# PRESEK

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 322–325



Matija Lokar:


## RAČUNANJE KVADRATNEGA KORENA


Ključne besede: matematika, numerične metode, kvadratni koren, Heronov obrazec.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Lokar.pdf

## RAČUNANJE KVADRATNEGA KORENA

Z računanjem osnovnih matematičnih funkcij smo se v Preseku že srečali (Presek 2, 1986). Ker so uporabljeni algoritmi dokaj zapleteni, si oglejmo, kako bi kvadratni koren izračunali enostavneje. Uporabili bomo postopek, katerega izvor pripisujejo starogrškemu matematiku Heronu.

Razmišljamo lahko nekako takole. Poskusimo najprej ugotoviti, na katerem intervalu leži iskani koren. Določiti moramo torej dve števili, prvo manjše od $\sqrt{x}$, drugo večje. Naj bo $a_1$ približna vrednost kvadratnega korena danega števila $x$ $(x > 0)$. Ker vemo, da je $\sqrt{x}$ pozitivno število (no, razen za $x = 0$), si tudi približek izberimo pozitiven. Če je $a_1 < \sqrt{x}$, pomnožimo obe strani neneačbe s $\sqrt{x}$:

$$a_1 < \sqrt{x}$$

$$a_1\sqrt{x} < \sqrt{x}\sqrt{x}$$

$$a_1\sqrt{x} < x$$

$$\sqrt{x} < \frac{x}{a_1}$$

Podobno lahko iz $a_1 > \sqrt{x}$ ugotovimo, da velja $\sqrt{x} > \frac{x}{a_1}$. Iskani kvadratni koren $\sqrt{x}$ leži med številoma $a_1$ in $\frac{x}{a_1}$. Zato kot naslednji približek vzemimo aritmetično sredino števil $a_1$ in $\frac{x}{a_1}$, tj.

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{x}{a_1})$$

Če nadaljujemo s tem postopkom, po $n$ korakih dobimo zaporedje približnih vrednosti:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}) \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Pokažimo nekaj lastnosti zaporedja $(a_n)$.

Za zaporedje (1) velja, da so vsi njegovi členi večji ali enaki pravi vrednosti

$$a_n \geq \sqrt{x} \tag{2}$$

Pokažimo, da je trditev resnična. Vzemimo $n$-ti člen zaporedja, določen z (1). Zapišimo ga nekoliko drugače:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}a_{n-1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{a_{n-1}}\right)$$

Vidimo, da $\sqrt{x}$ lahko izpostavimo:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a_{n-1}}\right)\right) \\ &= \sqrt{x}\,\frac{1}{2}\left(t_{n-1} + \frac{1}{t_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

kjer je

$$t_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{x}}$$

Če pokažemo, da je $\frac{1}{2}(t_{n-1} + \frac{1}{t_{n-1}})$ vedno večje ali enako 1, smo prvo lastnost dokazali. In res! Ker velja

$$(t-1) \geq 0$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$t^2 + 1 \geq 2t$$

za pozitivne $t$ velja:

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 1$$

Namesto $t$ si mislimo v zadnji neenačbi $t_{n-1}$ in dokaz prve lastnosti je tu.

Druga lastnost zaporedja $(a_n)$ je ta, da je vsak naslednji člen zaporedja manjši ali kvečjemu enak prejšnjemu. Takemu zaporedju rečemo *monotono padajoče zaporedje*. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, je trditev

$$a_{n+1} \leq a_n$$

enakovredna trditvi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Upoštevajmo, kako je $(n+1)$-ti člen zaporedja določen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{a_n^2})$$

Pokažimo, da je zadnji člen manjši od 1. Če kvadriramo neenačbo (2) in jo preuredimo, dobimo, da je $\frac{x}{a_n^2} \leq 1$. Torej je izraz v oklepaju manjši ali enak 2 in

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Iz prejšnjih dveh lastnosti lahko zaključimo, da za zaporedje (1) velja

$$\sqrt{x} \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_2$$

Torej so približki čedalje boljši. Če ugotovimo, da sta dva zaporedna približka enaka, so enaki tudi vsi nadaljnji. Naj bo vrednost tega približka $c$. Potem je ta $c$ že enak iskanemu kvadratnemu korenu. Res, če upoštevamo enačbo (1), s katero generiramo zaporedje, dobimo:

$$c = \frac{1}{2}(c + \frac{x}{c})$$

$$2c = c + \frac{x}{c}$$

$$c^2 = x$$

Tako smo dobili iterativni postopek za računanje kvadratnega korena. Povejmo še to, da je to le posebni primer splošnejšega postopka za iskanje ničel funkcij, ki ga imenujemo Newtonov postopek. Kako, mi vendar računamo kvadratni koren, ne pa iščemo ničle? Pa vendar:

$$c = \sqrt{x}$$

$$c^2 = x$$

$$c^2 - x = 0$$

Če želimo torej določiti koren iz števila $x$, je to isto, kot če poiščemo ničlo funkcije $f(t) = t^2 - x$.

Koliko približkov pa moramo izračunati? Število je odvisno od natančnosti, na katero želimo določiti kvadratni koren, in seveda od natančnosti, s katero računa računalnik. Ker le-ta računa na končno mnogo mest, se po nekaj (končno k sreči!) korakih zgodi, da sta zaporedna približka enaka. Približke računamo torej toliko časa, da se sosednja ne razlikujeta več.

Poskusite sami sprogramirati opisani postopek! Primerjajte dobljeni rezultat s tistim, ki ga vrne vgrajena funkcija. Koliko približkov potrebujete v povprečju?

*Po besedilu Zdravka F. Starca*
*prevedel in priredil Matija Lokar*

Članek je bil napisan in oblikovan s programom TEX, katerega opis si preberite na strani 326.