Sedemindvajseto mednarodno matematično tekmovanje študentov

Med 25. in 30. julijem 2020 je potekalo 27. mednarodno matematično tekmovanje študentov (angl. International Mathematics Competition for University Students). Zaradi pandemije koronavirusne bolezni COVID-19 je običajno prizorišče iz zadnjih let, tj. Blagoevgrad v Bolgariji, zamenjala izvedba na daljavo. Poleg same lokacije tekmovanja je pandemija imela tudi številne druge posledice. Običajno so slovenske barve zastopali študenti Univerze na Primorskem in Univerze v Ljubljani. Letos so se tekmovanja udeležili le študenti prve. Pandemija je pri nas zaradi takih ali drugačnih razlogov botrovala tudi nekoliko manjšemu interesu za sodelovanje. Na FAMNIT-u[1] tako letos nismo izvedli tradicionalnega izbirnega predtekmovanja, priložnost pa so dobili tudi nekateri študenti prvih letnikov ter nematematičnih študijskih programov. Univerzo na Primorskem so zastopali Arbër Avdullahu (1. letnik magistrskega programa Matematične znanosti), Besfort Shala (2. letnik dodiplomskega programa Matematika), Ajla Šehović (1. letnik dodiplomskega programa Matematika) ter Milan Milivojčević in Jana Ristovska (oba 1. letnik dodiplomskega programa Računalništvo in informatika). Arbër Avdullahu in Besfort Shala sta prejela pohvalo.

Zaradi nižjih stroškov in olajšane logistike je bila globalno gledano udeležba sicer rekordna. Prijavljenih je bilo 564 tekmovalcev, na rezultatni listi pa je 546 tekmovalcev. Razlika 18 študentov predstavlja unijo tistih, ki kljub prijavi niso tekmovali, ter tistih, ki so jih ujeli pri goljufanju. Da bi do slednjega lahko prišlo, je bilo moč pričakovati že pred začetkom tekmovanja. Večina študentov je dostopala od doma s pomočjo spletnih aplikacij, kot je Zoom itd. Na nekaj univerzah, kjer je stanje pandemije to dovoljevalo, pa so študenti tekmovali na matični univerzi. V vsakem primeru je moral vodja ekipe poskrbeti, da do goljufanja ne pride. Dodaten riziko varnosti je ležal v dejstvu, da se tekmovanje v različnih krajih ni začelo istočasno. Slednje je bilo uvedeno z namenom, da bi bil čas pisanja čim bolj pravičen za vse udeležence po vsem svetu. Zaradi vsega omenjenega sem pred tekmovanjem, kot vodja ekipe, našim študentom zabičal, da se goljufanje enostavno ne splača. Mlad študent se pogosto ne zaveda, da bi mu tako ravnanje prilepilo črno piko v velikem delu matematične javnosti, morebitno bodoče iskanje pozicij za doktorski ali podoktorski študij pa bi bilo izjemno oteženo. Prav tako sem našim študentom razjasnil, da je že sum na goljufanje več kot dovolj za nepopravljivo škodo.

[1]Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem

V zadnjih letih so študenti na tekmovanju reševali naloge v dveh dneh, pri čemer so na vsak dan imeli na voljo pet ur za pet nalog. Letos je bilo podobno, le da so vsak dan imeli na voljo štiri ure za štiri naloge. Predvidevam, da je bilo zmanjšanje števila nalog uvedeno zato, ker je izvedba na daljavo terjala dodatna opravila. Veliko študentov doma ni imelo tiskalnika, zato se je tekmovalni dan začel s prenosom nalog, ki jih je bilo treba ročno prepisati. Takoj zatem se je začelo štiriurno reševanje nalog, pri čemer je moral vodja ekipe poskrbeti, da so študenti ustrezno odmaknjeni od računalnika in ne gledajo v monitor. Na koncu so morali študenti liste s telefonom poslikati, jih z aplikacijo CamScanner[2] spraviti v ustrezno obliko ter naložiti na strežnik. Maksimalen razpon med prvim prenosom nalog in zadnjim nalaganjem na strežnik je bil za vsako ekipo največ šest ur. Tako kot vsako leto smo bili vodje ekip tudi letos pozvani, da prispevamo kako nalogo za morebiten izbor. Sam izbor nalog pa je bil letos nekoliko drugačen. Za slednjega je bil sprva napovedan tradicionalen sestanek komisije, ki bi jo sestavljali vse vodje ekip, a do tega ni prišlo. Naloge je izbrala javnosti neznana mednarodna skupina vodij. Kar tri izmed osmih nalog, ki so bile hkrati najslabše rešene, sta predlagala predstavnika Državne univerze v Sankt Peterburgu. Zakaj je toliko bremena padlo na eno univerzo, ne vem. Morda je primanjkovalo predlogov zelo težkih nalog. Sicer gre za univerzo z izjemnimi posamezniki, ki ima bogato tradicijo na tekmovanju. Zmagovalec letošnje izvedbe, Stanislav Krymskii, je ravno iz te univerze, ekipno pa so dosegli drugo mesto. Pri ocenjevanju nalog smo si popravljavci pomagali s programskima rešitvama Dropbox in Zulip Chat. Slednji je bil nepogrešljivo orodje predzadnji dan tekmovanja, ko je bil na vrsti boj vodij ekip za dodatne točke. Tudi tukaj se je najbolje izkazal vodja ekipe iz Sankt Peterburga, ki je svojim študentom priboril dodatnih 50 točk, od tega kar 18 točk kasnejšemu zmagovalcu. Zaradi uporabe programa Zulip Chat so bila vsa tovrstna »barantanja« vidna vsem vodjem ekip. Tako smo lahko prebrali tudi zapis vodje ekipe iz Sankt Peterburga, ki je zmagovalca opisal kot čudno osebo, ki ima zelo nenavaden način razmišljanja. Zaradi tega naj bi bili matematični pogovori z njim zelo oteženi, uspešno pa naj bi reševal vse probleme, ki mu jih zastavijo.

Za konec dodajam tri rešene naloge s tekmovanja. Rimska številka označuje dan tekmovanja, arabska pa zaporedno številko naloge. Pri prvih dveh nalogah je bilo uspešnih kar nekaj študentov, medtem ko je pri zadnji nalogi le peščica študentov dobila kakšno točko. Rešitev te naloge je tukaj zapisana nekoliko bolj detajlno kot v uradnih rešitvah, ki so na voljo na spletni strani [2].

[2]Uporaba omenjene aplikacije [1] bo v času pandemije prišla prav marsikateremu predavatelju pri popravljanju domačih nalog.

II.1. *Poišči vse dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, ki zadoščajo neenakosti*

$$f''(x)f(x)\geq 2\big(f'(x)\big)^2$$

za vse $x\in\mathbb{R}$.

Očitno vsaka konstantna pozitivna funkcija zadošča prepodstavkam. Pokažimo, da drugih takih funkcij ni. Naj bo $f(x)$ funkcija iz naloge in naj bo $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ njena recipročna vrednost. Funkcija g je konkavna, saj je

$$g''(x)=\frac{2\big(f'(x)\big)^2-f''(x)f(x)}{\big(f(x)\big)^3}\leq 0$$

za vse x. Zato za poljubna realna števila $a<x<y<b$ velja

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\geq\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\geq\frac{g(b)-g(y)}{b-y}.$$

Ker sta vrednosti $g(a)$ in $g(b)$ pozitivni, sledi

$$\frac{g(x)}{x-a}\geq\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\geq\frac{-g(y)}{b-y}.$$

Če pošljemo a proti $-\infty$ ter b proti ∞, dobimo

$$0\geq\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\geq 0,$$

kar pomeni, da velja $g(x)=g(y)$. Zato sta tako funkcija g kot tudi funkcija f nujno konstantni.

I.2. *Naj bosta A in B dve realni matriki, za kateri velja*

$$\operatorname{rk}(AB-BA+I)=1,$$

kjer je I identična matrika velikosti $n\times n$. Pokaži, da velja

$$\operatorname{sled}(ABAB)-\operatorname{sled}(A^2B^2)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

Pri tem je $\operatorname{rk}(M)$ *rang matrike M,* $\operatorname{sled}(M)$ *pa je vsota vseh njenih diagonalnih elementov.*

Predpostavka o rangu implicira obstoj takih stolpičnih vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, da velja

$$AB-BA+I=\mathbf{u}\mathbf{v}^\top. \tag{1}$$

Če zmnožimo vrstico $\mathbf{v}^\top$ in stolpec $\mathbf{u}$, dobimo sled matrike (1). Zato nam linearnost funkcije sled in njena lastnost

$$\operatorname{sled}(XY) = \operatorname{sled}(YX), \tag{2}$$

ki velja za vse kvadratne matrike X, Y enakih velikosti, porodita enakost

$$n = \operatorname{sled}(I) = \operatorname{sled}(\mathbf{u}\mathbf{v}^\top) = \mathbf{v}^\top\mathbf{u}. \tag{3}$$

Če še enkrat uporabimo iste lastnosti sledi ter enakost (3), dobimo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sled}\big((AB-BA)^2\big) &= \operatorname{sled}\big((\mathbf{u}\mathbf{v}^\top - I)^2\big)\\
&= \operatorname{sled}\big(\mathbf{u}(\mathbf{v}^\top\mathbf{u})\mathbf{v}^\top + I - 2\mathbf{u}\mathbf{v}^\top\big)\\
&= (\mathbf{v}^\top\mathbf{u} - 2)\operatorname{sled}(\mathbf{u}\mathbf{v}^\top) + n\\
&= (n-2)n + n\\
&= n(n-1).
\end{aligned} \tag{4}$$

Po drugi strani iz večkratne uporabe enakosti (2) sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{sled}\big((AB-BA)^2\big) &= \operatorname{sled}(ABAB + BABA - ABBA - BAAB)\\
&= 2\big(\operatorname{sled}(ABAB) - \operatorname{sled}(A^2B^2)\big),
\end{aligned}$$

kar skupaj z enakostjo (4) reši nalogo.

I.3. *Naj bo $d \geq 2$ naravno število. Pokaži, da obstaja taka konstanta $C(d)$, za katero velja naslednje. Za vsak konveksen politop $K \subset \mathbb{R}^d$, ki je simetričen čez izhodišče, in za vsak $\varepsilon \in (0,1)$ obstaja tak konveksen politop $L \subset \mathbb{R}^d$ z največ $C(d)\varepsilon^{1-d}$ oglišči, za katerega velja*

$$(1-\varepsilon)K \subseteq L \subseteq K.$$

Študenti so imeli na voljo še naslednje definicije. Naj bo α realno število. Množica $T \subset \mathbb{R}^d$, ki ima neprazno notranjost, je *konveksen politop z največ α oglišči*, če je enaka konveksni ogrinjači množice $X \subset \mathbb{R}^d$, ki ima največ α elementov, tj. $T = \{\sum_{x\in X} t_x x \mid t_x \geq 0, \sum_{x\in X} t_x = 1\}$. Za realno število λ naj bo $\lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}$. Množica $T \subset \mathbb{R}^d$ je *simetrična čez izhodišče*, če velja $(-1)T = T$.

Naj bosta K in ε, kot izhaja iz naloge. V posebnem naj ima množica K neprazno notranjost. Naj bo $\operatorname{vol}(K)$ volumen politopa K. Izberimo tako normo $\|.\|$ na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^d$, da bo politop K enak enotski zaprti krogli $\overline{B(0,1)}$ v njem. Tukaj za $x \in \mathbb{R}^d$ in $r > 0$ uporabljamo oznaki $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x-y\| < r\}$ in $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x-y\| \leq r\}$. Norma s tako lastnostjo je sicer podana preko funkcionala Minkowskega

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in K\},$$

preverbo česar prepuščamo bralcu. Izberimo poljubno množico X, ki je vsebovana v robu množice K (tj. v enotski sferi v prostoru $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$), je maksimalna glede na inkluzijo, in vsaki njeni različni točki sta med seboj za vsaj ε narazen glede na normo $\|.\|$.

Pokažimo najprej, da je množica X končna, in izračunajmo zgornjo mejo za njeno moč $|X|$. Za vsak $x \in X$ je krogla $B(x, \varepsilon/2)$ vsebovana v razliki

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\overline{B(0,1)} \setminus \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\overline{B(0,1)} = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)K \setminus \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)K. \tag{5}$$

Iz trikotniške neenakosti namreč za vsak $y \in B(x,\varepsilon/2)$ sledi

$$1-\frac{\varepsilon}{2} < \|x\| - \|y-x\| \leq \|y\| \leq \|x\| + \|y-x\| < 1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Poleg tega so vse krogle $B(x,\varepsilon/2)$ $(x \in X)$ paroma disjunktne. Ker ima množica (5) volumen enak $\big((1+\varepsilon/2)^d - (1-\varepsilon/2)^d\big)\mathrm{vol}(K)$, vsaka krogla $B(x,\varepsilon/2)$ pa ima volumen $(\varepsilon/2)^d\mathrm{vol}(K)$, sledi

$$\begin{aligned}
|X| &\leq \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^d - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^d}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^d} \\
&= \frac{(2+\varepsilon)^d - (2-\varepsilon)^d}{\varepsilon^d} \\
&= \varepsilon^{-d}\sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i}\big(\varepsilon^i - (-\varepsilon)^i\big)2^{d-i} \\
&= \varepsilon^{1-d}\sum_{j=1}^{\lceil d/2\rceil}\binom{d}{2j-1}\varepsilon^{2j-2}2^{d-2j+2} \\
&\leq \varepsilon^{1-d}\sum_{j=1}^{\lceil d/2\rceil}\binom{d}{2j-1}2^{d-2j+2} \\
&= C(d)\varepsilon^{1-d},
\end{aligned}$$

kjer smo za konstanto $C(d)$ izbrali število $\sum_{j=1}^{\lceil d/2\rceil}\binom{d}{2j-1}2^{d-2j+2}$.

Naj bo konveksen politop L enak konveksni ogrinjači množice X. Inkluzija $L \subseteq K$ sledi iz konveksnosti množice K. Pokazati moramo še inkluzijo $(1-\varepsilon)K \subseteq L$. Denimo, da le-ta ne velja, tj. obstaja neki $x_0 \in (1-\varepsilon)K \backslash L$. Ker je množica L konveksna in zaprta, iz izreka o separaciji konveksnih množic sledi obstoj takega (zveznega) linearnega neničelnega funkcionala f na $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$, da velja $\max_{x\in L} f(x) = \sup_{x \in L} f(x) \leq f(x_0)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\|f\| = 1$ (sicer f delimo z $\|f\|$). Tedaj velja

$$\max_{x\in L} f(x) \leq |f(x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_0\| = 1 - \varepsilon.$$

Za vsak $x \in L$ obstaja naravno število n, točke $x_1, \ldots, x_n \in X$ in nenegativna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, za katera velja $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ in $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Zato je $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \leq \max_{1\leq i \leq n} f(x_i)$ in posledično

$$\max_{x\in X} f(x) = \max_{x \in L} f(x) \leq 1 - \varepsilon. \tag{6}$$

Ker je prostor $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ končnorazsežen, je rob množice K, tj. enotska sfera v tem prostoru, kompaktna. Zato zvezna funkcija $|f|$ doseže maksimum na njej. Tj., obstaja tak $x_1 \in \mathbb{R}^d$, da velja $\|x_1\| = 1$ in

$$1 = \|f\| = \max_{\|x\|=1} |f(x)| = |f(x_1)|.$$

Naj bo x_2 tisti enotski vektor izmed x_1 in $-x_1$, za katerega je $f(x_2) = 1$. Iz neenakosti (6) za vsak $x \in X$ sledi

$$\varepsilon \leq |f(x_2) - f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x_2 - x\| = \|x_2 - x\|,$$

kar je v nasprotju z maksimalnostjo množice X.

LITERATURA

[1] *How To Upload Your Solutions*, dostopno na `www.youtube.com/watch?time_continue=43&v=ApJ1fBMByow&feature=emb_title`, ogled 3. 11. 2020.

[2] *International Mathematics Competition for University Students*, dostopno na `www.imc-math.org.uk`, ogled 3. 11. 2020.

Marko Orel