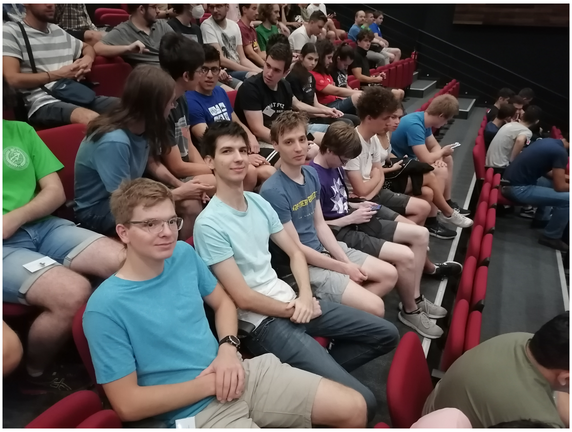
Devetindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Po dveletni selitvi na splet je leta 2022 matematično tekmovanje za študente spet potekalo (tudi) v fizični obliki. Na običajnem mestu, v Blagoevgradu v Bolgariji, se je med 1. in 7. avgustom zbralo 168 študentov. Poleg njih so lahko tekmovali tudi študenti po spletu, tako da je bilo vseh skupaj uvrščenih 663 študentov. Nekateri med njimi so bili združeni v ekipe (običajno glede na institucijo, ki so jo zastopali), teh je bilo letos natanko 100.

Iz Slovenije je bilo letos rekordno število udeležencev, kar 13. Šest je bilo študentov Fakultete za matematiko in fiziko, **Jaka Vrhovnik** iz prvega letnika, **Maša Žaucer** in **Luka Horjak** iz drugega letnika, **Matevž Miščič** in **Beno Učakar** iz tretjega letnika ter **Žan Bajuk** iz prvega letnika druge stopnje. Šest jih je zastopalo Univerzo na Primorskem, natančneje FAMNIT: **Diar Gashi** in **Dren Neziri** iz prvega letnika, **Dorotea Redžepi** iz drugega letnika, **Ajla Šehović** in **Todor Antić** iz tretjega letnika ter **Mirza Redzić** iz prvega letnika druge stopnje. Brez ekipe je tekmoval **Lovro Drofenik**, študent prvega letnika Fakultete za strojništvo (UL). Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Slobodan Filipovski.



Slika 1. Študenti Fakultete za matematiko in fiziko na otvoritveni slovesnosti.

Letos so naši tekmovalci spet dosegli izjemen uspeh. Luka Horjak, Lovro Drofenik in Matevž Miščič so osvojili prvo nagrado, Maša Žaucer in Žan Bajuk drugo nagrado, Jaka Vrhovnik, Beno Učakar in Diar Gashi tretjo nagrado, Dren Neziri, Mirza Redzić in Todor Antić pohvalo, Dorotea Redžepi in Ajla Šehović pa potrdilo o udeležbi.

Slika 2. Študenti FMF pred začetkom prvega tekmovalnega dela.

Ekipno smo dosegli šestnajsto (ekipa Fakultete za matematiko in fiziko) ter sedeminsedemdeseto mesto (ekipa Famnit).

Z vrnitvijo na običajno tekmovalno lokacijo so se vrnile tudi nekatere obtekmovalne dejavnosti. Lepo je bilo videti, kako so se tekmovalci iz različnih držav družili, morda še toliko bolj, ker je bilo prisotnih tekmovalcev precej manj kot običajno in so se v enem tednu bivanja lahko vsi spoznali. Tega dela med tekmovalci, ki so tekmovali od doma, seveda ni bilo. Največ tekmovalcev je bilo iz države, ki je imela prepoved nastopa, okoli 80 je bilo tekmovalcev na daljavo iz Rusije. Eni ekipi ruskih študentov je celo uspelo priti v živo. Take sreče niso imeli študenti iz Ukrajine, ki so tekmovali le na daljavo (teh je bilo sicer 20). Kako bo v letu 2023, ko je načrtovano le tekmovanje v živo, bomo videli.

Dvojna narava tekmovanja se je izkazala za dokaj neposrečeno, kajti prisotni tekmovalci so dobili priznanja in medalje ter odpotovali domov, še preden so tekmovalci na daljavo sploh izvedeli za svoje rezultate. To je bila posledica ne ravno optimalno organiziranega pregledovanja nalog na daljavo. Očitno so bolj resni vodje ekip svoje ekipe pripeljali na tekmovanje v živo in niso ocenjevali na spletu.

Tokrat si oglejmo tri naloge s tekmovanja. Kot običajno priporočam, da poskušate naloge najprej rešiti sami.

Nalog iz analize letos ni bilo prav veliko. Edini integrali so bili v prvi nalogi, ki je tradicionalno zelo lahka. Vendar rešitev ne zahteva prav veliko uporabe analize.

Slika 3. Študenti med tekmovanjem.

Slika 4. Ocenjevanje izdelkov.

Naloga 1. Naj bo $f : [0,1] \to (0,\infty)$ integrabilna funkcija, za katero velja $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ za vse $x \in [0,1]$. Dokažite, da velja

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq 1.$$

Rešitev. Upoštevamo neenakost med aritmetično in geometrično sredino, da dobimo

$$f(x) + f(1-x) \geq 2\sqrt{f(x)f(1-x)} = 2.$$

Ker je $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\mathrm{d}x$, sledi, da je

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \big(f(x)+f(1-x)\big)\mathrm{d}x \geq \int_0^{\frac{1}{2}} 2\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

Slika 5. Zaključna podelitev nagrad.

Po drugi strani je bilo algebre kar nekaj. En primer naloge z matrikami:

Naloga 2. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $n \times n$ idempotentne kompleksne matrike, za katere velja

$$A_i A_j = -A_j A_i \quad \text{za vse } i \neq j.$$

Dokažite, da ima vsaj ena izmed danih matrik rang manjši ali enak $\frac{n}{k}$.

Opomba: rečemo, da je matrika idempotentna, če velja $A^2 = A$.

Rešitev. Za idempotentne matrike velja $A^2 - A = 0$, zato za vsako lastno vrednost take matrike velja $\lambda^2 - \lambda = 0$. Sledi, da so vse lastne vrednosti enake bodisi 0 bodisi 1. Sledi, da je rang matrike enak številu lastnih vrednosti, ki so enake 1, sled matrike pa je enaka vsoti lastnih vrednosti. Ugotovili smo torej, da za idempotentno matriko A velja, da je $\mathrm{sled}(A) = \mathrm{rang}(A)$.

Naslednja opazka je, da je tudi vsota $\sum_{i=1}^{k} A_i$ idempotentna. Velja namreč

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} A_i^2 + \sum_{i \neq j}(A_i A_j + A_j A_i) = \sum_{i=1}^{k} A_i.$$

Od tod dobimo

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sled}(A_i) = \operatorname{sled}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \operatorname{rang}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) \leq n,$$

iz česar trditev sledi.

Slika 6. Lepa bera medalj za Slovenijo.

Običajno je zadnja naloga najtežja. Zelo pogosto je s področja analize in rešitev se običajno sestavi kot zaporedje težko dokazljivih lem. Tokrat ni bilo tako. Bila pa je naloga s področja verjetnosti.

Naloga 3. Naj bosta $n, k \geq 3$ naravni števili in naj bo S poljubna krožnica. Na njej izberemo (enakomerno, neodvisno) n modrih in k rdečih točk. S F označimo presek konveksnih ogrinjač modrih in rdečih točk. Naj bo m število oglišč konveksnega mnogokotnika F (lahko je $m = 0$, če je presek prazen). Izračunajte pričakovano vrednost m.

Rešitev. Opazimo lahko, da ima presek modre in rdeče konveksne ogrinjače oglišče vsakič, ko sta na krožnici zaporedoma rdeča in modra točka. Natančneje, skoraj vsakič, izjema je primer, ko so vse rdeče točke skupaj, takrat je F prazna množica, čeprav se na krožnici dvakrat dogodi, da sta zaporedoma točki različne barve. Uporabimo lahko metodo indikatorjev in zato definiramo

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n + r_1 + r_2 + \cdots + r_k\,,$$

pri čemer je m_i enak 1, če za i-to modro točko dobimo oglišče F (ob neki orientaciji krožnice), sicer je enak 0. Prav tako je r_i enak 1, če za i-to rdečo točko dobimo oglišče F, sicer je enak 0. Ker zaradi linearnosti pričakovane vrednosti velja $E(m) = E(m_1) + E(m_2) + \cdots + E(m_n) + E(r_1) + E(r_2) + \cdots + E(r_k)$ in je $E(m_i) = P(m_i = 1)$ in $E(r_i) = P(r_i = 1)$, potrebujemo le še navedene verjetnosti:

$$P(m_i = 1) = \frac{k}{k+n-1} - \frac{1}{\binom{k+n-1}{k}}\,,$$

saj je za določeno modro lahko $k+n-1$ točk, izmed katerih je k rdečih. Vseh vrstnih redov teh $k+n-1$ točk, od katerih je k rdečih, je $\binom{k+n-1}{k}$. Vendar pa ne dobimo oglišča F, če so točke urejene tako, da so vse rdeče pred vsemi modrimi – tak je en vrstni red. Podobno razmislimo

$$P(r_i = 1) = \frac{n}{k+n-1} - \frac{1}{\binom{k+n-1}{n}}$$

ter končno dobimo

$$\begin{aligned} E(m) &= n\frac{k}{k+n-1} - \frac{n}{\binom{k+n-1}{k}} + k\frac{n}{k+n-1} - \frac{k}{\binom{k+n-1}{n}} \\ &= \frac{2kn}{k+n-1} - \frac{2(k+n)}{\binom{k+n}{n}}\,. \end{aligned}$$

Kogar zanimajo še druge naloge, si jih lahko ogleda na internetni strani tekmovanja `www.imc-math.org.uk`.

Vsi udeleženci 29. tekmovanja z veseljem zremo proti 30., za katerega so organizatorji obljubili, da ga bodo poskusili izvesti le v živo. Samo upamo lahko, da jim kakšne nepredvidene zunanje okoliščine tega ne preprečijo.

Gregor Šega