + l - 1 \end{gathered}$$

Izrek je dokazan, bralca pa čaka še nekaj nalog.

1. Dokaži, da enakostranični trikotnik ne more imeti vseh treh oglišč v $\mathbb{Z}^2$.

2. Naj ima daljica le krajišči A in B v $\mathbb{Z}^2$. Potem obstaja tak $C \in \mathbb{Z}^2$, da je trikotnik ABC enostaven.

3. Poišči vsaj en preluknjani večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ in s ploščino $p = 3$.

4. Dokaži, da meri ploščina preluknjanega večkotnika z l večkotniškimi luknjami in z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ vsaj $(5l + 1)/2$ in da se ta ocena ne da izboljšati.

Boris Lavrič

Opomba: O Pickovi formuli je pisal tudi I. Pucelj v Preseku P-V/1.

VEČKOTNIKI NA KVADRATNI MREŽI - Rešitve s str. 140

1. Kvadrat dolžine vsake daljice s krajišči v $\mathbb{Z}^2$ je po Pitagorovem izreku celo število. Denimo, da ima enakostranični trikotnik s stranico dolžine a vsa oglišča v ^{2}. Potem je njegova ploščina $p = a^2\sqrt{3}/4$ iracionalno število, ker velja $a^2 \in \mathbb{Z}$. Toda po formuli (F) je dvakratnik ploščine p celo število. Oboje hkrati ni mogoče, torej trditev velja.

2. Vzporedno premaknimo daljico AB, tako da A preide v $A' = (0,0)$, B pa v $B' = (m,n)$. Seveda sta m in n celi števili. Razen krajišč na daljici $A'B'$ ni točk iz $\mathbb{Z}^2$, zato sta števili m in n tuji. Res, v nasprotnem primeru bi namreč na $A'B'$ ležala tudi točka $(m/d, n/d)$, kjer je d največja skupna mera števil m in n.

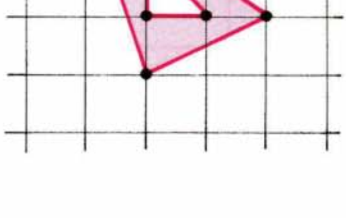
Ker sta števili m in n tuji, obstajata taki celi števili p in q, da velja $pm + qn = 1$. Postavimo $C = (-q, p)$.

Po formuli (F) ploščina trikotnika $A'B'C'$ meri

$$p = (1/2) \mid pm + qn \mid = 1/2$$

torej je trikotnik $A'B'C'$ po izreku 1 enostaven. Premaknimo zdaj $A'B'C'$ nazaj, tako da $A'B'C'$ preide v ABC, in iskana točka C je tu.

3.



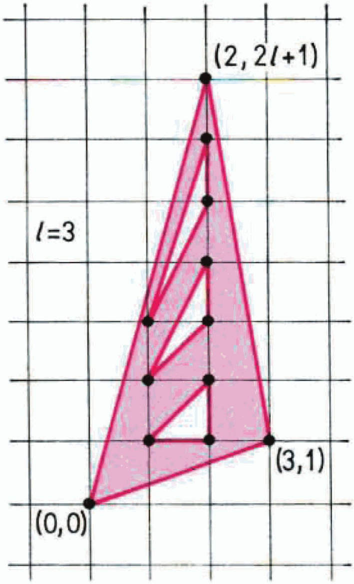
4. Vsaka luknja ima vsaj tri oglišča, zato ima preluknjani večkotnik na robu vsaj $3l+3$ točke iz $\mathbb{Z}^2$. Po izreku 2 tedaj za njegovo ploščino velja

$$\begin{aligned} p &= r/2 + k + l - 1 \geq \\ &\geq (3l+3)/2 + l - 1 = \\ &= (5l+1)/2 \end{aligned}$$

Na sliki desno je načrtan trikotnik z l luknjami in s ploščino

$$p = (5l+1)/2$$

torej se ocene res ne da izboljšati.



Boris Lavrič