PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **5** (1977/1978)
Številka 2
Strani 73–76

Dušan Repovš:

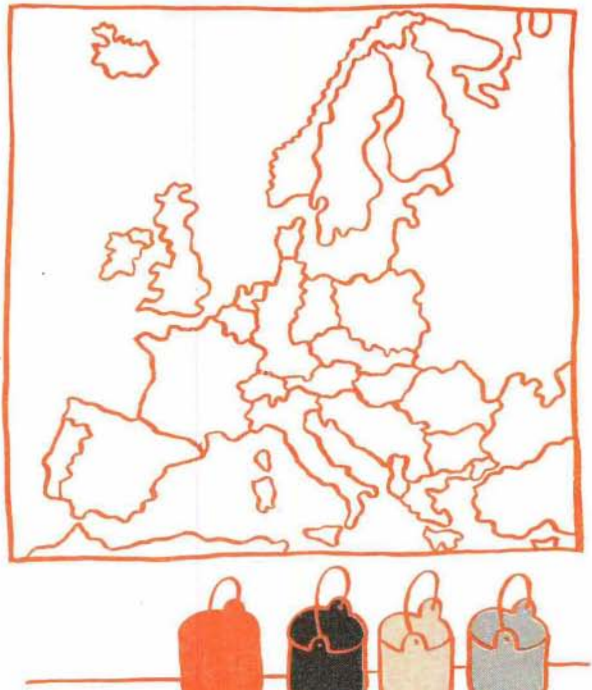
PROBLEM O BARVANJU KART

Ključne besede: matematika, teorija grafov, barvanje grafov.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/5/5-2-Repovs.pdf

PROBLEM O BARVANJU KART*

Pri zemljepisu ste gotovo opazili, da so posamezne države na zemljevidih različno obarvane, da jih laže razločimo. Ali ste že kdaj pomislili, koliko barv potrebujemo *najmanj* za takšno razmejevanje državnih ozemelj? Pa sami pobarvajte zemljevid *Evrope* s 4 različnimi barvami! Pazite, državi, ki *mejita*, morata biti *različno* obarvani!

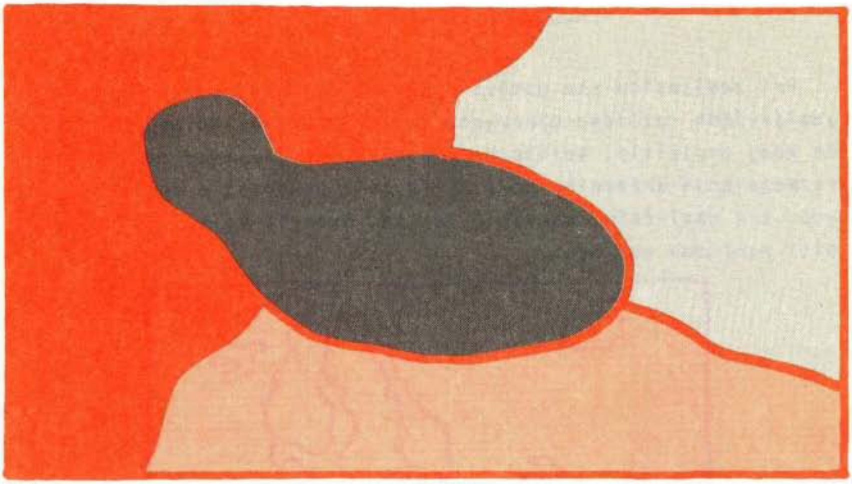


Sl.1

Razmišljanje, ki smo ga ubrali, je pred več kot sto leti privedlo do slovitega *problema štirih barv* [1], ki je bil rešen šele lani - z računalnikom. Tej težki nalogi damo takole obliko: *Dokaži, da lahko s samo štirimi različnimi barvami pobarvamo poljuben zemljevid, če morata biti dve sosednji državi pobarvani z različnima barvama.*

---

*Prispevek je ilustriral *Božo Kos*



sl.2

sl.3

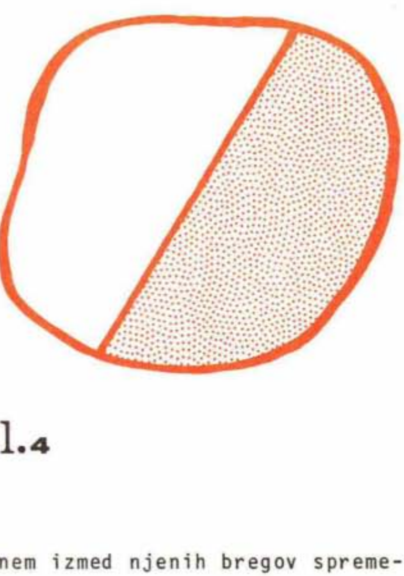
Problem sodi v posebno matematično vejo - *teorijo grafov*, s katero se ukvarjajo tudi naši matematiki, v svetu pa prednjači madžarska matematična šola.

Problem štirih barv smo pokazali le za ilustracijo znatno lažje naloge, ki jo kanimo ugnati v tem prispevku [2]:

V ravnini načrtajmo n *premic. Dokaži, da lahko območja, na katera delé premice ravnino, obarvamo že z dvema barvama tako, da sosednji območji ne bosta iste barve. (Območji, ki mejita samo v točki, nimata skupne meje in sta potemtakem lahko iste barve).*

Najprej vidimo, da dve strani - dva dela ravnine, ki ju razmejuje premica, moremo vedno obarvati le z dvema barvama v skladu s pogoji naloge.

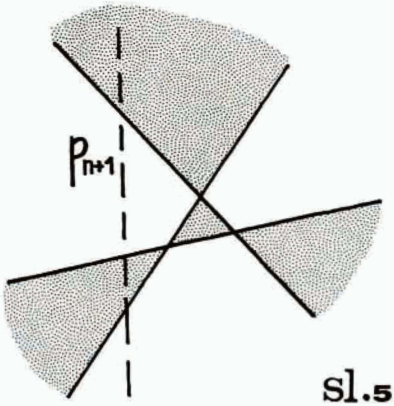
Pokažimo tole: *če lahko območja ravnine, ki jih ustvarja* n *premic, pobarvamo z dvema barvama po pogojih naloge, lahko tudi območja, ki jih napravi* $n+1$ *premic, pobarvamo z dvema barvama po zahtevah naloge*. Odtod po pravilu matematične indukcije sledi, da je trditev naše naloge pravilna. Imejmo $n+1$ premic v ravnini: $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Odstranimo eno, npr. p_{n+1}. Ostalih n premic deli ravnino na območja, ki jih po predpostavki lahko pobarvamo z dvema barvama po zahtevah naloge.



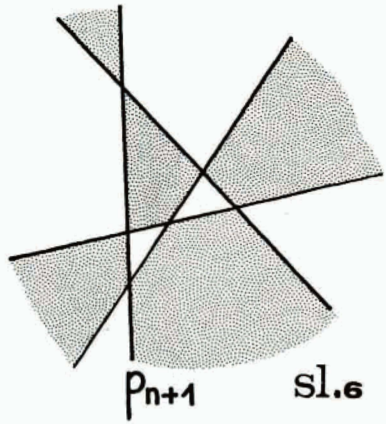
Sl.4

Načrtajmo premico p_{n+1} in na enem izmed njenih bregov spremenimo vse barve. Na drugem bregu ne spreminjamo ničesar.

Če imata dve območji ravnine za mejo katero izmed premic p_1, ..., p_n, sta že različno obarvani. To je veljalo že prej, zdaj pa smo zamenjali hkrati obe barvi, tako da sta ostali barvi isti ali pa sta se obe hkrati zamenjali. Če pa območji mejita na premici p_{n+1}, bosta različno obarvani, saj smo zato spremenili barve samo na enem bregu premice p_{n+1}. Tako dobljeno obarvanje povsem ustreza zahtevam naloge in dokaz je končan.



sl.5



sl.6

Dušan Repovš