Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2017, letnik 23 1

IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Pomen formativnega spremljanja pri učenju in poučevanju matematike

IZ RAZREDA:

Uvajanje formativnega spremljanja pri vsebini krog in krožnica

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Zakaj piškoti Leibniz?

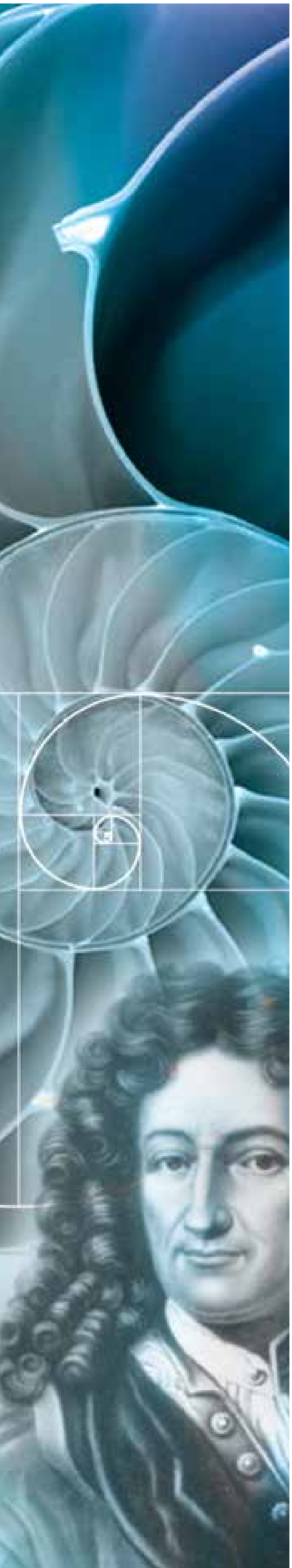
NOVICE:

Predstavitev nove knjige: Iteracije in fraktali

60 let
Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2017, letnik 23 **1**



VSEBINA

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXIII, številka 1, 2017

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Stritarjeva 8, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Spoštovani bralci revije Matematika v šoli!

Pred nami je prenovljena pomladanska številka revije Matematika v šoli, spremembe prinaša po obliki in strukturi. Nov večji format prinaša prispevke v barvah, ki so razdeljeni na naslednje rubrike: *Iz teorije za prakso, Iz razreda, Matematika skozi zgodovino, Novosti*. Zakaj tako? Le učenje in poučevanje brez prepada med teorijo in prakso nam prinaša kakovostne učne dosežke in zadovoljstvo na obeh straneh.

Revije bodo še naprej tematsko obarvane. Pretekle številke revije Matematika v šoli so imele rdečo nit učne težave naših učencev in kako jih premagovati. V tej številki je nekaj člankov še posvečenih premagovanju učnih težav, kot splošno temo za v prihodnje pa smo si izbrali Formativno spremljanje naših učencev.

Rezultati mednarodnih raziskav so nam jasno sporočili, da je znanje naših učencev na zelo zadovoljivem nivoju, kot problem pa se nam kaže nizka motivacija za učenje. Vedno znova se nam zastavlja vprašanje, kaj je vzrok za to. Učitelji, ki že drugo leto uvajajo elemente formativnega spremljanja v svoje pedagoško delo, sporočajo, da se večata pripravljenost učencev za delo in želja po uspehu. S skupnim načrtovanjem ciljev in kriterijev učenja, aktivnim zbiranjem dokazov o lastnem učenju, povratnimi informacijami, ki usmerjajo učence pri učenju, samovrednotenju in vrstniškem vrednotenju sledimo formativnemu spremljanju napredka naših učencev, s tem pa se odmikamo od tradicionalnega frontalnega pouka. Učenci postajajo odgovorni za svoje znanje, samostojno delajo in se učijo, učitelj pa jim ob tem pomaga. Ali lahko rečemo, da je Formativno spremljanje – most do vsakega učenca, tudi tistega z učnim težavami? Da.

Novost je rubrika *Matematika skozi zgodovino*, v kateri bomo poskušali osvetliti matematiko skozi zgodovino in objaviti prispevke, ki nas usmerjajo k vpeljavi zgodovinskega vidika tudi v sam pouk matematike. Naj omenimo, da je bilo lani 300 let od smrti nemškega filozofa, matematika, zgodovinarja in politika Gottfrieda Wilhelma Leibniza.

In na koncu se bomo vprašali: Ali je kaj trden matematični most? Če bodo vsi učenci prišli tako daleč, kot smo si skupaj zastavili cilje učenja, bomo rekli, kakor skala kost.

Vsi bralci ste vabljeni k soustvarjanju revije in pisanju člankov.

Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

Pomen formativnega spremljanja pri učenju in poučevanju matematike

mag. Mateja Sirnik in mag. Mojca Suban
Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Povzetek

V prispevku obravnavamo formativno spremljanje pri matematiki in predstavimo razvojno delo na tem področju. Ukvarjamo se z vprašanji, kako lahko vplivamo na procese učenja in poučevanja matematike ter kako jih lahko usmerjamo na produktiven način. Osrednjo vlogo v takem procesu učenja odigra spremljanje znanja v formativni funkciji, ki vpliva na odločitve učitelja in učenca v zvezi z nadaljnjim učenjem. Učenci naj bi prevzemali aktivnejšo vlogo pri regulaciji lastnega učenja in večjo odgovornost za učne dosežke. Skozi primere prikažemo nekatere strategije elementov formativnega spremljanja pri pouku matematike.

Ključne besede: formativno spremljanje, matematika, povratna informacija, predznanje, cilji, kriteriji uspešnosti, dokazi o učenju, samovrednotenje

Importance of Formative Assessment in Learning and Teaching Mathematics

Abstract

This paper discusses formative assessment in Mathematics and presents how this field is being developed. It deals with questions of how we can influence the processes of learning and teaching Mathematics and how we can guide them productively. The central role in this process is held by the formative function of knowledge assessment, which influences the decisions made by the teacher and student regarding further learning. Students take on a more active role in regulating their own learning and greater responsibility for their attainment. Examples are used to demonstrate the key strategies of the elements of formative assessment in Mathematics lessons.

Keywords: formative assessment, Mathematics, feedback, prior knowledge, objectives, success criteria, evidence of learning, self-assessment

Uvod

V literaturi je mogoče najti različne opredelitve pojma formativno spremljanje/preverjanje (formative assessment[1]). Paul Black in Dylan Wiliam (1998a) ga opredeljujeta kot »vse tiste dejavnosti učiteljev in/ali učencev, s katerimi zagotavljajo povratne informacije, s pomočjo katerih prihaja do modifikacije poučevanja in učenja, v katerega so vpeti«. V OECD-ejevem pregledu prakse formativnega preverjanja v osmih izobraževalnih sistemih (Avstralija-Queensland, Kanada, Danska, Anglija, Finska, Italija, Nova Zelandija in Škotska) »se formativno preverjanje nanaša na pogosto, interaktivno vrednotenje napredka pri učencih in njihovega razumevanja z namenom, da se ugotovijo njihove potrebe in se temu primerno prilagodi učenje« (Looney, 2005 v Wiliam, 2013).

Od domačih avtorjev navedimo opredelitev Maretič-Požarnikove (2000), ki sprotno ali formativno preverjanje (spremljanje) opredeli kot proces, ki poteka kontinuirano, med samim učnim procesom, z namenom zbrati in dajati povratne informacije za čim učinkovitejše krmarjenje (usmerjanje) pouka in učenja. Komljančeva (2008) opredeljuje formativno spremljanje tudi kot opazovanje, vodenje učenca k napredku, servisiranje učitelja in učenca za odpravljanje šibkosti v znanju.

Wiliam (2013) zaokroži dosedanje definicije in jih nadgradi v naslednjo opredelitev:

»Preverjanje deluje formativno, če učitelji, učenci in njihovi vrstniki pridobivajo dokaze o napredku učencev, ki jih interpretirajo in uporabijo za odločitve o naslednjih korakih v procesu poučevanja. Tako postanejo odločitve boljše ali bolje podprte,

1 Slovenski prevod termina formative assessment v formativno spremljanje/preverjanje temelji na tem, da ima preverjanje kot sestavni del učenja vpliv na nadaljnje učenje in poučevanje ter v tej vlogi nosi formativno funkcijo, ki je ocenjevanje (angl. grading) nima.

kot bi bile odločitve brez teh dokazov.« Pri tem opozarja, da ni vsaka formativna uporaba informacij enako učinkovita in da so najboljša preverjanja tista, ki omogočajo vpogled v učne težave ter nakažejo možnost izboljšave.

Dylan Wiliam izpostavlja 5 ključnih strategij, s katerimi lahko vplivamo na kakovost učenja in poučevanja ter posledično na učne dosežke (Slika 1). V nadaljevanju se bomo bolj podrobno posvetili posameznim strategijam oziroma elementom, ozaveščali njihov pomen in jih ilustrirali s primeri.

Slika 1: Pet ključnih strategij za izboljšanje kakovosti učenja in poučevanja (Wiliam, 2013)

V središče procesa formativnega spremljanja je postavljen učenec in nanj osredinjena vprašanja:
- kje je učenec v svojem učenju/kaj zna/katera znanja obvladuje,
- kam želi priti/kaj se želi naučiti/kaj želi znati,
- kako bo do tja prišel/kako se bo naučil?

Vloga učitelja se ob tem iz tradicionalne vloge prenašalca znanja spreminja v smeri moderatorja in usmerjevalca učnega procesa.

Preverjanje predznanja

Pri načrtovanju učnega procesa naj bi izhajali iz predznanja učencev. Za učenje matematike je pomembna strukturiranost znanja učencev: odnosi med usvojenimi pojmi, lastnostmi, torej obstoječa kognitivna struktura. Skozi dejavnosti **preverjanja predznanja** učencev prihaja do aktiviranja predznanja in ugotavljanja napačnih pojmovnih predstav. Z dejavnostmi aktiviranja predznanja omogočimo navezovanje novih vsebin na obstoječe pojmovne strukture, hkrati pa ugotavljamo nepopolne in napačne pojmovne predstave. Ko jih prepoznamo, lahko poskrbimo za njihovo preoblikovanje.

Učitelj pridobi informacije o tem, kaj učenci že znajo, kakšne predstave že imajo, kako poglobljeno nekaj znajo in zmorejo kakor tudi njihov odnos in stališča. Ugotovljeno predznanje omogoči osredinjenje na učenje oziroma načrtovanje učenja in poučevanja. Učitelj odkriva razkorak med obstoječo in pričakovano ravnjo učnih dosežkov. Gre za kognitivno pripravo na učenje, miselno čustveno vzbujanje pozornosti in aktivacijo učencev.

Pomen predznanja se odraža tudi v izjavi psihologa D. Ausbella: *»Če bi moral skrčiti vso pedagoško psihologijo na eno samo načelo, bi rekel: najvažnejši posamezen dejavnik, ki vpliva na učenje, je to, kar učenec že zna… Ugotovi to in ga poučuj s tem v skladu.«* (Požarnik, 2000)

Številne raziskave potrjujejo pomen predznanja. Korelacijski koeficienti med predznanjem in poznejšim znanjem se gibljejo okrog 0,70, med sposobnostmi in znanjem pa so redko čez 0,50 (Požarnik, 2000). Tako vidimo, kako pomembno vlogo ima sistematično preverjanje obsega in strukture predznanja učencev.

Vlogo predznanja pri učenju so proučevali tudi v raziskavi TIMSS 2011 (Japelj Pavešić, 2012). V vprašalniku so učitelji ocenili, v kolikšni meri njihovo poučevanje omejuje pomanjkanje matematičnega predznanja in spretnosti učencev. Izbirali so med odgovori:
- poučevanje ni omejeno,
- poučevanje je deloma omejeno,
- poučevanje je zelo omejeno,

Dobili so rezultate, ki so prikazani v preglednici 1.

Izkazalo se je, da je ena pomembnejših omejitev pri poučevanju matematičnih vsebin predznanje. S tem se kaže, kako pomembno

Preglednica 1: Dosežki glede na odgovore, koliko je poučevanje omejeno zaradi pomanjkanja matematičnega predznanja v 4. razredu

	Odstotki učencev, za katere so učitelji sporočili, da je njihovo poučevanje omejeno zaradi pomanjkanja predznanja in spretnosti učencev					
	Poučevanje ni omejeno		**Poučevanje je deloma omejeno**		**Poučevanje je zelo omejeno**	
	Odstotek učencev	Povprečni dosežek	Odstotek učencev	Povprečni dosežek	Odstotek učencev	Povprečni dosežek
Slovenija	33	527	57	509	11	494
Mednarodno povprečje	27	506	61	489	12	467

Preglednica 2: Dosežki glede na odgovore, koliko je poučevanje omejeno zaradi pomanjkanja matematičnega predznanja v 8. razredu

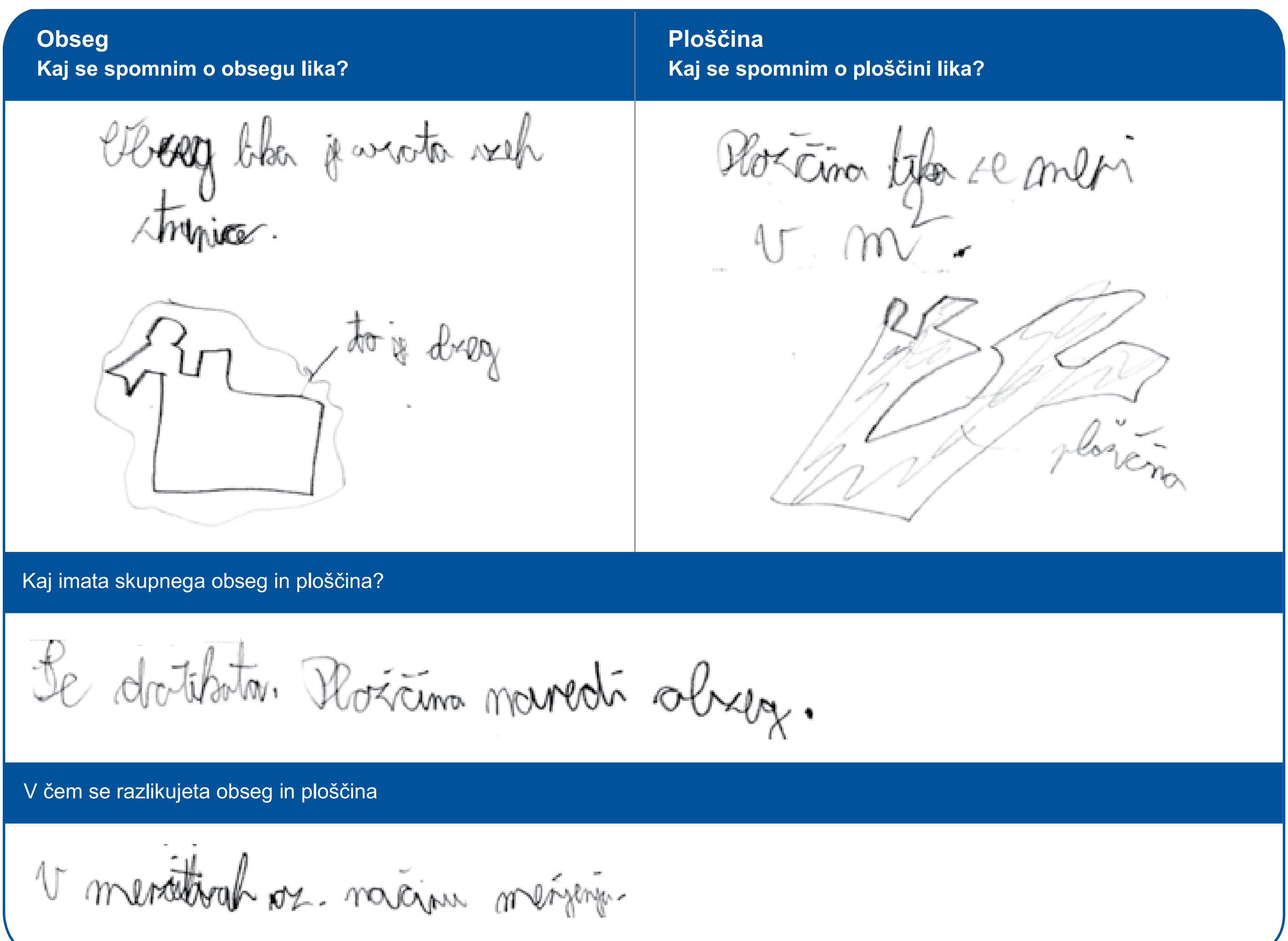
	Odstotki učencev, za katere so učitelji sporočili, da je njihovo poučevanje omejeno zaradi pomanjkanja predznanja in spretnosti učencev					
	Poučevanje ni omejeno		**Poučevanje je deloma omejeno**		**Poučevanje je zelo omejeno**	
	Odstotek učencev	Povprečni dosežek	Odstotek učencev	Povprečni dosežek	Odstotek učencev	Povprečni dosežek
Slovenija	14	538	66	507	19	476
Mednarodno povprečje	15	490	57	471	28	443

je sistematično preverjanje predznanja pri pouku matematike. Opozoriti je treba, da ti deleži ne govorijo o tem, kolikšni so v resnici primanjkljaji v predznanju učencev, pač pa o tem, kako problem občutijo učitelji. Pri tem gre za osebna mnenja učiteljev.

Pri naših spremljavah pouka se je že večkrat pokazalo, da so bila pričakovanja učitelja glede predznanja učencev večja kot se je pokazalo pri sistematičnem preverjanju predznanja. Zato je pomembno načrtno preverjanje predznanja, ki ga ustrezno dokumentiramo. Poglejmo si nekaj načinov, s katerimi lahko preverjamo predznanje.

Pred vsebino ploščina in obseg trikotnika in štirikotnika v 7. razredu je učitelj preverjal predznanje razumevanja pojma ploščina in pojma obseg z odprtimi vprašanji na učnem listu (Slika 2).

S takimi dejavnostmi ugotovimo, na kateri konceptualni in proceduralni stopnji je učenec. Seveda pa se samo ob enkratnem pos-



Slika 2: Izdelek učenca pri preverjanju predznanja

kusu takega preverjanja predznanja v veliko primerih pokažejo težave pri pisnem sporočanju učencev.

V preverjanje predznanja lahko vključimo tudi samovrednotenje lastnega znanja. Primer takega gradiva vidimo na sliki 3 (Kmetič, 2016).

Kako dobro (po)znam ploščino in obseg lika? Ime: ______________

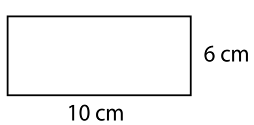
Pobrskaj po svojem spominu

Pojem	Dobro	Sem že slišal(a)	Nimam pojma	Zapiši definicijo ali opiši z besedami, s sliko, primerom
Obseg lika				
Ploščina lika				

Slika 3: Preverjanje predznanja z elementi samovrednotenja

Tudi vprašanja izbirnega tipa (Slika 4) so lahko eden od pristopov preverjanja znanja. Nadgradimo jih z utemeljevanjem izbranih odgovorov (Kmetič, 2016).

Ploščino danega lika lahko izračunam na enega od naslednjih načinov. Obkroži pravilni odgovor.



a) 10 cm + 6 cm
b) 2 · (10 cm + 6 cm)
c) 2 · 10 cm + 2 · 6 cm
č) 10 cm + 6 cm + 10 cm + 6 cm
d) 10 cm · 6 cm
e) 10 cm · 6 cm · 10 cm · 6 cm

Pojasni svojo izbiro.

Slika 4: Naloga izbirnega tipa z dodanim utemeljevanjem

Zastavi se nam vprašanje, kakšna so kakovostna vprašanja, s katerimi dobimo povratno informacijo o znanju učencev in kako zastavljanje vprašanj izpeljati pri pouku. Pri tem poskusimo ozaveščati naslednja načela za oblikovanje vprašanj:
- oblikujemo odprta vprašanja,
- načrtujemo čas za razmišljanje, posvetovanje in odgovor ter vprašanja, ki odpirajo razpravo v razredu,
- ne prekinjamo učencev pri sporočanju, sprejemamo delne/napačne odgovore,
- spodbujamo kritično mišljenje (kako, zakaj, razloži, pod kakšnimi pogoji, primerjaj …),
- vztrajamo pri daljših odgovorih,
- spodbujamo vprašanja učencev, ki vodijo k novim vprašanjem,
- omogočamo vključevanje vseh učencev,
- povratna informacija je takšna, da spodbuja nova vprašanja.

Nepravilni rezultati oziroma odgovori pri takem načinu učenja spremenijo svoj pomen, dobijo formativno podobo in so osnova za nadaljnje učenje.

Sooblikovanje ciljev učenja in kriterijev uspešnosti

Kako uspešen je lahko učenec pri učenju, če ne razume, kaj je cilj njegovega učenja? Z načrtnim in sistematičnim vključevanjem učencev v **sooblikovanje ciljev in kriterijev uspešnosti** lahko dvome o tem zmanjšamo.

Učno ciljno načrtovanje pouka temelji na učnih ciljih, ki so zapisani v učnih načrtih. Pogosto so zapisani v strokovnem jeziku, ki je učencem nerazumljiv. Z namenom ozaveščanja pri učencih, *kaj* in *kako* se učijo, jih moramo preoblikovati, dopolniti in se z njimi pogovoriti, tako da so jim razumljivi ter da skozi njih vidijo smisel učenja.

Cilji učenja učencem (Holcar, 2016):
- pomagajo odgovoriti na vprašanje, kam grem in kaj se pričakuje, da bom znal,
- naredijo učenje bolj transparentno,
- spodbujajo učence k razmišljanju o učenju, prevzemanju odgovornosti za lastno učenje.

Učitelj naj zagotovi, da so (Holcar, 2016):
- cilji jasni, dosegljivi, realistični, časovno opredeljeni in povezani z dolgoročnimi cilji/večjo sliko učenja,
- cilji zapisani v jeziku, da jih učenci razumejo,
- cilji zapisani na vidnem mestu, da jih učenci lahko kadarkoli preberejo (v zvezku, na učnem listu, na plakatu v razredu …),
- povezave med učnimi cilji ter učnimi dejavnostmi vidne.

Kriteriji uspešnosti naj bodo oblikovani tako, da z njimi lahko ovrednotimo kakovost zbranih dokazov o učenju.

Kriteriji uspešnosti (Holcar, 2016):
- odgovorijo na vprašanje, kako vem, da sem dosegel učni cilj oziroma da sem uspešen,
- so osnova za spremljanje napredka,
- so osnova za podajanje kakovostne povratne informacije,
- so osnova za načrtovanje dejavnosti pri pouku,
- so osnova za samovrednotenje, vrstniško vrednotenje,
- so učencu v pomoč pri oblikovanju lastnih ciljev.

Kaj kažejo raziskave o udeleženosti učencev pri načrtovanju ciljev in kriterijev?

Če učitelj načrtuje kriterije uspešnosti, še preden bo natančneje načrtoval dejavnosti za poučevanje in učenje v razredu, se čas načrtovanja dejavnosti skrajša za 50 % (Bostner in ostali, 2015, v Clarke, 2005).

Učenci se najbolje učijo takrat, ko razumejo, kaj se učijo, in ko vedo, kaj se od njih pričakuje (Bostner in ostali, 2015, v Black, 2007).

Jasni kriteriji vrednotenja lahko izboljšujejo učenje zaradi boljše narave pogovorov - usmerjenost v vsebino in evalviranje sta večja (Bostner in ostali, 2015, v Coohen idr. 2002).

Velikokrat se sprašujemo, v kolikšni meri so učenci res lahko soudeleženi pri načrtovanju ciljev učenja. Zagotovo je precej učnih situacij, kjer lahko po analogiji predhodnega učenja učence že vnaprej pripeljemo do tega, kaj bo cilj nadaljnjega učenja.

S prej predstavljenimi dejavnostmi smo preverili razumevanje pojmov ploščina lika in obseg lika, učence pa želimo pripeljati do dolgoročnega cilja *Znam izračunati ploščino poljubnega lika*. To lahko naredimo s primernimi vprašanji, kot so na primer:

- S katerimi geometrijskimi liki smo se letos ukvarjali pri matematiki?
- Katerim geometrijskim likom znaš izračunati ploščino?
- Kaj bi se lahko še naučil?

V ta namen lahko uporabimo strategijo VŽN (Kaj že vem? Kaj se želim naučiti? Kaj sem se naučil?).

Katere geometrijske like poznam? Kaj jim znam izračunati?	Dejavnost: izdelamo pojmovno shemo geometrijskih likov
Kaj se želim naučiti?	Izračunati ploščino poljubnega lika.
Kaj sem se naučil?	Zbiram dokaze o lastnem učenju. Kaj znam: • Razumem in razložim formule za ploščino trikotnika in različnih štirikotnikov. • Z različnimi strategijami izračunam ploščino trikotnika, štirikotnikov. • Uporabim znanje o ploščini v problemskih nalogah.
Česa se še nisem naučil?	Izračunati ploščino poljubnega večkotnika in ploščino kroga.

Omenjeno metodo lahko nadgradimo tudi z vprašanjem: Kako sem se učil? Kako sem prišel do formul za ploščino trikotnika, različnih štirikotnikov?

Za cilj *Izračunam ploščino poljubnih trikotnikov in štirikotnikov* lahko sooblikujemo kriterije uspešnosti, kot so prikazani v preglednici 3.

Glede na naravo matematičnih vsebin se o ciljih učenja večkrat pogovarjamo z učenci šele po izvedeni učni situaciji preiskovanja, ko odkrijemo novo matematično zakonitost ali pravilo. Na primer: pri Pitagorovem izreku, trikotniški neenakosti najprej učitelj zastavi preiskovanje, tako da učenci samostojno odkrijejo zvezo med trikotnikovimi stranicami, potem pa poskušajo uzavestiti, kaj so se s tem naučili in na kakšne načine lahko to matematično znanje uporabijo.

Zbiranje dokazov o učenju

Kako dokazujem, da sem cilj dosegel? Kaj so dokazi o učenju? Dokazi so vsa gradiva in informacije, ki izkazujejo, kje na poti do učnega cilja je v nekem trenutku učenec.

Ustrezno načrtovane dejavnosti pri pouku matematike, ki izhajajo iz učnih ciljev, naj omogočajo **zbiranje različnih dokazov** o učenju učencev in razumevanju učnih vsebin. Na podlagi zbranih dokazov učitelj dobi vpogled v razumevanje in napredek učencev ter prilagaja nadaljnje učenje in usmerja učenčeve procese učenja.

Dokaze o učenju učenci zbirajo v vseh fazah učnega procesa. Dokazi o učenju so že dejavnosti preverjanja predznanja, aktivnega usvajanja novih vsebin, utrjevanja, raziskovanja, pri čemer je treba poudariti, da temeljijo na ciljih učenja, standardih znanja in znanih kriterijih uspešnosti. Naloga učitelja je zagotoviti raznolike dokaze, s katerimi lahko kakovostno ugotavlja, kje na poti učenja so učenci. Pri matematiki morajo dokazi vključevati dejavnosti, s katerimi učenec izkaže razumevanje novih matematičnih pojmov, kar pomeni, da mora biti učenje naravnano tako, da so učenci aktivni izgrajevalci lastnega znanja. Npr. raziskovanje formule za ploščino paralelograma naj bo na-

Preglednica 3: Kriteriji uspešnosti za cilj: Izračunam ploščino poljubnih trikotnikov in štirikotnikov.

Kriteriji uspešnosti	
POJMI • Poznam in razumem formule za ploščino različnih likov (kvadrat, pravokotnik, paralelogram, romb, trapez, deltoid, trikotnik, pravokotni trikotnik …).	**POSTOPKI** • Ocenim ploščino. • Glede na podatke izberem ustrezno strategijo: zmerim potrebne podatke, lik preoblikujem v ploščinsko enak lik, ki mu znam izračunati ploščino, uporabim ustrezno formulo, izračunam ploščino, primerjam izračunano ploščino z oceno, zapišem rezultat v ustrezni ploščinski enoti.
KOMUNIKACIJA/SPOROČANJE/UTEMELJEVANJE • Pisno in ustno predstavim pojme, postopke v povezavi s ploščino. • Pravilno uporabljam matematično terminologijo in simboliko (pisno in ustno): risanje skic, zapisi formul, številski izrazi, besedni zapisi. • Smiselno in logično utemeljujem situacije, kjer uporabljam pridobljeno znanje.	**PROBLEMSKA ZNANJA** • Uporabljam pojem ploščina v problemskih nalogah. • Raziskujem in samostojno oblikujem vzorce, kjer uporabljam pojme: geometrijski liki, ploščina, obseg.

črtovano tako, da bodo učenci samostojno prišli do formule. To od učitelja zahteva, da predhodno načrtuje aktivnost vodenega ali samostojnega raziskovanja, med poukom pa učence opazuje, spremlja in usmerja na poti učenja.

V nadaljevanju lahko razumevanje formule za ploščino paralelograma preverimo z naslednjima nalogama:

Primer 1:
Ploščina paralelograma je 6 cm^2.

a) Kaj lahko poveš o dolžini stranice paralelograma in višini na stranico? Zapiši nekaj možnosti:

dolžina stranice					
višina na stranico					

b) Nariši enega od paralelogramov iz zgornje preglednice. Koliko rešitev ima naloga?

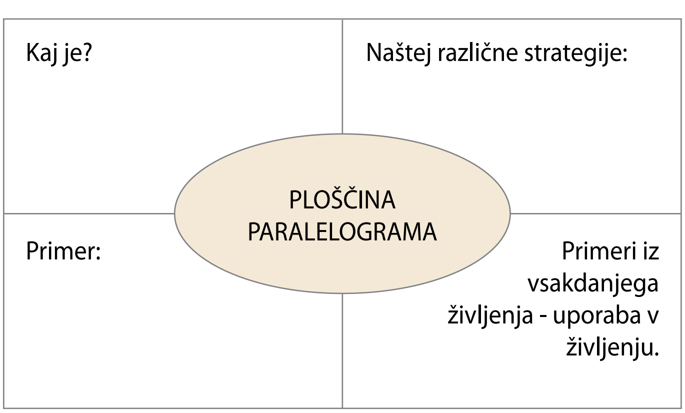
Primer 2:

a) Najmanj koliko podatkov potrebuješ, da narišeš poljuben paralelogram? Naštej vsaj tri različne primere.

b) Najmanj koliko podatkov potrebuješ, da izračunaš ploščino poljubnega paralelograma? Naštej različne primere.

Dokazi o učenju in napredku učencev so lahko tudi izvedene načrtovane učne dejavnosti za odkrivanje novih matematičnih pojmov in postopkov ter povezav med njimi, rešene naloge, izdelki, različni grafični organizatorji, predstavitve problemskih nalog, plakati, portfolio učenca, seminarske naloge, digitalne predstavitve, refleksije učencev, ugotovitve učitelja pri opazovanju učencev, pogovor z učenci, pogovor učencev …

Z naslednjo grafično predstavitvijo (Bačnik, Bone, 2016) na sliki 5 lahko učenci v fazi ponavljanja in utrjevanja izkažejo razumevanje pojma ploščina paralelograma na različnih področjih spremljanja.

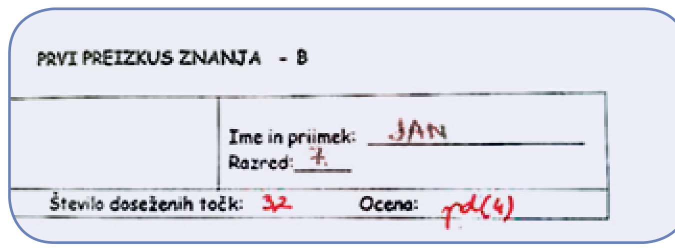


Slika 5: Primer grafičnega organizatorja

Povratna informacija

Zelo pomemben dejavnik v procesu učenja je **povratna informacija** učencu o njegovem napredku. Povratna informacija, ki jo učenec dobi, naj pri njem sproži kognitiven in ne čustven odziv (Wiliam, 2011). Učenca naj usmerja k nadaljnjemu učenju in izboljšanju dosežkov ter spodbuja njegove miselne procese. Kakovostna povratna informacija izhaja iz ciljev in kriterijev uspešnosti, je konkretna in pravočasna. Tega učinka ne dosežemo z ocenami, točkami in splošnimi komentarji, kot na primer »*Zelo si se potrudil*«. Učenec potrebuje kvalitativno povratno informacijo, ki mu sporoča, kaj že zna, kaj in kako je treba še izboljšati ter ga spodbuja k nadaljnjemu učenju.

Učenci v naših šolah pogosto dobijo povratno informacijo v obliki številčne ocene kot na sliki 6. Tovrstna informacija ne vsebuje usmeritev, kako dosežek izboljšati, in bolj kot napredek pri učenju spodbuja tekmovalnost.



Slika 6: Povratna informacija v obliki številčne ocene

Pogosto je opaziti, da učenec v takem primeru ob prejemu ocenjenega pisnega izdelka najprej pogleda svojo oceno, nato pa oceno, ki jo je prejel njegov sošolec, in ne tega, kje so njegova področja za izboljšanje. Pri učencih s šibkim matematičnim znanjem tovrstna ocena lahko povzroči le začetno izboljšanje, ki ni trajno, ter izgubo motivacije, učenci z višjimi dosežki pa zadržijo visok nivo zanimanja ne glede na tip povratne informacije. To je pokazala izraelska študija, ki je raziskovala vpliv različnega tipa povratne informacije na motivacijo in dosežke učencev, kar prikazuje preglednica 4 (Emerson, 2014).

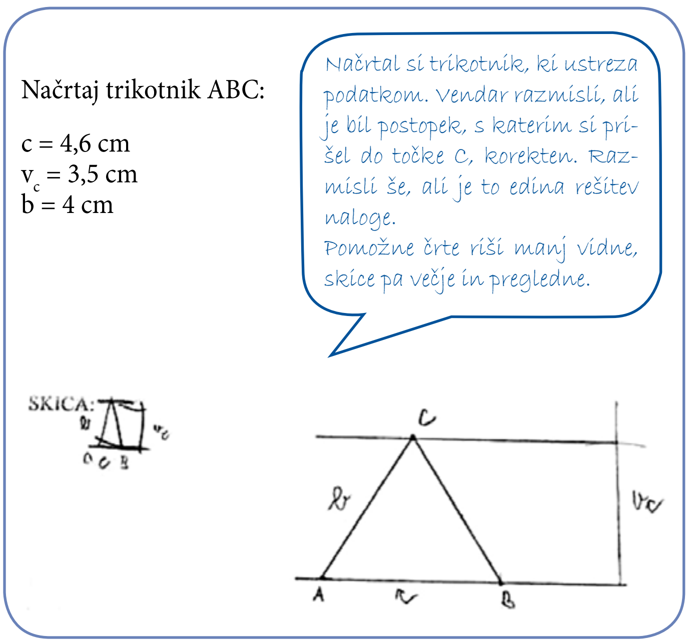
Preglednica 4: Vpliv tipa povratne informacije na učenje

Skupina	Učinek na učenje	Motivacija
Samo komentar	Se izboljša in izboljšanje je po zaporedju nalog trajno.	Vpliv sposobnosti: • Učenci z višjimi dosežki zadržijo visok nivo zanimanja ne glede na tip povratne informacije. • Učenci z nižjimi dosežki, ki dobijo oceno, hitro izgubijo interes.
Ocena in komentar	Konstantno slabšanje.	
Samo ocena	Začetno izboljšanje, ki ni trajno.	

Zanimivo je tudi, da je hkratna uporaba ocene in komentarja neučinkovita, saj se učenci osredotočijo zgolj na oceno in ne preberejo komentarja, ki bi jim pomagal pri nadaljnjem učenju (Hodgen, Wiliam, 2006).

Učinkovita povratna informacija je pozitivno naravnana, objektivna, konkretna, konstruktivna in presega okvir dobro/slabo. Učinkovito jo je podati v obliki »sendviča«: pozitivna opažanja, možna področja izboljšanja, pozitivna usmeritev za nadaljnje delo.

Na sliki 7 je primer pisne informacije učencu, ki je reševal nalogo z načrtovanjem trikotnika. Učitelj je učencu sporočil, kateri deli konstrukcije so pravilni, kako naj konstrukcijo dopolni in na kaj naj bo v prihodnje bolj pozoren. Tovrstna povratna informacija je bistvena nadgradnja povratne informacije v obliki popravnega znaka za »manjkajoče«.



Slika 7: Primer pisne povratne informacije učencu

Glede na kakovost povratne informacije Nyquist (Wiliam, 2013) razlikuje naslednje različne vrste formativnega preverjanja:

- skromna povratna informacija (samo informacija o ocenah),
- samo povratna informacija (poleg ocene še cilji, ki naj bi jih učenci dosegli, ali pravilni odgovori na vprašanja),
- skromno formativno preverjanje (pravilni rezultati skupaj z razlago),
- srednje dobro formativno preverjanje (pravilni rezultati skupaj z razlago in nekaj specifičnimi napotki za izboljšanje rezultatov),
- učinkovito formativno preverjanje (pravilni rezultati skupaj z razlago in napotki za specifične dejavnosti za izboljšanje rezultatov).

Po prejemu povratne informacije je treba pozornost nameniti tudi odzivu učenca. Na primer predvideti je treba čas za sprejemanje povratne informacije, preveriti je treba, ali je učenec povratno informacijo razumel, in sooblikovati njegovo nadaljnjo učno pot.

Učinkovitost povratne informacije je odvisna tudi od njenega izvora – če je izvor zaupanja vreden (npr. učitelj), se njena učinkovitost poveča.

Vir učenja in povratnih informacij lahko predstavljajo učenci drug drugemu. Sovrstniki predstavljajo močno potencialno polje za vzajemno učenje in sodelovalno delo. Vloga **vrstniške povratne informacije** je spodbujati učenje in izboljšati učne dosežke. Učenci lahko drug drugemu podajajo povratno informacijo o izdelku ali nalogi, lahko pa opišejo matematični pojem ali postopek s svojimi besedami in tako prispevajo k boljšemu razumevanju pri sošolcu. Ko učenci dobijo priložnost, da razložijo določen matematični pojem ali koncept svojemu sošolcu, na ta način pravzaprav preverijo globino in obseg svojega znanja in razumevanja tega pojma ter se urijo v ubesedovanju lastnih pojmovnih shem.

V razredu lahko učitelj organizira delo tako, da spodbuja vrstniško povratno informacijo s podporo različnih tehnik: dve zvezdi in ena želja, vprašanja skupine ob zaključku učne ure, preveri pri treh pred menoj, naključni poročevalec, klasifikacija napak …

Samovrednotenje

Učenčevo znanje in napredek ugotavlja ter spremlja učitelj, nujno pa je, da so v vrednotenje vključeni tudi učenec in njegovi vrstniki. **Samovrednotenje** učencu omogoči vpogled v lastno znanje in podpre prepoznavanje močnih ter šibkih področij. Ob tem učenec krepi odgovornost za lastno znanje in jo prevzema nase (Suban, 2013). Učenec razvija sposobnost nadziranja in usmerjanja procesa lastnega učenja. Učenec v tej fazi išče odgovore na nekatera ključna vprašanja: Kaj znam in razumem? Kaj sem se naučil? Kaj znam zelo dobro? Česa še ne razumem? Kaj mi ni najbolje uspelo? Zakaj mi ni uspelo? Kako se bom naučil tisto, česar še ne znam? Kdo mi bo pomagal?

Eden od pristopov je, da učenec ob koncu obravnave učnega sklopa izpolni preglednico, kjer ovrednoti stopnjo svojega znanja. Primer za cilj *Učenec/učenka določi delitelje števila* je naveden v nadaljevanju na sliki 8 (Suban, 2013). Na sliki 9 pa je primer samovrednotenja v obliki dela delovnega lista z nalogami (Senekovič, 2013).

Opis učnega cilja	Naloga	Moje vrednotenje		
		Znam	Delno znam	Ne znam
Učenci/učenke določijo delitelje števila.	Zapiši, kdaj je število *b* delitelj števila *a*.			
	Zapiši delitelje števila 24.			
	Na paradi je sodelovalo več dečkov in več deklic. Vsak otrok je nosil enako število balonov. Skupno število balonov je bilo 30. Razišči, koliko dečkov in koliko deklic bi lahko sodelovalo na paradi.			

Slika 8: Primer samovrednotenja usvojenosti cilja iz učnega načrta

Samovrednotenje lahko poteka tudi ob podpori različnih vprašalnikov, ki jih pripravi učitelj. Če so izdelani v elektronski obliki, je poleg funkcije samovrednotenja to še povratna informacija učitelju o znanju vsakega učenca, ki je hitro dosegljiva in učitelju omogoča, da načrtuje nadaljnje učenje in poučevanje v skladu s pridobljenimi ugotovitvami.

V naslednjem primeru je učitelj z elektronskim vprašalnikom preverjal, kakšne so učne navade učencev pri matematiki. V

Delovni listi z nalogami

Ime in priimek: ______________________________ Datum: ______________

Legenda:

- **Znam brez pomoči** pomeni, da učenec samostojno reši nalogo brez dodatne pomoči.
- **Znam s pomočjo** pomeni, da učenec nalogo reši samostojno, vendar z uporabo ponujene pomoči (zgledi, primeri, naloge v gradivih, starši …),
- **Ne znam s pomočjo** pomeni, da učenec naloge kljub ponujeni pomoči ne reši.
- **Reši narobe** – po preverjanju označi polje, če je rešitev bila narobe, čeprav je izbral ZNAM.

		Znam		Ne znam	Rešil narobe
Oceni zanesljivost svojega znanja v naslednjih situacijah		**Brez pomoči**	**S pomočjo**	**S pomočjo**	
1. Izračunaj vsoto vseh celih enomestnih negativnih števil. *(Učbenik, str. 40, 41, zgled: 1., naloge: II. – 1, 2, 3)*	1.				
2. Utemelji, zakaj je vsota vseh celih števil med nasprotnima številoma enaka nič. *(Učbenik, str. 40, 41, zgled: 1., naloge: II. – 1, 2, 3; str. 28, zgledi 1., 2., 3., 4.)*	2.				

Slika 9: Primer samovrednotenja usvojenosti učnega cilja skozi delovni list

konkretnem vprašanju na sliki 10 ga je zanimalo, katere vire uporabljajo učenci pri svojem učenju. Tako je dobil boljši vpogled v njihove učne navade in to uporabil za načrtovanje učnih dejavnosti, učenci pa je ob tem uzaveščajo lastne učne navade.

Iz katerih virov se ponavadi učiš in utrjuješ matematično učno snov?

	Nikoli	Včasih	Pogosto	Vedno
Iz matematičnega zvezka	❍	❍	❍	❍
Iz matematičnega učbenika	❍	❍	❍	❍
Iz matematičnega delovnega zvezka	❍	❍	❍	❍
Iz matematičnih učnih listov	❍	❍	❍	❍
Iz svetovnega sveta podatkov (Interneta)	❍	❍	❍	❍
Iz različnih matematičnih zbirk nalog	❍	❍	❍	❍

Slika 10: Vprašanje v elektronskem vprašalniku o učnih navadah učencev (Redenšek, 2015)

Preprost način za spodbuditev samoreflektivnih in samoregulacijskih procesov je metoda nedokončanih povedi. Učenec lahko razmišlja o svojem učenju ob na primer naslednjih iztočnicah:

- Najlažji del mi je bil …
- Dokazal sem …
- Pred tem nisem vedel …
- Moj najljubši del je bil …
- Ponosen sem na …
- Nisem pričakoval …
- Pomembno pri tem učenju se mi zdi …

V naslednjem primeru na sliki 11 se koraka preverjanja predznanja in samovrednotenja prepletata na istem učnem listu. Prvi stolpec izpolni učenec pred obravnavo učne vsebine in tako preveri svoje predznanje. Listek lahko prepogne tako, da odgovore v prvem stolpcu skrije. Ob koncu obravnave se učenec ponovno opredeli do istih trditev, pregleda svoje odgovore in ugotavlja napredek v svojem znanju. V stolpcu *Moje opombe* lahko utemelji svoje odgovore, zapiše svoje ugotovitve in načrtuje naslednji korak v učenju.

Pred obravnavo DA/NE	Trditev	Po obravnavi DA/NE	Moje opombe
	Vsota kvadratov števil 11 in 15 je $(11 + 15)^2$.		
	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$		
	Če je $a^2 = 2$, je $3a^2 = 24$.		

Slika 11: Preverjanje predznanja in samovrednotenje na istem učnem listu

Med raziskavami, ki proučujejo vpliv samovrednotenja na matematično znanje učencev, omenimo raziskavo, ki sta jo izvedla Fontana in Fernandes na Portugalskem (Wiliam, 2011). V raziskavi sta sodelovali eksperimentalna skupina 354 učencev in 25 učiteljev ter kontrolna skupina 313 učencev in 20 učiteljev. V eksperimentalni skupini so učenci v času 20 tednov načrtno razvijali veščine samovrednotenja pod vodstvom učiteljev. Ti so se za uvajanje strategij formativnega spremljanja kontinuirano usposabljali.

Ob začetku in koncu raziskave je vseh 667 učencev pisalo standardiziran matematični test. Ob tem so se dosežki učencev v kontrolni skupini izboljšali za 7,8 točk, dosežki učencev v eksperimentalni skupini pa za 15 točk. Drugače povedano, učenci eksperimentalne skupine so v 20 tednih izboljšali svoje dosežke toliko, kot bi jih sicer v 38 tednih učenja.

Razvojna naloga Formativno spremljanje na Zavodu RS za šolstvo

Elementi formativnega spremljanja se v različnih projektih in nalogah v slovenskem šolskem prostoru pojavljajo od leta 2000. V zadnjem letu na Zavodu RS za šolstvo poteka *razvojna naloga Formativno spremljanje/preverjanje* na vseh predmetnih področjih, v katero so vključeni tudi učitelji praktiki. Pri matematiki je vključenih 12 učiteljev iz osnovnih in srednjih šol, ki preizkušajo in razvijajo elemente formativnega spremljanja pri svojem pouku in reflektirajo svoje delo. Pedagoške svetovalke jim zagotavljamo strokovno podporo na rednih strokovnih srečanjih in na spremljavah pouka na šolah.

Za končne evalvacije je še prezgodaj, vmesne povratne informacije učiteljev razvojnikov pa so v večini spodbudne. Učitelji poročajo o tem, da so učenci pozitivno sprejeli spremembe pri pou-ku in da vse bolj prevzemajo odgovornost pri učenju. Eden od učiteljev je zapisal: »*Mislim, da je ključna sprememba to, da sproti sledimo kriterijem kakovosti – tako jaz, kot dijaki. Opažam, da bolj pogosto opozarjam na posamezne kriterije (pri pregledu domače naloge, med reševanjem na tablo in samostojnim reševanjem …). Veliko več se tudi pogovarjamo in s tem izboljšujemo vzdušje, razumevanje in odnose.*«

Zaključek

Formativno spremljanje je celovit proces, ki vključuje preverjanje predznanja, sonačrtovanje ciljev in kriterijev uspešnosti, zbiranje dokazov o učenju, podajanje povratne informacije in samovrednotenje in se izvaja v vseh fazah pouka. Osnovni namen dejavnosti učitelja in učencev pri formativnem spremljanju je usmerjen v ugotavljanje znanja za izboljšanje učenja in poučevanja. Pri tem je pomemben dejavnik formativna vloga povratne informacije o znanju učenca, kar pomeni, da povratna informacija vpliva na nadaljnje učenje in poučevanje.

Wiliam (2013) navaja, da izsledki raziskav na tem področju kažejo, da se z dnevno uporabo praks formativnega spremljanja izboljšajo dosežki učencev, v nekaterih primerih se poveča hitrost učenja celo do 70-80 %, tudi če gre za merjenja z zunanjimi standardiziranimi testi. Ta vidik tako odpira mnoge možnosti in priložnosti za izboljšanje učenja in poučevanja ter učnih dosežkov učencev.

Razvojno delo z učitelji se v letošnjem letu nadaljuje, pri čemer se predvideva, da se bo mreža sodelujočih učiteljev še razširila. Tudi mi pričakujemo pozitiven napredek tako pri učnih dosežkih učencev kot pri motivaciji za učenje matematike, pri učiteljih pa pripravljenost, da nadaljujejo s poučevanjem, ki je smiselno povezano z učenjem učencev. ■

Viri

Bačnik, A., Bone, J. idr. (2016). *Izobraževalni lističi Scientix NA-MA*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Emerson, N. (2014). *Using assessment for learning strategies in the mathematics classroom*. KUPM 2014. Čatež.

Hodgen, J., Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box: Assessment for learning in the mathematics classroom.* London: School of Education, King's College.

Holcar Brunauer, A. idr. (2016). *Formativno spremljanje v podporo učenju*.Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Japelj Pavešić, B. (2012). *Znanje matematike in naravoslovje med osnovnošolci v Sloveniji in po svetu*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Kmetič. S. (2016). Interno gradivo razvojne naloge Formativno spremljanje.

Lipnik, R. (2016). Interno gradivo razvojne naloge Formativno spremljanje.

Looney, J. (2005). *Formative assessment: Improving learning in secondary classrooms*. Paris: Organisation of Economic Cooperation and Development.

Redenšek, P. (2015). Interno gradivo projekta EUfolio.

Schoenfeld, H. (2015). Summative and formative assessments in mathematics spporting the goals of the common core standards. Theory into practice. 54: 3, 183-194

Senekovič, J. (2013). Seštevanje in odštevanje racionalnih števil, 8. razred. V Suban, M., Kmetič, S. (ur.), *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi*. *Matematika*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Suban, M. (2013). Vrednotenje in samovrednotenje znanja pri matematiki. V Suban, M., Kmetič, S. (ur.), *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Vzgoja in izobraževanje. (2014) l. 45, št. 5-6. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. (dostopno na http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/viz-5-5-2014/).

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington: Solution Tree Press.

Wiliam, D. (2013). Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih. V Dumont, H., Istance, D., Benavides, F (ur.), *O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Primeri prilagoditev in opor pri reševanju matematičnih problemskih nalog na razredni stopnji

Vesna Vršič
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Reševanje matematičnih problemov predstavlja najvišjo taksonomsko raven znanja pri matematiki. Opredeljujemo ga kot sposobnost uporabe obstoječih znanj v novih situacijah, uporabo kombinacij več pravil in pojmov, sposobnost uporabe konceptualnega in proceduralnega znanja. V prispevku problemske naloge razumemo kot besedilne naloge, situacije, vzete iz vsakdanjega življenja, in didaktično usmerjene naloge iz matematičnih okoliščin, ki so za učence nove in je za njihovo reševanje treba poiskati nove poti. Pri pouku je zelo pomembno, da učence sistematično in postopoma vpeljujemo v reševanje problemskih nalog, da omogočimo učencem, da si pridobijo čim več izkušenj z reševanjem različnih problemskih nalog, da omogočimo reševanje problemskih nalog na različne načine in da učencem pri reševanju pomagamo z različnimi prilagoditvami in oporami.

Ključne besede: problemske naloge, dobra poučevalna praksa, prilagoditve oblik dela in gradiv, opore

Examples of Adjustments and Support in Solving Mathematical Problems at the Primary Level

Abstract

The solving of mathematical problems presents the highest taxonomic level of mathematical knowledge. It is defined as the ability to use existing knowledge in new situations; to use combinations of several rules and concepts; and the ability to use conceptual and procedural knowledge. The paper views mathematical problems as word problems, situations taken from everyday life, and didactically-oriented tasks with mathematical circumstances, which are new to the students and for which they must find new ways to solve. During lessons, it is very important that students are systematically and gradually introduced to problem solving; that we enable students to gain as much experience as possible with solving various mathematical problems; that we enable the solving of problems in different ways; and that we help students to solve them by providing various adjustments and support.

Keywords: mathematical problems, good teaching practice, adjustments to work methods and materials, support

Uvod

Različni strokovnjaki v našem šolskem sistemu s področja poučevanja matematike si prizadevajo, da bi z različnimi pristopi čim bolj spodbudili miselne aktivnosti učencev pri pouku in jih tako pripeljali do razumevanja matematičnih pojmov in konceptov, ustreznega obvladovanja postopkov in algoritmov ter uporabe znanja v novih situacijah. S tem bi dvignili raven znanja naših učence in tudi raven matematične pismenosti.

V učnem načrtu za matematiko iz leta 2011 je po celotni vertikali osnovne šole zasnovan sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, ki z didaktično opredeljenimi cilji poskuša postopoma in sistematično vpeljati učence v uporabo znanja ob reševanju problemov. Operativni cilji sklopa se nanašajo na razvijanje občutljivosti oziroma zaznavo »problema« v matematičnih situacijah ali okoliščinah, na uporabo različnih reprezentacij (konkretnih, grafičnih, didaktičnih …) za namene predstavljanja problemske situacije in spoznavanja problema z različnih zornih kotov, na razvijanje in iskanja ustreznih strategij reševanja problema ter na razvijanje kognitivnih in metakognitivnih zmožnosti. Tudi pri matematiki moramo razvijati bralne veščine, tako tehniko branja kot razumevanje prebranega, ki so pogoj za učenčevo razumevanje besedila oz. konteksta in informacij. Cilje omenjenega sklopa naj bi učitelji uresničevali ob različnih vsebinah iz geometrije in merjenja, aritmetike in algebre ter drugih vsebin.

Kako razumemo pojem »matematični problem«

Poznamo veliko razlag pojma »matematični problem«. Mnogi avtorji ga interpretirajo kot situacijo, ki je za posameznega učenca nova in neznana ter je na doslej znani način ne more rešiti, saj je za njegovo rešitev treba poiskati nove poti in uporabljati drugačne miselne koncepte. Take naloge najpogosteje v učencu spodbudijo občutek nelagodja, saj si ne zna razložiti nekaterih dejstev, v začetku ne uvidi poti do rešitve, se ne spomni, da bi podobno nalogo že kdaj reševal. Če faza frustracije traja predolgo in učenec ni zmožen poiskati pretekle izkušnje, ki bi mu pomagala pri reševanju, ali ne najde orodij oz. ideje za rešitev problema, potem naloga zanj predstavlja »nerešljivi problem«. Magajna Z. (2003, str. 130) pravi, da pri pouku matematike pogosto uporabljamo izraz »problem« kot sopomenko za težko nalogo ali tudi za besedilno nalogo.

Na razredni stopnji se učenci pri matematiki najprej srečajo z reševanjem besedilnih nalog, ki so po mnenju Frobisherja (Vršič, 2010, str. 49) primeri šolskih nalog, vzeti iz konteksta okolja in ciljno usmerjeni ali kot jim pravijo nekateri »oblečeni računi«. Take naloge se v učbeniških gradivih pojavljajo ob zaključku posameznih sklopov. Namenjene so poglabljanju in uporabi znanja iz vsebin, ki so jih obravnavali. Najpogosteje so to vsebine iz aritmetike in so povezane z uporabo računskih operacij seštevanja in odštevanja ter množenja in deljenja.

Cotič M. (1999, str. 7) pri definiciji matematičnega problema navaja tri njihove komponente:

- začetno stanje ali situacija, v kateri je dana vsebina problema z ustreznimi podatki in informacijami,
- cilj, ki ga mora reševalec problema doseči,
- pot od začetnega stanja do cilja, ki jo mora reševalec poiskati, da reši problem.

Tako loči probleme z zaprto potjo in zaprtim ciljem, z odprto potjo in zaprtim ciljem ter odprto potjo in odprtim ciljem. Problemske naloge s preveč podatki, s premalo podatki, z več rešitvami, ki jih prištevamo k problemom z odprto potjo in zaprtim ciljem ter problemi iz logike, učence spodbujajo k divergentnemu mišljenju, jim omogočajo pridobivanje izkušenj ob uporabi različnih pristopov, jih vpeljujejo v različne strategije reševanja in jim omogočajo izgrajevanje lastnih konceptov reševanja. Ker so v učbeniških gradivih take naloge redko zastopane, jih morajo učitelji poiskati v dodatnih strokovnih gradivih. Še redkeje so v učbeniških gradivih učiteljem in učencem na voljo odprte problemske naloge, kjer cilj problema ni očiten in je treba situacijo raziskati. Pri odprtih problemih je treba učence navajati, da razmišljajo v različnih možnih smereh. Zavedajo se naj, da so tudi pri matematiki lahko ustvarjalni in da ni vedno samo ene pravilne poti reševanja ali celo samo ene pravilne rešitve. Nekateri strokovnjaki take naloge poimenujejo tudi raziskovalne. Pri reševanju odprtih problemov so učencem še posebej v pomoč njihove izkušnje z reševanjem, fleksibilnost in fluentnost pri iskanju rešitev in to, da niso usmerjeni zgolj v rezultat oziroma rešitev naloge, temveč so v enaki meri pozorni tudi na pot reševanja.

Različni pristopi in dobra poučevalna praksa

Reševanje problemov zahteva višje miselne procese od razumevanja besedila (konteksta), analize in sinteze podatkov, uporabe matematičnih orodij in veščin pri reševanju, do vrednotenja smiselnosti poti reševanja in rešitve. Problemsko znanje pri matematiki opredeljujemo kot sposobnost uporabe obstoječih znanj v novih situacijah, uporabo kombinacij več pravil in pojmov pri soočenju z novo situacijo, sposobnost uporabe konceptualnega in proceduralnega znanja. S problemskim znanjem povezujemo tudi pojma odkrivanje in raziskovanje (Žakelj, 2004).

Pri reševanju problemov mora učenec povezovati različna znanja, spretnosti in načine mišljenja. Da bo učenec razumel zapisano problemsko situacijo, mora razumeti prebrano, imeti širok besedni zaklad, razumeti matematično strokovno terminologijo in poznati učinkovite bralne strategije, ki mu bodo pomagale pri analitičnem razmišljanju, primerjanju in povezovanju podatkov, pri ločevanju bistvenih podatkov od manj bistvenih, postavljanju smiselnih vprašanj (podvprašanj), razdelitvi naloge na manjše korake itd.

Učitelji se morajo zavedati kompleksnosti znanja, ki jih od učencev zahteva reševanje matematičnih problemov, in tako skrbno in sistematično načrtovati pouk, ki bo učence uvajal v reševanje matematičnih problemskih nalog. V didaktiki poznamo različne pristope:

- **Učitelj kot »model reševalca«, ki učencem predstavi svoje reševanje**

Učitelj učencem predstavi svojo miselno pot reševanja problemske naloge tako, da ob reševanju glasno opisuje, razlaga, kaže svoj način razmišljanja. Tako učitelj demonstrira svoj model reševanja problemske naloge. K predstavitvi svojega načina reševanja naloge spodbuja tudi učence in tako lahko tudi učenci postanejo modeli.

- **Vodeni pristop k reševanju**

Vodeni pristop reševanja učitelji uporabljajo, ko imajo učenci še malo izkušenj z reševanjem problemskih nalog. Velik poudarek je na razvijanju strategije reševanja. V začetku je učencem v pomoč, če jih učitelji vodijo skozi reševanje po ustaljenem zaporedju korakov, da si lahko zapomnijo posamezne korake in izoblikujejo strategijo reševanja problemskih nalog. Pri tem lahko učitelji uporabljajo različne modele. V učbeniških gradivih (npr. Cotič, 2015, str. 24) lahko zasledimo zapis korakov reševanja:

Potek reševanja problema:

- Preberi nalogo.
- Podčrtaj podatke.
- Naredi načrt reševanja.
- Napiši račune.
- Zapiši odgovor.
- Preglej svojo rešitev.

Kavkler M. (2015, str. 70) predstavlja zapis korakov ob slikovni podpori:

	1. Preberem nalogo in razmislim, kaj želi od mene.
8	2. Obkrožim števila, ki so pomembna.
Odšli	3. Podčrtam ključne besede in premislim njihov pomen.
Koliko jih	4. Podčrtam vprašanje.
	5. Naredim načrt reševanja (narišem skico).
$6 \cdot 4$	6. Napišem račune in jih izračunam.
	7. Ponovno preberem vprašanje.
se odpeljal	8. Zapišem odgovor.
	9. Preverim smiselnost rešitve.

Te korake lahko imajo učenci zapisane na plakatu in obešene v razredu na vidnem mestu ali pa si jih zapišejo na kartončke (opora) in jih zalepijo na prvo stran zvezka ali ob rob mizice. Učitelji lahko učence navajajo na uporabo akronimov kot npr. PIPS (Kavkler, 2007, str. 102):

Preberi besedilo in poišči vse pomembne podatke v besedilu problema.

Ilustriraj besedilni problem (nariši sliko, grafični prikaz).

Pretvori besede v račun, ga izračunaj in napiši odgovor.

Sistematično preglej celoten potek reševanja besedilnega problema.

Pomembno je, da s temi modeli učencem pomagamo (Kavkler, 2009), da bodo znali pristopiti k samostojnemu reševanju in usvojitvi preprostih strategij reševanja po modelu. Pri izbiri modelov strategij reševanja mora učitelj paziti, da bodo učencu pomagali in ga smiselno usmerjali pri reševanju, zato naj bodo splošni.

V razvojnem projektu NAMARS smo s petimi učitelji razrednega pouka v letih od 2010 do 2013 vpeljevali pristop k reševanju matematičnih problemov na razredni stopnji in korake reševanja zasnovali iz posameznih faz problemskega pouka.

a) Razumevanje problemske naloge

Učitelji so preverjali, kako učenci razumejo besedilo oziroma kontekst naloge, zato so jim zastavljali tudi vprašanja, ki so se navezovala na besedilo naloge npr. Kje so se igrali učenci?.

Ob vprašanju, kaj se je zgodilo/kaj se dogaja (prinesel, zgubil …), so učenci poskušali izpostaviti ključno besedo, ki jih je usmerila v iskanje ustreznega matematičnega orodja oz. računske operacije. Ob izpostavljeni ključni besedi so si učenci postavljali vprašanje, npr. ali jih bo imel (sedaj) več ali manj, in tako utrjevali in poglabljali razumevanje računskih operacij seštevanje in odštevanje. Nekateri so si iz tako pridobljenih ključnih besed ustvarili plakat, ki jim je pri samostojnem reševanju pomagal, da so se spomnili lastne izkušnje reševanja problemske naloge.

b) Predstavitev problemske naloge z različnimi reprezentacijami

Učitelji so navajali učence, da razumevanje problemske naloge prikažejo s konkretnimi materiali, z risanjem ali oblikovanjem skice, iz katere so izpisali tudi podatke iz naloge. Tako oblikovano predstavitev vsebine problemske naloge so obnovili s svojimi besedami.

Učence se je spodbujalo, da so ob problemski nalogi zastavljali tudi vprašanja, pozneje tudi podvprašanja. Za oblikovanje podvprašanj so primerne kompleksne problemske naloge, katerih struktura besedila je že bolj zapletena in od učencev zahteva, da nalogo razdelijo na posamezne korake.

c) Reševanje

Učitelji so vodili učence do »praga rešitve« potem pa jih pustili, da so sami izpeljali postopek reševanja in predstavili rešitev problemske naloge. Vloga učitelja je bila, da učence usmeri v razmišljanje, da sproti preverjajo postopek reševanja in smiselnost rešitev.

č) Vrednotenje in refleksija

Učenci so se v tej fazi skušali zavedati lastnih strategij reševanja problemskih nalog, se zavedati svojih močnih in šibkih področij.

Učencem smo tako želeli približati sistematičen pristop k reševanju problemskih nalog in ustvariti možnosti za razvoj lastnih strategij. Omenjeni pristop je lahko eden izmed načinov dobre poučevalne prakse, ki je namenjen vsem učencem, hkrati pa omogoča učencem, ki potrebujejo več časa in podpore pri reševanju problemskih nalog, da strategijo nadgradimo in vanjo vnesejo različne prilagoditve in opore[1].

1 Spoznanja učiteljev s tega projekta in njihovi primeri šolske prakse so bili predstavljeni na matematični konferenci KUPM 2012 (Maribor, 23. in 24. avgust 2012), na strokovnem posvetu o bralni pismenosti (Rogla, 2012), na seminarju Pristopi k reševanju matematičnih problemov na razredni stopnji, različnih delovnih srečanjih z učitelji in objavljeni v zbornikih (Fleksibilni predmetnik – priložnost za izboljšanje kakovosti vzgojno-izobraževalnega dela, http://www.zrss.si/zalozba/knjigarnica/podrobno?publikacija=528, 1. mednarodna Konferenca o učenju in poučevanju matematike - KUPM 2012, http://www.zrss.si/zalozba/digitalna-bralnica/podrobno?publikacija=9, Opolnomočenje učencev z izboljšanjem bralne pismenosti in dostopa do znanja, http://www.zrss.si/zalozba/digitalna-bralnica/podrobno?publikacija=50,) ter v reviji Razredni pouk, letnik 16, številka 2-3/2014.

Učenci z učnimi težavami pri reševanju matematičnih problemov

Učne težave na področju matematike se najpogosteje pri učencih kažejo kot počasnejše usvajanje matematičnih vsebin, slabše razvite številske predstave, nerazumevanje matematičnih pojmov in konceptov, težave s pomnjenjem izvajanja postopkov in strategij, organizacijske težave itd. Pri tem izstopata področje aritmetike in reševanje matematičnih (besedilnih) problemov. Učenci s specifičnimi učnimi težavami imajo težave pri reševanju matematičnih problemov (Kavkler, 2007, str. 101) zaradi:

- kompleksnosti jezika, nepoznavanja besednjaka, nepoznavanja vsebine problema, nerazumevanja matematične terminologije,
- težave pri uporabi reprezentacij (konkretnih, slikovnih, didaktičnih …) za predstavitev problema,
- nerazvitosti številskih predstav,
- neobvladovanja aritmetičnih veščin (razumevanje algoritmov),
- bralnih težav (nerazumevanje prebranega),
- pomanjkljivo razvitih kognitivnih in metakognitivnih strategij,
- manjše kapacitete delovnega spomina in priklica podatkov iz dolgotrajnega spomina,
- kompleksnosti problema itd.

Na začetku šolanja ima precej učencev težave pri reševanju matematičnih problemov, tudi tisti, ki nimajo težav na aritmetičnem področju in tudi ne s percepcijo ali pomnjenjem. Kot ovira se v mnogih primerih pojavi slabo usvojena tehnika branja, nerazumevanje prebranega, skromen besedni zaklad, nepoznavanje matematičnega izrazoslovja in simbolike ter osebne značilnosti učencev, kot so nesistematičnost pri delu, manjša vztrajnost, nepozornost, anksioznost itd. Pri mnogih učencih se pojavi odpor do reševanja problemskih (besedilnih) nalog, saj jim učna neuspešnost znižuje motivacijo, zaznavajo sebe kot neučinkovite in manj zmožne pri reševanju takih nalog. Pogosto se taki učenci sploh ne lotijo reševanja.

Strokovnjaki in tudi izkušnje iz prakse kažejo, da večini učencem pri učenju zadostuje dobra poučevalna praksa (Magajna, L., 2008), nekateri učenci pa potrebujejo pri delu dodatne prilagoditve in opore.

Kako lahko učitelji organizirajo delo v razredu in prilagajajo pristop reševanja zmožnostim učencev:

a) Z učenci, ki imajo težave, dlje časa uporabljajo vodeni pristop

Ko so ostali učenci v razredu že zmožni samostojno reševati problemske naloge, učitelj lahko učence s težavami na tem področju zbere v manjšo skupino in jih še naprej vodi pri reševanju. Pri tem jim prilagaja tempo dela, izbira najbolj primerne didaktične pripomočke za predstavitev problema, omogoča tiho in glasno branje besedila in razgovor o prebranem, jih vodi pri oblikovanju skice itd.

b) Učence navajajo na sodelovalno delo (v dvojicah ali manjših skupinah)

Pristop je zlasti primeren, če imajo učenci težave pri branju in razumevanju prebranega ter še ne obvladajo strategije reševanja. Učitelj delo organizira tako, da učenca najprej drug drugemu prebereta problemsko nalogo, zastavljata vprašanja o prebranem, skupaj narišeta skico in vanjo izpišeta podatke, nato si predstavita strategijo reševanja. Nato vsak samostojno reši problemsko nalogo. Ob koncu reševanja primerjata rezultate naloge in pot reševanja ter skušata razložiti, zakaj sta tako reševala. Priporočljivo je, da oblikujemo dvojice učencev z različnimi zmožnostmi in predznanjem.

c) Učenci sodelujejo v manjših skupinah

Člani skupine lahko rešujejo enako problemsko nalogo ali pa različne glede na zahtevnost ali vsebino. Če učenci rešujejo enako problemsko nalogo, je smiselno, da naloga omogoča, da se jo reši po različni poti (odprti, kompleksni problem) ali da ima naloga (raziskovalni problem) več rešitev. Namen takega pristopa je, da si učenci med seboj predstavijo različne ideje reševanja, postavijo si različna vprašanja (ali podvprašanja), poiščejo manjkajoče podatke … Tako bodo manj zmožni učenci ob pomoči sošolcev izpeljali nalogo na »že znan« način, poiskali manj rešitev, poiskali odgovore na vprašanja manjše zahtevnosti, hkrati pa bodo seznanjeni in imeli uvid v reševanje problemskih nalog zmožnejših učencev. Vsak član skupine naj ob koncu predstaviti delo in dobljene rezultate, kaj so delali in kaj so odkrili. Pri refleksiji je zelo pomembno, da učenci osmišljajo lastno delo.

č) Samostojno individualno reševanje

Tudi od učencev z učnimi težavami pričakujemo, da bodo znali samostojno rešiti problemske naloge, torej opravljajo enako dejavnost kot njihovi sošolci (Kavkler, 2008), vendar bodo pri delu potrebovali prilagoditev problemske naloge. S pomočjo prilagoditev lahko učenci »dokažejo« usvojenost znanja, vendar na drugačen način.

Kako lahko prilagajamo gradiva za reševanje problemskih nalog?

a) V zapisu besedila naloge poudarimo ključne podatke in ključne besede.

> Primer naloge:
>
> Skupina **20 učencev** je za **skupinsko vstopnico** v Tehniški muzej plačala **48 evrov**. Če bi učenci kupili **posamezne vstopnice**, bi **vsak učenec** plačal za vstopnico **3 evre**.
>
> Koliko **evrov** so učenci **privarčevali** z nakupom **skupinske vstopnice**?

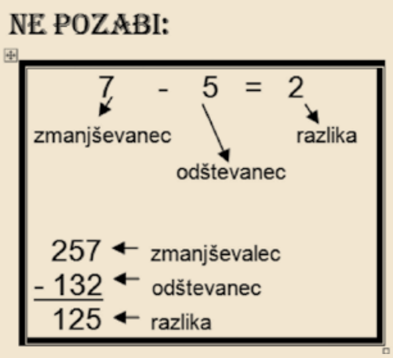
b) V problemski nalogi z več podatki vsak nov »sklop« podatkov zapišemo v novo vrstico.

> Primer naloge:
>
> Kolesarska proga je dolga 915 km.
> Kolesarji jo v celoti želijo prevoziti
> v štirih dneh.
>
> - Prvi dan so prevozili 218 km,
> - drugi dan 32 km manj kot prvi dan,
> - tretji dan 35 km več kot drugi dan.
>
> Koliko km proge morajo prevoziti
> četrti dan?

c) Ob nalogi pripravi slovarček manj znanih besed ali matematične terminologije.

Primer naloge:

Za koliko se razlika števil 785 in 437 razlikuje od razlike števil 877 in 348?



č) Pripravimo skico, ki jo morajo učenci dopolniti glede na dane podatke (pripravljeno že ob zapisu naloge ali na samostojnem učnem listu).

Primer naloge:

Iz stiskalnice so dobili 15 litrov sadnega soka. Pripravili so štirinajst steklenic po liter in osem steklenic po pol litra. Napolnili so že 10 steklenic po en liter in 5 steklenic po pol litra.

a) Pobarvaj steklenice napolnjene s sokom.

b) Koliko steklenic bodo še napolnili s preostalo količino soka?

c) Koliko steklenic bo ostalo praznih?

d) K problemski nalogi z veliko podatki pripravimo preglednico, kamor učenec izpiše jo dane podatke iz naloge.

Primer naloge:

Likovni krožek obiskuje 11 učencev 1. razreda, 8 učencev 2. razreda in 9 učencev 3. razreda. Pravljični krožek obiskuje 14 učencev 1. razreda, 11 učencev 2. razreda in nekaj učencev 3. razreda. Pravljični krožek obiskuje 5 učencev več kot likovni krožek.

Koliko učencev 3. razreda obiskuje pravljični krožek?

DOPOLNI PREGLEDNICO:

Likovni krožek obiskuje:

	1. RAZRED	**2. RAZRED**	**3. RAZRED**
ŠTEVILO UČENCEV			

Pravljični krožek obiskuje:

	1. RAZRED	**2. RAZRED**	**3. RAZRED**
ŠTEVILO UČENCEV			

e) H kompleksni nalogi pripravimo podvprašanja (zapisana že ob nalogi ali na dodatnem učnem listu, vprašanja so lahko zapisana tudi na posameznih trakovih).

Primer naloge:

Mihaela bere za domače branje knjigo Anastazija Krupnik, ki ima 144 strani. Knjigo želi prebrati v desetih dneh. Prvi dan je prebrala 12 strani v knjigi, drugi dan tri strani več kot prvi dan, v naslednjih treh dneh pa je prebrala polovico vseh strani v knjigi.

Koliko strani mora še prebrati v preostalih dneh, če želi knjigo prebrati do konca?

Naslednja vprašanja naj te vodijo pri reševanju problemske naloge:

- Koliko strani v knjigi je prebrala drugi dan?
- Koliko je polovica Vseh strani v knjigi?
- V kolikih dneh je prebrala polovico vseh strani v knjigi?
- Koliko strani v knjigi ji je preostalo še do konca?

f) Kompleksno nalogo strukturiramo na več delov.

Primer naloge:

Marija in njena sestra Lucija se odpravita od doma istočasno in se peljeta s kolesi do šole, ki je oddaljena 6 km.

1. Marija vozi svoje kolo tako, da prevozi 3 km v 17 minutah in vozi s stalno hitrostjo.

Koliko časa bo potrebovala Marija, da pride do šole?

2. Lucija vozi kolo tako, da prevozi 1 km v 6 minutah in vozi s stalno hitrostjo.

Koliko časa bo potrebovala Lucija, da pride do šole?

3. Katera prispe v šolo prej?

g) Skrajšamo vsebino zapisa naloge.

Primer naloge:

Revija PIL je mesečnik za mlade od 9. do 12. leta. Na leto izide 14 številk, od tega sta dve obsežnejši in dve tematski. Cena ene številke Pila v prosti prodaji je 3,49 €. Cena za individualne naročnike je 3,16 €, za naročnike v šoli pa 2,95 €. Naročnina se poravna v dveh obrokih. Naročnina za tujino se poravna vnaprej in znaša 122 €.

Razišči, katera oblika naročnine bi bila cenovno najbolj ugodna.

Primer prilagojene naloge:

Na leto izide 14 številk revije Pil. Cena ene številke Pila v prosti prodaji je 3,49 €. Cena za individualne naročnike je 3,16 €, za naročnike v šoli pa 2,95 €.

Razišči, katera oblika naročnine bi bila cenovno najbolj ugodna.

Že pri vodenem delu moramo učence navajati, da uporabljajo različne opore, ki jim pomagajo pri razmišljanju in reševanju. Opore so lahko: kartončki z zapisom korakov reševanja ali zapis akronima, barvni kartončki za izpis podatkov, konkretni material (gumbi, krožci, palčke, vrvice …), modeli (likov, teles, desetiške enote, deli celote, denar, ura …), podlage z različnimi preglednicami, didaktični material (številski trak, stotični kvadrat …), podlage s preglednicami za pisni algoritem.

Slika 1: Prazen stotični kvadrat, namenjen podpori pri izvajanju postopka seštevanja in odštevanja

Opore so učinkovite, če učence podpirajo pri razmišljanju, nikakor pa ne smejo ponujati že »gotovih« rezultatov, zato mora učitelj strokovno presoditi, kdaj številski trak, stotični kvadrat, tabela s poštevanko res spodbuja učence k razmišljanju ali jim zgolj ponuja lažjo pot oziroma že gotove rezultate. Na različnih izobraževanjih učitelje spodbujamo, da učence pri usvajanju računskih operacij navajajo na uporabo »praznega« številskega traku ali številske osi, prav tako tudi stotičnega kvadrata, kjer jim zapis ponuja le vizualno podporo, s katero si pomagajo pri predstavljivosti. Tako oblikovana gradiva so lahko prelepljena s folijo in tako pripravljena omogočajo, da jih bodo lahko učenci večkrat uporabljali. Pri delu v praksi je bilo ugotovljeno, da znajo učenci bolj ceniti in smiselno uporabljati opore, ki jih sami izdelajo. Zato priporočamo, da učitelji namenijo čas npr. pri dopolnilnem pouku, dodatni strokovni ali skupinski pomoči temu, da si učenci izdelajo opore, ki jih bodo uporabljali pri delu.

Slika 2: Primer izdelane lastne opore modela ure (lastna fotografija)

Zaključek

Reševanje problemskih nalog predstavlja najvišjo taksonomska raven znanja pri matematiki, ki od reševalca zahteva uporabo različnih vrst znanja, razvitost zahtevnejših miselnih sposobnosti, poznavanje in uporabo različnih strategij ter razumevanje matematičnih pojmov in konceptov. V tako zahtevno delo pa lahko uvedemo učence le postopno in sistematično. Učitelji naj bi učencem omogočili, da si pridobijo čim več izkušenj z reševanjem problemskih nalog, zato je pomembno, da so v pouk vključene čim bolj pogosto kot izhodišče za obravnavo nove učne vsebine ali ponovitev predznanja ali poglabljanje znanja in izhajajo iz vseh vsebinskih sklopov. Problemske naloge naj pri pouku ne bi bile načrtovane kot popestritev pouka ali kot naloge, namenjene zmožnejšim učencem, ali za domače delo. Učitelji, ki so sodelovali v projektu, so ugotovili, da so problemske naloge zmožni rešiti tudi učenci, ki imajo težave pri matematiki, če so bili deležni sistematičnega vodenja pri delu ter se jim je omogočal drugačen pristop k reševanju problemskih nalog. ■

Viri

Cotič, M. (1999). *Matematični problemi v osnovni šoli: Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Cotič, M. et. al. (2015). S*vet matematičnih čudes 5, učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole*. 2. izdaja. Ljubljana: DZS.

Kavkler, M. et. al. (2007). *Učenci s specifičnimi učnimi težavami: skriti primanjkljaji – skriti zakladi,* Ljubljana: Društvo Bravo.

Kavkler, M. et. al. (2008). R*azvoj inkluzivne vzgoje in izobraževanja – izbrana poglavja v*

pomoč šolskim timom. Priročnik za učitelje. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Kavkler, M. (2009). Modeli in strategije za obravnavo učencev z učnimi težavami – vpliv na spremembe v poučevalni praksi. *Sodobna pedagogika*, letnik 60 (126), številka 1, str. 362–375.

Kavkler, M. (2015). *Težave pri učenju matematike: strategije za izboljšanje razumevanja in učnih dosežkov učencev.* Ljubljana: Društvo Bravo.

Magajna, L., idr. (2008). *Učne težave v osnovni šoli: koncept dela.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, letnik X, številka 3-4, str. 129-138.

Vršič, V. (2010). Matematični problemi - izziv za učitelje in učence. *Razredni pouk*, letnik 11, številka 3, str. 47–51.

Žakelj, A. (2004). Uporaba Gagnejeve taksonomije pri pouku matematike, *Matematika v šoli*, številka 11, str. 64–83.

Žakelj, A., idr. (2011). Učni načrt. Matematika. [elektronski vir]. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Foto: Shutterstock

Spodbujanje starševske vpletenosti v otrokovo matematično izobraževanje

dr. Darja Antolin Drešar
Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru

Povzetek

Prispevek izpostavlja pomen vključevanja staršev v otrokovo matematično izobraževanje in predstavlja, kakšno je priznavanje pomembnosti vloge staršev v otrokovem izobraževanju in njeno spodbujanje v različnih državah po svetu. Predstavljnih je tudi nekaj primerov t. i. matematičnih programov za starše, ki so v tujini zaživeli kot pomembna podpora staršem, da bi lahko učinkovito spodbujali otrokov razvoj na matematičnem področju.

Ključne besede: učenje in poučevanje matematike, vloga staršev, matematični programi za starše

Encouraging Parent Involvement in Child's Mathematical Education

Abstract

This paper highlights the importance of parents being involved in their child's mathematical education and shows how the importance of the role of parents in a child's education is acknowledged and encouraged in various countries around the world. It also presents a few examples of the so-called mathematical programmes for parents, which are becoming popular abroad as an important form of support for parents in effectively promoting the child's development in mathematics.

Keywords: learning and teaching Mathematics, role of parents, mathematical programmes for parents

Uvod

Pozornost in skrb strokovnjakov ter mnogih vlad po svetu na področju vzgoje in izobraževanja sta že več desetletij usmerjeni v spodbujanje vpletenosti staršev v otrokovo izobraževanje z namenom izboljšanja celostnega in učnega napredka otrok. Starši so namreč otrokovi prvi učitelji in družinsko okolje, v katerem otrok odrašča, je otrokovo prvo učno okolje. Desforges in Abouchaar (2003) izpostavljata, da imajo starši in njihovo ravnanje izjemen vpliv na otrokovo učenje, ki je lahko celo večji od vpliva vrtca ali šole. Raziskovalki Handerson in Mapp (2002) po pregledu osemdesetih raziskav iz obdobja od 1993 do 2002 obenem poudarjata, da dosega otrok, kadar so starši vključeni v njegovo izobraževanje, (učno) več, in to ne glede na socialno-ekonomski status, etnično ali rasno pripadnost ali stopnjo izobrazbe staršev.

Na področju raziskovanja starševske vpletenosti v otrokovo izobraževanje je v zadnjih desetletjih vedno večje pozornosti deležno proučevanje vloge staršev pri razvoju otroka na matematičnem področju. Kljub temu da lahko otroci nekatere matematične koncepte osvojijo sami (Ginsburg, Cannon, Eisenband in Pappas, 2006), je namreč vloga odraslega, še posebej staršev, ki so otrokovi prvi učitelji in organizatorji otrokovega domačega učnega okolja, izredno pomembna. Z omogočanjem zgodnjih matematičnih izkušenj lahko starši vplivajo na otrokov razvoj matematičnih kompetenc (npr. Shaver in Walls 1998; Epstein in Sanders, 2000; Gadeyne, Ghesquiere in Onghena, 2004), zaznamujejo pa lahko tudi otrokov odnos do matematike (npr. Pederson, Elmore in Bleyer, 1986; Onslow, 1992; Aunola, Nurmi, Lerkkanen in Puttonen, 2003).

Spodbujanje starševske vpletenosti po svetu in pri nas

Priznavanje pomembnosti vloge staršev v otrokovem izobraževanju in njeno spodbujanje na nacionalni ravni so številne države vključile v svojo zakonodajo. V nadaljevanju predstavljamo urejenost vključevanja staršev v otrokovo izobraževanje v nekaterih državah.

V Združenih državah Amerike so se na podlagi številnih raziskav, ki so pokazale, kako pomembno sodelovanje staršev vpliva na otrokovo uspešnost, spodbujanja starševske vpletenosti na sistematičen način lotili z zakonom No Child Left Behind Act [NCLB] (2002), ki je nadgradnja zakonskega določila The Elementary and Secondary Act iz leta 1965. Kljub kritikam zakona (npr. da preveč poudarja zunanja preverjanja znanja učencev in tako omogoča javno ocenjevanje in rangiranje šol (npr. Mathis, 2009; Forte, 2010)), dokument NCLB (2002) usmerja delovanje šol z namenom izboljšanja uspešnosti učencev, pri čemer je vključevanje staršev v otrokovo izobraževanje opredeljeno kot integralni del tega procesa.

Jasno vizijo vključevanja staršev v otrokovo izobraževanje je zaznati tudi pri snovalcih šolske politike v Kanadi. Medtem ko so v Združenih državah zahteve za spodbujanje starševskega vključevanja zajete v nacionalnem dokumentu, ki ureja osnovnošolsko izobraževanje (NCLB, 2002), je v Kanadi, natančneje v provinci Ontario, od leta 2005 politika spodbujanja starševskega vključevanja opredeljena v samostojnem dokumentu, imenovanem Ontario Parental Involvement Policy (Ontario Ministry of Education, 2005). V omenjenem dokumentu je starševsko vključevanje opredeljeno kot »dobro starševstvo, pomoč pri domačih nalogah, sodelovanje v šolskih svetih in odborih ter provincialnih komitejih, komuniciranje in srečevanje z učitelji in prostovoljstvo v učilnici ali na šolskih izletih« (Ontario Ministry of Education, 2005, str. 3). Pri oblikovanju tega dokumenta so posredno sodelovali tudi starši, saj je bil zasnovan na podlagi predhodno izvedenega projekta Parent Voice in Education Project (PVEP), katerega namen je bil zbrati in predstaviti pobude in predloge staršev glede načrtovanja spodbujanja starševskega vključevanja v izobraževanje. Poročilo ob zaključku projekta Parent Voice in Education Project Report (2005) je opozorilo na tri ključna področja delovanja: okrepiti glas staršev znotraj izobraževalnega sistema, pripraviti prijaznejše in inkluzivnejše okolje za starše ter prepoznati razlike med raznovrstnimi skupnostmi, ki živijo na območju Ontaria. S sprejetjem omenjenega dokumneta so vsa ta področja še posebej izpostavljena, država pa za izvajanje dejavnosti spodbujanja starševskega vključevanja podobno kot v Združenih državah Amerike namenja zajeten del davkoplačevalskega denarja (od leta 2006 do 2010 so spodbujanju starševskega vključevanja namenili več kot 25 milijonov kanadskih dolarjev). Še več, Kanada že vse od leta 2006 financira izvajanje programa Parents Reaching Out Grants, preko katerega z donacijami pomaga šolam in drugim organizacijam pri pripravi in izvedbi programov izboljšanja vključevanja staršev, denarna sredstva pa namenja tudi izvajanju nacionalnega projekta Parenting and Family Literacy Centres, katerega namen je v okviru šolskih programov pomagati staršem pripraviti otroke na vstop v šolo in spodbujati družine, da bodo del zgodnjega učenja svojih otrok (Parents in Partnership: A Parent Engagement Policy for Ontario Schools, str. 13–15).

Že zastavljene in izvajane smernice spodbujanja starševskega vključevanja v izobraževanje so leta 2010 nadgradili z dokumentom A Parent Engagement Policy for Ontario Schools, kjer so poleg vizije starševskega vključevanja izpostavljene štiri strategije za uspeh spodbujanja starševskega vključevanja, vključeni pa so tudi akcijski načrti za šole, odbore in ministrstvo ter zgledi dobre prakse iz vse province.

V primerjavi z ZDA in Kanado, kjer pojem vključevanje staršev v izobraževanje pomeni (tudi) odgovornost staršev, za večino evropskih držav (npr. Francijo, Španijo, Češko, vključno s Slovenijo) velja, da vključevanje staršev razumejo (zgolj) kot pravico. V zadnjem času je v evropskih državah zaznati tendenco po vključevanju staršev na področju izobraževanja, ki se odraža predvsem s sprejetjem zakonskih določil, ki staršem omogočajo, da jih njihovi predstavniki zastopajo v ključnih odborih, v katerih se oblikuje šolska politika, tako na lokalni kot na državni ravni (tak primer so recimo Francija, Danska, Nemčija, Norveška, Irska, Poljska, Španija, Portugalska, Nizozemska, Slovenija).

Anglija je strategijo za zagotavljanje vključevanja staršev v otrokovo izobraževanje prvič opredelila v Beli knjigi leta 1997. Strategija zajema tri elemente: zagotavljanje informacij staršem, dajanje glasu staršem in spodbujanje starševskega partnerstva s šolami. Uresničevanje strategije že vrsto let poteka skozi različne dejavnosti, kot so povečevanje vloge staršev, ki so člani šolske uprave, omogočanje sodelovanja v inšpekcijskih postopkih, zagotavljanje letnih poročil, postavljanje zahtev za oblikovanje sporazumov med šolo in starši ter zagotavljanje večje informiranosti o kurikulumu in uspehih šole (Desforges in Abouchaar, 2003, str. 7).

Slovenija glede spodbujanja starševske vključenosti v otrokovo izobraževanje, vsaj kar se tiče priprave načrtov in ukrepov za njihovo izvajanje na državni ravni, precej zaostaja. Opredelitev sodelovanja med šolo in starši sicer zasledimo v nekaterih nacionalnih dokumentih, ki se nanašajo na vzgojo in izobraževanje.

Vidik sodelovanja šole s starši je izpostavljen v Beli knjigi o vzgoji in izobraževanju v Republiki Sloveniji (2011, str. 116), kjer v okviru načela sodelovanja strokovnih delavcev šole s starši piše:

»Za doseganje optimalnega razvoja učencev je nujno sodelovanje strokovnih delavcev šole s starši učencev. S starši je treba doseči soglasje o temeljnih ciljih vzgojno-izobraževalnega dela in dogovor, da si bodo za dosego teh ciljev prizadevali vsi. Učitelji staršem sproti posredujejo povratno informacijo (na govorilnih urah, roditeljskih sestankih) o učenčevem znanju, vedenju, odnosu do šole, spoštovanju pravil, sodelovanju v oddelčni in šolski skupnosti ipd. Starši učiteljem sproti posredujejo informacije, ki bi lahko vplivale na učenčevo delovanje v šoli. Učitelji in šole pri prizadevanjih za uspešnost učenčevega dela potrebujejo podporo staršev. Pri sodelovanju strokovnih delavcev šole in staršev je treba zagotoviti varovanje zasebnosti obojih in jasno začrtati meje strokovnih odločitev učitelja, na katere starši nimajo pravice vplivati.«

Nekoliko večji poudarek na dejanskem vključevanju staršev v otrokovo izobraževanje, ne zgolj na sodelovanju šole s starši, zaznamo pri načrtovanju vzgoje in izobraževanja otrok s posebnimi potrebami. V Beli knjigi (2011, str. 300) je namreč načelo vključevanja staršev v proces vzgoje in izobraževanja opredeljeno kot eno izmed enajstih načel, na katerih temeljita vzgoja in izobraževanje otrok s posebnimi potrebami. Premik k večjemu izpostavljanju pomena sodelovanja staršev zasledimo tudi v dokumentih, ki opredeljujejo splošna izhodišča in strategije za izobraževanje otrok tujcev v Sloveniji (npr. Strategija vključevanja otrok, učencev in dijakov migrantov v sistemu vzgoje in izobraževanja v Republiki Sloveniji (2007); Smernice za vključevanje otrok tujcev v vrtcih in šolah (2009)).

Slovenska šolska zakonodaja z Zakonom o osnovni šoli (Ur. l. RS, št. 81/2006, 31. člen) in Zakonom o vrtcih (Ur. l. RS, št. 12/1996, 12. člen) določa, da morajo šole z letnim delovnim načrtom določiti oblike sodelovanja s starši, programi za predšolske otroke, ki jih izvajajo javni vrtci, pa morajo med drugim obsegati tudi načine in oblike sodelovanja s starši. V slovenskem prostoru trenutno ni zaslediti teženj, da bi se šolska politika usmerjala v pripravo načrtov in ukrepov za izboljšanje prakse vključevanja staršev v otrokovo izobraževanje na državni ravni. Razvoj partnerskih odnosov med družino in šolo, vzpostavljanje vezi zaupanja in prizadevanje za skupno sodelovanje, ki bi pripomoglo k učnemu napredku učencev, tako ostajajo na ravni posameznih šol, med temi pa se omenjenih dejavnosti nekatere lotevajo bolj, nekatere pa manj zavzeto.

Matematični programi za starše

Zavedanje pomembnosti starševske vpletenosti za razvoj otrokovih matematičnih kompetenc in oblikovanje pozitivnega odnosa do matematike samo po sebi še ni dovolj. V nekaterih državah po svetu so zato na podlagi preliminarnih raziskav, ki kažejo, da mnogi starši potrebujejo podporo, da bi lahko učinkovito spodbujali otrokov razvoj na matematičnem področju, že pred desetletji začeli z oblikovanjem in izvajanjem t. i. matematičnih programov za starše. V nadaljevanju predstavljamo nekaj najbolj uveljavljenih tujih matematičnih programov za starše.

V zgodnjih osemdesetih letih dvajsetega stoletja so na kalifornijski univerzi Berkley osnovali program **Family math** (Družinska matematika), ki se je hitro razširil po mnogih drugih državah. S programom Family math, katerega izvajanje je potekalo v obliki obšolske dejavnosti, so želeli izboljšati enake možnosti pri matematiki učencev iz vrst manjšin s povečanjem sodelovanja staršev pri njihovem učenju matematike (Kreinberg, 1989). Omenjeni projekt so v Kanadi, in sicer na University of Western Ontario, nadgradili v projekt, imenovan **Esso family Math Project**. Projekt se izvaja v lokalnih skupnostih z namenom spodbujanja zavzetosti staršev za matematični razvoj njihovih otrok in oblikovanje pozitivnega odnosa staršev in otrok do matematike. V okviru projekta se izvajata dva programa: eden za družine s predšolskimi otroki in s prvošolci in eden za družine z otroki razredne stopnje (2.–5. razred). S skrbno pripravljenimi matematičnimi aktivnostmi in igrami, ki omogočajo razvoj matematičnih spretnosti in spodbujajo razumevanje matematičnih konceptov, želijo staršem in otrokom pomagati pri učenju matematike in jim jo približati kot prijetno izkušnjo. Starši in otroci se udeležijo šestih srečanj, ki potekajo v poznih popoldanskih urah in se začnejo s skupnim obrokom. Srečanja vodijo učitelj in pet do šest usposobljenih prostovoljcev. Evalvacija programa nakazuje izjemno pozitiven odziv staršev (npr. Onslow, Edmunds, Adams, Waters in Chapple, 2002; Penn in Ramsay, 2013).

Leta 1999 so na Univerzi v Arizoni pripravili projekt **Math and Parent Partnerships in the Southwest (MAPPS)**, ki se osredotoča na spodbujanje starševske vpletenosti v matematično izobraževanje otrok. Projekt so začeli najprej izvajati v Arizoni, kasneje pa tudi v državah Nova Mehika in Kalifornija. Na vseh šolskih območjih, razen enega, kjer je bil projekt MAPPS vpeljan, prevladuje špansko govoreča populacija učencev (Civil, Bernier in Quintos, 2003, str. 5).

Projekt MAPPS temelji na treh principih (Family involvement in mathematics, str. 5):

- Standardi NCTM, ki poudarjajo ozaveščanje staršev o temeljnih spremembah pri poučevanju in učenju matematike;
- socialni konstruktivizem, ki poudarja aktivno vlogo učenca pri izgradnji znanja;
- učenje preko dialoga, pri katerem znanje gradimo preko odnosa ljudi, ki tvorijo učno skupnost.

Namen projekta MAPPS je izboljšati matematično učno uspešnost otrok z izboljšanjem matematičnih spretnosti staršev in ustvariti možnosti, da se bodo starši in otroci skupaj učili matematiko. V okviru projekta potekajo tri vrste izobraževanj: »delavnice matematičnega ozaveščanja«, »delavnice vodenja« in mini tečaji »matematika za starše«. V delavnicah matematičnega ozaveščanja starši sodelujejo s svojimi otroki pri reševanju različnih matematičnih problemov. Delavnice trajajo dve uri in pokrivajo različne matematične vsebine za otroke od predšolskega obdobja do konca osnovne šole. Delavnice preko vzpostavljanja dialoga med starši in otroki udeležencem kažejo, kako pomembno se je pogovarjati o matematiki. Del delavnic je zasnovan tako, da so prisotni samo starši, saj se tako lahko preizkusijo tudi v vlogi odraslega učenca, obenem pa je priložnost za pogovor in analiziranje razmišljanja njihovih otrok. Delavnice staršem ravno tako pomagajo prepoznavati povezave med matematičnimi dejavnostmi in vsakdanjim življenjem.

V okviru projekta MAPPS se izvajajo tudi delavnice, katerih namen je usposabljati starše in učitelje za vodenje »delavnic matematičnega ozaveščanja«. Udeleženci razvijajo spretnosti vodenja, spoznavajo namen in vsebine delavnic, uporabo materialov, vodenje diskusije ipd. Za bodoče voditelje delavnic so v okviru projekta MAPPS organizirani tudi t. i. minitečaji: »matematika za starše«. Na teh tečajih starši pridobijo znanje o določenih matematičnih temah, kot so npr. algebra, cela števila, deli celote, geometrija in obdelava podatkov. Glavne značilnosti teh izobraževanj so: delo v skupinah, uporaba materialov, izmenjava idej, spodbujanje različnih načinov prestavitve problema in iskanja različnih načinov reševanja, predvsem pa poudarek na razvijanju konceptualnega znanja (Civil, Bernier, Quintos, 2003, str. 5–7).

V Veliki Britaniji so potrebo po matematičnem programu za starše prepoznali že leta 1985, ko so na Univerzi North London pripravili projekt **IMPACT (Inventing Math for Parents and Children and Teachers).** Projekt, katerega namen je bil spodbuditi vključevanje staršev v otrokovo matematično izobraževanje, je bil uspešno vpeljan v več kot 10.000 šol v Veliki Britaniji, pa tudi v številne šole drugod po svetu (npr. v Avstraliji, Kanadi, Združenih državah Amerike in nekaterih evropskih državah). V okviru projekta so pripravili nabor matematičnih aktivnosti (za vsak teden po eno), ki so zasnovane tako, da učenci in starši doma skupaj iščejo podatke, rešujejo preproste matematične probleme, se igrajo matematične igre, ocenjujejo določene količine ipd. Izide skupnega dela s starši nato učenci prinesejo v šolo, kar služi kot izhodišče za nadaljnje delo v razredu, starši pa vsakokrat prejmejo tudi povratno informacijo. Enebuske (1998) ugotavlja, da so se starši sčasoma začeli zavedati, da je njihova vključenost v otrokovo matematično izobraževanje pomembna, spremenil pa se je tudi pogled učiteljev, ki so v starših prepoznavali zaveznike pri poučevanju matematike. Nadalje Enebuske izpostavlja, da je povezovanje matematičnih aktivnosti v šoli s tistimi, ki jih učenci izvajajo skupaj s starši doma, izredno pomembno, saj učenci na ta način uzaveščajo, da je matematika vsepovsod (prav tam).

V Veliki Britaniji so leta 2001 oblikovali še en projekt, in sicer **The Ocean Mathematics Project,** katerega glavni cilj je bil izboljšati matematične učne dosežke učencev na enem od najbolj prikrajšanih območij v državi. Uspešnost teh učencev pri matematiki so želeli izboljšati s spremembo odnosa in delovanja šol, staršev in otrok, še posebej z vključevanjem staršev v matematično izobraževanje otrok (Bernie in Lall, 2008, str. 22). Gre za dobrodelni projekt, ki je bil od leta 2001 do 2011 vpeljan že v 274 šol (Ocean Maths, b. l).

Cilji projekta so se osredotočali na naslednja področja (prav tam, str. 4):
- izboljšati zaupanje staršev in njihovo sodelovanje v procesu otrokovega izobraževanja; lastno učenje staršev in njihovo sodelovanje v delovanju šole;
- izboljšati odnos učencev do matematike, njihov pristop k reševanju domačih nalog in samozaupanje v lastne učne sposobnosti;
- izboljšati delovanje šole na področju učenja in poučevanja matematike, odnos zaposlenih do matematike in izmenjavo primerov dobre prakse ter evalviranje in poročanje o napredku učencev pri matematiki.

Tudi pri tem projektu so oblikovali poseben nabor domačih nalog, ki so namenjene skupnemu delu otrok in staršev v domačem okolju, v okviru projekta pa potekajo tudi delavnice po šolah, kjer starši skupaj z otroki preživljajo čas ob zabavnih matematičnih aktivnostih (Ocean Maths, b. l.). Evalvacijska poročila projekta poročajo o številnih pozitivnih vplivih projekta na vse udeležence, in sicer pri učencih v izboljšanju učnih dosežkov (Bastiani, 2004), pri starših pa v razvoju matematičnega razumevanja in povečanju starševske vpletenosti v otrokovo izobraževanje in v delovanje šole (Bernie in Lall, 2008).

O podobnih projektih spodbujanja starševske vpletenosti na področju matematike, ki bi bili pripravljeni in izvedeni na državni ravni, v slovenskem prostoru žal ne moremo govoriti. Kljub temu pa je treba izpostaviti program, imenovan **Didaktični petkotnik**, ki je bil osnovan na Pedagoški fakulteti Univerze v Mariboru z namenom, da bi povezal pet ključnih udeležencev vzgojno-izobraževalnega procesa: učitelje, učence, starše, študente in didaktike, in sicer na področju matematičnega izobraževanja (Lipovec in Bezgovšek, 2006). Po principu dela z matematično sposobnejšimi učenci in kognitivno-konstruktivističnem modelu so bile v okviru programa pripravljene aktivnosti za matematično sposobnejše otroke na razredni stopnji. Izvajanje programa se je začelo v šolskem letu 2005/2006, in sicer na različnih osnovnih šolah po Sloveniji v obliki matematičnih krožkov, ki so jih z matematično sposobnejšimi otroki enkrat tedensko pri uri interesne dejavnosti izvajali študenti razrednega pouka. Učenci so bili spodbujeni, da aktivnosti in matematične probleme, s katerimi so se seznanili pri krožku, doma delijo s svojimi starši in skupaj z njimi razmislijo o problemu in strategijah reševanja, nato pa se na naslednjem srečanju v šoli s študentom – izvajalcem pogovorijo o ustreznih načinih reševanja in problem rešijo (Lipovec in Bezgovšek, 2006). Evalvacije delovanja Didaktičnega petkotnika kažejo pozitiven vpliv na znanje šolske matematike (Šadl, 2011).

Zaključek

Kot že omenjeno, v slovenskem prostoru načrtnega spodbujanja starševskega vključevanja na področju matematike vsaj na nacionalni ravni žal ni zaznati. V upanju, da se bo po zgledu tujih raziskovalcev v prihodnosti tudi v Sloveniji kmalu osnoval kakšen večji projekt povezovanja staršev in otrok ob matematičnih aktivnostih, želimo s prispevkom ozavestiti vzgojitelje, učitelje, vodstvene in druge pedagoške delavce o pomenu vloge staršev pri otrokovem matematičnem razvoju, o možnih oblikah vključevanja in jih spodbuditi, da po svojih močeh tudi sami (še naprej) prispevajo k informiranju staršev o pomembnosti njihove vloge, predvsem pri oblikovanju otrokovega pozitivnega odnosa do matematike.

Eden izmed glavnih napotkov, ki bi jih pedagoški delavci morali posredovati strašem v povezavi z njihovo vlogo pri oblikovanju otrokovega odnosa do matematike je, da naj pred otrokom ne poudarjajo svojih negativnih izkušenj z matematiko ali celo svojega sovražnega odnosa do učenja matematike. Prenašanje lastnih strahov in stališč o neuporabnosti, nepomembnosti matematike na otroka zagotovo ne bo pripomoglo k krepitvi njegovega pozitivnega odnosa do matematike. Ne glede na morebitne neprijetne predhodne matematične izkušnje pa lahko starši otroku približajo ljubezen do matematike preko skupnega igranja raznih družabnih iger in aktivnosti, povezanih z matematiko. Družinski večeri, preživeti ob igranju strateških iger (kot so recimo Kače in lestve, Blokus, Mancala, Mlin ...), so namreč lahko pomembni za doživljanje matematike kot zabavne in prijetne tako za otroke kot starše. S tega stališča pedagoškim delavcem priporočamo, da staršem posredujejo ideje o možnih matematičnih igrah, ki jih lahko igrajo skupaj s svojimi otroki. Staršem bodo v korist informacije, ki jih dobijo preko pogovora, morda preko letaka, še najbolj praktična pa je izvedba matematične delavnice za otroke in starše, kjer lahko starši igre preizkusijo in dobijo konkretne napotke iz prve roke.

V prepričanju, da je vloga pedagoških delavcev pri ozaveščanju staršev o njihovem vplivu na otrokov matematični razvoj nezanemarljiva, in v upanju, da se vzgojitelji, učitelji in drugi pedagoški delavci tega zavedajo, si želimo, da bi s posvečanjem večje pozornosti tudi temu vidiku matematičnega izobraževanja s časom tudi v slovenskem prostoru začeli zaznavati premike na področju spodbujanja starševske vpletenosti v otrokovo matematično izobraževanje in opažati prve pozitivne vplive. ■

Literatura

Aunola, K., Nurmi, J. E., Lerkkanen, M. K. in Puttonen, H. (2003). The roles of achievement-related behaviours and parental beliefs in children's mathematical performance. *Educational Psychology, 23*(4), 403–421.

Bela knjiga o vzgoji in izobraževanju v Republiki Sloveniji. (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport.

Bernie, J. in Lall, M. (2008). Building bridges between home and school mathematics: A review of the Ocean Mathematics Project, Institute of Education. Pridobljeno iz http://eprints.ioe.ac.uk/4003/1/Building_Bridges.pdf.

Civil, M., Bernier, E. in Quintos, B. (2003). *Parental involvement in mathematics: A focus on parents' voices.* Paper presented at the annual meeting of AERA, Chicago, IL. Pridobljeno iz http://mapps.math.arizona.edu/papers/AERA_2003_Parental.pdf.

Desforges, C. in Abouchaar, A. (2003). *The impact of parental involvement, parental support and family education on pupil achievement and adjustment: A literature review.* Nottingham, UK: Queen's Printer.

Ehnebuske, J. M. (1998). In the Comfort of Their Own Homes: Engaging Families in Mathematics. *Teaching Children Mathematics 4*(6), 338–343.

Epstein, J. L. in Sanders, M. G. (2000). Connecting home, school, and community: New directions for social research. V M. T. Hallinan (Ur.), Handbook of the sociology of education (str. 285-306). New York, NY: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Family involvement in mathematics. (2003). *FINE Forum 6,* Cambridge, MA: Harvard Family Research Project. Pridobljeno iz http://www.hfrp.org/publications-resources/browse-our-publications/family-involvement-in-mathematics

Forte, J. (2010). Examining the Assumptions Underlying the NCLB Federal Accountability Policy on School Improvement. *Educational psychologist, 45* (2), 76–88.

Gadeyne, E., Ghesquiere, P. in Onghena, P. (2004). Longitudinal relations between parenting and child adjustment in young children. Journal of Clinical Child & Adolescent Psychology, 33, 347–358.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J. G. in Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. V K. McCartney in D. Phillips (Ur.), *Handbook of early child development* (str. 208–229). Oxford: Blackwell.

Henderson, A. T. in Mapp, K. L. (2002*). A new wave of evidence: The impact of school, family, and community connections on student achievement.* Annual synthesis 2002. National Center for Family & Community Connections with Schools. Pridobljeno iz http://www.sedl.org/connections/research-syntheses.html.

Kreinberg, N. (1989). The practice of equity. *Peabody Journal of Education, 66*, 127–146.

Lipovec, A. in Bezgovšek, H. (2006). The didactic Pentagon: students-teachers-parents-preservice teachers-teacher educators. *Department of mathematics report series*, *14,* 85–88.

Mathis, W. (2009). *NCLB's ultimate restructuring alternatives: Do they improve the quality of education?* Boulder, CO, and Temper, AZ: Education and the Public Interest Center & Education Policy Research Unit. Pridobljeno iz http://epicpolicy.org/publication/nclb-ultimate-restructuring.

No Child Left Behind (NCLB) Act of 2001, Pub. L. No. 107-110, § 115, Stat. 1425 (2002). Pridobljeno iz www.ed.gov/nclb.

Ocean Maths. (b. l). Pridobljeno iz http://www.ocean-maths.org.uk/about/overview.

Onslow, B. (1992). Improving the Attitude of Students and Parents through Family Involvement in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *4* (3), 24–31.

Onslow, B., Edmunds, G., Adams, L., Waters, J. in Chapple, N. (2002). Children and their parents: Learning math together and having fun, Child and Family, 2008, 6–14.

Ontario Ministry of Education. (2005). *Ontario Parent Involvement Policy.* Pridobljeno iz: http://www.edu.gov.on.ca/eng/document/nr/05.12/developing.pdf.

Parents in Partnership: A Parent Engagement Policy for Ontario Schools. (2010). Pridobljeno iz http://www.edu.gov.on.ca/eng/parents/involvement/PE_Policy2010.pdf.

Parent Voice in Education Project Report. (2005). Pridobljeno iz http://www.edu.gov.on.ca/eng/document/reports/parentvoice.pdf.

Pederson, K., Elmore, P. in Bleyer, D. (1986). Parent attitudes and student career interests in junior high school. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 45–59.

Penn, A. in Ramsay, S. (2013). Learning math and loving it. *Education Letter*, 25–28. Pridobljeno iz http://www.educ.queensu.ca/education-letter.

Shaver, A. V. in Walls, R. T. (1998). Effect of Title I parent involvement on student reading and mathematics achievement. *Journal of Research and Development in Education, 31*, 90–97.

Smernice za vključevanje otrok tujcev v vrtcih in šolah. (2009). Pridobljeno iz http://www.mizks.gov.si/fileadmin/mizks.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/program_drugo/Smernice_izobr_otrok_tujcev_v_vrtcih_in_solah.pdf.

Strategija vključevanja otrok, učencev in dijakov migrantov v sistem vzgoje in izobraževanja v Republiki Sloveniji. (2007). Pridobljeno iz www.mizs.gov.si/fileadmin/.../Strategija_vkljucevanje_migrantov.doc.

Šadl, V. (2011). *Vpliv interesne dejavnosti na znanje šolske matematike.* Diplomsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.

Zakon o osnovni šoli. Uradni list RS, št. 81/2006. Pridobljeno iz http://www.uradni-list.si/_pdf/2006/Ur/u2006081.pdf#!/u2006081-pdf.

Zakon o vrtcih. Uradni list RS, št. 12/1996. Pridobljeno iz http://www.uradni-list.si/_pdf/1996/Ur/u1996012.pdf#!/u1996012-pdf.

SPECIFIČNE UČNE TEŽAVE PRI MATEMATIKI – oblike, značilnosti in prepoznavanje

mag. Alenka Zupančič Danko
Svetovalni center Maribor

Povzetek

V prispevku so predstavljena nekatera teoretična izhodišča o specifičnih učnih težavah pri matematiki. Opišemo delitev na splošne in specifične učne težave pri matematiki. Predstavljene so nekatere razvojne značilnosti, kot je občutek za števila. Opisani so nekateri primeri različnih težav pri diskalkuliji in specifičnih aritmetičnih težavah. Osnovni namen našega prispevka je osvetliti problematiko primanjkljajev pri tej skupini učencev.

Ključne besede: učne težave pri matematiki, diskalkulija, specifične aritmetične učne težave.

SPECIFIC LEARNING DISABILITIES IN MATHEMATICS – Types, Characteristics and Identification

Abstract

The article presents a few theoretical starting points for dealing with specific learning disabilities in Mathematics. It describes the distinction between general and specific learning disabilities in Mathematics. It presents a few developmental characteristics such as the number sense. It also describes a few examples of different problems in the case of dyscalculia and specific arithmetic learning difficulties. The main purpose of this article is to highlight the issue of disabilities in this group of students.

Keywords: learning disabilities in Mathematics, dyscalculia, specific arithmetic learning difficulties.

1 Uvod

V prispevku predstavljamo nekatere značilnosti otrok s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki, razliko med splošnimi in specifičnimi težavami ter nekatere primere, ki se pojavljajo pri posameznih oblikah specifičnih učnih težav pri matematiki.

Značilnosti vseh skupin otrok s specifičnimi učnimi težavami, ki veljajo tudi za specifične učne težave pri matematiki, so:

- da je kljub skupnim značilnostim to vedno individualna težava;
- da je to raznolika skupina otrok z različnimi kognitivnimi, socialnimi, emocionalnimi in drugimi značilnostmi;
- da gre za težave z nevrološko osnovo;
- da se po težavnosti razprostirajo na kontinuumu od blagih do težkih;
- da gre za pomembno večje težave, kot jih imajo vrstniki;
- da so težave nepričakovane, lahko bi rekli, da so glede na ostale dosežke presenečenje;
- da srečamo od enostavnih (na enem področju matematike) do kompleksnih oblik (komorbidnost z drugimi oblikami učnih in drugih težav je pogosta – z motnjami branja in pisanja, z ADHD sindromom, z neverbalnimi specifičnimi učnimi težavami, z anksioznostjo…);
- ter da poznamo kratkotrajne do vse življenjske vplive težav (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008).

Od naštetih značilnosti je odvisna odpornost – rezilientnost - otroka na težave – torej njegova reakcija na težave, vpliv težav na učni uspeh in na otrokovo psihosocialno področje, potreba po pomoči in podpori ter zmožnost uspešnega obvladovanja težav.

V prispevku se bomo osredotočili le na oblike in značilnosti težav ter iz tega izhajajoče nekatere oblike pomoči. Način predstavitve temelji na profesionalni izkušnji, da učitelj matematike otroka s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki lahko zelo dobro razume in nato tudi podpre, ko se seznani z »dogajanjem« med reševanjem matematičnih nalog in razume načine otrokovega razmišljanja ter njegove strategije. Izkušnje kažejo, da imajo poti reševanja matematičnih nalog te skupine otrok pogosto logično razlago, ki jo pogojuje otrokov primanjkljaj in se ne ujema z matematično ali drugo naravno pravilno razlago.

2 Opredelitev pojma »specifične učne težave pri matematiki«

Pri opredelitvi pojma »specifične učne težave pri matematiki« izhajamo iz Koncepta dela učne težave v osnovni šoli (2008), ki ga je sprejel Strokovni svet RS za splošno izobraževanje oktobra 2007 in je osnova za pripravo in izvajanje Izvirnih delovnih projektov pomoči (IDPP). Izvirni delovni projekt pomoči je dokument, ki vsebuje dogovorjeno zaporedje nalog in odločitev v procesu pomoči vsakemu učencu z učnimi težavami ter zapis o vseh udeleženih v projektu, o njihovih prispevkih in učenčevih uspehih (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008).

Specifične učne težave pri matematiki se tako kot vse specifične učne težave razprostirajo na kontinuumu od lažjih, zmernih do težjih in težkih. Izvirni delovni projekt pomoči pa je dokument, ki ga šola pripravi na prvih treh korakih pomoči in je namenjen vsem otrokom s specifičnimi učnimi težavami, ne glede na mesto kontinuuma. Po devetih letih uresničevanja Koncepta dela učne težave v osnovni šoli predvidevamo, da vsi učitelji poznajo vseh pet korakov pomoči, zato se ne bomo ustavljali ob podrobnejših razlagah posameznih korakov ter razlikovanju med lažjimi in težjimi oblikami specifičnih učnih težav, temveč se bomo osredotočili na predstavitev posameznih oblik in njihovih značilnosti ter le omenili nekatere ukrepe pomoči, ki pa se lahko uporabijo na vseh petih korakih.

2.1 Učne težave pri matematiki: splošne in specifične

Pri opredelitvi pojma »specifične učne težave pri matematiki« želimo najprej osvetliti razliko med splošnimi učnimi težavami in specifičnimi učnimi težavami pri matematiki. Od tega, ali gre za splošne ali specifične težave, so odvisne oblike pomoči, prav tako sta odziv otrok in vpliv učnih težav na psihosocialno področje za posamezno obliko specifična.

Učenec s **splošnimi** učnimi težavami pri matematiki:

- ima lahko mejne ali podpovprečne intelektualne sposobnosti (sodi v skupino otrok, ki počasneje usvajajo znanje);
- ima lahko težave z usvajanjem pojmov, simbolov, veščin, strategij reševanja problemov;
- pogosto izhaja iz manj spodbudnega okolja (slabo predznanje, manj spodbud in pomoči doma …) – vzrok težav so okoljski faktorji;
- slabše obvladuje jezik (jezikovne težave, drugo jezično okolje …);
- je manj zbran, spregleda detajle, nenatančno prebere navodila … (Vipavc, Kavkler, 2015).

Za učenca s **specifičnimi** učnimi težavami pri matematiki je značilno:

- neskladje med učenčevimi povprečnimi ali nadpovprečnimi intelektualnimi sposobnostmi in dobro splošno šolsko uspešnostjo pri ostalih predmetih na eni ter izrazitimi težavami pri matematiki na drugi strani;
- izrazitost učnih težav pri matematiki (nižji rezultati na matematičnih testih v primerjavi z njegovimi vrstniki ali dvoletni zaostanek za vrstniki pri obvladovanju matematičnih znanj);
- vztrajnost učnih težav (izrazite, dolgotrajne kljub prilagoditvam, vloženemu trudu ter času in pomoči);
- nepričakovanost težav (Magajna, Velikonja, 2011).

2.2 Specifične učne težave pri matematiki

Specifične učne težave pri matematiki delimo v dve skupini: DISKALKULIJO in SPECIFIČNE ARITMETIČNE UČNE TEŽAVE, tako kot jih deli Koncept dela učne težave v osnovni šoli (2008).

Pri obeh skupinah ugotavljamo, da:

- gre za primanjkljaje aritmetičnih sposobnosti in spretnosti;
- gre za težave na področju **veščin** računanja ter skupek **težav pri učenju matematike in reševanju računskih** nalog;
- težave niso posledica motnje v duševnem razvoju ali neustreznega poučevanja;
- gre za težave obvladovanja OSNOVNIH aritmetičnih sposobnosti in spretnosti, kot so seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje ter manj za težave pri bolj abstraktnih spretnostih in sposobnostih iz algebre, trigonometrije in geometrije (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008).

V teoriji najdemo različne delitve specifičnih učnih težav pri matematiki. Nekateri avtorji diskalkulijo in specifične težave pri matematiki enačijo (Adler 2008, po Vipavc, 2015).

Ob tem ne smemo pozabiti, da imajo lahko specifične težave pri matematiki tudi otroci s povprečnimi sposobnostmi, ki na vseh področjih dosegajo v glavnem povprečne učne dosežke, a matematika pri njih še odstopa. Še enkrat želimo poudariti, da specifične težave opredeljuje predvsem razlika med dosežki pri matematiki in dosežki na drugih področjih ter da gre za specifične – posebne - težave na nivojih, kjer otroci s splošnimi učnimi težavami in nizkimi učnimi dosežki praviloma nimajo težav.

3 Pogostost, značilnosti in prepoznavanje specifičnih učnih težav pri matematiki

V literaturi tako kot pri vseh oblikah specifičnih učnih težav najdemo različne podatke o pogostosti pojavnosti specifičnih učnih težav pri matematiki: gibljejo se od 1 do 10 %, najpogosteje med 3 do 6 %, razlike so najpogosteje pogojene s kriteriji ocenjevanja (Vipavc in Kavkler, 2015). Pri številu 20 učencev v razredu lahko v povprečju pričakujemo enega otroka s temi težavami na razred.

Za specifične učne težave pri matematiki je enako kot za vse specifične učne težave značilen **specifičen način kognitivnega funkcioniranja.** Nanj moramo biti posebej pozorni, ko pri učencu razvijamo načine pomoči, kompenzatorne in metakognitivne strategije reševanja težav in ko gradimo na preprečevanju sekundarnih posledic (slabi splošni ali le šolski samopodobi, izgubi motivacije za učenje …) in na močnih področjih.

3.1 Specifične razvojne značilnosti učencev s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki

Specifične razvojne značilnosti učencev s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki so navedene v kriterijih za opredelitev primanjkljajev na posameznih področjih učenja, in sicer pri opisu primanjkljajev na področju matematične pismenosti (Magajna, L., Kavkler, M., Košak Babuder, M., Zupančič Danko, A., Seršen Fras, A., 2014).

Pri otroku tako ugotavljamo težave pri razvoju

- občutka za števila,
- točnosti matematičnega rezoniranja,
- avtomatizacije aritmetičnih dejstev ter
- sposobnosti hitrega in tekočega računanja oz. točnosti izvajanja in/ali avtomatizacije aritmetičnih postopkov.

a) Občutek za števila

Občutek za števila ima nevrološko osnovo in je sposobnost hitro razumeti, oceniti in uporabiti številčno kvantiteto (Dehaene, 2001).

Občutek za števila predstavlja sposobnost:

- prepoznavanja pomena in razumevanja števil, odnosov med njimi (npr. k 195 je treba prišteti 5, da dobimo 200) in njihove raznolike uporabe;
- fleksibilne uporabe števil v vseh štirih aritmetičnih operacijah;
- uporabe in razumevanja števil v strategijah štetja in računanja (npr. kako pisno seštejemo 447 + 320);
- razvoja strategij za reševanje kompleksnih matematičnih problemov;
- merjenja, prepoznavanja odnosa del – celota (dneva) (Magajna, L., Kavkler, M., Košak Babuder, M., Zupančič Danko, A., Seršen Fras, A., 2014).

Za ilustracijo: v primerjavi z vrstnikom s težavami otrok brez težav »ve«,

- da 5 pomeni pet hiš, pet žog, pet različnih predmetov …,
- kako se 5 razlikuje od 4,
- kaj je večje – 4 ali 5,
- kako si predstavljamo količine, velikosti,
- kaj pomeni povezava numeričnega pomena številke s simbolom 5 ipd.

Pri reševanju matematičnih nalog mora otrok nujno prepoznati in hitro procesirati številske velikostne odnose, zapisane v simbolnem jeziku. Tudi otroci s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki to naredijo, ne gre za celovit razpad sistema (kot pri akalkuliji), vendar porabijo več časa, da pridejo do odgovora, uporabijo druge strategije (npr. 8 + 8 - en otrok si zapomni rezultat, drugi uporabi strategijo seštevanja) in naredijo več napak kot vrstniki (Hinton in Fischer, 2013).

Ko je prizadeto področje, ki reprezentira kvantiteto, v zgodnjem obdobju šolanja opažamo še:

- zaostanek pri štetju,
- težave pri prepoznavanju skupin prstov (štejejo prste na roki),
- zaostanek pri uporabi strategije štetja pri dodajanju,
- težave pri primerjanju manjših količin (npr. 7 in 9),
- težave pri zapomnitvi matematičnih dejstev (npr. $2 + 3$, $2 \cdot 3$ …),
- težave pri avtomatiziranem procesiranju simbolov števil – če slišimo ali preberemo 7, se hitro zgodi dostop do občutka za kvantiteto – pri teh otrocih gre to počasneje in z več napora,
- težave pri miselni predstavitvi številskega traku in
- težave pri razdruževanju števil (npr. $10 = 4 + 6$).

b) Matematično rezoniranje

Matematično rezoniranje omogoča evalvacijo matematične naloge ali problema, izbiro strategije reševanja naloge ali problema (npr. kako sešteti 8 + 8), oblikovanje logičnih sklepov, opis rešitev in prepoznavanje rabe teh rešitev, refleksijo rešitev in ugotovitev smiselnosti teh rešitev (npr. 195 + 5 ne more biti 205). Je argument, s katerim utemeljujemo procese, postopke in domneve z namenom oblikovanja močnih konceptualnih osnov in povezav, ki omogočajo otroku procesiranje novih informacij (Magajna, L., Kavkler, M., Košak Babuder, M., Zupančič Danko, A., Seršen Fras, A., 2014). Pri predstavitvi primerov bomo videli, da otroci s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki zaradi šibkega matematičnega rezoniranja ne uvidijo napačnih rešitev, ki so za zunanjega opazovalca celo absurdne.

c) Avtomatizacija aritmetičnih dejstev in sposobnost hitrega in tekočega računanja

Težave v avtomatizaciji aritmetičnih dejstev in težave v sposobnosti hitrega in tekočega računanja predstavljamo pri podrobnejšem opisu diskalkulije in podskupin specifičnih aritmetičnih učnih težav.

3.2 Diskalkulija

Diskalkulija pomeni **zmerne in težje** učne težave pri matematiki na vseh področjih od občutka za števila, priklica dejstev in postopkov do matematičnega rezoniranja (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008).

V praksi opažamo potrditev teoretičnih spoznanj, da so za učence z diskalkulijo značilna **nihanja v izkazanem znanju**. To dejstvo bega tako učitelje kot starše, pri otroku pa povzroča dodatno stisko. Učenec z diskalkulijo se lahko v določenem trenutku uspešno spoprime z določeno nalogo, le trenutek kasneje ali naslednji dan pa bo pri enaki nalogi popolnoma odpovedal. Lahko tudi hitro reši katero izmed zahtevnejših nalog, a se ustavi pri enostavnem primeru, kot je 4 + 5, kjer si mora pomagati z računanjem na prste. V določenem trenutku pravilno reši naloge, takoj zatem se neke naloge sploh ne zna lotiti (Adler 2008, po Vipavc, 2015). Vprašamo se, kam je vso že osvojeno znanje izginilo in ali je bil ves trud zaman? Čez nekaj časa lahko učenec znanje spet prikliče. Menimo, da je nihanje v izkazovanju znanja dodatna ovira pri diagnosticiranju v razredu pri pouku matematike, saj lahko učenec trenutno snov zadovoljivo obvlada, veliko bolj enostavnih temeljev pa ne.

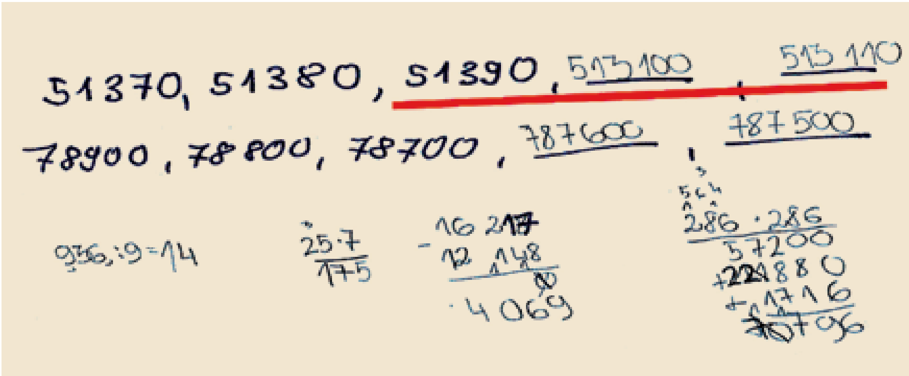
Za otroke s splošnimi učnimi težavami pri matematiki na drugi strani je značilno, da naloge rešujejo dokaj suvereno do določenega težavnostnega nivoja, nato pa odpovedo.

Diskalkulija je lahko:

- **pridobljena**; ta je posledica določene oblike možganske okvare – osebe s pridobljeno diskalkulijo imajo težave z dojemanjem števil in aritmetičnih operacij. Večkrat jo srečamo pri otroci s posledicami cerebralne paralize, kjer včasih govorimo o »slepi pegi« za matematiko;
- **razvojna**; ta je povezana z vsemi elementi matematičnega znanja; s slabšim konceptualnim, proceduralnim in deklarativnim znanjem (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008). Matematični dosežki so glede na otrokovo starost, inteligentnost in potek izobraževanja pomembno nižji, kot bi jih pričakovali.

Za ilustracijo: 195 + 5 ali 8 – 2 še v višjih razredih (7. razred) računajo pisno.

Diskalkulija; občutek za števila, številska zaporedja (slika 1): 16-letna dijakinja z razvojno diskalkulijo je prva tri števila pravilno prebrala ter nadaljevala niz, kot je zapisano; pri ponovnem branju je vseh pet števil prebrala pravilno, kot so zapisana, vendar napake ni zaznala. Ko smo preverjali razumevanje mestnih vredno-

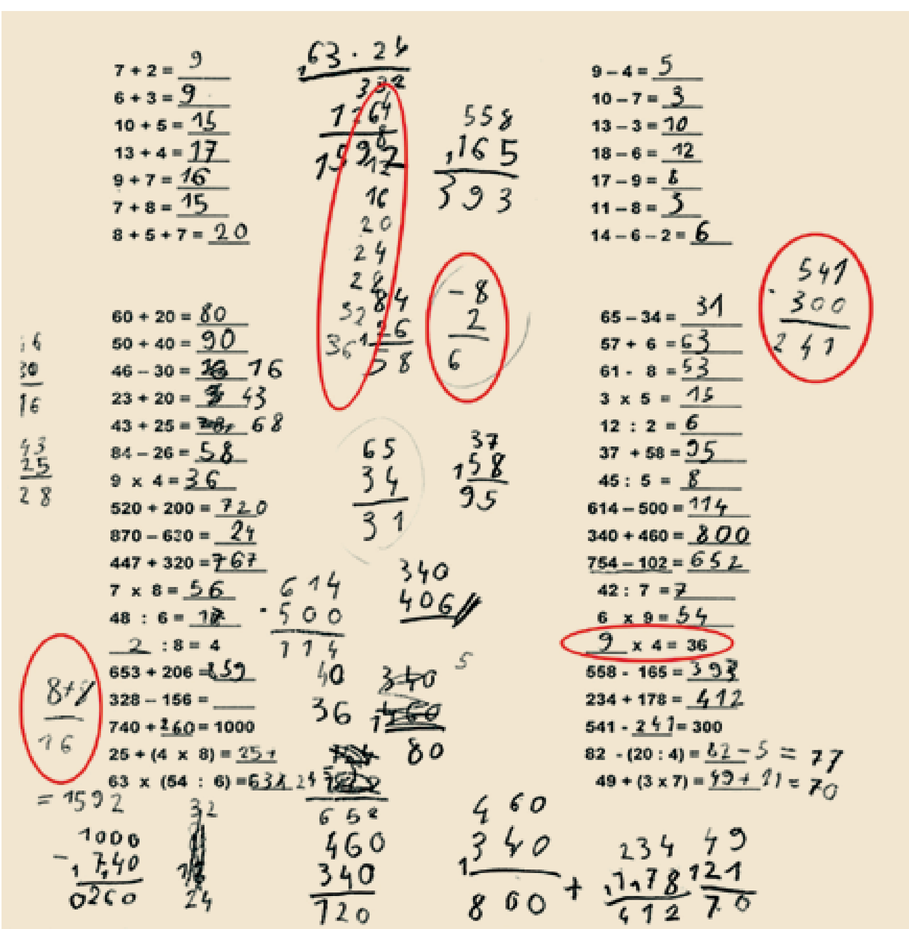


Slika 1: Diskalkulija, občutek za števila

sti, je za določanje enic, desetic in stotic potrebovala več časa, opazna je bila negotovost, vendar se ni zmotila. Pri višjih vrednostih je negotovost še narasla, vendar tudi tu ni bilo napak. Težava je v tem, da tudi po določitvi mestnih vrednosti in po ponovnem branju sama ni ugotovila napake v zapisanem zaporedju. Pri matematiki z veliko truda in časa dosega oceno 3 (dobro), pri ostalih predmetih dosega prav dobre in odlične ocene brez večjega truda (zaradi matematike ji tudi zmanjka časa za ostale predmete).

Diskalkulija – računanje v obsegu do 1000 (slika 2): Pri učenki je bila diagnosticirana diskalkulija v 7. razredu, potem ko je na razliko med matematiko in ostalimi predmeti postala pozorna učiteljica matematike. Iz preizkusa, ki ga je reševala skoraj 20 minut, je razvidno, da so za učenko napor že osnovne računske operacije. Namesto hitrega avtomatiziranega priklica uporablja strategije na nižjem nivoju (računanje na prste oz. preštevanje do 20 in pisno računanje do 10, 20, 100 in 1000 – z rdečo obkrožena števila) ter podporne strategije (pisanje večkratnikov pri poštevanki, ki jih nato prešteva – z rdečo obkrožena primera pri 9 · 4 = 36). Učenka je poštevanko utrjevala več let, a neuspešno. Otroci z diskalkulijo uporabljajo omejeno število strategij in jih ne spreminjajo. Med osnovno šolo pričakujemo omejeno stopnjo razvoja in sprememb.

OSNOVNA PRVA OBLIKA POMOČI V ŠOLI: podaljšan čas in možnost uporabe žepnega računala. S tema prilagoditvama je učenka pri matematiki dosegla pozitivno ali celo dobro oceno, pri ostalih predmetih je dosegala prav dobre in tudi odlične ocene.



Slika 2: Diskalkulija; občutek za števila, težave s priklicem deklarativnih znanj, slabše proceduralno in konceptualno znanje.

3.3 Specifične aritmetične učne težave

Specifične aritmetične težave so v nasprotju z diskalkulijo razporejajo na celotnem kontinuumu **od lažjih do težjih**. Glede na povezanost s kognitivnimi in nevrološkimi primanjkljaji jih delimo na tri podskupine:

- I. Specifične aritmetične težave, ki so povezane s slabšim **semantičnim spominom**: ti učenci imajo težave *s priklicem aritmetičnih dejstev iz dolgotrajnega spomina* (npr. poštevanke; seštevanja in odštevanja z enomestnimi števili).
- II. Specifične aritmetične težave, ki so povezane z **aritmetičnimi proceduralnimi težavami:** ti učenci imajo težave v *obvladovanju matematičnih postopkov*: jih ne avtomatizirajo, so počasni, manj točni oz. uporabljajo manj razvite ali nepopolne aritmetične postopke.
- III. Specifične aritmetične težave, ki so povezane z **vizualno-prostorskimi težavami**: ti učenci neustrezno uporabljajo vizualno prostorske spretnosti za predstavljanje in razlago aritmetičnih informacij. Vizualno-prostorske težave vplivajo na reševanje nalog pri aritmetiki in pri geometriji (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008).

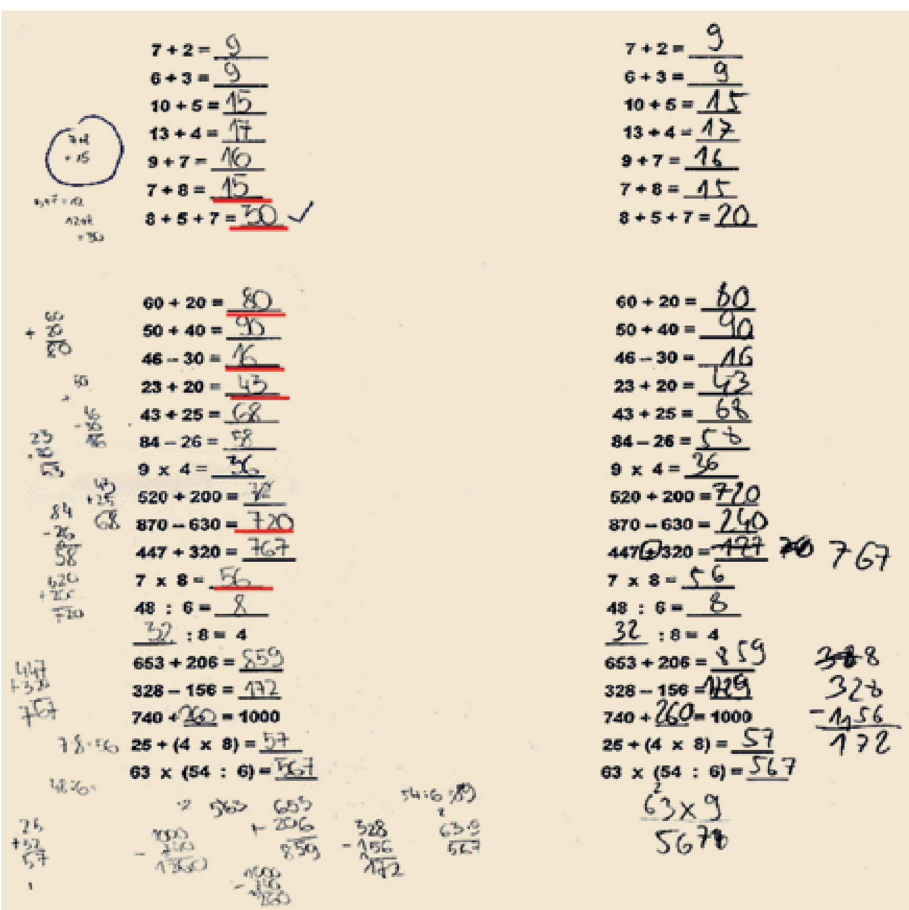
Vrsto težav ob reševanju matematičnih nalog ugotovimo z analizo napak in poslušanjem razlag načinov reševanja. Opazovati je treba proces reševanja in uporabljene strategije, ne le rezultat. V nadaljevanju predstavljamo nekaj primerov. Opisani primeri potrebujejo še podrobno analizo vzrokov, interpretacije ter načrt za odpravljanje težav, ki nastanejo v okviru timske diagnostike (psiholog, specialni pedagog) in povezave z izvajalci pomoči (učitelj predmeta matematike, specialni pedagog). V prispevku smo samo nakazali nekaj smeri pomoči.

I. Specifične aritmetične težave, ki so povezane s slabšim semantičnim spominom

Pri teh učencih je otežen priklic osnovnih deklarativnih znanj oziroma aritmetičnih dejstev iz dolgotrajnega spomina. Za ilustracijo predstavljamo dva niza številskih izrazov v obsegu do 1000 (slika 3), ki sta ju reševala enako stara dijaka (1. letnik). Stolpec na levi strani je reševala dijakinja s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki, ki obiskuje štiriletni program in dosega dobro oceno pri matematiki; stolpec na desni je reševal dijak triletnega poklicnega programa, ki pri vseh predmetih dosega v povprečju dobre ocene.

Največje razlike vidimo v:

- *času reševanja*: dijakinja s težavami 8 minut, dijak brez težav 4 minute;
- *strategijah računanja*: dijakinja namesto hitrega avtomatiziranega priklica uporablja nižje strategije pisnega seštevanja, v katerih pa je zanesljiva;
- *zanesljivosti*: dijakinja brez opore s prsti dobi seštevek 12 + 8 je 30, šele opora s prsti ji da zanesljivejšo informacijo, v katero desetico seže rezultat. Hkrati je verjetnost napak pri razvojno manj zreli strategiji preštevanja večja;
- *računanju na pamet*: pri dijakinji skoraj ni možna manipulacija s števili s pomočjo miselne vizualizacije – vizualne predstave informacij. Nasprotno dijak uporablja to strategijo pri skoraj vseh primerih, tudi pri izrazih s prehodom in primerih dopolnjevanja.



Slika 3: Priklic osnovnih deklarativnih znanj – podčrtani so primeri, kjer je dijakinja uporabila nižje strategije: računanje na prste in pisno računanje (glej pomožne račune).

OSNOVNA PRVA OBLIKA POMOČI V ŠOLI: podaljšan čas in možnost uporabe žepnega računala.

II. Specifične aritmetične težave, ki so povezane z aritmetičnimi proceduralnimi težavami

Ti učenci uporabljajo manj razvite ali nepopolne aritmetične postopke (npr. težave imajo s sposojanjem in prenašanjem desetic pri pisnem odštevanju) (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008, str. 45);

Primer 1:

$$63 \cdot 9 = 602$$

Razlaga: **Učenec razloži postopek računanja: »3 · 9 = 27, 2 napišemo, 7 štejemo dalje; 6 · 9 je 54, prištejemo 7 (se zmoti v seštevanju) in dobimo 60, pripišemo k 2 = 602«.**

Gre za primer, ki je le sestavni del daljše naloge in jo je učenec dobil v 7. razredu. Učenec zna določiti in pokaže ustrezno razumevanje mestne vrednosti pri tromestnih in dvomestnih številih. Pri računanju število glasno izgovori, nato ravna tako, kot je razložil. Pri sestavljenih nalogah ima še vedno tudi težave z obračanjem dvomestnih števil, pri preverjanju zapisa, branja in razvrščanja števil te težave niso opazne, saj se jih zaveda in je zavestno pozoren na ustrezne mestne vrednosti in pravilen zapis števil.

Primer 2 (učenčev zapis pisnega seštevanja)**:**

$$\begin{array}{r} 4\ 8 \\ +1\mathbf{1}\ 6 \\ \hline \mathbf{1\,5}\ \mathbf{4} \end{array}$$

Razlaga: Učenec pravilno sešteje enice (8 + 6 = 14) in zapiše 4. Pripiše 1 (število desetic) k deseticam v drugem **seštevancu** (11). Nato pa sešteje 11 + 4. Učenec vidi 11 kot število 11, ki je nastalo z dodajanjem števke, ne zaveda pa se, da mora števili (1 in 1) sešteti.

Primer 3:

$$\begin{array}{c} 11213 \cdot 15 \\ \hline \mathbf{520353} \end{array}$$

Razlaga: Učenec izmenjaje množi enice in desetice in tudi sproti sešteva števila:

»1 · 3 je 3; 3 · 5 je 15, 5 napišemo, 1 dalje; 1 · 2 je 2 + 1 (ki smo jo šteli dalje) je 3; 5 · 2 je 10, 0 napišemo, 1 dalje; 1 · 1 je 1 + 1 (ki smo jo šteli dalje) je 2; in 5 · 1 je 5.

Dobili smo otrokovo razlago postopka. Primer kaže le težavo, ne kaže pa nam poti iz nje in ne razkriva vzrokov. Da gre za specifične aritmične težave, nam kažejo informacije, da ne gre za otroka, ki počasneje usvaja znanja zaradi mejnih ali podpovprečnih intelektualnih sposobnosti (Magajna, Kavkler, Čačinovič Vogrinčič, Pečjak in Bregar Golobič, 2008); da so težave pri tem otroku nepričakovane glede na njegove ostale učne dosežke, in da jih ne srečamo pri vrstnikih, ki so bili deležni enakega sistema poučevanja. Za učinkovito pomoč potrebujemo timsko diagnostike (psiholog, specialni pedagog), načrt pomoči in povezavo z izvajalci pomoči (učitelj, specialni pedagog).

III. Specifične aritmetične težave, ki so povezane z vizualno-prostorskimi težavami

Ti učenci neustrezno uporabljajo vizualno-prostorske spretnosti za predstavljanje in razlago aritmetičnih informacij. Težave imajo pri smereh računanja, pri točnem podpisovanje števk, pri postavljanju decimalnih vejic, pojavljajo se napačni zapisi v večmestnem številu, preskakovanje vrst ali kolon, imajo slabo orientacijo na listu in tabli (težave so prepisi, še posebej prepisi s table), imajo slabe predstave o prostoru, dolžini … Ti otroci imajo predvsem v nižjih razredih več težav v osvajanju orientacije na številski lestvici (levo desno, navzgor navzdol), saj ta spretnost vključuje tudi prostorsko orientacijo.

Primer 4:

Učenec odšteva večje minus manjše:
2 – 14 = 12

Primer 5 (učenčev zapis pisnega seštevanja)**:**

	6	5	2
+	5 1	5 1	4
	11	**1**	**7**

Učenec sešteva 652 in 554 in pozna postopek, a ga začne na napačni strani. Najprej sešteje stotici, napiše 11 in šteje 1 naprej, nato sešteje 5 in 5 ter ponovno šteje 1 naprej in na koncu sešteje enici 4 in 2, prišteje še 1 in dobi 7.

Ponovno poudarjamo, da gre za otroka s specifičnimi aritmetičnimi težavami in da mora ugotovljenim težavam slediti diagnostika in načrt za odpravljanje težav.

OSNOVNA PRVA OBLIKA POMOČI: grafična opora. Vsako oporo, pripomoček, strategijo ali opomnik moramo učenca najprej naučiti uporabljati, nato naj ga uporablja v vseh fazah pouka.

Uporabljamo jo v primerih, ko so specifične aritmetične težave, povezane z vizualno-prostorskimi težavami, pretežno izolirane. Kajti sicer je bolj smiselna pomoč uporaba računala.

Slika 4: Primer grafične opore pri težavah z napačno smerjo pisnega seštevanja.

Primer 6:

2	3	4	
+3	51	8	9
5	**9**	**2**	**9**

Učenec napačno podpiše števili, ker predvideva, da se morajo pri seštevanju prostorsko ujemati na levi strani. Napako lahko popravi, če ga spomnimo na koncept mestne vrednosti, ni pa nujno, da mu to znanje omogoči dovolj hiter in samostojen uvid napake. Napaka ni dosledna; isti učenec je ne ponavlja, ampak se pojavlja občasno (podobno kot obračanje dvomestnih števil v nižjih razredih).

Zaključek

Timothy Gowers je v knjigi *Matematika – zelo kratek uvod* (2011) zapisal misel, da matematika, za razliko od večine ostalih ved, ves čas gradi sama na sebi, zato omogoča napredovanje zgolj na podlagi razumevanja prednodne snovi, ki se dejansko tudi ne sme pozabiti. Pri specifičnih učnih težavah pri matematiki smo pogosto v situaciji, ko učenec sicer pokaže določeno stopnjo razumevanja, a ne ve oziroma ni prepričan, kaj vidi, česa se spomni, kje je in kam naj gre! Zato potrebuje pomoč. Pri vsakodnevnem praktičnem delu skušamo učencem s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki najprej na njim razumljiv način pokazati in razložiti, kaj je njihova težava in kaj se dogaja, nato pa jih skušamo opremiti z uporabnimi načini obvladovanja v prispevku predstavljenih težav. Pri tem so timska diagnostika, načrt pomoči ter podpora v šoli in doma bistvenega pomena in bi jim morali nameniti samostojen prispevek. Pri oblikovanju načrta pomoči izhajamo iz definicije, da je kvantitativna (računska) pismenost opredeljena kot sposobnost reševanja aritmetičnih problemov, ki jih zahteva vsakodnevno življenje. Te probleme naj učenci rešujejo drugače, naj imajo več časa, z oporami in pomočjo učitelja in drugih. Pomembno je, da se jih ne ustrašijo in da specifična učna težava pri matematiki ne postane psihosocialni problem. ■

Viri in literatura

Gowers, T. (2011): *Matematika – zelo kratek uvod.* Ljubljana: Krtina.

Hinton, C., Fischer K. W. (2013): *Učenje iz razvojne in biološke perspektive*. V O naravi učenja: uporaba raziskav za navdih prakse. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Kalan, M. (2015): *Obravnava otroka z diskalkulijo v Svetovalnem centru za otroke, mladostnike in starše v Ljubljani.* V Težave pri učenju matematike: strategije za izboljšanje razumevanja in učnih dosežkov učencev. Ljubljana: Bravo, društvo za pomoč otrokom in mladostnikom s specifičnimi učnimi težavami.

Magajna, L., Čačinovič Vogrinčič, G., Kavkler, M., Pečjak, S., Bregar-Golobič, K. (2008): *Učne težave v osnovni šoli: koncept dela*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Magajna, L., Velikonja, M. (2011): *Učenci z učnimi težavami. Prepoznavanje in diagnostično ocenjevanje.* Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

Magajna, L., Kavkler, M., Košak Babuder, M., Zupančič Danko, A., Seršen Fras, A. (2014): *VII. Otroci s primanjkljaji na posameznih področjih učenja.* V N. Vovk Ornik (ur.) Kriteriji za opredelitev vrste in stopnje primanjkljajev, ovir oziroma motenj otrok s posebnimi potrebam. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Ivačič, A., Jokan, N., Podlogar, P., Simončič, A., Tašner, M., Marija Kavkler, M., Milena Košak Babuder, M. (2014): Pomoč in podpora učitelju za delo z učenci z diskalkulijo: priročnik z osnovnimi podatki, načinom prepoznavanja in nekaterimi strategijami za pomoč: naloga pri predmetu Poglobljena diagnostična ocena in oskrba oseb s PPPU. Ljubljana: Pedagoška fakulteta. pdf (30. 4. 2016).

Vipavc, J., Kavkler, M. (2015): *Konceptualne osnove obravnave učencev z učnimi težavami pri matematiki*. V Težave pri učenju matematike: strategije za izboljšanje razumevanja in učnih dosežkov učencev. Ljubljana: Bravo, društvo za pomoč otrokom in mladostnikom s specifičnimi učnimi težavami.

Vipavc, J. (2015): *Težave pri učenju matematike*. V Težave pri učenju matematike: strategije za izboljšanje razumevanja in učnih dosežkov učencev. Ljubljana: Bravo, društvo za pomoč otrokom in mladostnikom s specifičnimi učnimi težavami.

spletna stran http://www.aboutdyscalculia.org/symptoms.html (1. 4. 2015).

spletna stran http://www.unicog.org/publications/Dehaene_PrecisNumberSense.pdf (30. 4. 2016).

Uvajanje formativnega spremljanja pri vsebini krog in krožnica

Štefka Smej
Osnovna šola Cerkvenjak, Vitomarci

Povzetek

V prispevku je predstavljeno formativno spremljanje in ocenjevanje učenčevega napredka kot eden izmed načinov dela, ki uspešno sledi smernicam sodobnega pouka in vodi učence na poti optimalnega razvijanja spretnosti in sposobnosti skladno z njihovimi zmožnostmi. V prvem delu so predstavljene predvsem prednosti tega načina dela z željo, da bi učitelji uvideli praktično vrednost, ki bi jih spodbudila k načrtnemu in sistematičnemu vnašanju strategij formativnega spremljanja v lastno poučevalno prakso. Posebej so izpostavljene prednosti sodelovanja učencev pri načrtovanju ciljev ter kriterijev uspešnosti in njihovega samovrednotenja ter samoregulacije učenja. Vpeljava omenjenih strategij v prakso z opisom težav, ki se lahko ob tem pojavijo, je ponazorjena na primeru obravnave vsebinskega sklopa obseg in ploščina kroga v osmem razredu.

Ključne besede: formativno spremljanje, načrtovanje ciljev in kriterijev uspešnosti, samoocenjevanje

Introducing Formative Assessment for the Topic of Circle and Circumference

Abstract

This paper presents the formative assessment and evaluation of a student's progress as a work method that successfully follows the guidelines for contemporary instruction and guides students on the path to optimally developing their skills and abilities, in accordance with their capabilities. The first part primarily presents the advantages of this work method with the desire to make the teachers see its practical value, which would encourage them to deliberately and systematically introduce formative assessment strategies into their own teaching practice. It points out the advantages of students participating in the planning of objectives and success criteria, and of their self-assessment and self-regulation of learning. The introduction of the above-mentioned strategies into practice and a description of problems that may arise in the process is illustrated on the example of discussing the topic of the length of circumference and area of the circle and circumference in the eighth grade.

Keywords: formative assessment, planning of objectives and success criteria, self-evaluation

Uvod

V današnji hitro spreminjajoči se družbi se spreminjajo številni družbeno-ekonomski in družinski dejavniki, ki večajo število različnih potreb učencev v posameznem razredu. Vizija sodobne šole tako temelji na razmišljanju o prihodnosti učenja in poučevanja raznolike populacije učencev ter načrtovanju sprememb. V viziji šole 21. stoletja je tudi zapisano, da je za izzive, ki jih prinaša raznolikost otrok v šolah, treba najti rešitve (Berry, idr., 2010). Eden od korakov na poti k tej rešitvi je formativno spremljanje učencev, ki učiteljem pomaga pri izpolnjevanju temeljnega poslanstva, vsakega učenca vzgojiti v samostojnega in odgovornega posameznika, sposobnega samostojnega in kritičnega mišljenja, da bo lahko uspešno funkcioniral na vseh področjih družbenega delovanja. Če želimo povečati kakovost in trajnost pridobljenega znanja in doseči, da bodo vsi učenci optimalno razvili svoje spretnosti in sposobnosti skladno s svojimi zmožnostmi, moramo poučevanje prilagoditi njihovim individualnim potrebam. V ta namen moramo učitelji zelo dobro poznati svoje učence. V vseh fazah učnega procesa moramo sistematično zbirati, urejati in uporabljati informacije o njihovem predznanju, delu, napredku in dosežkih. Zbrane podatke, ob upoštevanju njihovih močnih in šibkih področjih, moramo uporabiti pri načrtovanju in izvajanju učnega procesa, ki ga individualiziramo in prilagajamo posameznikom in skupinam učencev. To nam omogoča, da učencem nudimo takojšnjo in kakovostno povratno informacijo, ki jih usmerja pri nadaljnjem delu. Pri takšnem načinu dela učenci ne zaznavajo učitelja samo kot posredovalca znanja in ocenjevalca, ampak tudi kot organizatorja raziskovanja. Ob upoštevanju sodobnih raziskav o delovanju možganov in posledično sodobnih pristopov k poučevanju, učitelji, kot pravi Rutar (2005; pov. po

Škerjanc, 2011), svojo pozornost usmerjamo na načine, po katerih pridejo učenci do vsebin in veščin. Torej ni več pomembna samo vsebina, kaj učenci znajo, ampak pot, kako so do te vsebine prišli. Učenci morajo biti v proces učenja vključeni čim bolj aktivno, saj se po besedah Barice Marentič Požarnik (2000) kakovostnejše in trajnejše znanje doseže z aktivnejšimi oblikami dela, ki učence sistematično spodbujajo in usmerjajo k raziskovanju, razmišljanju in odkrivanju novega. Poleg tega aktivna udeležba v procesu učenja in sprotna povratna informacija povečujeta učenčevo notranjo motivacijo in lastno odgovornost za uspeh.

Kakovostne povratne informacije lahko učitelji učencu zagotovimo, če sproti celostno spremljamo njegov napredek. Spremljati moramo, kje v procesu učenja je učenec, kam gre ter kaj mora storiti, da bo do tja prišel. Spremljanje napredka učenca le po rezultatih pisnega in ustnega ocenjevanja znanja še zdaleč ni dovolj.

Potrebo po formativnem spremljanju napredkov učencev je mogoče zaslediti že v Pravilniku o preverjanju in ocenjevanju znanja ter napredovanju učencev v osnovni šoli (2013), ki učitelja pri preverjanju in ocenjevanju znanja zavezuje k upoštevanju naslednjih načel:

- spoštuje osebno integriteto učencev in različnost med njimi;
- daje učencem, učiteljem in staršem povratne informacije o učenčevem individualnem napredovanju;
- omogoča učencu kritični premislek in vpogled v usvojeno znanje;
- prispeva k demokratizaciji odnosov med učenci in učitelji.

Opredelitve formativnega spremljanja

Zaradi hitrega tehnološkega napredka, novih spoznanj o delovanju možganov in učenju ter drugačne vzgoje in vrednot številni tuji in domači strokovnjaki s področja pedagoške psihologije, pedagogike, didaktike in sorodnih ved proučujejo formativno spremljanje kot alternativo tradicionalnim didaktičnim modelom, ki naj bi povečali trajnost in uporabnost znanja. V literaturi zasledimo številne opredelitve formativnega spremljanja. Dodge (2009) formativno spremljanje opredeli kot proces stalnega spremljanja, opazovanja, pregledovanja in vrednotenja, ki ga izvajamo z namenom, da učitelj prilagaja svoje poučevanje in daje učencem povratne informacije o njihovem učenju. Ta proces naj bi temeljil na zbiranju dokazov, s katerimi preverjamo razumevanje učencev, in jasnih kriterijih za vrednotenje učnih dosežkov. Tudi Marentič Požarnik (2000) pri formativnem spremljanju poudari kontinuirano izvajanje med učnim procesom, z namenom zbiranja informacij za čim učinkovitejše usmerjanje pouka in učenja. Nekateri avtorji pa pri opredelitvi formativnega spremljanja poudarjajo predvsem njegov namen, in sicer ugotavljanje učenčevega razumevanja učnih vsebin ter analiziranja in odpravljanja vzrokov, zaradi katerih učenec te vsebine ne razume ali slabo razume.

Sama formativno spremljanje, izhajajoč iz teoretičnih opredelitev in izvajanja v praksi, opišem kot sodobni didaktični koncept, ki od učitelja zahteva bolj poglobljeno spremljanje učnega funkcioniranja slehernega učenca, dajanje kakovostnih povratnih informacij in načrtovanje pouka, v katerem osrednjo vlogo prevzema učenec z namenom, da vsak učenec glede na svoje realne zmožnosti doseže optimalne učne dosežke. V svoji opredelitvi poudarjam besedo *bolj*, s katero izražam večjo mero spremljanja. Učitelji smo spremljali učno funkcioniranje in dosežke učencev že pred načrtnim uvajanjem formativnega spremljanja, le da so bili ti podatki takrat manj uporabljeni za namene individualnega prilagajanja učnega procesa učencem glede na njihova močna in šibka področja ter njihove trenutne sposobnosti. Učenci pri tradicionalnem pouku niso prevzemali tolikšne aktivne vloge, pri kateri bi poleg usvojenega znanja bil poudarek na razvijanju sposobnosti kritičnega samoocenjevanja lastnih spretnosti in sposobnosti, razumevanja namenov učenja in kriterijev ocenjevanja, postavljanja realnih ciljev ter načrtovanja dejavnosti za njihovo doseganje. Učitelj je bil posredovalec znanja, ki je razložil snov, učenci so si snov zapisali, jo vadili in si jo zapomnili.

Prednosti formativnega spremljanja

Formativno spremljanje se je kot dopolnitev in obogatitev tradicionalnih načinov poučevanja začelo uvajati v prakso zaradi prednosti, ki so jih izpostavljali njegovi zagovorniki na teoretični ravni. Poučevanje po izključno tradicionalnem, frontalnem načinu učiteljem več ne zadošča za doseganje ciljev izobraževanja, ki so se zaradi številnih, predvsem družbenih sprememb korenito spremenili. Zagotovo pa kljub sodobnim didaktičnim metodam dela ne gre v celoti opustiti frontalnega pouka. Ob strokovni presoji, ki mora izhajati izključno iz potreb učencev, učitelji v dobri poučevalni praksi posamezne elemente tradicionalnega načina poučevanja še naprej uporabljamo. Številne od izpostavljenih teoretičnih prednosti formativnega spremljanja se po dalj časa trajajočem in doslednem izvajanju njegovih posameznih korakov pokažejo tudi v praksi. Pozitivni učinek je po mojih izkušnjah v prvi vrsti pogojen s spreminjanjem tradicionalnega in dokaj močno zakoreninjenega načina poučevanja, značilnega za behavioristični in kognitivni pristop, kjer z željo, da imamo vse pod nadzorom, osrednjo vlogo prevzemamo učitelji. Osrednja vloga mora biti sedaj prepuščena učencem, učitelji prevzamemo vlogo organizatorja pouka in motivatorja. Takšna oblika pouka je učinkovita šele takrat, ko so učenci usposobljeni za čim bolj učinkovito samostojno in sodelovalno učenje. Tukaj v procesu formativnega spremljanja vidim potrebo po tesnem sodelovanju vseh strokovnih delavcev, ki delajo z učenci v osnovni šoli. Učenje učenja oz. seznanjanje učencev z ustreznimi strategijami in tehnikami učenja ter navajanje na njihovo uporabo je proces, ki mu morajo slediti vsi učitelji že od prvega razreda.

Ada Holcar Brunauer (2014) navaja, da je bilo formativno spremljanje razvito z namenom, da bi motiviralo učence, spodbujalo razumevanje ciljev in kriterijev uspešnosti, pomagalo pri napredovanju, učencem omogočalo možnosti za samoocenjevanje, učitelje spodbujalo k spremljanju širokega nabora dosežkov in uporabi testov zgolj kot enega izmed pristopov k ocenjevanju z namenom izboljšanja učenja. Prednost spremljanja učenca skozi celoten proces pridobivanja znanja in napredovanja pred spremljanjem le preko rezultatov preverjanja in ocenjevanja znanja poudarja tudi Čadež (2010, pov. po Vižintin, 2014). Isti avtor (prav tam) kot prednost izpostavlja še spremembe v komunikaciji oz. odnosu med učencem, učitelji in starši. Slednji naj bi ob takem načinu dela poznali tudi pot do cilja in ne le rezultate, kar od njih zahteva prevzemanje svojega dela odgovornosti in komunikacijo z učiteljem pri načrtovanju dela v okviru svojih kompetenc. Formativno spremljanje od marsikaterega učitelja zahteva z vsebinskega vidika drugačno sodelovanje s starši. Starši v okviru svojih kompetenc lahko sodelujejo pri načrtovanju dela, saj svoje otroke poznajo še z drugega zornega kota. Kljub prednostim, ki jih prinaša omenjena nova dimenzija sodelovanja s starši, ugotavljam, da moramo učitelji v tem sodelovalnem odnosu posebno pozornost namenjati ohranjanju meje med starševsko in našo kompetenco. Strinjam pa se, da morajo biti starši seznanjeni s procesom učenja, saj bodo le tako lahko prevzeli vlogo nadzora in spodbujanja v domačem okolju.

Kot prednost formativnega spremljanja se izpostavlja tudi učenčevo prevzemanje dela odgovornosti za doseganje ciljev. Učenci aktivno sodelujejo pri postavljanju lastnih ciljev in načrtovanju dejavnosti. Po tem, ko učenci razumejo namene učenja in kriterije za uspeh, si lahko ob učiteljevem vodenju zastavijo dosegljive cilje in načrtujejo dejavnosti za njihovo doseganje. Pri tem bodo uspešni, če bodo poznali svoja močna in šibka področja funkcioniranja ter sposobnosti. Za to potrebujejo sprotne kakovostne povratne informacije, ki jih vodijo pri kritičnem vrednotenju dosežkov, načrtovanju nadaljnjega dela, jih spodbujajo in pohvalijo, ko dosežejo zastavljene cilje. Doživljanje uspeha ob doseganju zastavljenih ciljev in pohvala učinkovito kot elementa notranje in zunanje motivacije motivirata učence za nadaljnje delo, kar je še ena prednost formativnega spremljanja.

Nedeljko (2010) vrednost formativnega spremljanja vidi še v pomoči učitelju pri reševanju vzgojnih težav posameznikov. Podobno opažam tudi sama, saj enosmerno komunikacijo med učiteljem in učenem zamenjuje dvosmerna. Ker večino interakcije med učiteljem in učencem poteka v individualnem kontaktu, se med njima povečuje stopnja zaupanja, kar je ključnega pomena pri reševanju vzgojnih težav.

Načrtovanje ter samovrednotenje in samoregulacija v procesu FS

Wiliam (2013, str. 123) navaja naslednjih pet ključnih strategij formativnega spremljanja:

1. razjasnitev soudeleženosti pri določanju in razumevanju namenov učenja in kriterijev za uspeh;
2. priprava takšnih dejavnosti v razredu, s katerimi je mogoče pridobiti dokaze o učenju;
3. zagotavljanje povratnih informacij, ki učence premikajo naprej;
4. aktiviranje učencev, da postanejo drug drugemu vir poučevanja;
5. aktiviranje učencev za samoobvladovanje njihovega učenja.

Čeprav so pozitivni učinki formativnega spremljanja vidni šele po doslednem izvajanju vseh petih korakov skozi daljše časovno obdobje, se v nadaljevanju prispevka osredotočim le na prvi in peti korak. Pri uvajanju formativnega spremljanja v lastno poučevalno prakso sem najprej največ pozornosti namenila dejavnostim, s katerimi sem želela doseči, da bodo učenci razumeli namene učenja in kriterije uspešnosti, si zastavili dosegljive cilje ter po končanih dejavnostih, obravnavi določenega vsebinskega sklopa čim bolj realno ovrednotili lastne dosežke in načine učenja.

Osnova vsebinskega in metodičnega načrtovanja VIZ procesa obravnave posameznega vsebinskega sklopa je preverjanje predznanja učencev. To diagnostično preverjanje se izvede z namenom ugotavljanja učenčevih predznanj, ki jih morajo imeti, da lahko na njih gradijo nova znanja in z namenom ugotavljanja količine novega znanja, kar določa hitrost in globino obravnave novih vsebin. Pri preverjanju predznanja moramo preveriti tako količino podatkov, pojmov, definicij …, ki jih ima učenec že v spominu, kot tudi globino razumevanja in odnose med njimi. Izvedemo ga lahko na različne načine, kot so npr. prvi korak bralno-učne strategije VŽN, delovni listi, nedokončane povedi. Še posebej učinkovito je preverjanje predznanja z nalogami, ki izhajajo iz učenčevega vsakdanjega življenja, saj le-te učence same po sebi dodatno motivirajo za delo in tako dobimo realno sliko o njihovem predznanju. Marentič Požarnik (2000) poudarja še pomen omogočanja in spodbujanja učnega transfera, ki ga ima za posledico preverjanje predznanja.

Po preverjanju predznanja v procesu formativnega spremljanja sledi skupno načrtovanje ciljev in kriterijev uspešnosti. Strokovnjaki predmetne skupine za matematiko ZRSŠ za fazo predstavitve in oblikovanja učnih ciljev pravijo, da mora učitelj zagotoviti, da bodo učenci vedeli, kaj morajo znati, razumeti in narediti.

Predlagajo, da naj to stori tako, da:

- jih seznani s splošnimi in bolj specifičnimi učnimi cilji;
- zapiše cilje jasno in jedrnato, v učencem razumljivem jeziku;
- učne cilje zapiše v prvi osebi ednine;
- razdeli učno vsebino na posamezne korake (etapne cilje);
- učence seznani z učnimi cilji na začetku učnega sklopa;
- učne cilje objavi vidno učencem;
- si morajo učenci učne cilje zapisati v zvezek, na delovni list;
- naredi povezave med učnimi cilji ter učnimi dejavnostmi vidne;
- omogoči učencem dovolj časa in priložnosti, da razmišljajo in se pogovarjajo o učnih ciljih ter jih morebiti ustrezno dopolnijo;
- pričakuje od učencev, da bodo svoj napredek spremljali v povezavi z učnimi cilji.

Ne samo vključenost učencev v oblikovanje kriterijev uspešnosti, ampak tudi njihova vključenost v postavljanje ciljev povečuje njihovo motivacijo za delo in stopnjo prevzemanja odgovornosti. Ker so cilji predpisani z učnim načrtom, moramo biti pri zagotavljanju teh priložnosti učitelji precej iznajdljivi. Pripraviti moramo takšne dejavnosti, s katerimi vodimo učence pri postavljanju ciljev, ki so čim bolj identični ciljem v učnem načrtu. Sama pri tem izhajam iz učenčevih interesov in njihovih močnih področij, na katere vsebinsko navežem motivacijske naloge, ob reševanju katerih si učenci postavljajo cilje. Tako zastavljene učenčeve cilje nato dopolnim s cilji iz učnega načrta in dejavnostmi za preverjanje njihovega razumevanja.

Za uspešno sodelovanje učencev pri določanju kriterijev uspešnosti morajo učenci dobro razumeti cilje in imeti razvite spretnosti realnega samovrednotenja in samoocenjevanja. Te spretnosti učenci postopno razvijajo predvsem ob povratnih informacijah o njihovem funkcioniranju in dosežkih. To je še en dokaz več, da lahko pozitivne učinke formativnega spremljanja pričakujemo šele po doslednem izvajanju vseh korakov skozi daljše časovno obdobje.

V procesu formativnega spremljanja vse od tretjega koraka dalje, predvsem pa v zadnjem koraku, učitelji učence spodbujamo k refleksiji. Spodbujamo njihovo razmišljanje o tem, kaj in kako delajo ter kako so se ob tem počutili. V zaključni fazi spodbujamo primerjavo med tem, kaj so želeli narediti in doseči glede na zastavljene kriterije, in tem, kaj so naredili in dosegli ter kako ocenjujejo svoje dosežke. Na tak način spoznavajo razliko med procesom in dosežkom, svoja močna in šibka področja ter skupaj z učiteljem načrtujejo izboljšave nadaljnjega dela. Samoocenjevanje daje učencem občutek večje pomembnosti v učnem procesu, kar povečuje njihovo odgovornost, samostojnost, spodbuja višje miselne procese in jih usposablja za vseživljenjsko učenje z nenehnim samonadzorom. Nekateri avtorji kot največji učinek, ki ga ima samoocenjevanje, navajajo izboljšanje samopodobe, ki se kaže predvsem v učenčevih zmožnostih izražanja o področjih primanjkljajev, ne da bi se bali neuspeha. V fazi samovrednotenja in samoocenjevanja moramo učitelji posebno pozornost nameniti tudi učenčevemu besednjaku. Pogosto je ta preskromen in zato moramo učence opremiti z besedami, ki jim bodo omogočile izražanje razmišljanj in kakovostnih opisovanj občutij, pristopov, procesov ter rezultatov.

Primer FS pri vsebinskem sklopu krog in krožnica v 8. razredu

Kot sem že omenila, sem se načrtnega uvajanja formativnega spremljanja pri svojem poučevanju lotila s prvim in zadnji korakom. Morda se sliši nenavadno, da sem za prvim korakom izbrala zadnjega, a imam kot pedagoginja s samovrednotenjem in samoocenjevanjem učencev precej izkušenj. Kmalu sem spoznala, da učenci za razvoj spretnosti realnega samoocenjevanja potrebujejo čas in gledano z vidika strategij formativnega spremljanja, kakovostne sprotne povratne informacije o njihovem delu in dosežkih.

Najprej sem iz učnega načrta izpisala cilje o krogu in krožnici (priloga 1). To je bilo moje izhodišče za vsebinsko načrtovanje preverjanja predznanja učencev. Izpis učitelju pregledno prikaže, katera znanja o krogu in krožnici naj bi učenci v nižjih razredih že usvojili, in ga vodi pri vsebinskem načrtovanju.

S pomočjo izpisanih ciljev sem pripravila kratko preverjanje predznanja, s katerim sem želela ugotoviti, kako dobro učenci poznajo pojma krog in krožnica, kar naj bi spoznali že v nižjih razredih, ter ali znajo izračunati obseg in ploščino kroga. Za preverjanje sem uporabila strategijo samostojnega reševanja nalog na delovnem listu (str. 34).

1. Vzgojno-izobraževalno obdobje

- izdelajo modele teles in likov ter jih opišejo
- rišejo prostoročno črte in like,
- uporabljajo geometrijsko orodje (šablono) pri risanju ravnih črt in likov
- prepoznajo, opišejo in poimenujejo geometrijska telesa in geometrijske like

2. Vzgojno-izobraževalno obdobje

- rišejo krožnice in kroge z geometrijskim orodjem (šestilom)
- v različnih situacijah prepoznajo pojme: polmer in premer krožnice/kroga, sekanta
- mimobežnica, tetiva, tangenta
- uporabljajo geometrijsko orodje (šestilo) pri risanju krožnice in kroga z danim
- polmerom ter premerom
- opredelijo obseg in ploščino lika
- razlikujejo med obsegom in ploščino lika
- poznajo in narišejo krožni izsek, krožni lok, središčni kot
- narišejo tetivo z dano dolžino ter razlikujejo med tetivo in sekanto
- narišejo v dani razdalji od središča kroga premico in jo poimenujejo (sekanta,
- tangenta, mimobežnica)
- narišejo tangento v dani točki krožnice

3. Vzgojno-izobraževalno obdobje

- trikotniku očrtajo in včrtajo krog
- razumejo pomen števila π
- izračunajo obseg in ploščino kroga z uporabo obrazcev
- izračunajo dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka z uporabo obrazcev
- razumejo in uporabljajo dolžino krožnega loka kot del dolžine krožnice ter ploščino
- krožnega izseka kot del ploščine kroga
- rešijo besedilne naloge v povezavi s krogom (z računalom in brez njega)

Priloga 1: Izpis ciljev o krogu in krožnici

Matematika v šoli, št. 1., letnik 23, 2017

Kaj je **krog**?

(Zapiši definicijo ali opiši z besedami, s sliko, primerom …)

Kaj je **krožnica**?

(Zapiši definicijo ali opiši z besedami, s sliko, primerom …)

V čem sta si krog in krožnica **podobna**?

V čem se krog in krožnica **razlikujeta**?

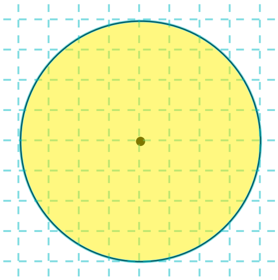
Kako izračunamo **obseg** likov?

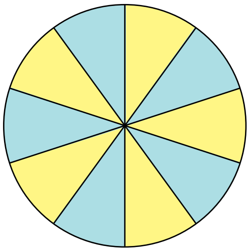
Kako bi izmeril obseg kroga?

Od česa je odvisen obseg kroga?

* Ali morda poznaš obrazec, po katerem izračunamo obseg kroga?

Z besedami opiši, kako bi določil **ploščino** krogov na sliki?

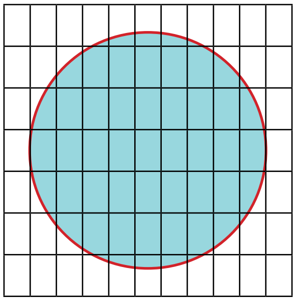




*Ali morda poznaš obrazec, po katerem izračunamo ploščino kroga?

1. V mreži sta narisana krog in krožnica. Mreža predstavlja ploščice bazenskega dna.
   a) Koliko ploščic bo moral keramičar rezati?

   b) Iz koliko ploščic bo morala mama počistiti barvo za Juretom, ker se je igral in na dno bazena, ko v njem ni bilo vode, narisal krožnico?



2. Na okrogli gredi premera 30 m posejemo trato. Koliko semena potrebujemo, če za kvadratni meter površine povprečno potrebujemo 5 dag semena?

3. Jureta zanima, kolikokrat se njegovo sprednje kolo na kolesu zavrti na poti do njegove babice, ki je od doma oddaljena 3,2 km? Premer prednjega kolesa meri 55 cm.

KAJ BI SE O KROGU IN KROŽNICI ŠE ŽELEL NAUČITI?

KAJ ME ZANIMA?

Matematika v šoli, št. 1., letnik 23, 2017

Analiza preverjanja predznanja, ki me je vodila pri načrtovanju obsega in globine vsebin, je pokazala, da učenci ločijo krog in krožnico na konkretnih primerih, večina od njih pa ima težave pri opisovanju pojma krog in krožnica v matematičnem jeziku. Prav tako sem ugotovila, da naloge učencev niso dovolj motivirale za reševanje, saj so bili pri delu premalo vztrajni. Naloge so bile zastavljene strogo matematično in niso vključevale reševanja problemov iz njihovega vsakdanjega življenja. Omenjeno pomanjkljivost sem odpravila že pri naslednji dejavnosti, skupno načrtovanje ciljev, za kar sem pripravila nekaj motivacijskih nalog (str. 35).

Želja rešiti probleme iz vsakdanjega življenja je učence vodila do spoznanja, da potrebujejo nova znanja. Razmišljanje o postopkih reševanja teh nalog pa jih je vodilo pri postavljanju konkretnih ciljev, ki so jih zapisovali v pripravljeno tabelo. Sledila je primerjava ciljev s cilji, zapisanimi v učnem načrtu, in njihovo dopolnjevanje. Cilje iz učnega načrta sem projicirala na tablo in z vprašanji preverjala njihovo razumevanje. Vprašanja so bila oblikovana tako, da so od učencev zahtevala razlago oz. uporabo na konkretnih primerih. Iz učnega načrta smo dopisali samo en cilj, učenci razumejo pomen števila π. Ker učenci prvič spoznajo število π šele pri obravnavi obsega in ploščine kroga, nisem pričakovala, da bi si zastavljali omenjeni cilj. Ugotavljam, da bi bilo smiselno ta cilj dodati šele po tem, ko bi spoznali število π, torej najhitreje po prvi uri obravnave snovi o obsegu in ploščini kroga.

V predstavljenem primeru (priloga 2) je učenka s sivo barvo zastavljene individualne cilje in kriterije po frontalnem pogovoru dopolnila s cilji in kriteriji, ki jih je zapisala z rdečo barvo.

Bistveno več časa kot za postavljanje ciljev je bilo potrebnega za postavljanje kriterijev uspešnosti. Prvo splošno pojasnilo v tabeli pripravljene tristopenjske lestvice uspešnosti nekaterim učencem ni zadostovalo. V drugo sem pojasnjevanje dopolnila s konkretnimi tipi čim bolj življenjskih nalog. Ocenjujem, da je bilo več časa potrebnega zaradi pomanjkanja izkušenj učencev s takšnim načinom dela in delno s pomanjkanjem povratnih informacij, na podlagi katerih razvijajo spretnosti samoocenjevanja, ki je neločlji-

Kaj se želim naučiti? CILJI	Kako dobro se to lahko naučim?			Kako dobro sem se naučil?
	zadovoljivo Z	dobro D	zelo dobro ZD	
LASTNOSTI KROGA DEFINICIJA KROGA		OPIŠEM S POMOČJO SLIKE OPIŠEM S SVOJIMI BESEDAMI	NATANČNA DEFINICIJA IN RAZLAGA	
LASTNOSTI KROŽNICE DEFINICIJA KROŽNICE		OPIŠEM S POMOČJO SLIKE OPIŠEM S SVOJIMI BESEDAMI		
KOKO IZRAČUNAM OBSEG KROGA?		SE NAUČIM OBRAZEC, IZPIŠEM PODATKE, IZRAČUNAM	SE NAUČIM OBRAZEC IN IZRAČUNAM BREZ RAČUNALA + POIŠČEM OZ. PRERAČUNAM PODATKE	
KAKO IZRAČUNAM PLOŠČINO KROGA?				
REŠITI BESEDILNE NALOGE Z OBSEGOM IN PLOŠČINO KROGA		SREDNJE TEŽKE NALOGE	TEŽJE NALOGE S POMOŽNIMI RAČUNI	
POMEN ŠTEVILA PI	OB OBRAZCU OPIŠEM S SVOJIMI BESEDAMI	OPIŠEM S SVOJIMI BESEDAMI	OPIŠEM V MATEMATIČNEM JEZIKU	

Priloga 2: Primer izpolnjene tabele načrtovanja ciljev in kriterijev

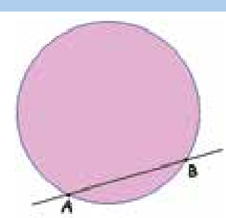
1. Kaj sem se naučil? Napiši vsaj tri trditve, s katerimi boš opisal, katere atematične snovi oz. postopke si se naučil.

2. Kje sem najbolj napredoval?

3. Kaj mi še ne gre tako dobro in zakaj?

Kaj?	Razlog oz. zakaj?

4. Kaj še lahko izboljšam?

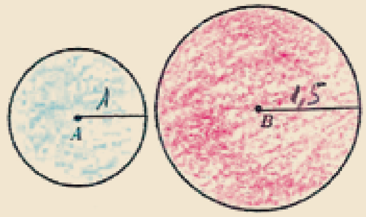


5. Kako bom to izboljšal?

6. Pri kateri snovi oz. nalogah sem najbolj užival?

Priloga 3: Samoevalvacijski vprašalnik

6. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina rdečega kroga večja od ploščine modrega?



Ocena: 2,86

Račun:

Pravilno uporabljaš obrazec za računanje ploščine kroga.

$p = \pi \cdot r^2$

$p = 3,14 \cdot 1^2$

$p = 3,14\ cm^2$

$p = \pi \cdot r^2$

$p = 3,14 \cdot 1,5^2$

$p = 7,0850\ cm^2$

$7,0850 - 3,14 = 3,9450\ cm^2$

$1,5 \cdot 1,5$: 15, 75, 2,25

$2,25 \cdot 3,14$: 675, 225, 900, 7,0850

Za 3,9450 cm^2

Pri zapisu obrazcev in enot si premalo natančen.

7. Najmanj koliko metrskih ograjnih elementov moramo kupiti za ograditev cvetlične grede premera 3 *m*?

$O = \pi \cdot d$

$3,14 \cdot 3 = 9,42\ m$

Potrebuje 9,42 m ograje.

Pravilno uporabljaš obrazec za računanje obsega kroga.

Bodi natančnejši pri branju besedila!

8. Na okrogli gredi premera 20 *m* posejemo trato. Koliko kilogramov semena potrebujemo, če za kvadratni meter površine povprečno potrebujemo 5 *dag* semena?

$\pi \cdot d$

$3,14 \cdot 20$: 628, 000, 6280

$62,80 : 5 = 12,56$ (28, 30)

$1\ m^2 = 5\ dag$

$62,80 \cdot 5 = 314,00$

Pri reševanju besedilnih nalog si pomagaj s skico.

9*. Špela je plavala ob robu okroglega bazena in v 4 krogih preplavala skupno razdaljo 125,6 *m*. Koliko metrov je preplaval Rok, če je preplaval $\frac{3}{4}$ najdaljše ravne možne poti bazena?

Dobro si usvojil postopke računanja obsega in ploščine kroga.

VADI REŠEVANJE BESEDILNIH NALOG S POMOČJO SKIC!

Priloga 4: Primer rešenih nalog z delovnega lista za preverjanje znanja s povratno informacijo vo povezano s postavljanjem lastnih ciljev in kriterijev uspešnosti.

Sledila je triurna obravnava snovi o obsegu in ploščini kroga. Prvo uro so učenci v skupinah s pomočjo učbenika in delovnega zvezka ponovili osnovne pojme o krogu in krožnici, raziskali povezavo med premerom kroga in obsegom ter rešili nekaj nalog o obsegu kroga. Glede na sposobnosti učencev sem oblikovala heterogene skupine. Drugo uro je delo potekalo podobno, le da so učenci spoznali postopek računanja ploščine kroga. Tretja ura je bila namenjena utrjevanju. Učenci so naloge različnih zahtevnosti reševali v dvojicah. Obravnava se je zaključila s samostojnim reševanjem nalog na delovnem listu z namenom preverjanja znanja. Po končanem reševanju so ovrednotili svoje znanje tako, da so izpolnili zadnji stolpec v tabeli Načrtovanje (Priloga 2). Sledilo je vodeno ustno reševanje nalog na delovnem listu v frontalni obliki. Omenjena dejavnost ni bila namenjena popravljanju nalog na delovnem listu, ampak pridobivanju takojšnje povratne informacije. Še isto uro so učenci izpolnili samoevalvacijski vprašalnik (Priloga 3).

Tudi pri pisanju refleksije je bilo opaziti pomanjkanje vztrajnosti učencev. Ker so učenci v fazi pridobivanja znanja prejemali sprotne povratne informacije o načinu dela, napredku in morebitnih težavah ter skupaj z učiteljem iskali rešitve za njihovo odpravo, pri izpolnjevanju vprašalnika z vsebinskega vidika niso imeli večjih težav. Delovne liste, namenjene preverjanju znanja, sem pobrala, vrednotila naloge in ob njih zapisala povratne informacije (priloga 4). Tako so imeli učenci naslednjo uro priložnost primerjati lastno vrednotenje z vrednotenjem učitelja. Učenci so te povratne informacije z zanimanjem brali, o njih razmišljali ter razpravljali s sošolci. Iz analize rešitev nalog na delovnih listih sem med drugim ugotovila, da je večina učencev v matematičnem jeziku pravilno opisala pojma krog in krožnica.

Zaključek

Sistematično uvajanje formativnega spremljanja napredka in znanja učencev od učiteljev zahteva vztrajnost in tudi pogum. Ker gre za precej drugačen način dela, na katerega se morajo navaditi tako učitelji kot učenci, so rezultati vidni šele po daljšem časovnem obdobju. Učenci se morajo navaditi samostojnega učenja in raziskovanja, učitelj vloge usmerjevalca, ki mu več ne zagotavlja nadzora nad vsemi učenci, ampak se mora sprijazniti z dejstvom, da ne more imeti pod kontrolo vseh aktivnosti in učencev. Za izvajanje formativnega spremljanja učiteljem ni treba v celoti spremeniti dosedanjega načina dela. Takšno razmišljanje lahko vodi v nezadovoljstvo učiteljev in jih demotivira za vnašanje sprememb. Pri svojem delu naj učitelji izhajajo iz individualnih potreb učencev in te naj jih vodijo pri izvajanju vzgojno-izobraževalnega procesa. Tisti, ki bodo poučevanje prilagodili potrebam učencev, bodo kmalu spoznali, da so v svoje poučevanje vnesli strategije formativnega spremljanja. ■

Viri

Berry, B., Barnett, J., Kamm, C., Vilson, J. (2010). Teaching 2030: What We Must Do for Our Students and Our Public Schools. Pridobljeno 11. 10. 2016, s http:/www.teaching2030.org.

Holcar Brunauer, A., (2014). Formativno spremljanje znanja. Pridobljeno 9. 10. 2016, iz http://www.zrss.si/pdf/250414102957_4__gradivo_-_ada_holcar_brunauer.pdf

Marentič – Požarnik, B. (2000a). Psihologija učenja in pouka. Ljubljana: DZS.

Nedeljko, N. (2010). Od klasičnega preverjanja do formativnega spremljanja z akcijskim raziskovanjem v izobraževanju. V N. Komljanc (ur.), Zbornik 3. mednarodnega posveta v Celju (str. 143–149). Ljubljana: Zavoda Republike Slovenije za šolstvo.

Pravilnik o preverjanju in ocenjevanju znanja v osnovni šoli. Pridobljeno 11. 10. 2016, s https://www.uradni-list.si/1/content?id=113609.

Predmetna skupina za matematiko. (2015). Prvo študijsko srečanje za matematiko, šolsko leto 2015/16. Pridobljeno 10. 10. 2016, s https://skupnost.sio.si/pluginfile.php/508372/mod_

page/content/11/O%20elementih%20formativnega%20spremljanja%20na%20studijskih%20sre%C4%8Danjih.pdf

Škerjanec, P. (2011). Tradicionalni – sodobni modeli učenja in poučevanja družboslovja. Diplomsko delo, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za družbene vede.

Vižintin, S. (2014). Formativno spremljanje pri pouku matematike. Diplomsko delo, Koper: Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta.

William, D. (2013). Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih. V S. Sentočnik (ur.), O naravi učenja. Ljubljana: ZRSŠ.

Konstruktivistični pristop pri pouku matematike

Maja Bencek
Osnovna šola Gorišnica

Povzetek

Na področju vzgoje in izobraževanja se vse bolj uveljavlja konstruktivistični pristop, ki poudarja pomen lastne aktivnosti v procesu izgradnje znanja. Prispevek predstavlja uresničevanje tovrstnega pristopa k učenju pri pouku matematike v osnovni šoli. Namen raziskave je bil ugotoviti možnosti ter pogostost izvajanja omenjenega učnega pristopa z vidika uporabe posameznih učnih metod, didaktičnih sredstev in ovir, ki kakorkoli otežujejo takšen način dela. Zanimalo me je tudi stališče učiteljev do danega učnega pristopa. Raziskavo sem izvedla na slučajnostnem vzorcu učiteljev, ki v šolskem letu 2015/2016 poučujejo matematiko na razredni stopnji osnovne šole. Rezultati so pokazali, da so možnosti za izvajanje konstruktivističnega pristopa pri pouku matematike zagotovljene, kar dodatno potrjujejo tudi pozitivna stališča učiteljev do tega pristopa.

Ključne besede: konstruktivizem, konstruktivistični učni pristop, aktivno učenje, matematika

Constructivist Approach to Mathematics Lessons

Abstract

In the field of education, the constructivist approach is gaining ground; it emphasises the importance of one's own activity in the process of knowledge building. This paper presents the carrying out of such an approach to learning in Mathematics lessons in primary school. The purpose of the research was to determine the possibilities for and frequency of carrying out the above-mentioned teaching approach from the aspect of using individual teaching methods and didactic resources, and the barriers that hinder this work method in any way. I was also interested in the attitude of teachers towards this teaching approach. A survey was conducted on a random sample of teachers, who were teaching Mathematics at the primary level in the 2015/2016 school year. The results have shown that the possibilities for carrying out a constructivist approach in Mathematics lessons are provided, which has been additionally confirmed by the positive attitudes of teachers towards this approach.

Keywords: constructivism, constructivist teaching approach, active learning, Mathematics

Uvod

Zahteve kurikularne prenove težijo k pridobivanju trajnega, prožnega znanja, ki ga bo moč uporabiti v drugačnih in novih življenjskih situacijah. Učenci naj, s pomočjo dobre motivacije, skozi raziskovanje in samostojno odkrivanje oblikujejo pojme, ki temeljijo na ustvarjalnem mišljenju, kritični presoji in razvijanju njihovih spretnosti. Pouk naj bi izgubil svoj tradicionalni značaj in se usmeril v razvijanje miselnih struktur.

Tak proces naj bi krepil in oblikoval učenčevo samozavest, notranjo motivacijo in veselje do nadaljnjega, tudi samoiniciativnega učenja. Za pomembno spremembo načina dela učiteljev in poseganje v globoko ukoreninjen vzorec podajanja velike količine podatkov pa sta potrebna aktivno ozaveščanje in usmerjen napor. Preseči moramo prepričanje, da smo postorili že vse in da na tem področju ni več prostora za izboljšave.

Konstruktivizem predstavlja enega izmed raziskovalnih in miselnih modelov, ki ga v številnih mednarodnih okoljih že s pridom, čeprav ne brez težav, vpenjajo v šolski vsakdanjik. Svojo osnovo gradi na predpostavki, da znanja ne moremo preprosto »podati« drugim oziroma ga od drugih sprejemati, ampak da si ga mora vsakdo »skovati« z lastno miselno aktivnostjo ob izpopolnjevanju ali spreminjanju obstoječih idej o svetu, v procesu produktivne interakcije dialoga s soljudmi. (Marentič Požarnik, 2004, str. 7)

Čeprav lahko konstruktivizem uporabimo na več predmetnih področjih, se je pri nas uveljavil zlasti v pouku začetnega naravoslovja in matematike.

Učni proces se odvija na obstoječih idejah in predhodnih izkušnjah učencev ter, s primernimi nalogami in pravilno zastavljenimi vprašanji, pomaga prekonstruirati napačno pojmovanje in razumevanje. Učenci znanje izgrajujejo preko samostojnega reševanja kompleksnih problemov, smiselnega dialoga in uporabe znanja v življenjskih situacijah. Učitelj ustvarja sproščeno razredno vzdušje, tako da opogumlja otroke, da se svobodno izražajo, predstavljajo svoje ideje in o njih razpravljajo. Daje jim sprotno povratno informacijo in jih vključuje v oblikovanje kriterijev kakovostnega znanja.

Konstruktivistične teorije znanja

Na področju vzgoje in izobraževanja konstruktivizem govori o tem, da je znanje človekov konstrukt, ki se oblikuje skozi določeno dejavnost. Tako ne more biti samo odsev materialne stvarnosti, ampak dobi pečat vsakega posameznika ter časa in prostora, kjer se nahaja (Plut-Pregelj, 2004b).

Znanje je živa tvorba, ki se nenehno spreminja, nadgrajuje in vrednoti. Kljub skupni osnovi pa se pojavljajo pomembne razlike, ki se kažejo v odgovorih na vprašanja:
- Kako znanje nastaja?
- Ali je nastajanje znanja predvsem individualni ali socialni proces?
- Kako učenčeva izkušnja in dejavnost vplivata na učenje in znanje z razumevanjem?
- Kakšno vlogo imajo različne ravni človekovega bivanja pri nastajanju znanja?
- Kakšno vlogo ima znanje in komu služi?

Okoli različnih odgovorov na zgornja vprašanja so se oblikovali različni konstruktivizmi (kognitivni, radikalni, sociohistorični, socialni, socialnopragmatistični, emancipatorični itd.), ki imajo različne poglede na nastajanje znanja in seveda različne posledice. Prav vsi pa se ukvarjajo z vprašanjem, kako voditi učenca do znanja z razumevanjem, in pri tem poudarjajo pomen učenčeve dejavnosti (Kramar, 1999).

Kljub dejstvu, da se različne konstruktivistične smeri na določenih področjih razhajajo, pa obstajajo določene skupne značilnosti vsem konstruktivističnim paradigmam, ki se skozi učno prakso izražajo v naslednjih komponentah:
a) na učenca usmerjen pouk,
b) kompleksno izzivalno učno okolje in izvirne naloge,
c) socialna pogajanja in deljena odgovornost kot del učenja,
č) raznovrstna predstavitev učne vsebine,
d) razumevanje, da je znanje skonstruirano. (Woolfolk 2002.)

a) Na učenca usmerjen pouk
V nasprotju s tradicionalnim pristopom postavlja konstruktivistična smer v ospredje učenca in njegovo aktivno vlogo v vseh fazah vzgojno-izobraževalnega procesa. (Kruder, 1997)

b) Kompleksno, izzivalno učno okolje in izvirne naloge
Konstruktivistični pristop ne postavlja učencev pred poenostavljene probleme, temveč takšne, ki so kompleksni, slabo strukturirani, s kakršnimi se soočamo v vsakdanjem življenju. (Woolfolk, 2002)

c) Socialna pogajanja in deljena odgovornost
Konstruktivistično učenje postavlja v središče socialna pogajanja, interakcije med osebami vzgojno-izobraževalnega procesa in sodelovanje.

č) Raznovrstna predstavitev učne vsebine
Konstruktivistični pristop predvideva predstavitev učne vsebine učencem z več vidikov, pri čemer naj bi se uporabljali različni modeli, analogije, perspektive in metafore. (Prav tam)

d) Razumevanje procesa konstruiranja znanja
Konstruktivistični pristopi k učenju pripisujejo pomembno vlogo tudi znanju o lastnih miselnih procesih in načinu učenja *(metakogniciji)*. Ena njegovih jedrnih značilnosti je med drugim tudi diagnosticiranje lastnega učenja in učnih rezultatov ter ponovni razmislek o procesu učenja. (Šteh, 2003)

Konstruktivizem v matematiki

Pri otrocih se že zelo zgodaj pojavi potreba po učenju matematike, saj skozi njo komunicirajo in jim predstavlja pomembno sredstvo v vsakdanjem življenju. Dolgo časa se je matematika izražala zgolj skozi računstvo, danes pa pomeni veliko več in presega meje štirih računskih operacij (Hodnik Čadež, 2004a).

Konstruktivizem spodbuja imaginacijo in ustvarjalnost ter sistematičnost pri reševanju problemov, odkrivanje novih relacij ter krepi učenčevo samozavest. Učenci pridobijo boljšo prostorsko predstavljivost, sposobnost abstrakcije in posploševanja, so usmerjeni k jasnosti, ekonomičnosti in racionalnosti reševanja. Postajajo vztrajnejši in so sposobni reorganizacije mišljenja, kadar je to potrebno (Prav tam).

Pri obravnavi matematičnih pojmov v glavnem lahko izbiramo med dvema alternativnima pristopoma: behaviorističnim in kognitivnim (Hodnik Čadež, 2004b).

Behavioristični vidik lahko razložimo kot programirano učenje, ki poteka počasi in zanesljivo skozi verigo povezav, v obliki vprašanje – odgovor.

Kognitivni pristop na drugi strani pa temelji na tem, da učenca postavimo v okolje, ki spodbuja učenje, v katerem učenec lahko odkriva in v katerem lahko s svojim prizadevanjem zgradi razumevanje matematičnega pojma. Kognitivni pristop se od behaviorističnega razlikuje tudi v tem, da bolj upošteva učenčevo predznanje določenega pojma (Prav tam).

Učenje z razumevanjem ali polnopomensko učenje pomeni sposobnost povezav med obstoječim znanjem in novimi informacijami. Če so le-te sorodne s predhodno miselno shemo, je njihova obdelava in nadgradnja lažja ter redkeje blokira reševanje problemov (Žakelj, 2004b).

Problemske situacije ustvarjamo z aktivnimi oblikami učenja. Aktivno učenje temelji na logičnem sklepanju in empiričnem preverjanju in ga opredeljujeta dve ravni: raven dialoga in raven izkušenj (Žakelj, 2004a).

Raven izkušenj vključuje:
- opazovanje, ki se nanaša na neko dejavnost, povezano z obravnavano temo (npr. opazovanje geometrijskega modela, slike zaporedja ipd.);
- aktivnost, ki vključuje katerokoli dejavnost, pri kateri učenec oz. dijak samostojno opravi ali naredi neko nalogo.

Raven dialoga vključuje:
- dialog s samim s seboj: učenec razloži, napiše, kaj misli o temi ali problemu;
- dialog z drugimi: učenec o temi ali problemu razpravlja v skupini, vsak prispeva svoj delež.

Učitelj spodbuja razvoj aktivnega odnosa do učenja. Tako jih notranje motivira, doseže trajnejšo zapomnitev znanja in vzbudi zanimanje za matematiko. Preko aktivnosti učenci lažje dojamejo abstrakt, ki ga kasneje, zaradi dobrega razumevanja, primerno posplošijo in postavijo v vsakdanjo situacijo.

Zelo pomembno je, da učitelj že od samega začetka uporablja in ponuja večjo množico predstavitev, ki zajemajo različna čutila.

Lahko ostane samo na konkretnem nivoju, ali pa ga predstavi še grafično, s simbolom in ga na koncu posploši, uvaja vizualizacijo, predpostavljanje, domnevanje, odkrivanje, sintetiziranje, modeliranje in preverjanje.

Že zelo zgodaj pričnejo učenci z modeliranjem (liki in telesa), uporabljajo računalnik, link kocke in geo plošče, skratka množico pripomočkov, ki jim lajšajo razumevanje novih in zanje še zapletenih pojmov. Pri pouku izvajajo meritve tudi izven učilnice, eksperimentirajo, zbirajo podatke in samostojno rešujejo odprte probleme. Dobljene rezultate znajo predstaviti s pomočjo diagramov, tabel in slik, samostojno iščejo vire ter ocenjujejo in vrednotijo svoje delo. Učiteljeva vloga je pasivna. Učence nadzoruje, jih vodi, jim svetuje ter spodbuja ustvarjalnost in ustvarjalno mišljenje.

Situacije, ki so za učenca nove in niso vnaprej pričakovane, spodbujajo razvoj matematičnega razmišljanja: ustvarjalno, kritično, analitično in sistemsko mišljenje. Zaradi svoje raznolikosti in nepredvidljivosti omogočajo:
- izgrajevanje pojmovnih predstav,
- povezovanje in uporabo znanja,
- uvid v osmišljanje matematičnih vsebin,
- motivirajo zlasti nadarjene učence,
- razvijanje matematičnega in ustvarjalnega razmišljanja,
- nudijo priložnost matematiziranja, reflektiranja matematičnih znanj in modeliranja. (Žakelj, 2004a)

Če želimo, da bodo učenci znanje usvojili in ga razumeli, je potrebno nenehno preverjanje poznavanja in razumevanja vsebin, ki smo jih obravnavali. Zato pred vsakim učnim sklopom premišljeno načrtujemo preverjanje poznavanja, razumevanja in obvladovanja tistih vsebin, ki se pomembno navezujejo na novo temo. Učenec naj bi imel priložnost, da se s posameznimi pojmi srečuje večkrat, v različnih situacijah, saj mu to omogoča lažjo zapomnitev in dopolnjevanje njegovih predstav.

Da bi se učenci zares učili z razumevanjem, mora učitelj upoštevati tudi razlike med njimi, tako interesne kot intelektualne. Delo ustrezno diferencira in pripravi dodatne naloge za sposobnejše. Najprej ugotovi poglobljenost znanja, nato pa prepusti učencu lasten tempo. Seveda jih ob tem primerno spodbuja in motivira ter daje sprotne kakovostne povratne informacije.

Če naj bodo učenci aktivni pri konstrukciji znanja, morajo imeti dovolj časa. Le tako bodo lahko samostojno razmišljali, iskali različne poti, odkrivali, eksperimentirali, razvijali lastne pristope reševanja, diskutirali o rešitvah z drugimi (Žakelj, 2004b).

Uresničevanje konstruktivističnega pristopa pri pouku matematike na razredni stopnji

S pomočjo anketnega vprašalnika sem izvedla krajšo raziskavo med učitelji razrednega pouka v slovenskem prostoru.

Namen raziskave je bil ugotoviti:
- Poznavanje teorije in bistva konstruktivizma s strani učiteljev, ki poučujejo na razredni stopnji.
- Možnosti za izvajanje tega pristopa pri pouku matematike v osnovni šoli z vidika uporabe učnih metod, didaktičnih sredstev in ovir, ki otežujejo izvajanje takšnega načina poučevanja.
- Pogostost podajanja učne snovi na konstruktivistični način pri pouku matematike na razredni stopnji.
- Način izvajanja takšne oblike pouka.

Raziskavo sem izvedla na slučajnostnem vzorcu učiteljev, ki so v šolskem letu 2015/2016 poučevali razredni pouk na osnovni šoli.

Vanjo je bilo vključenih 40 učiteljev različnih šol po Sloveniji.

Raziskava je pokazala, da učitelji zavzemajo pozitivno stališče do konstruktivističnega pristopa. To se izraža v dobljenih podatkih, ki kažejo, da naj bi kar 80 % učiteljev poznalo teorijo in 51 % učiteljev uresničevalo načela tovrstnega učnega pristopa.

Učitelji menijo, da uporaba učnih pripomočkov omogoča učencem aktivno pridobivanje matematičnega znanja in da učenci uspešno konstruirajo nove pojme ob vodenem delu s konkretnim materialom. V praksi nekoliko manj uporabljajo samostojno raziskovanje s konkretnim materialom ter delo v dvojicah. Menijo, da učencem na tej razvojni stopnji priprava referatov ne omogoča aktivnega pridobivanja znanja.

Kot ovire pri izvajanju konstruktivističnega pristopa pri matematiki na razredni stopnji so učitelji izpostavili naravo predmeta, omejeno količino učnih pripomočkov (konkretnega materiala za vse učence), časovno stisko, slabo opremljenost šol, pomanjkanje literature s konkretnimi primeri za delo v praksi. Menijo tudi, da uporabe pristopa ne omejuje nedisciplina ali nemotiviranost učencev.

Več kot polovica (51 %) učiteljev trdi, da njihovi učenci pri pouku pogosto **razvijajo pojme z lastno aktivnostjo**, 42 % učiteljev le včasih prilagodi uro tako, da ne temelji na frontalnem podajanju učne snovi in eden izmed vprašanih zmeraj pripravi situacije tako, da učenci sami gradijo in oblikujejo svoje znanje.

Uresničevanje konstruktivističnega pristopa je nadalje razvidno tudi iz pogostosti uporabe posameznih **učnih sredstev**, ki nudijo take ali drugačne možnosti za aktivno učno delo učencev. Najpogosteje uporabljeni učni pripomočki so geometrijski modeli teles in likov, link kocke in številske karte, trakovi, paličice, krožci ter plastelin in glina.

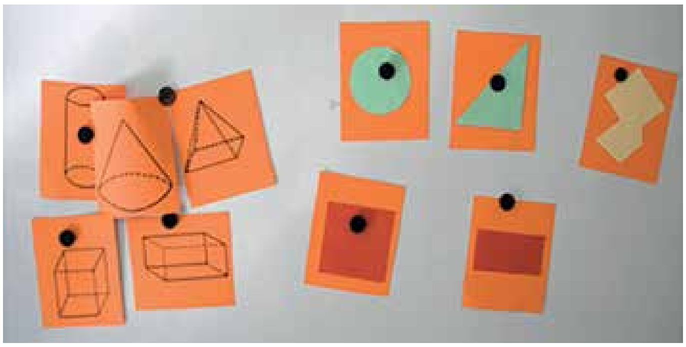
Rezultati raziskave kažejo, da se konstruktivistični pristop pri pouku matematike v osnovni šoli že uresničuje v določeni meri. Kljub temu pa bi se dalo še marsikaj postoriti, da bi bilo izvajanje na učenčevi aktivnosti temelječega pristopa k učenju lažje ter s tem pogostejše in kakovostnejše. K temu bi lahko v veliki meri pripomogli z odpravljanjem ovir, ki tako ali drugače otežujejo izvajanje konstruktivističnega pristopa. Za takšen pouk so učenci bolj motivirani, preko lastnega aktivnega dela pa se dokopljejo do kakovostnejšega in trajnejšega znanja. To posledično vodi v boljši učni uspeh učencev ter hkrati v večje zadovoljstvo tako otrok kot tudi njihovih staršev in učiteljev.

Konstruktivizem v praksi

V nadaljevanju prispevka bomo predstavili nekatere dejavnosti iz geometrije (v 3. in 4. razredu OŠ), ki so bile izpeljane v praksi in spodbujajo lastno aktivnost učencev, razvijajo ustvarjalnost, iščejo različne poti do rešitev in razumevanje matematičnih pojmov.

Dejavnost: RAZVRŠČANJE GEOMETRIJSKIH OBLIK

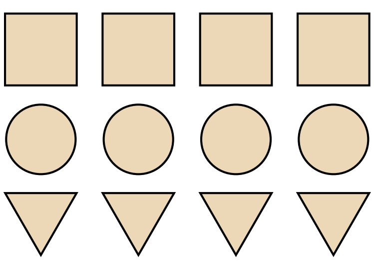
Učenci prejmejo škatlo s kartončki (modeli likov, črt in teles) in razvrstijo predmete po principu »Kaj spada skupaj?«. Ko nalogo opravijo, opišejo skupne lastnosti modelov in poimenujejo skupino elementov (liki, črte, telesa). Glejte sliko 1.



Slika1: Razvrščanje likov, črt in teles.

Učenci so brez težav razvrščali predmete in poimenovali nastale skupine.

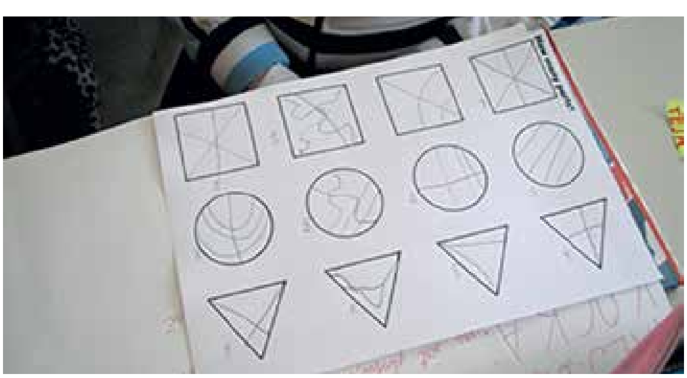
Dejavnost: KOLIKO JE DELOV



Cilj: Z ravnimi črtami »razdeliti« lik v treh potezah in šteti nastale dele.

Navodilo za delo: S tremi slamicami »razdeli« trikotnike, kvadrate in kroge. Koliko delov lahko nastane? Razišči, kdaj jih je največ in kdaj najmanj.

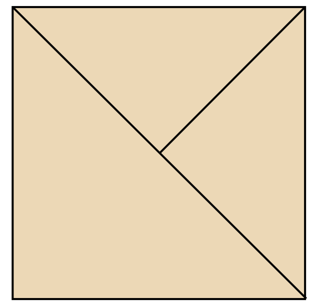
Namen dejavnosti je bil, da čim bolj ustvarjalno in logično poiščejo rešitev.



Slika 2: »Razdelitev« lika

Najprej so učenci like »razdelili« z določenim številom potez in šteli nastale dele, kar je ponazorjeno na sliki 2. Uporabljali so različne barve črt, si med seboj pomagali in primerjali ugotovljeno. V razredu je vladalo sproščeno vzdušje in otroci so pokazali ogromno mero interesa in ustvarjalnosti. Vsako nalogo smo preverili še frontalno na tabli. Brez zadržkov so posamezniki prihajali pred razred in ostalim sošolcem razložili svoj način »razdelitve« lika. Spodbujata se ustvarjalnost in logično mišljenje.

Dejavnost: TANGRAM

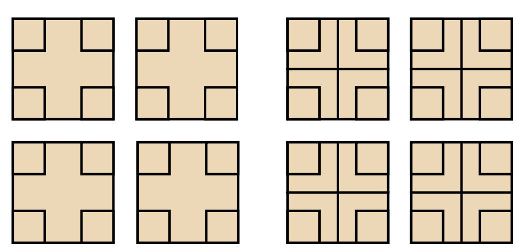


Cilj: Izdelati, prepoznati in poimenovati »oblike«, narejene s pomočjo tangrama.

Navodilo za delo: Razreži tangram na tri trikotnike, kot je prikazano na sliki. Ponovno sestavi velik kvadrat. Ugotovi, katere oblike je moč narediti iz dveh majhnih trikotnikov. Katere oblike je možno narediti iz vseh treh trikotnikov?

Učenci so razrezali kvadrat na tri trikotnike, jih ponovno sestavili v kvadrat in dodali svoje ideje za sestavljanje ter poimenovali novo nastali lik. Vsako novo »obliko« so poimenovali in na kratko opisali njene lastnosti. S tem niso imeli težav, kar pomeni, da je bila snov dobro utrjena.

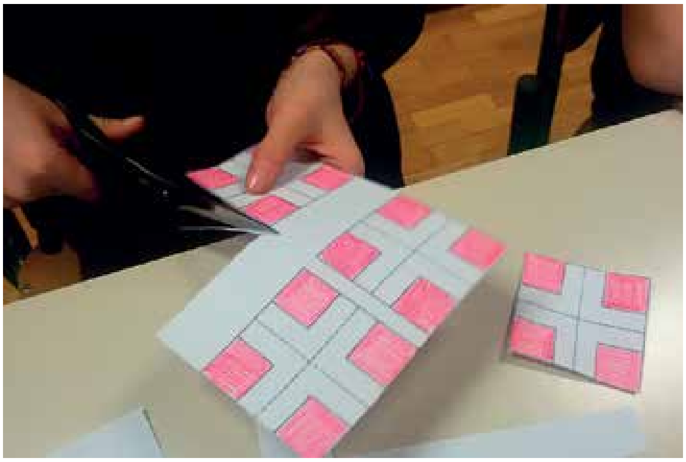
Dejavnost: KRIŽI IN KVADRATI



Cilji: Raziskati, kako lahko sestavimo kvadrate in kako so si četrtine kvadrata med seboj »sorodne«.

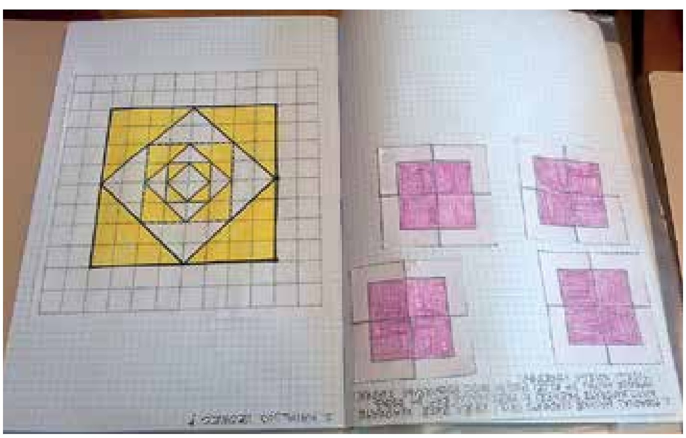
Navodilo za delo: Z eno barvo pobarvaj križ vsakega kvadrata. Izreži manjše kvadrate in jih prilepi na nov list tako, da dobiš večji kvadrat.

Izreži večje kvadrate in si jih oglej. Pobarvaj majhne kvadrate na vogalih lista. Nato kvadrate prereži po prekinjeni črti, da dobiš manjše. Skupaj jih zloži tako, da bodo pobarvani kvadrati tvorili novega v sredini.



Slika 3: Rezanje in ponovno sestavljanje kvadratov

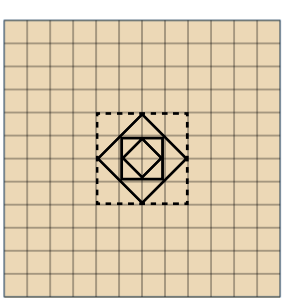
Učenci so najprej pobarvali manjše kvadrate, jih nato izrezali in z njimi oblikovali nove like, ki so jih tudi opisali. Urili so samostojno in hkrati skupinsko delo, saj so svoje zamisli delili s sošolci. Učna metoda, ki je prevladovala, je metoda praktičnih del, podprta z razgovorom, demonstracijo in razlago, ki je potrebna za reševanje nalog. Učne oblike so bile frontalna, individualna in skupinska.



Slika 4: Novonastali kvadrati

Učenci so zelo hitro oblikovali nove like, »orientirali« so se s pomočjo barve in obračali kvadratke tako dolgo, dokler niso sestavili želenega lika-kvadrata (slika 4 desno). Ugotovili so, da iz manjših kvadratkov lahko sestavijo večjega, saj se razmerje med dolžinami stranic ne poruši.

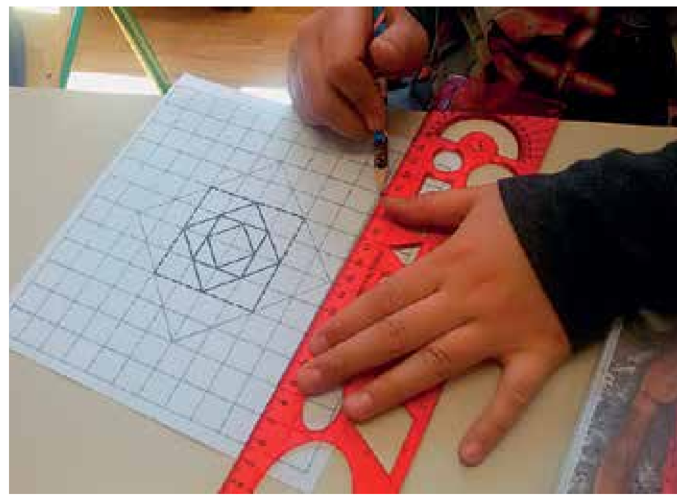
Dejavnost: KVADRATI IZ KVADRATOV



Cilji: Nadaljevanje ravninskih vzorcev.

Navodilo za delo: Nadaljuj vzorec in ga razširjaj. Če izrežemo dovolj kvadratov, lahko z njimi oblikujemo čisto nove, inovativne vzorce. Kvadrate izdelujemo iz kolaž papirja, tekstila, voščilnic ...

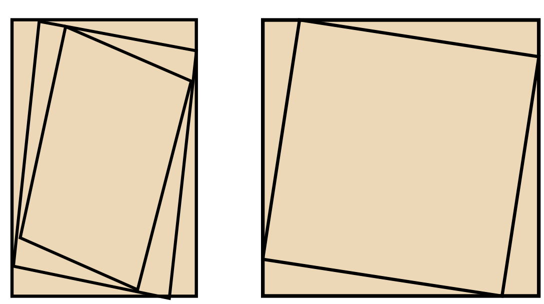
Učenci so na učnem listu reševali nalogo, ki se imenuje »Kvadrati iz kvadratov«. Nadaljevali so vzorec in ga razširjali ter pri tem pazili na skladne dolžine in ohranjali velikost kotov. Razvijali so logično mišljenje in natančnost. Za večjo preglednost so uporabljali različne barve (glejte sliko 4 levo in sliko 5) in poročali o svojih ugotovitvah.



Slika 5: Nadaljevanje vzorca

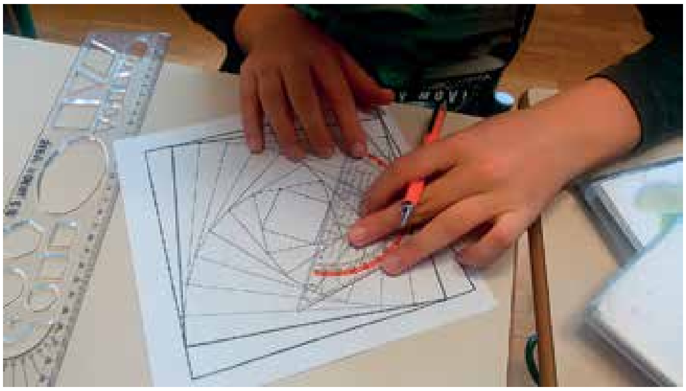
Naloga je bila za nekatere učence precej zahtevna. Nekateri učenci so liste vrteli in si pomagali z različnimi barvami ob dodajanju novih kvadratov. Ugotovili so, da se stranice očrtanega kvadrata sorazmerno povečajo in da je treba ohranjati prave kote.

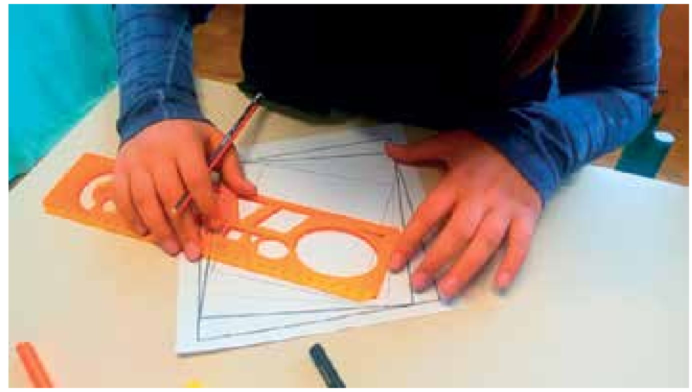
Dejavnost: ŠTIRIKOTNIKI



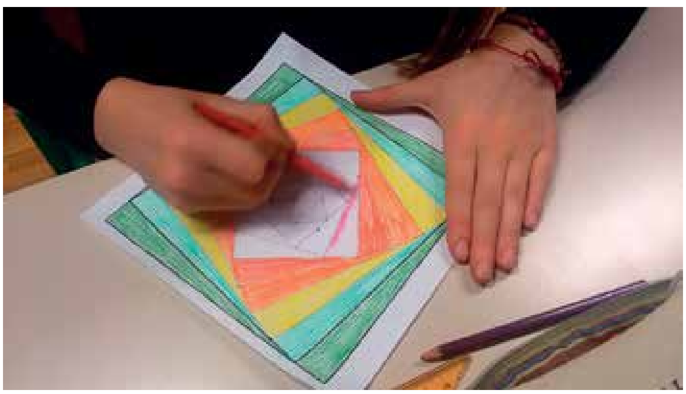
Cilji: Oblikovati vzorec iz različnih štirikotnikov.

Navodilo za delo: Dan je štirikotnik (pravokotnik). V smeri urnega kazalca od vsakega oglišča štirikotnika odmeri 2 cm in na stranicah določi točke. Označene točke poveži tako, da bodo oglišča novega štirikotnika. Nadaljuj postopek. Enak postopek ponovi pri naslednji vaji s kvadratom. Razišči, kaj se dogaja s koti štirikotnika.





Sliki 6 in 7: »Vrtenje« kvadrata



Sliki 8 in 9: Zapolnitev vzorca z barvami

Učenci so nadaljevali vzorec s povezovanjem označenih točk. V smeri urnega kazalca so določali nove točke, potrebne za izris novega lika. Najprej so »vrteli« kvadrate, nato pravokotnike. Dobljeni vzorec so po želji zapolnili z barvami.

Naloge smo skupaj preverjali in individualno sem odpravljala težave z vsakim posameznikom. Prevladovala je metoda praktičnih del, saj dodatna razlaga skoraj ni bila potrebna. (Webber H., Berryl J, 1992)

Zaključek

Menim, da je učni načrt matematike v OŠ v osnovi zasnovan konstruktivistično. V ospredje je postavljeno učenje, ki naj bi temeljilo na učenčevem lastnem izkustvu in na njegovi aktivnosti, izraža pa se v učnih ciljih, vsebinah, dejavnostih ter učnih pripomočkih, ki takšno učenje omogočajo.

S splošnimi cilji pouka matematike je opredeljen namen poučevanja matematike. Cilji veljajo za vsakega učenca v okviru njegovih zmožnosti, glede na njegovo starost. Učenci naj spoznajo, da z matematičnim znanjem lahko mnoge pojave in stvari opišejo ter jih numerično ali grafično tudi predstavijo. Matematiko naj uporabljajo kot sredstvo komunikacije, hkrati pa osvojene pojme in znanja kot orodje v vsakdanjem življenju.

Splošni cilji, zapisani v učnem načrtu, postavljajo v ospredje sistematično in ustvarjalno delo. Učitelje opozarjajo, naj učence spodbujajo, da sami iščejo poti do rešitve, ne pa da slepo sledijo določenemu vzorcu. Cilj je torej pokazati matematiko kot proces, kot ustvarjalno dejavnost, v katero so učenci in učenke ustvarjalno udeleženi.

Probleme naj rešujejo sistematično, kar ni v nasprotju z razvijanjem domišljije, intuitivnosti in ustvarjalnosti misli. Takšen način vsebuje elemente načrtovanja poteka reševanja in kritično vrednotenje poti do rešitve ter oceno veljavnosti rezultata.

Literatura

Bela, M. (2007). *Konstruktivistični pristop k pouku matematike na primeru raziskujmo oblike.* Diplomsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Oddelek za razredni pouk.

Hodnik Čadež, T. (2004a). Vloga konstruktivizma pri oblikovanju pojmov na razredni stopnji. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 321). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Hodnik Čadež, T. (2004b). Učenje matematike z razumevanjem. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 321). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Piciga, D. (1995). *Od razvojne psihologije k drugačnemu učenju in poučevanju.* Nova Gorica: Educa.

Plut-Pregelj (2004a). Konstruktivistične teorije znanja. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 37). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Plut-Pregelj (2004b). Konstruktivizem: neenotnost teorij in znanja. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 22-23). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Plut-Pregelj (2004c). Med psihološkim, kognitivnim in socialnim konstruktivizmom. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 23-26). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Šteh, B. (2003). Koncept aktivnega in konstruktivističnega učenja. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 103-104). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Žakelj, A. (2004a). Vloga problemskih situacij pri pouku matematike. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 309). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Žakelj, A. (2004b). Izgrajevanje pojmovnih predstav pri matematiki. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 311). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Žakelj, A. (2004c). Osmišljanje matematičnih vsebin. V B. Maretič Požarnik (ur.), *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev.* (str. 315). Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete in Slovensko društvo pedagogov.

Webber H., Berryl J. (1992). *Let`s Investigate Shapes 2*, Sholactic <Publications Ltd.

Webber H., Berryl J. (1992). *Let`s Investigate Shapes 3*, Sholactic <Publications Ltd.

Woolfolk, A. (2002). *Pedagoška psihologija.* Ljubljana: Educy.

Analiza uporabe e-učnih gradiv pri matematiki na podlagi vprašalnika

dr. Mojca Tomažin
Ekonomska in trgovska šola Brežice

Povzetek

Porast uporabe digitalnih medijev v izobraževanju je dejstvo in tudi v slovenskem šolskem prostoru so nastali številni spletni portali z e-učnimi gradivi za učenje različnih predmetov na različnih stopnjah in smereh izobraževanja. Tako je bila s pomočjo vprašalnika o uporabi e-učnih gradiv pri pouku matematike, ki so ga v marcu 2016 izpolnjevali dijaki vseh srednjih šol posavske regije, izvedena analiza odgovorov. Analiza je pokazala, koliko so posamezna e-učna gradiva znana in koliko so dejansko v uporabi med dijaki, kje poiščejo pomoč, kadar gradiva ne zadostujejo, kateri način učenja matematičnih vsebin s pomočjo interneta je dijakom najljubši in katere medije dijaki uporabljajo za učenje matematike. Ugotovljeno je bilo, da smo v slovenskem šolstvu še precej na začetku glede uporabe e-učnih gradiv, in čaka nas še veliko dela v zvezi z uvajanjem in širjenjem le-teh.

Ključne besede: e-učna gradiva, e-izobraževanje, pouk matematike

Analysis of the Use of e-Learning Materials in Mathematics Based on a Questionnaire

Abstract

The increase in the use of digital media in education is a known fact; many online portals with e-learning materials for learning various subjects at various levels and courses of education have been set up in the Slovenian school setting. An analysis was conducted of the answers to a questionnaire on the use of e-learning materials in Mathematics lessons, which was filled out by students of all secondary schools in the Posavje region in March 2016. The analysis has revealed: how well-known individual e-learning materials are and how much they are actually being used by secondary school students; where they look for help when the materials are not enough; which method of learning mathematical contents using the Internet is preferred by secondary school students; and which media the secondary school students are using to learn Mathematics. It has been established that the use of e-learning materials in the Slovenian education system is more or less still in its infancy, and that there is much work to be done in introducing and propagating them.

Keywords: e-learning materials, e-education, Mathematics lessons

Uvod

Prispevek je nastal iz empiričnega dela magistrske naloge z naslovom »Nekatere oblikovalske smernice za izdelavo e-učnih gradiv v matematičnem izobraževanju« (Tomažin, 2016) in bil v precej skrajšani obliki predstavljen na konferenci SIRikt (Tomažin, 2016a). Iz dolgoletnih izkušenj pri poučevanju matematike in informatike na srednji in višji šoli v Brežicah nekako naravno sledi ideja, da bi obe področji povezala, zato izbor področja raziskovanja ni bil težaven. Pravzaprav sem v preteklosti že raziskovala uporabo informacijsko-komunikacijskih tehnologij v slovenskem srednjem šolstvu, tokrat pa sem se osredotočila na uporabo e-učnih gradiv s področja matematike. Ravno uporaba kakovostnih e-gradiv namreč omogoča učencem učenje brez časovnih in prostorskih omejitev t.j. odprto učenje. Kako se lotiti učenja učencev za uporabo e-učnih gradiv, pa je še precej neraziskano. Ker nameravam v prihodnje tudi sama aktivno usmerjati učence v uporabo e-učnih gradiv, sem želela najprej raziskati obstoječe stanje. Cilj imam, toda kje smo trenutno? Da bi odgovorila na to vprašanje, sem sestavila vprašalnik o uporabi e-učnih gradiv pri pouku matematike, ki so ga izpolnjevali dijaki vseh srednjih šol posavske regije.

Metodologija dela

Sledi opis metodologije za analizo uporabe e-učnih gradiv pri pouku matematike v posavskih srednjih šolah na podlagi vprašalnika. Na podlagi analize odgovorov na vprašanja iz vprašalnika smo poskušali odgovoriti na naslednja raziskovalna vprašanja:

- koliko so e-učna gradiva znana med dijaki;
- koliko so e-učna gradiva dejansko v uporabi med dijaki;
- katere vrste gradiv dijaki največ uporabljajo pri pripravah na preverjanje znanja pri matematiki;
- kje poiščejo pomoč, kadar gradiva ne zadostujejo (predvsem nas zanima, kakšno je stanje glede plačljivih inštrukcij);
- kateri način učenja matematičnih vsebin s pomočjo interneta jim je najljubši;
- katere medije dijaki uporabljajo za učenje matematike (doma in v šoli).

Težko smo podali kakršnekoli hipoteze glede odgovorov oziroma rezultatov analiz. Hipoteze bi lahko temeljile kvečjemu na rezultatih analiz podobnih vprašalnikov, narejenih kdaj prej in/ali na drugem koncu Slovenije, le-teh pa nismo našli, saj je naš vprašalnik narejen samostojno in smo ga prvič izvedli. Vse ostalo pa bi bilo zgolj subjektivno ugibanje, zato hipotez nismo navedli.

Vprašalnik je vseboval sedem vprašanj, pri čemer so bili odgovori vnaprej ponujeni. Povsod, razen pri prvih dveh vprašanjih, smo dopustili tudi odprto možnost »drugo«, kjer so dijaki lahko vpisali svoj odgovor, če so menili, da naštete možnosti ne ustrezajo.

Naslov ankete na spletu je bil »Uporaba e-gradiv pri pouku matematike v posavskih srednjih šolah«. Na pozdravni strani smo se dijakinjam in dijakom najprej na kratko predstavili. Zatem smo definirali, kaj so e-učna gradiva, in razložili, kaj je namen raziskave: ugotoviti, kako se učenci samostojno pripravljajo na preverjanje znanja pri matematiki in katera e-učna gradiva dejansko poznajo in uporabljajo.

Zapisali smo še, da bodo rezultati analize odgovorov prav gotovo zanimivi za vse učitelje matematike, še zlasti pa za tiste, ki se ali pa se nameravajo ukvarjati z razvijanjem e-učnih gradiv. Anketirancem smo zagotovili, da je anketa anonimna, da vzame približno 10 minut časa in obsega 7 vprašanj. Ob koncu smo jih še pozvali, da lahko za vprašanja, povezana z anketo, ali pa glede rezultatov raziskave, pišejo na priloženi e-naslov in se jim zahvalili za sodelovanje.

Vprašalnik je bil postavljen na splet 2. marca 2016. Menili smo, da bo anketo najlažje izvesti v domači, posavski regiji, saj nekaj šteje tudi osebni pristop. Ideja je bila, da naj bi učenci anketo izpolnjevali v okviru rednega pouka pri predmetih, povezanih z informatiko, ali pa pri kateremkoli drugem predmetu, ki se izvaja v računalniški učilnici. Kolikor smo mogli, smo to storili sami, za pomoč pa smo poprosili tudi učitelje, ki poučujejo v razredih, ki jih sami ne poučujemo in imajo hkrati pouk v računalniških učilnicah.

Predvidevali smo, da bo učinek najboljši, če bodo učenci izvedli anketo pod nadzorom učitelja, zato smo učiteljem, ki so sodelovali »v nadzoru«, to prej tudi pojasnili. Res se je izkazalo, da ni bilo dovolj, če smo učitelji učencem v želji, da bi anketo izpolnili, le napisali spletni naslov na tablo in jim naročili, naj jo izpolnijo, ko bodo lahko (na primer doma).

Ko sem sama izvajala anketiranje v razredih, kjer poučujem, sem izkoristila priložnost in učencem povedala še več o e-gradivih, e-učenju ... in jim ob morebitnih vprašanjih pojasnjevala vsebino vprašalnika, hkrati pa v zvezi z obravnavano temo od njih izvedela še kaj več od tega, kar sprašujemo v vprašalniku. Da je osebni pristop (prav tako pri izvajanju spletnih anket) pomemben, lahko ugotovimo tudi na osnovi rezultatov ankete, saj se je izkazalo, da je največ odgovorov prav z Ekonomske in trgovske šole Brežice, ki je moja matična šola.

Anketirali smo celotno populacijo (1446 dijakov in dijakinj). Ciljna populacija so bili torej dijaki posavskih srednjih šol, praviloma pa smo pri anketiranju (vsaj tistem, ki je potekalo pod nadzorom učiteljev v šoli) zajemali celotne razrede hkrati, kjer so učenci že tako in tako bolj ali manj enakomerno porazdeljeni po različnih parametrih, kot npr. spol (razen, če gre za specifične programe, kjer kateri od obeh spolov prevladuje, pa še to se kompenzira, če gledamo vse šole v regiji, torej regijo kot celoto), učni uspeh, socialno stanje ... skratka, po parametrih, ki bi utegnili vplivati na rezultate ankete. Iz spodnje tabele (Tabela 1) je razvidno številčno stanje dijakov po posameznih srednješolskih zavodih v Posavju za šolsko leto 2015/16 (gre za absolutne številke cele populacije).

Tabela 1: Številčno stanje (absolutno) dijakov po posameznih srednješolskih zavodih v Posavju za šolsko leto 2015/16

Šola	**Število dijakov v šolskem letu 2015/16**
Ekonomska in trgovska šola Brežice	250
Gimnazija Brežice	449
Gimnazija Krško	110
Srednja poklicna in strokovna šola Krško	554
Srednja šola Sevnica	83
Skupaj	**1446**

Ustrezno izpolnjenih je bilo 247 anket, pri čemer se kot ustrezno izpolnjene upoštevajo tiste ankete, kjer je anketiranec odgovoril vsaj na eno vprašanje (ni na primer le kliknil na nagovor). Anketo je torej ustrezno izpolnila slaba petina (17 %) vseh posavskih dijakov (v šolskem letu 2015/16), kar je po našem mnenju kar velik vzorec.

Spletni naslov ankete je bil: https://www.1ka.si/a/86246 (link aktiven od 2. marca 2016), uporabili pa smo gostovanje na strežniku »EnKlikAnketa – 1KA spletne ankete« (https://www.1ka.si/), ki ga ponuja Center za družboslovno informatiko (CDI) na Fakulteti za družbene vede Univerze v Ljubljani. Na pozdravni strani lahko preberemo, da je 1KA odprtokodna aplikacija za storitev spletnega anketiranja, ki se na strežniku CDI uporablja brezplačno. Gre za spletno storitev, ki združuje podporo za naslednje funkcionalnosti: oblikovanje in tehnična izdelava spletnega vprašalnika, izvedba spletne ankete ter urejanje in analiza podatkov.

Čeprav smo si ogledali nekaj primerov anketiranja s področja uporabe IKT, e-učnih gradiv ... v slovenskem šolskem prostoru, se pri sestavi vprašalnika nismo zgledovali po katerem od drugih vprašalnikov, ampak smo oblikovali vprašanja in (večinoma) predvidene odgovore v skladu z lastnimi idejami oziroma v skladu s tem, kar nas zanima. Rezultate smo analizirali z opisno statistiko odgovorov (odgovori so bili analizirani samodejno na strežniku »1KA spletne ankete«).

Podatke smo zbirali do 22. 3. 2016, saj smo v zadnjem tednu anketiranja prejeli le še tu in tam kakšno izpolnjeno anketo.

Oglejmo si še kratke predstavitve vsake izmed posavskih srednjih šol, ki so sodelovale pri anketiranju:

- **Ekonomska in trgovska šola Brežice (http://www.etrs.si/o-soli/publikacija)**

  Ekonomska in trgovska šola Brežice omogoča dijakom izobraževanje v štirih programih: v trgovskem, ekonomskem, logističnem (žal zaradi pomanjkanja zanimanja v izteku) in na novo pridobljenem programu predšolska vzgoja. Zaposlitvenih možnosti po koncu šolanja je kar nekaj – naši (bivši) dijaki delajo kot trgovci, podjetniki (v najrazličnejših dejavnostih), poslovneži ... Šola je znana tudi po najrazličnejših obšolskih dejavnostih, saj sodeluje v projektih, kot so npr. Unesco, Comenius, Leonardo Da Vinci, kar ponuja dijakom in učiteljem vedno nove možnosti za preizkušanje in dokazovanje, pa tudi za potovanja in srečanja s tujimi dijaki izven Slovenije.

- **Gimnazija Brežice (http://www.gimnazija-brezice.si/index.php/2016/ 02/12/uvodne-besede/)**

  Gimnazija Brežice je posavska srednja šola z dolgoletno tradicijo, saj že sedemdeset let omogoča dijakom pridobiti kakovostno znanje. V domači regiji je znana predvsem po kakovostnem delu in pestri ponudbi obšolskih dejavnostih. Sodi med najuspešnejše slovenske gimnazije, kar dokazujejo z vsakoletnimi udeležbami na tekmovanjih znanj, uspehom dijakov na splošni maturi, ki je nad slovenskim povprečjem, deležem zlatih maturantov ter bogatim programom obveznih vsebin in dejavnosti na šoli. Bila je prva srednja šola v Sloveniji, ki je pričela sistematično uresničevati koncept dela z nadarjenimi dijaki, zato so jih na številnih strokovnih srečanjih predstavili kot primer dobre prakse.

- **Gimnazija Krško ter Srednja poklicna in strokovna šola Krško (http://www.sc-krsko.si/)**

  Tehniška šola v Krškem je leta 1957 v tedanjo Tehniško srednjo šolo Videm-Krško vpisala prvo generacijo dijakov. S spreminjanjem potreb v gospodarstvu so se spreminjali tudi programi, ki so se izvajali na šoli. Trenutno šola izvaja naslednje programe: tehniška gimnazija, elektrotehnik, strojni tehnik, tehnik računalništva, avtoserviser, elektrikar, oblikovalec kovin-orodjar ter pomočnik v tehnoloških procesih. Poleg dejavnosti, ki jih sicer izvajajo na šoli (tekmovanja iz znanja, projekti, sodelovanje z lokalnimi podjetji ...), so izredno uspešni tudi pri sodelovanju v mednarodnih projektih, saj so po uspešno zaključenem mednarodnem partnerskem projektu Leonardo da Vinci Compile new competencies and implement them to teaching, krajše CNC&IT prejeli najvišje državno priznanje Zlato jabolko kakovosti 2015.

- **Srednja šola Sevnica (http://www.sc-krsko.si/attachments/article/40/predstavitev%20MIZAR.pdf)**

  Predstavitev Srednje šole Sevnica ne more mimo bogate tradicije strokovnega šolstva v kraju, njeni začetki segajo celo v leto 1885, ko so v ljudski šoli vodili kmetijske nadaljevalne tečaje, nato pa je 1901 začela delovati trgovska nadaljevalna šola. Kasneje se je izmenjalo še nekaj programov, v skladu s potrebami na trgu dela, trenutno pa izobražujejo po dveh programih: mizar in frizer. Šola je majhna in zato je mogoč individualen pristop do vsakega dijaka, v okolici pa so podjetja, ki že vrsto let delujejo na tem področju in hkrati tudi zaposlujejo dijake.

Analiza odgovorov in diskusija

Sedaj pa si oglejmo analizo odgovorov na vprašanja v vprašalniku.

Za izpolnjevanje je bil na spletnem mestu »1KA« po vnosu vprašanj samodejno izračunan predviden čas izpolnjevanja, približno pet minut, ker pa vsi anketiranci niso odgovorili na vsa vprašanja, je bil dejanski povprečni čas trajanja izpolnjevanja približno tri minute.

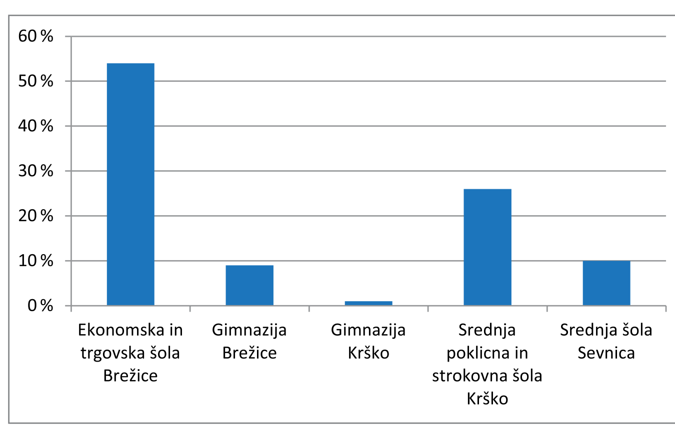
Sledi sedem vprašanj, na katera so v okviru naše ankete odgovarjali dijaki. Odstotki so izračunani glede na to, koliko dijakov je odgovorilo na posamezno vprašanje (celota oziroma 100 % je vedno skupno število veljavnih odgovorov na trenutno vprašanje in ne nujno 247).

V magistrski nalogi so rezultati podani tako s pomočjo (precej obširnih) tabel, kakor tudi grafikonov. Ker menim, da je prikaz rezultatov že samo z grafikoni dovolj nazoren, sem prikaze s tabelami v nadaljevanju izpustila.

1. Spol

Anketiranci so bili po spolu dokaj uravnoteženi, saj je bilo deklet 57 %, fantov pa 43 %.

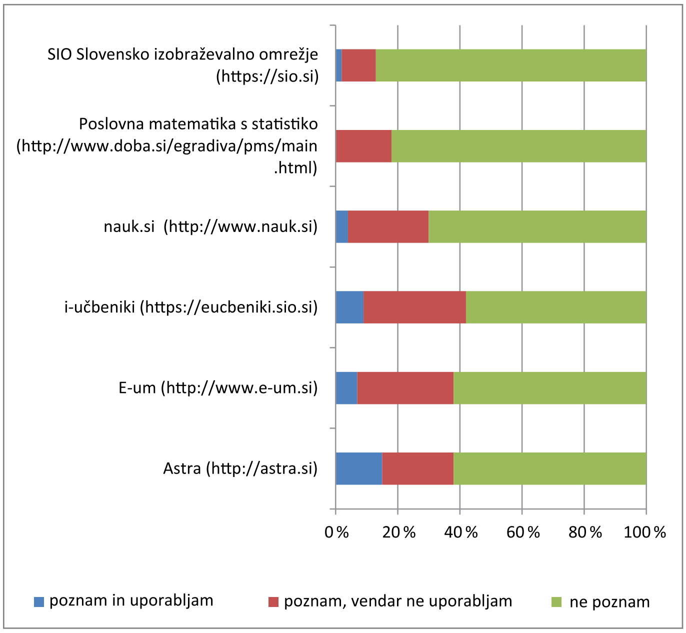
2. Označite, katero šolo obiskujete:



Grafikon 1: Anketiranci po šolah

Očitno je osebni pristop pomemben pri rezultatih ankete, saj se je izkazalo, da je največ odgovorov prav z Ekonomske in trgovske šole Brežice, ki je moja matična šola.

3. Za vsako od naštetih e-gradiv označite eno izmed možnosti: poznam in uporabljam; poznam, vendar ne uporabljam; ne poznam. **Če pri učenju matematike** uporabljate e-gradiva, ki jih ni na seznamu, jih navedite pod »drugo«.

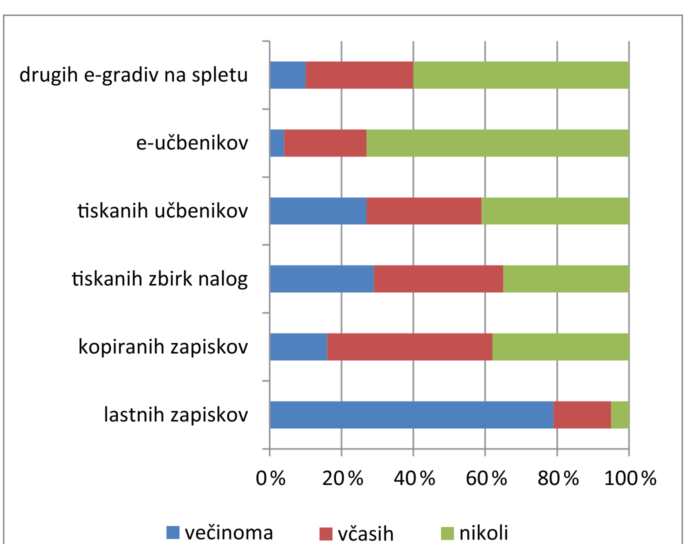


Grafikon 2: Poznavanje in uporaba posameznih spletnih mest z e-učnimi gradivi

Kot vidimo, največji delež anketirancev pozna »i-učbenike«, najmanjši pa »SIO Slovensko izobraževalno omrežje«. Če se vprašamo, katero spletno mesto ima največ uporabnikov med tistimi, ki spletno mesto sploh poznajo, vidimo, da je to »Astra«.

Opomba: Anketiranci so navajali v kategoriji »drugo« neustrezne odgovore (enako tudi pri vseh naslednjih vprašanjih), zato bomo komentarje te kategorije izpustili.

4. Pri pripravah na preverjanje znanja pri matematiki se učim s pomočjo:



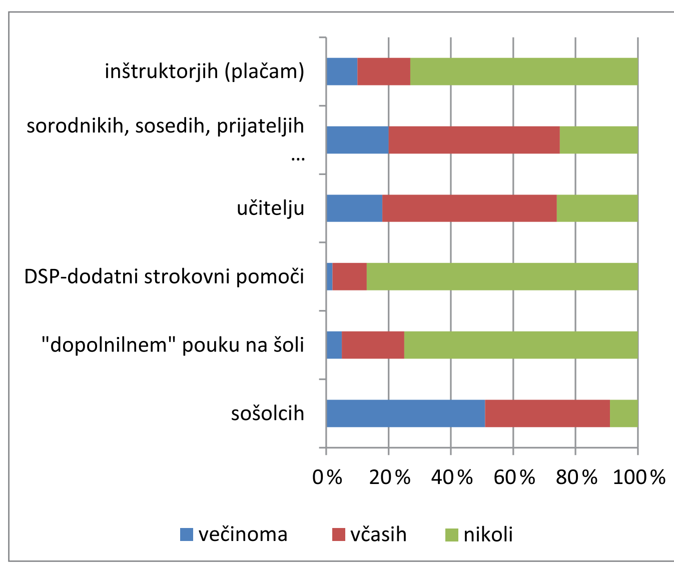
Grafikon 3: Katere vire uporabljajo dijaki pri pripravah na preverjanje znanja pri matematiki

Že bežen pogled na grafikon razkrije, da se večina anketiranih dijakov v daleč najvišjem deležu uči s pomočjo »lastnih zapiskov«, takoj na drugem mestu pa so »tiskane zbirke nalog«. Takšen rezultat pritrjuje naši domnevi, da si učenci želijo čim enostavneje doseči oceno, ki jo želijo. Da so e-učbeniki po uporabi (za enkrat še) pri repu lestvice, pa je verjetno več vzrokov. Eden je gotovo ta, da (to je zopet domneva, ki bi jo bilo potrebno raziskati) učitelji matematike v veliki večini poučujemo v skladu s tiskanimi verzijami gradiv, ki jih nabavi šola (šolski skladi) ali pa učenci sami, tako da so učenci prisiljeni delati po tiskanih gradivih in sami niti nimajo kaj veliko izbire.

Morda pa lahko del razlogov, da je delež e-učnih gradiv tako nizek, najdemo tudi v domnevi, da se v splošnem (še posebej pa na poklicnih in strokovnih šolah) povprečna starost učiteljev viša. V zadnjih letih je namreč zaposlovanje mladih kadrov v šolstvu tako rekoč zaprto in v šole ni več toliko dotoka novih idej. Mladi učitelji bi bili zagotovo bolj naklonjeni IKT oziroma e-učnim gradivom. Možno pa je tudi, da je delež šol (zopet je potrebna raziskava) še vedno »podhranjen« z učno tehnologijo. Menimo, da je minimalni standard, ki omogoča širšo uporabo e-učnih gradiv, da ima učitelj razred opremljen z računalnikom, projektorjem in dovolj dobrim dostopom do interneta (ki deluje tekoče), da ne omenjamo elektronskih tabel, ki pa (vsaj po naših izkušnjah) v prvi fazi niso nujno potrebne.

Seveda pa je možen razlog za neuporabo e-učnih gradiv lahko tudi dejstvo, da je za nekatere dijake interaktivno učenje z računalnikom neprimerno za poglobljeno razumevanje (vključno z raznimi stalnimi internetnimi motilci in skušnjavami).

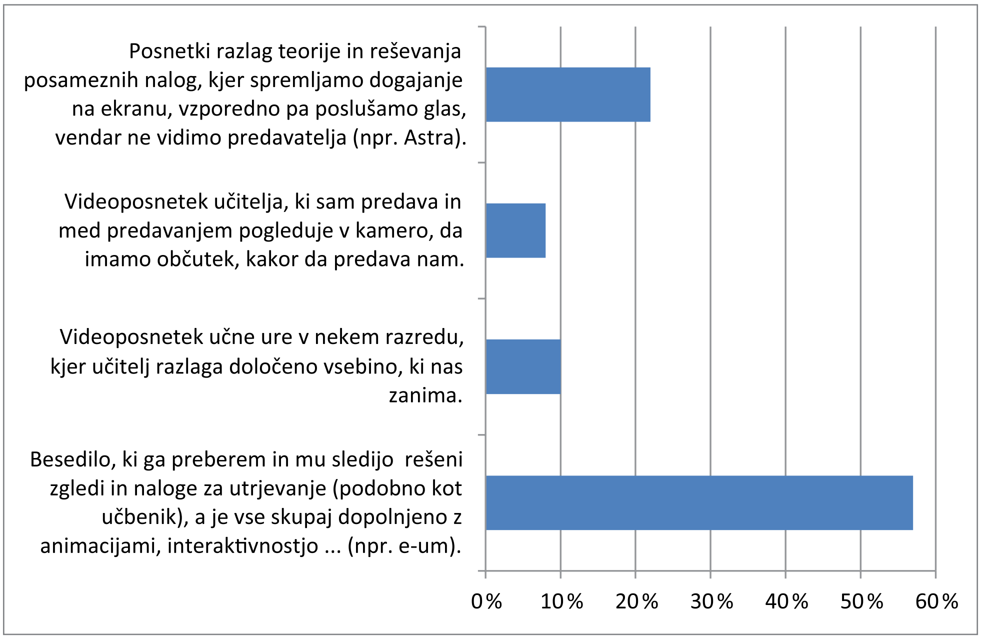
5. Kadar gradiva ne zadostujejo, dobim dodatno razlago pri:



Grafikon 4: Kje dobijo dijaki dodatno razlago, kadar gradiva ne zadostujejo

Iz grafikona je razvidno razveseljivo dejstvo, da si dijaki še vedno pomagajo med seboj, saj je daleč največji delež dijakov (91 %) navedlo, da večinoma ali pa vsaj včasih dobijo pomoč pri sošolcih. Očitno pa je pomembna tudi socialna mreža dijakov: pri sorodnikih, sosedih, prijateljih ... dobi pomoč kar tri četrtine teh, le malenkost manj pa jih dobi pomoč pri učiteljih. Rezultati kažejo tudi, da ima plačljive inštrukcije slaba tretjina dijakov.

6. Ne glede na to, ali tudi dejansko uporabljate e-gradiva, poskusite odgovoriti, kateri izmed naštetih načinov vam je (ali pa bi vam bil) najbolj všeč za učenje matematičnih vsebin s pomočjo interneta (izberite možnost):

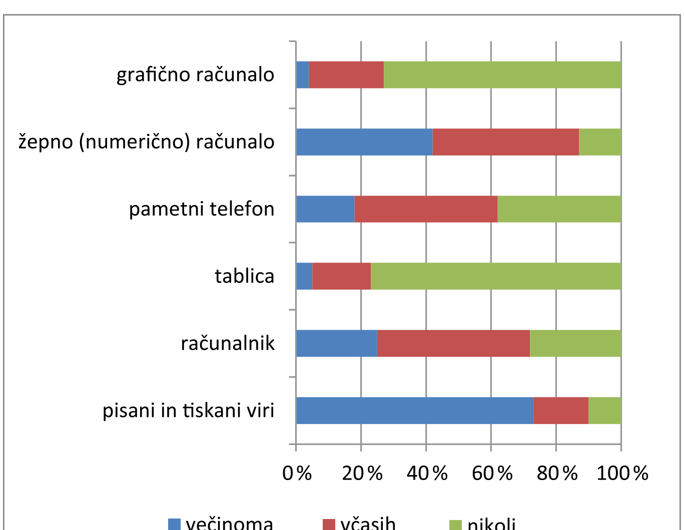


Grafikon 5: Kateri izmed naštetih načinov je (ali pa bi bil) dijakom najbolj všeč za učenje matematičnih vsebin s pomočjo interneta

Daleč najvišji delež (krepka polovica) anketiranih dijakov je kot najbolj zaželen način podajanja matematičnih vsebin s pomočjo interneta izbrala prvo možnost na seznamu (tako so zasnovani na primer i-učbeniki). Na drugem mestu je način podajanja vsebin, kakršnega lahko vidimo na spletnem mestu »Astra«.

Ostali dve možnosti, torej videoposnetki učiteljev, ki razlagajo snov pred kamero, kot npr. na hrvaškem govornem področju Toni Milun (Milun, 2016), oziroma videoposnetki učnih ur pouka matematike, sta manj želeni možnosti. Res pa je, da tovrstnega načina na slovenskem spletu (vsaj po naših podatkih) za enkrat ni možno najti, tako da dijaki verjetno niti niso imeli predstave, kako natančno je to videti.

7. Katere medije uporabljate pri pouku matematike ali pa doma za učenje matematike:



Grafikon 6: Katere medije uporabljajo dijaki pri pouku matematike ali pa doma za učenje matematike

Po pričakovanjih so se na prvih treh mestih znašli: pisani in tiskani viri (90 % anketirancev jih večinoma ali pa včasih uporablja), žepno računalo (takih je 87 %) in le nekaj manj je anketirancev, ki večinoma ali pa včasih uporabljajo računalnik.

Očitno približno dve tretjini dijakov večinoma oz. včasih za učenje matematike pri pouku in doma uporablja pametni telefon. Glede na izkušnje pri pouku matematike v razredu menimo, da v veliki večini dijaki uporabljajo pametne telefone le v funkciji kalkulatorja ali pa (na žalost) pri poskusih nedovoljene uporabe pri preverjanjih znanja. Seveda pa tudi tokrat velja poudariti, da je to le domneva in bi bile za boljši vpogled v navedeno problematiko potrebne nadaljnje raziskave.

Ko smo bili pri anketiranju prisotni, dijaki praviloma v veliki večini niso poznali oz. vedeli, kaj je to »grafično računalo«, zato lahko upravičeno sumimo, da je podatek, da slaba tretjina anketiranih dijakov večinoma ali pa včasih uporablja grafično računalo, posledica tega, da dijaki zamenjujejo pojma grafično in žepno računalo.

Zaključek

V zaključku še enkrat povzemimo glavne ugotovitve analize odgovorov. Pri vsakem od predlaganih spletnih mest z e-učnimi gradivi se je izkazalo, da ga sploh ne pozna krepko čez polovico anketirancev. Med tistimi, ki določeno spletno mesto poznajo, pa ima največji delež uporabnikov »Astra«. Med viri za učenje matematike (priprave za preverjanje znanja) še vedno prednjačijo lastni viri – zapiski in tiskane zbirke nalog. Če imajo učenci težave pri razumevanju snovi, najraje poiščejo pomoč pri sošolcih, še vedno pa jih približno tretjina (po našem mnenju vse preveč) rešuje težave s pomočjo plačljivih inštrukcij. Za enkrat si večina dijakov želi tudi na internetu takšnega načina podajanja snovi, kakršnega so vajeni v učbenikih, pa tudi pri izbiri medijev so konzervativni – pisani in tiskani viri so jim najbližji. Tako lahko sklepamo, da je v naših šolah potrebno še veliko predstavljanja in uvajanja uporabe spletnih mest z e-učnimi vsebinami, saj vsakršna učna gradiva dobijo svoj pravi smisel šele ob uporabi. Menimo tudi, da bi bilo dobro, da bi si vsak učitelj vzel toliko časa, da bi raziskal najpomembnejša e-učna gradiva svojega predmetnega področja in z njimi seznanil tudi svoje učence. Še bolje bi bilo, če bi učencem ne le pokazali spletnih mest z e-učnimi gradivi, ampak bi jim dali tudi napotke, kako naj si z njimi pomagajo. Če želimo to doseči, pa moramo najprej nuditi podporo učiteljem, saj se v šoli vse začne in konča prav pri njih. ■

Viri

Milun Toni – spletno mesto za učenje matematike, spletna stran (pridobljeno 23. 10. 2016): http://www.tonimilun.com.

Tomažin, M. (2016). Nekatere oblikovalske smernice za izdelavo e-učnih gradiv v matematičnem izobraževanju, magistrsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru. Spletna stran (pridobljeno 23. 10. 2016): https://dk.um.si/Dokument.php?id=94680.

Tomažin, M. (2016a). Uporaba e-učnih gradiv pri pouku matematike v posavskih srednjih šolah. Mednarodna konferenca Splet izobraževanja in raziskovanja z IKT SIRikt 2016 Kranjska Gora, 6.-7. oktober 2016. Spletna stran (pridobljeno 23. 10. 2016): http://www.zrss.si/pdf/Zbornik-SIRIKT2016.pdf.

Zakaj piškoti Leibniz?

Suzana Harej
Osnovna šola Milojke Štrukelj Nova Gorica

Zelo zanimiv je tudi Leibnizev harmonični trikotnik, ki je sestavljen tako, da sta krajni stranici zapisani kot zaporedje obratnih vednosti naravnih števil. Notranjost trikotnika pa sestavimo tako, da zadostimo pravilu, da je vsota spodnjih dveh števil enaka zgornjemu številu.

Po Leibnizu se imenuje tudi udarni krater na Luni in asteroid glavnega pasu 5149.

Poleg predstavitve, ki so jo devetošolci izvedli pri uri matematike, so na šolskih hodnikih pripravili predstavitev tudi za ostale učence.

Med odmorom za malico in glavnim odmorom smo poskušali ostale učence navdušiti z odkritjem, da lahko s prsti ene roke pokažemo števila do 31 in ne samo 5 števil, kot smo bili navajeni do sedaj. Seveda lahko to dosežemo samo s poznavanjem dvojiškega sistema.

Učenci so reševali nalogo »Ujeti Štefan«, ki razlaga, kako si je ujeti Štefan pomagal rešiti se s poznavanjem dvojiškega sistema.

Ste se že vprašali, od kod ime slastnim maslenim piškotom Leibniz? Učenci naše šole so to raziskali in s pomočjo spleta kaj kmalu ugotovili, da se piškoti imenujejo po slavnem nemškem matematiku, filozofu in fiziku Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu. Piškote izdeluje tovarna Bahlsen iz Hannovra, kjer je G. W. Leibniz preživel zadnja leta svojega življenja.

Učenci so odkrili še marsikaj zanimivega o W. G. Leibnizu. Pripravili so PowerPoint predstavitev o njem ter plakate. Izobesili smo jih 14. novembra 2016 na šolskih hodnikih in s tem obeležili 300. obletnico Leibnizeve smrti.

Leibniz se je rodil leta 1646 v Leipzigu očetu Friederichu Leibnizu, profesorju etike na Univerzi v Leipzigu, in materi Catharini Schmuck, hčerki pravnika.

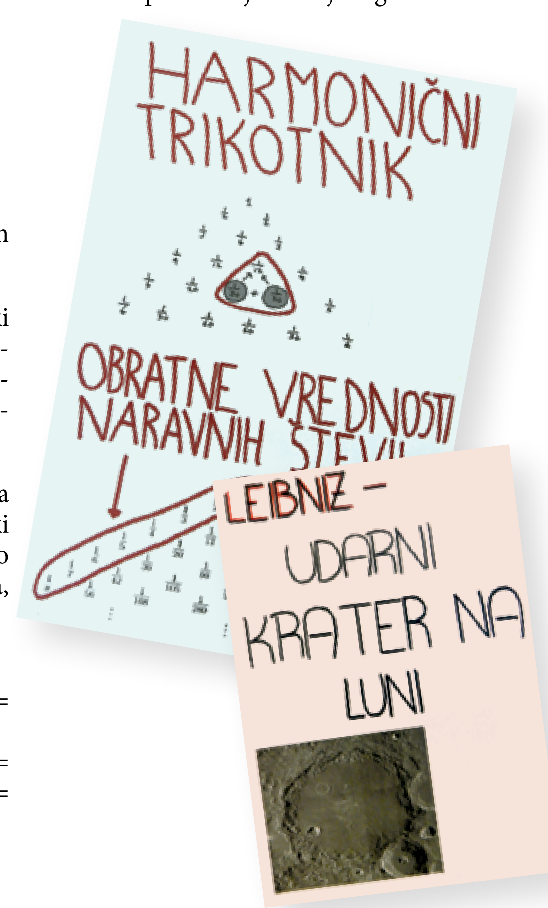
Prvi je uporabil znak · za množenje in znak : za deljenje.

Leta 1673 je nadgradil Pascalov računski stroj za seštevanje in odštevanje (poimenovan po francoskem matematiku in filozofu Blaisu Pascalu) s funkcijami množenja in deljenja.

Leibniz je odkril dvojiški sistem zapisa števil, na katerem delujejo računalniki današnjega časa. V dvojiškem sistemu so števila zapisana samo z dvema števkama, z 0 in 1.

Primer:

- zapis v desetiškem sistemu: $(1101)_{10} = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1$
- zapis v dvojiškem sistemu $(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13\ (= (13)_{10})$

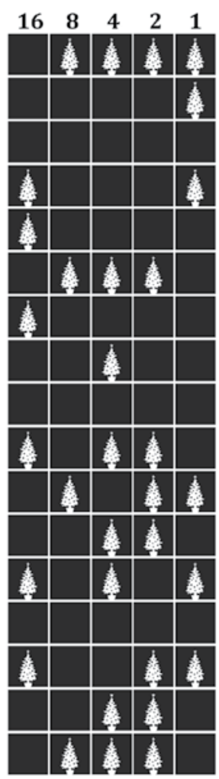


Ujeti Štefan

Štefan je ujet v gornjem nadstropju trgovine. Tik pred božičem je, zato je kupoval darila za starše in ni opazil, kdaj so jo zaklenili. Kaj naj stori? Poskušal je telefonirati, vendar je bil telefon izključen. Poskusil je kričati, a kaj, ko ni nikjer nikogar! Tedaj pa je na drugi strani ulice opazil računalnikarja, ki dela pozno v noč. Kako naj pritegne njegovo pozornost? Razgleda se in vidi, kaj bi lahko uporabil: božično jelko! Poiskal je vtičnico in s prižiganjem in ugašanjem lučk poslal sporočilo v dvojiškem sistemu.

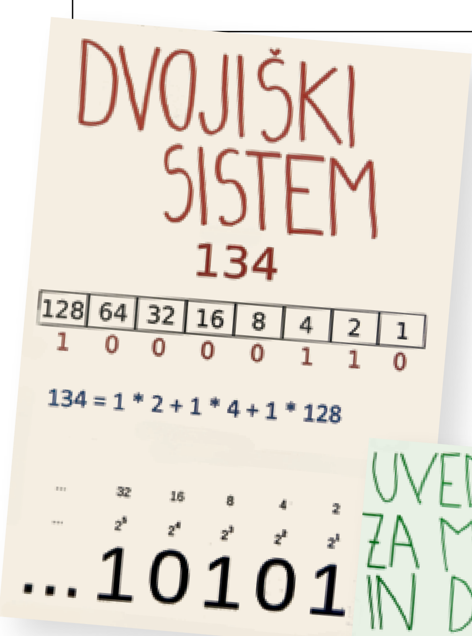
Po dvojiško znamo zapisovati številke. Kako neki je Štefan s številkami poslal sporočilo?! Morda pa se je domislil načina, kako s številkami predstaviti črke?

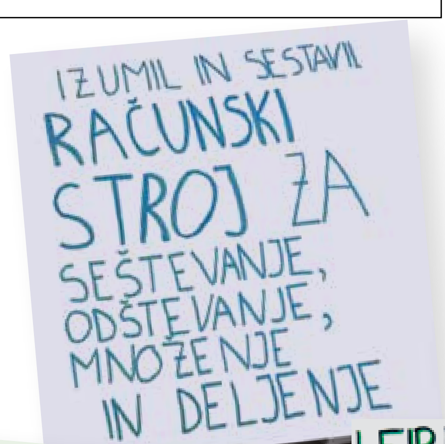
Lahko razbereš kaj je sporočil?

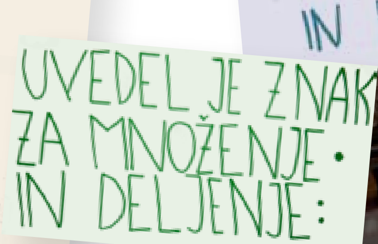


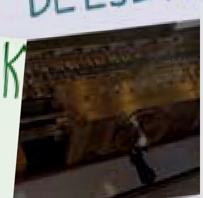
1	2	3	4	5
A	B	C	Č	D
6	7	8	9	10
E	F	G	H	I
11	12	13	14	15
J	K	L	M	N
16	17	18	19	20
O	P	R	S	Š
21	22	23	24	25
T	U	V	Z	Ž

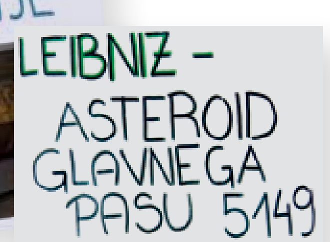
Vir: Do koliko lahko šteje stonoga? (http://vidra.si/)











Predstavili smo jim tudi igro »Dvojiška križanka« (http://www.binarypuzzle.com/), kjer je treba kvadrat zapolniti z 0 in 1 tako, da se ista števka lahko pojavi le dvakrat zapored in da je v vsaki vrstici in stolpcu enako število ničel in enic. Zapis v vrstici, ki ga lahko razumemo kot zapis števila v dvojiškem sistemu, so učenci še pretvorili v število, zapisano v desetiškem sistemu.

1			0		
		0	0		1
	0	0			1
0	0		1		
	1			0	0

Obeležitev 300. obletnice smrti W. G. Leibniza je zagotovo popestrila naš šolski dan. Največja dodana vrednost pa je bila v tem, da so tako učenci višjih kot tudi nižjih razredov spoznali kar nekaj novih in zanimivih dejstev, s katerimi se srečujemo vsak dan. Zanimivo je bilo slišati tudi izjavo odraslega mimoidočega: »A zato so piškoti Leibniz!«.

Uganete, kaj o Leibnizu je bilo pa učencem najbolj všeč? Odgovor se skriva v naslovu prispevka. ■

Viri

Leibniz, G. W. (2016). Wikipedija, prosta enciklopedija. Pridobljeno 21. 11. 2016. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz.

Deliciously Continental. (2016). Bahlsen. Pridobljeno 21. 11. 2016. Dostopno na spletnem naslovu: http://bahlsen.co.uk/customer-care/faqs/where-does-the-name-leibniz-come-from/.

Demšar, J. (2016). *Do koliko lahko šteje stonoga?* Pridobljeno 21. 11. 2016. Dostopno na spletnem naslovu: http://vidra.si/.

Binarypuzzle.com. (2011–2017). Pridobljeno 21. 11. 2016. Dostopno na spletnem naslovu: http://www.binarypuzzle.com/.

Srednjeevropski matematiki pred četrt tisočletja
(ob 250-letnici prvih predavanj Boškovićeve matematike v Ljubljani)

dr. Stanislav Južnič
Univerza v Oklahomi

Povzetek

Slovenski matematiki 17. in 18. stoletja so bili zvečine člani jezuitskega reda avstrijske province. Predavali so na filozofskih študijih, ki so bili vmesna stopnja med nižjimi študiji in univerzo, kot jih danes ne poznamo več. Obravnavamo več kot štiristo profesorjev matematike, ki so predavali v avstrijski in češki jezuitski provinci do prepovedi jezuitov leta 1773. Mnogi med njimi so službovali tudi na slovenskem narodnostnem ozemlju, čeravno ne vedno kot profesorji matematike. Zanimajo nas njihova objavljena dela in še posebej odnos do novosti rimskega in pavijskega profesorja matematike Boškovića.

Ključne besede: zgodovina matematike v 17. in 18. stoletju, Rudjer Bošković, jezuitski profesorji matematike na ozemljih, poseljenih s Slovenci v Ljubljani, Mariboru, Celovcu in Gorici.

Central European Mathematicians a Quarter of a Millennium Ago
(on the 250th Anniversary of the First Lectures on Bošković's Mathematics in Ljubljana)

Abstract

Slovenian mathematicians of the 17th and 18th century were mostly members of the Jesuit order of the Austrian province. They lectured in philosophical studies, which were an intermediate stage between lower studies and the university and are no longer in use today. The paper discusses more than four hundred professors of Mathematics who lectured in Austrian and Bohemian Jesuit provinces before the suppression of the Jesuits in 1773. Many of them also worked in the Slovenian ethnic territory, although not always as professors of Mathematics. Their published works are brought into the limelight, and especially their attitude towards the innovations of Bošković, a professor of Mathematics in Rome and Pavia.

Keywords: history of Mathematics in the 17th and 18th century, Rudjer Bošković, Jesuit professors of Mathematics in the territory populated by Slovenians in Ljubljana, Maribor, Klagenfurt and Gorizia.

Uvod

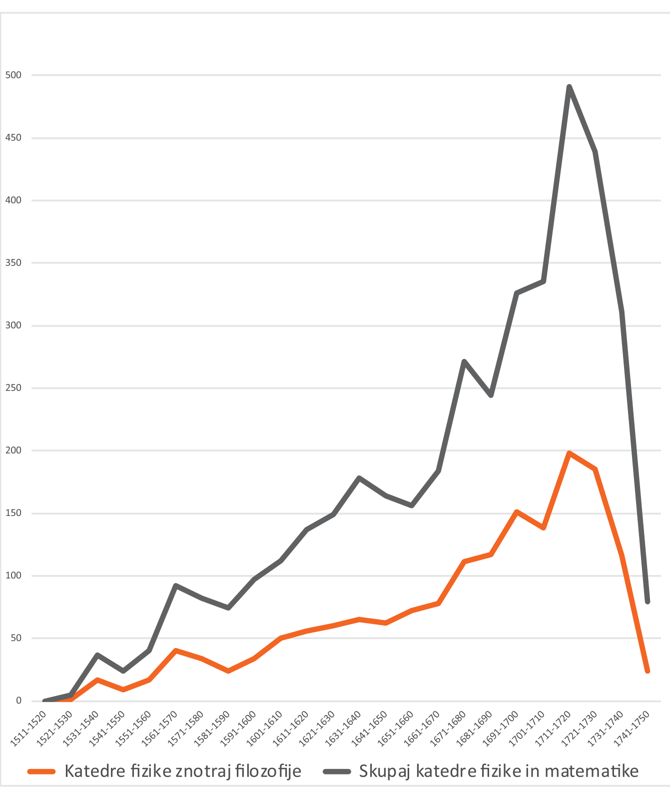
Obravnavamo pouk matematike v Srednji Evropi s poudarkom na danes slovenskih deželah konec 16., v 17. in v 18. stoletju. Po izgonu protestantov so jezuiti v katoliških deželah obdržali monopol nad izobraževanjem v matematičnih in sorodnih vedah nad dve stoletji, vse do prepovedi leta 1773. Če si se hotel česa naučiti, in še posebej, če ti je bilo do matematičnih znanj, si enostavno moral v njihove šolske klopi.

Matematika sprva ni bila močno razvita med jezuitskimi učenjaki. Predavali so jo kar študentje višjih letnikov univerze, še preden so doktorirali. Položaj se je zasukal na bolje z rimskim profesorjem matematike Christopherjem Claviusom (* 1537; † 1612), ki je bil poglavitni strokovnjak pri gregorijanski reformi koledarja. Matematika koledarja je bila očitno dovolj važna, njen vpliv na vsakdanje življenje pa izjemno merodajen. Tako so matematiki skokoma pridobili na veljavi in so kmalu postali dovolj čislan poklic, v katerem so se posamezni jezuiti udejstvovali mnogo let zapored ali celo vso svojo poklicno pot. Clavius je v Rimu ustanovil še posebne tečaje za matematične talente, ki so se jih udeleževali tudi številni dijaki s slovenskega narodnostnega ozemlja. Na podobni matematični šoli v Antwerpnu sta François d'Aguilon in Grégoire de Saint-Vincent (* 1584; † 1667) vzgojila številne matematike, ki so predavali tudi v Habsburški monarhiji, domovini naših prednikov.

Pod Claviusovim vplivom so se množila tudi profesorska mesta matematikov na jezuitskih kolegijih. Sprva je bil našim slovenskim prednikom na voljo predvsem študij matematike na Dunaju in v Pragi znotraj avstrijske jezuitske province, od katere se je češka provinca osamosvojila med tridesetletno vojno. Konec 16. stoletja so profesorje matematike začeli zaposlovati tudi v Gradcu. Najprej so »uvažali« strokovnjake iz antwerpenske matematične šole, nato pa je Claviusov učenec Švicar Paul Guldin (* 1577; † 1643) razvil lastno matematično šolo na Dunaju in v Gradcu. Med njegovimi prvovrstnimi dijaki in nato sodelavci je bil tudi Cerkničan Andrej Kobav (* 1591; † 1654), ki se je tudi sam ukvarjal s koledarskimi preračunavanji in o njih objavil odmevno knjigo. Kobav je več desetletij vzgajal mlade rodove matematikov v Gradcu, zadnja leta pa je preživel v Ljubljani, na gradu Fužine in v Trstu. V triletnih filozofskih študijih so sprva nekoliko menjavali letnik pouka matematike, ki se je končno ustalil v prvem letu študijev vzporedno s predavanji logike profesorja filozofije-fizike.

Prve profesorje matematike so na tedanjem slovenskem narodnostnem ozemlju zaposlili v Celovcu, kjer je bil jezuitski kolegij tudi najbolj premožen. Komaj pozneje so uvedli pouk matematike v Gorici, v Ljubljani pa šele jeseni 1704. Zaradi pomanjkanja gmotnih sredstev je kolegijema v Gorici in Ljubljani včasih zmanjkalo denarja za vzdrževanje profesorja matematike. Tako vodilni slovenski matematik-astronom Avguštin Hallerstein (* 1703; † 1774) med šolanjem v Ljubljani ni poslušal predavanj matematike, razen nekaj drobcev med poukom fizike v drugem letniku filozofskih študijev. Prvi profesor matematike v Trstu je bil Rečan Franjo Orlando (* 1723; † 1784), ki se je, seveda, kraju primerno posvečal predvsem matematičnim problemom plovbe. Imel je številne slovenske dijake, vzgojil pa je tudi prvovrsten profesorski naraščaj, med njim predvsem tržaškega plemiča Luigija Capuana (* 1748; † 1796), ki je med prvimi svoje dijake na Reki spraševal po Boškovićevih (* 1711; † 1797) izpitnih tezah (Martinović, 2015). V Mariboru so zaposlili številne matematike, vendar je bil jezuitski red ukinjen, predno so v Mariboru lahko formalno ustanovili katedro za matematiko.

Sprva so bile v avstrijski in češki provinci katedre fizike v drugem letniku filozofskih študijev pogostejše od kateder matematike v prvem, saj ponekod ni bilo denarja za vzdrževanje profesorja matematike. Po terezijanskih reformah sredi 18. stoletja so postale matematične vede eden temeljev izobraževanja, tako da so najpomembnejše univerze na Dunaju, v Pragi, Gradcu in



Slika 1: Število kateder fizike znotraj filozofije in katedre matematike poldrugih tisoč profesorjev teh ved iz avstrijske in češke jezuitske province glede na desetletja njihovih rojstev.

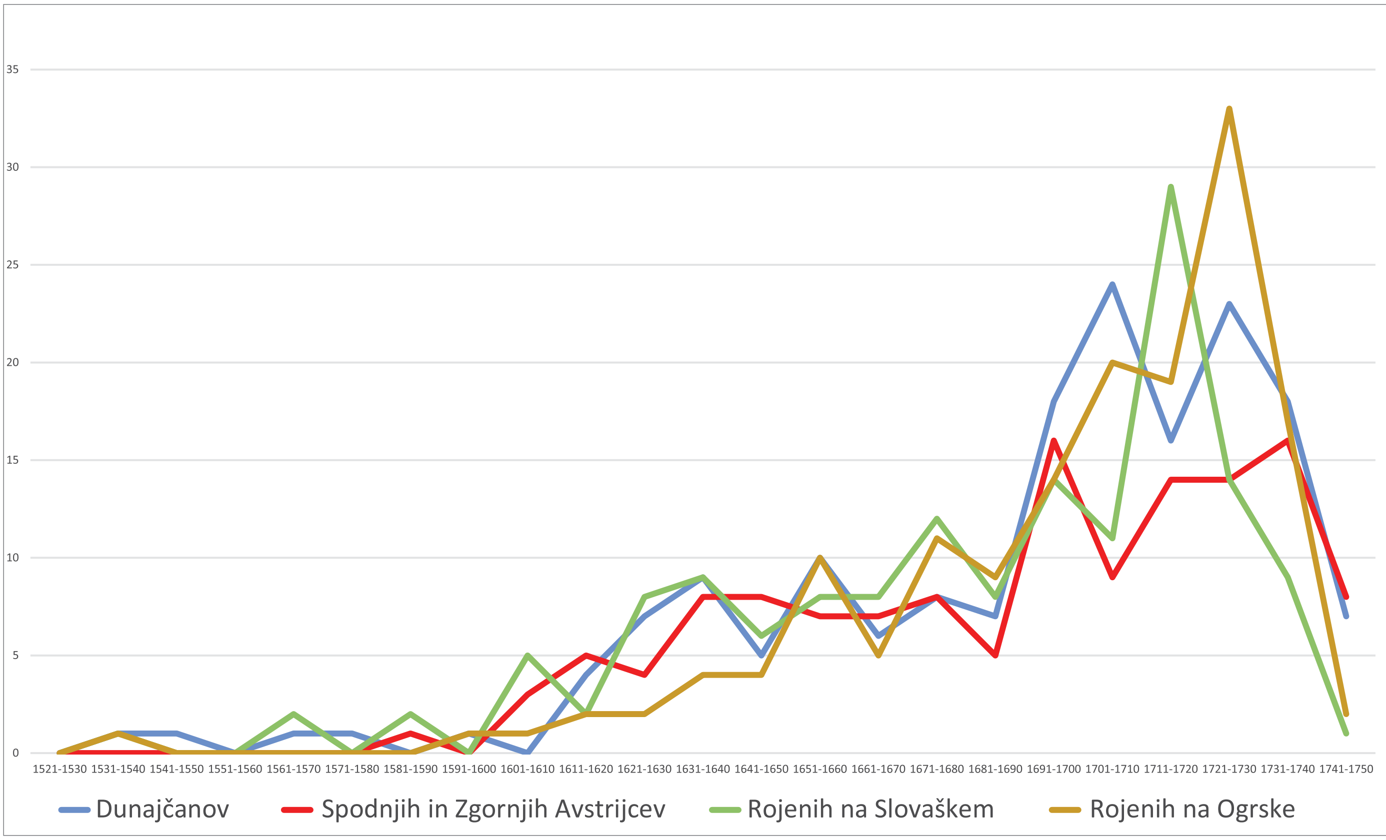
slovaški Trnavi poleg profesorjev osnov matematike zaposlovali **še profesorj**e višje matematike, ki so vodili eno- ali dvoletno specializacijo uporabne matematike za posebej nadarjene dijake. Seveda vsi specializirani matematiki pozneje niso postali profesorji matematike, saj ni bilo toliko predavateljskih mest; po modernizaciji države ob terezijanskih reformah so znanje matematike potrebovali tudi v številnih drugih poklicih. Poklicni matematiki so vodili tudi šolski matematični kabinet, v zadnjih letih pa so šole ustanavljale še službe za geometre, ki so se bavili s triangulacijami v prostoru po vzoru na meritve poldnevnika rimskega matematika Boškovića in njegovega prijatelja J. Liesganiga (* 1719; † 1799); Liesganig je meril tudi na slovenskem Štajerskem. Tedanji pouk matematike je dejansko vseboval tudi vse izračunljive dele meteorologije, astronomije in fizike, vključno z matematično mehaniko in geometrijsko optiko. Jezuiti so v češki in avstrijski provinci v dveh stoletjih zaposlili poldrugih tisoč različnih profesorjev matematike in/ali fizike, med katerimi jih je 408 predavalo matematiko.

Poreklo srednjeevropskih matematikov

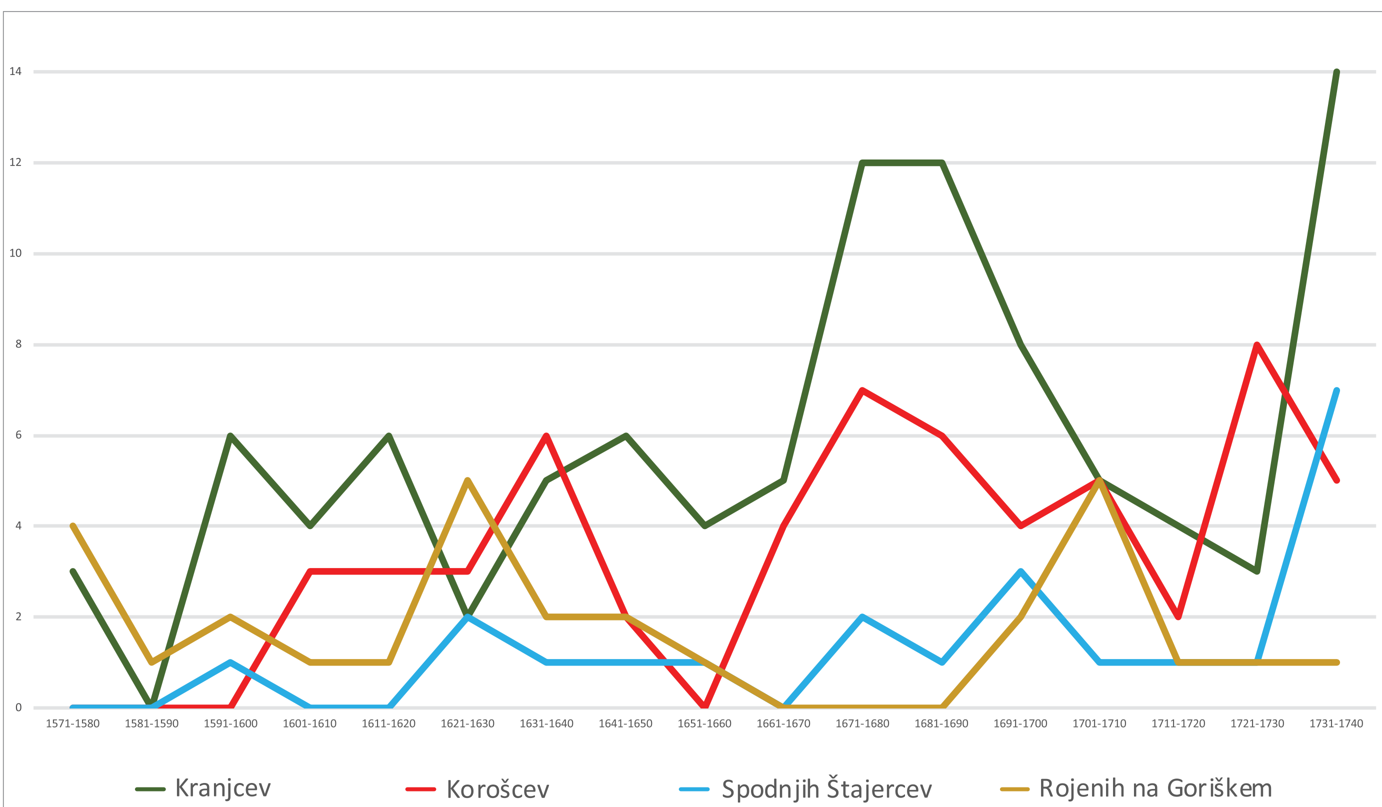
Za domače dežele jezuitskih profesorjev matematike in fizike imamo tiste, v katerih so se rodili. Med habsburškimi matematiki so sprva prevladovali Dunajčani. Ko so Turki postopoma opuščali svoje postojanke na Ogrskem, Slovaškem in Transilvanskem, so se še tam razvijale šole predvsem v Trnavi, Košicah in Cluju. Na njih so se šolali in predavali tudi matematiki slovenskega rodu. Med njimi je bil posebno znamenit ljubljanski matematik-astronom Franc pl. Breckerfeld (* 1682; † 1744), ki je veliko objavljal o geometriji sončnih ur na Slovaškem in v Transilvaniji ter izšolal številne profesorje matematike. Po turških porazih so v 18. stoletju med jezuitskimi matematiki avstrijske province začeli prevladovati strokovnjaki, rojeni na Ogrskem in Slovaškem. Med matematiki, rojenimi v deželah s slovenskim življem, so po številu prevladovali Kranjci, vendar so glede na množico objavljenih del zaostajali za Korošci. Pomembnost matematikov in fizikov lahko ocenimo od 1 do 9 glede na odmevnost njihovih ohranjenih del, glede na leta predavanja matematike, pomembnost šol, v katerih so predavali, morebitni plemiški rod in morebitne druge pomembne službe poleg profesure matematike oziroma fizike. Po teh kriterijih je pomen koroških matematikov in fizikov zelo blizu njihovim kranjskim sodobnikom, Hrvati pa oboje celo prekašajo.

Kje so se učili matematike in kje so jo predavali?

Sprva se je večina habsburških matematikov in fizikov šolala na Dunaju, v Rimu in Antwerpnu. Ko se je uveljavil pouk matematičnih vsebin v Gradcu konec 16. stoletja, je večina nadarjenih domačih matematikov študirala tam. Komaj v desetletju pred prepovedjo jezuitov je pogostost študija na Dunaju postala primerljiva z graškim. Poglavitno izobraževalno središče ogrske polovice Habsburške monarhije je bilo v danes slovaški Trnavi. Trnavski matematiki in astronomi so imeli precej boljši astronomski observatorij od graškega, kljub temu pa niso privabili toliko matematičnih talentov, kot se je to posrečili graškim profesorjem. Med najpomembnejšimi trnavskimi astronomi je bil Solkanec Bernard Čeferin (Zefferin, * 1628; † 1679), profesor matematike na univerzi v Trnavi leta 1660/61 in 1661/62.



Slika 2: Najpogostejše domače dežele poldrugih tisoč profesorjev filozofije in matematike iz avstrijske in češke jezuitske province.



Slika 3: S Slovenci poseljene domače dežele poldrugih tisoč profesorjev fizike in matematike iz avstrijske in češke jezuitske province glede na desetletja, v katerih so bili rojeni.

Na Kranjskem rojeni profesorji matematike in fizike so predavali več od svojih sosedov. Takoj za njimi so bili koroški in hrvaški matematiki; slednji so se uveljavili predvsem v desetletju pred prepovedjo jezuitov. Konec 16. stoletja so prevladovali profesorji, rojeni na Goriškem, sredi 17. stoletja pa so se uveljavili številni matematiki, rojeni na slovenskem Spodnjem Štajerskem.

Ohranjena dela

Kot je mogoče pričakovati, so srednjeevropski matematiki največ pisali o svojem pedagoškem delu v obliki učbenikov in izpitnih tez, ki so jih dijaki zagovarjali ob končnih izpitih v poletnih mesecih junija, julija ali avgusta. Te izpite je mogoče imeti za svojevrstne prednike sodobne mature, morda pa celo izpitov za pridobivanje nižjih akademskih stopenj, čeravno so mladeniči po tedanjih merilih po izpitih postali magistri z možnostjo predavanja na nižjih šolah. Tedanje šestletne nižje šole, imenovane tudi nižji študiji, so bile podobne sodobnim srednjim šolam. Za matematike željne mladenke tisti čas, žal, še ni bilo poskrbljeno.

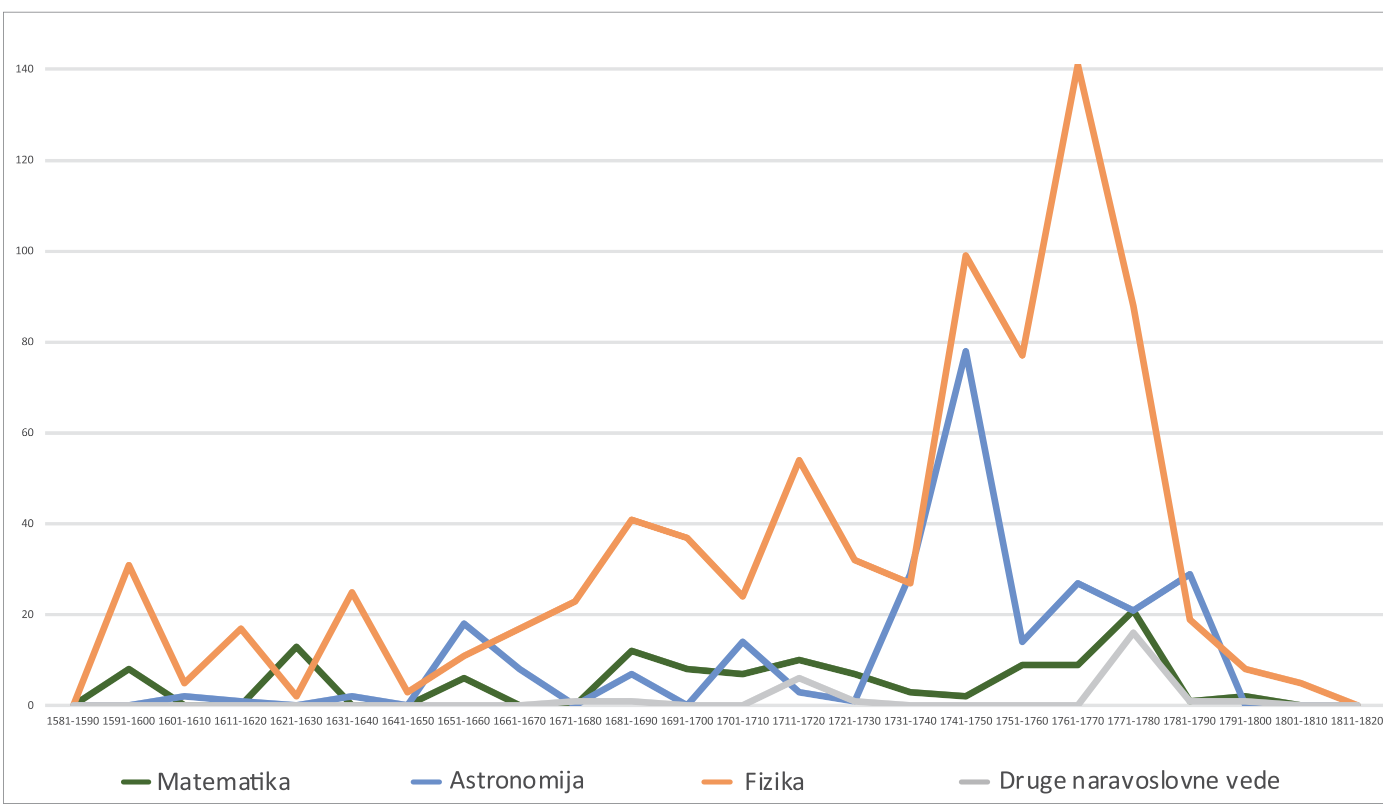
Med panogami matematike je sprva pod Claviusovim in Kobavovim vplivom prevladovala kronologija, saj je bila gregorijanska reforma koledarja pravzaprav prvi odmeven uspeh jezuitskih matematikov. Sredi 17. stoletja se je močno uveljavilo pisanje knjig o geometriji, takrat in še stoletje pozneje pa so jezuiti zelo radi pisali tudi o matematični fiziki. Sredi 17. stoletja so precej objavljali o trigonometriji v povezavi z ustreznimi tabelami trigonometričnih funkcij in logaritmov. Dela o algebri in infinitezimalnem računu so postala bolj priljubljena komaj v drugi polovici 18. stoletja po Boškovićevemu zgledu.

Pod vlivom graške univerze so sprva sredi 17. stoletja o matematiki največ pisali spodnještajerski jezuiti, ki jim je bil Gradec najbližje in je bil zanje tudi politično-upravno središče. Po začetku predavanj matematike v Celovcu je konec 17. stoletja poskočilo število koroških piscev knjig o matematiki. Po ustanovitvi katedre za matematiko v Ljubljani so začeli o matematiki pisati tudi številni Kranjci. Goričani so prispevali nekoliko manj matematičnih del. Prispevek hrvaških matematikov ni bil zanemarljiv, čeravno so jezuiti matematiko predavali zgolj zadnja tri leta v Zagrebu.

Matematika je veljala za najtežjo vedo. Zato se je ohranilo precej manj matematičnih knjig in razprav v primerjavi s knjigami in članki o fiziki ali opazovalni astronomiji, čeravno je bilo piscev matematičnih del celo nekoliko več od piscev o astronomiji. Maksimilijan Hell (* 1720; † 1792) in drugi astronomi so namreč veliko objavljali v svojih lastnih revijah. Tako so matematiki v povprečju objavili le nekaj več kot dve knjigi na posameznega strokovnjaka, v večini primerov pa je šlo za odmevna dela jezuitskih učenjakov.

Uveljavljanje novih matematičnih metod v Srednji Evropi

Poglavitni jezuitski matematik slovenskega rodu je bil Radgončan Ernst Vols (* 1650; † 1720), ki je v svojem učbeniku obravnaval tabele logaritmov Henrija Briggsa (* 1561; † 1630) in Adriana Vlacqa (* 1600; † 1666). Na koncu tridelnega učbenika je objavil še lastne tabele (Vols, 1714) kot svojevrsten Vegov predhodnik.

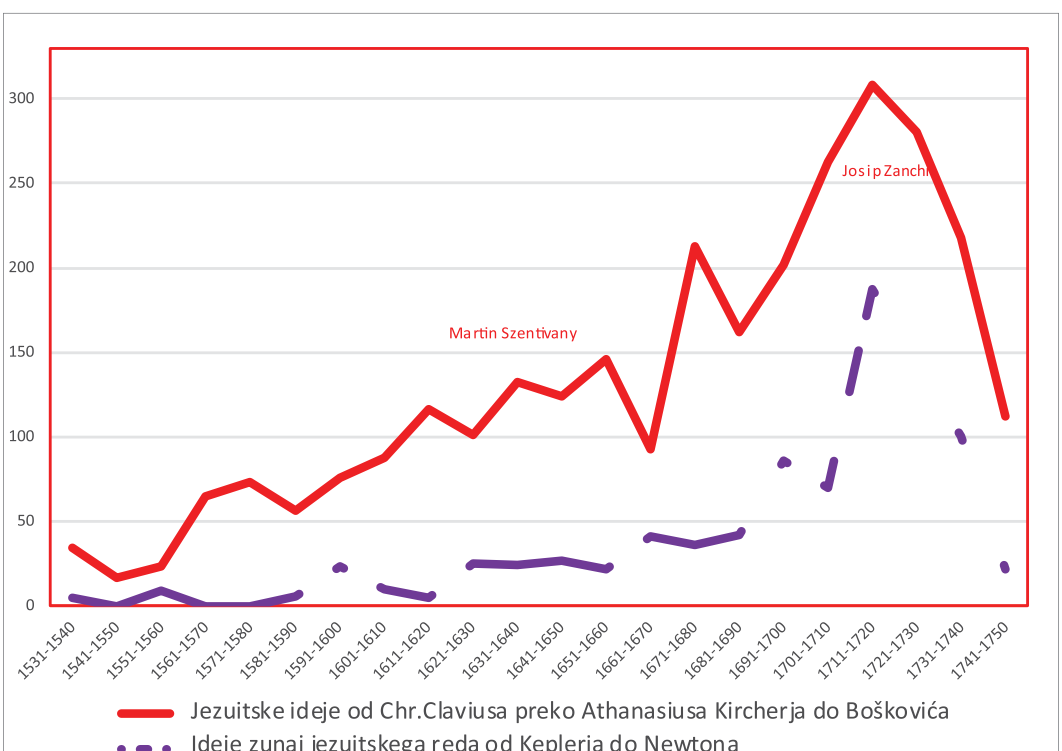


Slika 4: Množice ohranjenih del poldrugih tisoč profesorjev matematike in fizike iz avstrijske in češke jezuitske province, razporejene po desetletjih zapisa.

S svojimi posodobljenimi učbeniki je Vols nadomestil vplive Claviusovega naslednika, rimskega matematika tirolskega rodu Grienbergerja. Volsova matematika je prevladovala na habsburških šolah vse do nastopa Boškovićevih novosti v drugi polovici 18. stoletja. Seveda so vmes graški in drugi jezuiti pogosto ponatiskovali tudi dela svojih sobratov, kot so bili Honorat Fabri (Faber, * 1606/7; † 1688), profesor matematike v Rimu Paolo Casati (* 1617; † 1707), Franceso Lana Terzi (* 1631; † 1687), dunajsko-graški matematik Paul Hansiz (* 1645; † 1721) in Noël Regnault (* 1683; † 1762) s pariškega kolegija Louis-le-Grand. Med redkimi redovniki zunaj jezuitskega so v Košicah ponatisnili dela bavarskega razsvetljenca avguštinca Eusebiusa Amorta (* 1692; † 1775), ki je hvalil Kopernikov nauk.

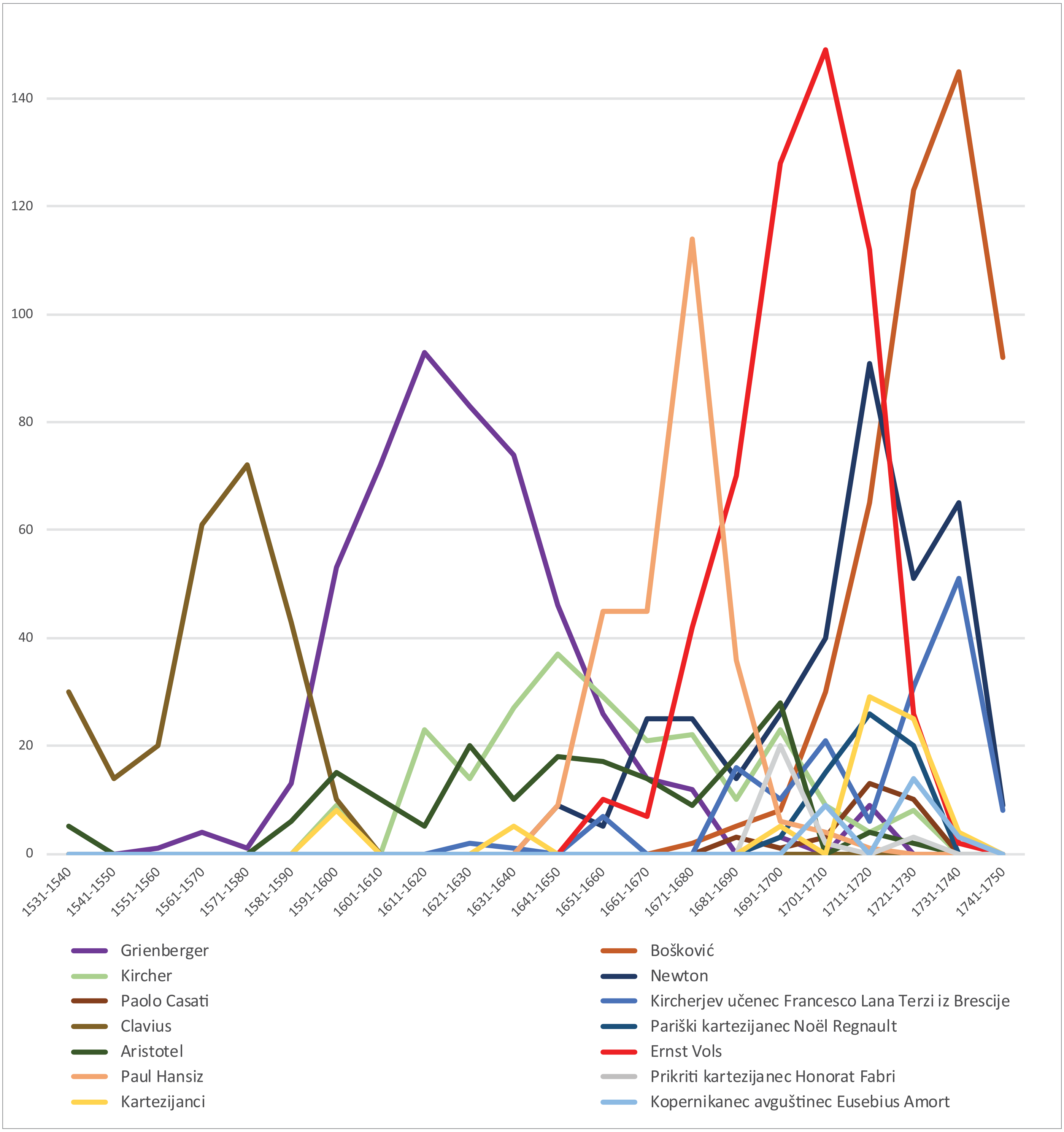
Ideje jezuitskih matematikov lahko opredelimo glede na matematike, ki so jih najpogosteje citirali v svojih ohranjenih delih. Če ni ohranjenih del ali pa v njih ni merodajnih citatov, ideje jezuitskega matematika istovetimo z idejami profesorja, pri katerem je specializiral matematične vede po magisteriju iz filozofije. Če specializacije ni opravil, ni zapustil ohranjenih del in ni imel posebno znamenitih učencev, potem lahko samo še domnevamo, da je prevzel ideje svojega profesorja matematike v prvem letniku filozofskih študijev. Takšno preštevanje pokaže, da so bili jezuitski matematiki svojevrstni »lokalpatrioti« in so najbolj zaupali matematikom iz svojega reda. To se jim je kmalu maščevalo, saj so vztrajali pri tradicionalnih geometrijskih postopkih in so premalo pozornosti posvečali novostim infinitezimalnega računa.

Najbolj vplivni jezuitski matematiki so bili seveda profesorji matematike v Rimu na slovitem *Collegio Romano*, kjer so se zaporedoma zvrstili Ch. Clavius, Ch. Grienberger (* 1564; † 1636), Athanasius Kircher (* 1601; † 1680), Casati in Dubrovničan Rudjer Bošković. Bošković se je med prvimi zavedal pomanjkljivosti jezuitskega sistema matematičnega izobraževanja, zato je kot mladi tridesetletni profesor objavil razpravo o naravi in uporabi neskončno velikih in neskončno majhnih veličin 28. 7. 1741 (Bošković, 1741). Njegov rimski profesor matematike Horacij Borgondi je postal rektor rimskega kolegija, pri tem pa je za svojega naslednika na katedri za matematiko imenoval Boškovića, kar je bilo zavoljo njegove mladosti prvorazredno presenečenje, podobno kot sedem desetletij prej imenovanje še malo mlajšega Isaaca Newtona za profesorja matematike v Cambridgeu. Seveda z bistveno razliko: medtem ko je Newton predaval zelo malo, je imel Bošković že ob začetku svojih matematičnih predavanj 7. 1. 1740 okoli sedemdeset študentov, njegovo predavalnico pa so pogosto obiskovale tudi osebe iz družbene in cerkvene smetane tedanjega Rima. Medtem ko se je Newton osredotočil predvsem na raziskovalno delo, je bilo poučevanje matematike bistven del Boškovićevih prizadevanj. Zaradi svoje pomanjkljive izobrazbe v infinitezimalni analizi je bil vseskozi tarča kritik vodilnih pariških matematikov Jeana le Ronda D'Alemberta (* 1717; † 1783), Pierra Simona Laplacea in Josepha Louisa Lagrangea. Zato je hotel svojim učencem omogočiti obetavnejšo pot na matematični Parnas. Med Boškovićevimi prvimi zasebnimi študenti je bil bodoči visoki cerkveni dostojanstvenik markiz Zambeccari leta 1737, pozneje pa dubrovniški rojak Brnjo Zamagna (Bernard, * 1735; † 1820). Zamagna je Boškoviću pogosto kar v domačem narečju navrgel opozorilo iz študentskih klopi, kadar je Boškovića v predavateljskem zanosu zaneslo v matematične višine zunaj dojemanja poslušalcev; hrvaški narečni medklic je bil seveda nujen tudi zato, da ga ostali slušatelji ne bi razumeli. Zaradi svoje jezuitske izobrazbe in usmerjenosti v uporabno matematiko pa je Bošković ostal zvest geometriji in ne analizi svojih pariških tekmecev. Matematična predavanja je Bošković kot dodelano obliko Zambeccarijevega zaključnega izpita objavil v treh knjigah v Rimu leta 1752 in 1754, po obisku Ljubljane in Dunaja aprila 1757 pa so njegove novosti sprejeli predvsem profesorji matematike v Habsburški monarhiji (Marković, Bošković, 1968).



Slika 5: Spreminjanje matematičnih in fizikalnih idej poldrugih tisoč jezuitskih profesorjev matematike-fizike iz avstrijske in češke province, razporejenih po dekadah rojstva profesorjev.

Bošković s svojo posodobitvijo jezuitskega pouka matematičnih vsebin ni povsem uspel v Rimu, toliko bolj pa se je uveljavil v Habsburški monarhiji, kjer se je večkrat osebno mudil v Trstu, Gorici in Ljubljani, končno pa je prevzel katedro za matematiko na tedaj habsburški univerzi v Pavii. Ti obiski so mu prinesli veliko podporo lokalnih matematikov, tako da je koroški strokovnjak Janez Krstnik Pogrietschnig (Pogričnik, * 1722; † po 1782) leta 1766 v Ljubljani prvič objavil Boškovićevim novostim posvečene izpitne teze. Dve leti pozneje je objavil še ponatis poglavitne Boškovićeve knjige Teorija filozofije narave, osem let po njeni prvi dunajski izdaji in le tri leta po popravljenem beneškem ponatisu. Pogričnik je bil rojen v Radišah (Radsberg) 10 km jugovzhodno od Celovca na tedanjem slovenskem narodnostnem ozemlju. Veliko je objavljal pri kranjski Družbi za kmetijstvo in koristne umetnosti, ki je njega dni združevala vse domače izobražence.



Slika 6: Zagovorniki poglavitnih matematikov med jezuiti avstrijske in češke province, razporejeni po desetletjih rojstev.

Zaključek

Matematika ima več plasti in njena zgodovina prav tako. Temeljne ideje novoveške matematike so se morda res kovale v Parizu in Londonu, kljub temu pa tudi prispevek naših srednjeevropskih krajev ni bil zanemarljiv. Predvsem pa je bila od sprejemanja novih matematičnih idej odvisna njihova veljava, tako da so stotine srednjeevropskih matematikov vključno s slovenskimi pogosto igrale odločilno vlogo pri uveljavljanju novih matematičnih prijemov. Jurij Vega je bil najboljši med njimi, kljub temu pa le eden izmed množice tisočerih jezuitskih dijakov, ki so svoje šolsko matematično znanje uveljavili po vsem svetu. Seveda Vega v svojih matematičnih učbenikih domala nikoli ni pozabil narisati Boškovićeve krivulje odvisnosti sile teže od razdalje med delcema, ki jo je spoznal že v ljubljanskih šolskih klopeh pri nekdanjih jezuitih. Pri občudovanju profesorja matematike Boškovića je vztrajal še dolgo po Boškovićevi smrti, kot so počeli domala vsi matematiki in fiziki v srednji Evropi z izjemo praškega matematika-astronoma Josepha Steplinga (* 1716; † 1778) in dunajskega dvornega astronoma slovaškega rodu Maksimilijana Hella. ■

Literatura

Bošković, R. (1741). *De Natura et usu infinitorum & infinite parvorum. Dissertatio habita in Collegio Romano Societatis Jesu*. Romae: Komarek.

Marković, Ž., Bošković, R. (1968). Zagreb: Izdavački zavod Jugoslavenske akademije, 1. del, str. 69, 93, 95, 167, 259; R. Bošković, *Trogonometriae sphericae constructio*. Romae: Komarek, 1737; R. Bošković, *Elementorum (Universae) Matheseos.* Romae: Generoso Salomoni, 1752, 1754, 3. del, str. 297-468.

Martinović, I. (2015). The Concept of the *Infiniti mysteria* in Bošković's Geometrical Investigations, *Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine,* letnik 41/81, številka 1, str. 85, 87.

Vols, E. (1714). *Institutionum mathematicarum libri tres*, Dunaj: Ioannis Scalpro Iacobi, 1. del, str. 10, 138; 3. del, str. 337.

Predstavitev nove knjige: **Iteracije in fraktali**

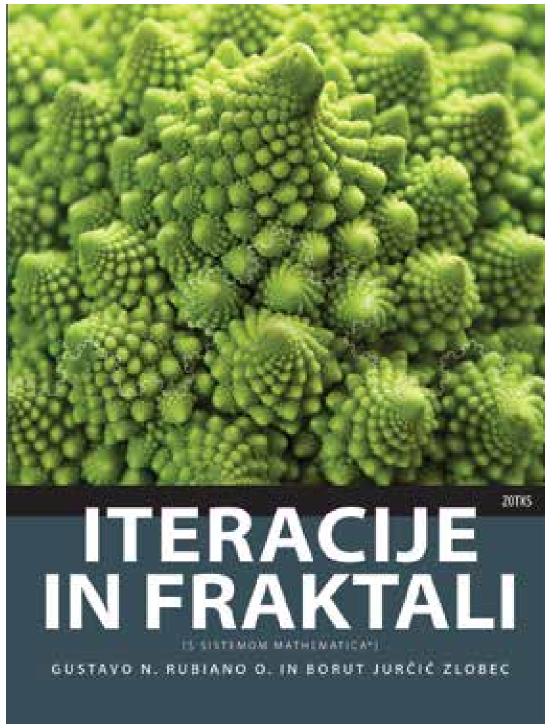
Gustavo N. Rubiano O. in Borut Jurčič Zlobec

Zveza za tehnično kulturo Slovenije

Ljubljana, 2016

210 strani

Cena: 25,00 EUR



V založništvu Zveze za tehnično kulturo Slovenije je izšla matematična monografija z naslovom Iteracije in fraktali [s sistemom Mathematica], katere avtorja sta Gustavo N. Rubiano O. in Borut Jurčič Zlobec. Delo obravnava zelo privlačno strukturo, ki se imenuje fraktal. Fraktal je sebi podobna množica, katere posamezni sestavni deli so podobni celoti. Sebipodobnost omogoča, da z dokaj enostavnim opisom sestavljamo vedno bolj zapletene strukture. Omenjeno lastnost s pridom uporablja narava, kjer lahko najdemo veliko sebi podobnih struktur (snežinka, vrtnina rimski brokoli, drevesni sistem vej, listi praproti, vaskularni sistem pljuč). V matematiki se fraktali pojavijo zelo pozno. Prvič so nanje naleteli proti koncu 19. stoletja, ko so konstruirali zvezne, a nikjer odvedljive funkcije. Matematična definicija fraktala je bila postavljena leta 1975 in razcvet sodobne fraktalne geometrije je dejansko omogočilo šele računalništvo. Osnovni postopek, s pomočjo katerega avtorja konstruirata in predstavljata fraktale, je iteracija. Sama vizualizacija fraktalov je opravljena s programskim orodjem Mathematica. Knjiga je napisana zelo skrbno, postopno in matematično korektno ter vsebuje veliko vsebin, ki so še posebej zanimive za mlade raziskovalce v srednji šoli in njihove mentorje. Zato odločitev za njeno predstavitev v reviji Matematika v šoli.

Vsebina. Uvodoma avtorja opišeta fraktal in predstavita klasične primere fraktalov: Cantorjevo množico, Kochovo snežinko, trikotnik Sierpinskega. Vpeljana je fraktalna dimenzija, ki omogoča matematično definicijo fraktala. Drugo poglavje obravnava iteracije, s pomočjo katerih so v množici kompleksnih števil (ravnini) konstruirani različni fraktali. Pri tem je uporabljena znana Newtonova tangentna metoda. V tretjem poglavju preko dinamike razvoja populacij spoznamo osnove dinamičnega procesa, ki se lahko vede predvidljivo ali kaotično. Ker naravna rast (eksponentna funkcija) seveda ne more trajati v nedogled, se v praksi za modeliranje omejene rasti populacij uporablja logistična enačba. Preko modificirane logistične enačbe pridemo do Mandelbrotove množice, za katero se je ustvarilo mnenje, da je najbolj zapleten fraktalni objekt v ravnini. V četrtem poglavju je natančno opisana anatomija te množice in v petem poglavju so predstavljene Juliajeve množice. Posebej velja izpostaviti, da omenjeni poglavji krasijo galerije čudovitih slik. Omenimo, da avtorja vse fraktalne objekte prikažeta v črno-beli tehniki. Pri tem je posebej razvidna bogata struktura Juliajevih množic. Morda v delu pogrešamo kakšno barvno sliko. Sledita poglavji, kjer sta predstavljena še dva druga pristopa k fraktalni geometriji: Lindenmayerjevi sistemi in iterativni funkcijski sistemi afinih preslikav. Lindenmayerjevi sistemi, poimenovani po biologu, ki jih je prvi uporabil za modeliranje rastlin, so del računalniške grafike in omogočajo lepe konstrukcije fraktalov iz narave (predvsem drevesa in praproti). Tukaj na primer spoznamo krivulji (zmajeva in Gosperjeva krivulja) s fraktalno dimenzijo 2, čudni krivulji, ki zapolnita prostor v ravnini. Zaključno osmo poglavje je namenjeno filotaksi. Filotaksa nam na primer pojasnjuje razporeditve listov pri rastlinah, razporeditve cvetov (popkov, semen) pri socvetjih in razporeditve lusk pri storžih. Zakaj pri filotaksi naletimo na Fibonaccijevo in Lucasovo zaporedje? Zakaj se cvetovi (semena) v socvetjih razporejajo v obliki različnih spiral? Kje se pri vsem tem skrivajo verižni ulomki in znamenito razmerje zlatega reza? Se narava podreja nekakšnemu mističnemu načelu, da se stvari tako čudovito matematično ujemajo? Avtorja utemeljita, da resnična lepota razmerja zlatega reza v naravi nastopi iz praktičnih razlogov.

Uporabnost z vidika učitelja matematike. Kot strokovno literaturo dano delo priporočam v branje učiteljem matematike v srednji šoli in tudi v višjih razredih osnovne šole. Pri tem bi posebej izpostavil tri vidike uporabe.

Avtorja k predstavitvi vsebine pristopita na raziskovalen način, ker imata v mislih mlade raziskovalce in njihove mentorje, za katere je knjiga lahko uporaben vir pri izbiri tem za raziskovalne naloge. Zato za razumevanje večine tematike zadošča že srednješolska matematika. Skoraj vse slike in fraktali v knjigi so opremljeni s programsko kodo, ki je zapisana s programom Mathematica, da lahko bralec tudi sam preiskuje in ustvarja nove fraktale. V knjigi so tudi vsebine, primerne za raziskovalne naloge v osnovni šoli.

Določene zanimive lastnosti so lahko tematika ali iztočnica za matematične krožke in matematične delavnice. Poleg samih fraktalnih struktur izpostavimo še tematiko zlatega reza, verižnih ulomkov in Evklidovega algoritma, modulsko poštevanko, tri vrzeli in Fibonaccijevo zaporedje ter Fordove krožnice. Zelo zanimivi so Fareyevi nizi ulomkov, ki imajo lepo geometrijsko konstrukcijo in kopico nenavadnih lastnosti. Tako osmislijo seštevanje ulomkov, kjer iz ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ dobimo ulomek $\frac{a+c}{b+d}$. Omenimo, da Fareyev niz $F(n)$, kjer je n naravno število, tvorijo okrajšani ulomki z intervala [0,1], katerih imenovalec ne presega n. Na primer niz $F(4)$ sestavljajo števila $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$. Računalniško podkovani učitelji se lahko pri krožkih in delavnicah lotijo tudi vizualizacije fraktalov, še posebej fraktalnih krivulj z uporabo t. i. želvje grafike.

Zadnji vidik je vključevanje fraktalnih struktur in drugih primerov iz knjige pri pouku matematike kot motivacijskih primerov, zanimivosti ali primerov uporabe pri utrjevanju snovi. Skratka za popestritev raznih matematičnih vsebin pri pouku. Fraktali se lahko naravno vključijo k vsebinam, ki obravnavajo vzorce in zaporedja. Začetne konstrukcije fraktalov, kot sta Kochova snežinka ali trikotnik Sierpinskega, se lahko predstavijo pri vsebinah o geometrijskih likih, tematiki preštevanja objektov, računanju ploščin, ugotavljanju potenčnih povezav. V srednji šoli jih lahko naravno uporabimo pri obravnavi geometrijske vrste. Sama iteracija je kot zanimiv primer lahko uporabljena pri obravnavi odvoda in enačbe tangente.

Zanimivost. Ste vedeli, da je zaporedje 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 … (rekurzivno podano kot $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 2$) z imenom Fibonaccijevo zaporedje poimenoval francoski matematik Lucas v 19. stoletju? Če v rekurziji za Fibonaccijevo zaporedje spremenimo začetno vrednost $a_0 = 2$, dobimo Lucasovo zaporedje 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, … Analiza pri štetju parov spiral pri borovih storžih je pokazala, da so v 95 % v Fibonaccijevem zaporedju, v 4 % v Lucasovem zaporedju in 1 % je neopredeljenih. Ne samo matematika, tudi narava očitno pozna statistične stopnje značilnosti! ■

Dominik Benkovič,
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2016

Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Uvod

V letu 2016 je potekalo že 50. državno srečanje mladih raziskovalcev v Murski Soboti. Na končnem izboru za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 10 raziskovalnih nalog. Komisijo so sestavljali Polona Repolusk, Mateja Grašič, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec. Komisija je izbrala šest nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Predstavljene so bile štiri naloge iz teorije števil, tri geometrijske, dve iz diskretne matematike, ena iz kombinatorike.

Poleg zmagovitih nalog omenimo tudi nalogo, ki ni dosegla najvišjega priznanja, ki pa bi ga lahko, če bi mentor skrbneje usmerjal učence k matematičnemu razmišljanju.

Kako lahko raziskovalne naloge še izboljšamo

Tu bomo omenili nalogo z naslovom *Oddaljenosti in krivulje v ravnini*. Naloga govori o geometrijskem mestu točk, katerih vsota ali razlika razdalj od dveh danih točk je konstantna. V nalogi so problem posplošili tudi za primere, ko je eno od točk nadomestila premica oziroma krožnica. Pri tem so naleteli na krivulje drugega reda, elipso, hiperbolo in parabolo.

Naloga je bila skrbno narejena. Učenci so pokazali, da obvladajo programsko orodje Geogebra. Motilo je edino to, da niso opazili, da je mogoče en problem prevesti na drugega tako, da ni treba vedno znova ponavljati celotnega izračuna. Na primer, geometrijsko mesto točk, ki so enako oddaljene od krožnice in točke lahko prevedemo na geometrijsko mesto točk, katerih razlika razdalj od dane točke in središča krožnice je enaka polmeru krožnice, če točka leži zunaj krožnice, in katerih vsota razdalj je enaka polmeru krožnice, ko se točka nahaja znotraj krožnice.

Podobno bi lahko pojem razlike razdalj od točke in premice prevedli na enako oddaljenost od točke in primerno izbrane njej vzporedne premice.

Naloge, ki so dosegle zlata priznanja

Najvišja priznanja so dosegle štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

1. Paposova veriga v arbelosu
   Avtorica: Tijana Gajanović
   Mentor: Vesna Harej
   Šola: OŠ Dravlje, Ljubljana

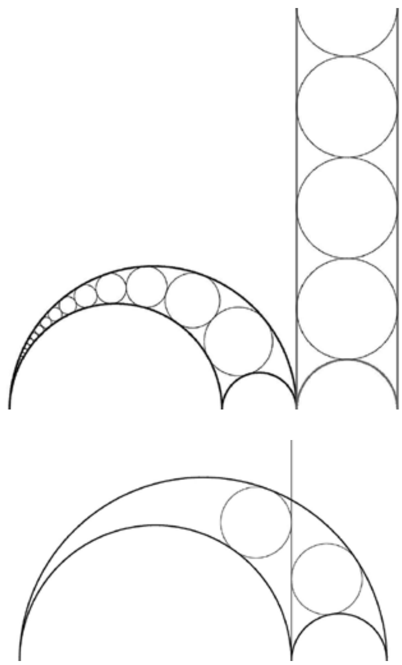
2. Magični kvadrati
   Avtorica: Ida Vavpetič
   Mentor: Igor Prešern
   Šola: OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana
3. Origamika
   Avtorji: Sara Maraž, Tjaš Božič, Miha Torkar
   Mentor: Alojz Grahor
   Šola: Škofijska gimnazija Vipava
4. Večkotniška Mersenova števila
   Avtor: Tim Salecl Žižek
   Mentor: Andreja Hočevar
   Šola: Gimnazija Poljane, Ljubljana

Kratek pregled nalog, ki so dosegla zlata priznanja

Paposova veriga v arbelosu

V raziskovalni nalogi se je avtorica ukvarjala z geometrijskim likom, ki se imenuje arbelos, kar po grško pomeni čevljarski nož. Ta lik sta poznala že grška matematika Arhimed in Papos Aleksandrijski.

Arbelos je lik, omejen s tremi polkrožnimi loki, tako da je premer največjega enak vsoti premerov manjših dveh polkrožnih lokov. Avtorica je pregledala več zanimivih krožnic, ki so včrtane v arbelos. Med drugim je govorila o Arhimedovih dvojčkih, Paposovi verigi, Apolonijevi, Bankoffovi in Schochovi krožnici. Konstrukcije je narisala s programskim orodjem Geogebra.



Slika 1: Zgoraj je prikazana Paposova veriga, spodaj pa Arhimedova dvojčka

Zanimivo je, da je polmer Arhimedovih dvojčkov enak $ab/(a + b)$, kjer sta a in b polmera manjših krožnic arbelosa. Slika 1 na levi prikazuje Paposovo verigo in inverzijo verige preko primerno izbrane krožnice.

Naloga je opremljena z mnogo lepo izdelanimi risbami s pomočjo programskega orodja Geogebra.

Magični kvadrati

V povzetku naloge je med drugim zapisano:

V nalogi sem raziskovala magične kvadrate. Ogledala sem si zgodovino magičnih kvadratov in znana odkritja na tem področju. Raziskala sem osnovne lastnosti magičnega kvadrata in števil, ki jih vsebuje. Posvetila sem se lastnostim, ki so mi omogočile lažje štetje magičnih kvadratov. Izvedela sem, s kakšnimi posebnimi magičnimi kvadrati se matematiki ukvarjajo in kakšne probleme so si zastavili. Zelo me je zanimal magični kvadrat iz popolnih kvadratov. (Vavpetič I., 2016)

Avtorica je v svoji nalogi uporabljala programsko orodje Mathematica.

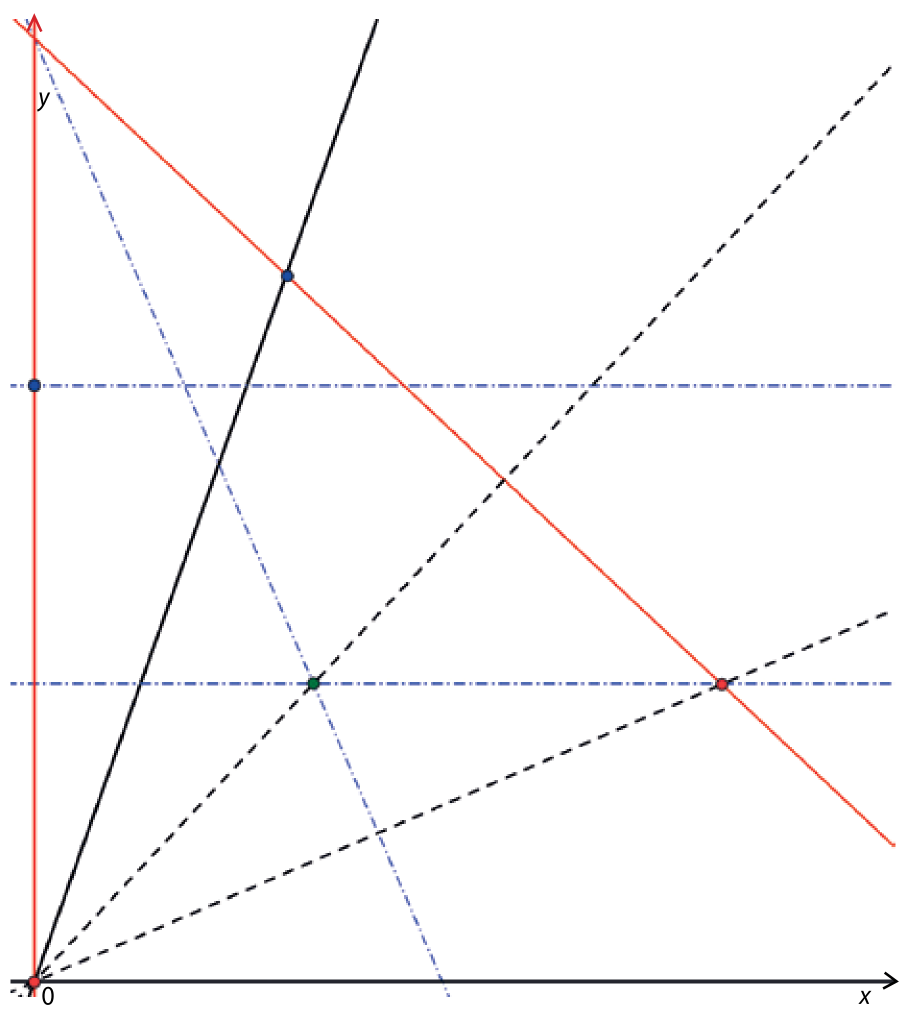
Med drugim je s pomočjo tega orodja iskala magične kvadrate reda 3 x 3. Ugotavljala je naraščanje števila le-teh v odvisnosti od njihovega sredinskega števila.

V nalogi je avtorica pokazala, da obvlada programsko orodje Mathematica. Njen jezik je matematično korekten in tekoč. Naloga je lep izdelek.

Origamika

Nalogo predstavimo kar z njenim povzetkom.

Origami je japonska umetnost zgibanja papirja. Posebna oblika origamija je matematični origami, pri katerem prepogibamo list papirja (model ravnine) in proučujemo matematične lastnosti objektov v ravnini,



Slika 2: Trisekcija kota

ki pri tem nastanejo (točke, premice). Kazuo Haga je matematični origami poimenoval origamics, v nalogi pa predlagamo pojem origamika. Dokazano je, da je matematični origami močnejše orodje, kot sta neoznačeno ravnilo in šestilo.

*Tako je bil na primer s prepogibanjem papirja rešen problem podvojitve kocke in problem razdelitve kota na tretjine, saj je s prepogibanjem papirja mogoče rešiti kubično enačbo. Cilj raziskovalne naloge je postaviti in dokazati čim več matematičnih hipotez (matematičnih izzivov), ki izvirajo iz prepogibanja lika enakostraničnega trikotnika. V nalogi je raziskanih in dokazanih preko trideset matematičnih izzivov. (*Maraž, S., Božič, T., Torkar, M., 2016)

Med drugim so avtorji tudi pokazali, da obvladajo programsko orodje Geogebra. Naloga si zasluži vse priznanje.

Kot zanimivost bomo razložili konstrukcijo trisekcije kota s pomočjo origamike. S šestilom in neoznačenim ravnilom takšna konstrukcija ni mogoča.

Na kratko opišimo konstrukcijo, ki je prikazana na sliki 2. Kraka kota sta označena s polnima črnima črtama. Papir prepognemo tako, da dobimo dve vzporednici z osjo x. Nastala vzporedna pasova morata imeti enako širino. Na osi y je označeno presečišče z gornjo vzporednico osi x z modro barvo, medtem ko je koordinatno izhodišče označeno z rdečo barvo.

Nato prepognemo papir po poševni modri črti tako, da se modra in rdeča točka na osi y pokrijeta s točkama enake barve na poševni rdeči črti, ki predstavlja položaj osi y po pregibu. Rdeča točka na poševni rdeči črti leži na presečišču le-te s spodnjo vzporednico osi x, medtem ko leži modra točka na poševnem kraku kota. Tretja (zelena) točka je presečišče pregiba (poševna modra črta) s spodnjo vzporednico, torej s tisto, ki je bliže osi x. Naredimo še dva pregiba, kjer črti pregiba vsebujeta koordinatno izhodišče in eno od dveh točk (zeleno oziroma rdečo).

Slika 3: Na sliki so prikazana trikotniška števila (vir Wikipedija).

Mersennova in večkotniška števila

Formula za n-to s-kotniško število.

$P(n,s) = \frac{n^2(s-2)-n(s-4)}{2}$

Mersennova števila so števila oblike $M(n) = 2^m - 1$. Mersennova praštevila pa so praštevila oblike $P = 2^p - 1$, v tem primeru je tudi p praštevilo.

Na primer število 15 je večkotniško število za ($s = 3$, $n = 5$) in Mersennovo število za ($m = 4$).

Avtor je opazoval rešitve enačbe

$2^m - 1 = \frac{n^2(s-2)-n(s-4)}{2}$

za naravna števila m, n in s.

V literaturi je našel Ramanujan-Nagellovo enačbo, to je enačbo oblike

$x^2 + D = AB^y$,

kjer so A, B, D znana cela števila, medtem ko sta x, y neznanki. Za enačbo se ve, da je število celoštevilčnih parov njenih rešitev (x, y) končno.

Ugotovil je, da je tudi njegova enačba $2^m - 1 = \frac{n^2(s-2)-n(s-4)}{2}$ tega tipa za

$x = 2(s-2)n - s + 4$
$y = m + 3$
$D = -s^2 + 16s - 31$
$A = s - 2$
$B = 2$

V nadaljevanju je avtor dokazal zanimive izreke, kot je na primer, da obstajata le dve trikotniški Mersennovi števili in da kvadratna Mersennova števila ne obstajajo.

Naloga je tudi oblikovno lep izdelek. Narejena je s pomočjo orodja LaTeX, ki je namenjeno urejanju matematičnih besedil.

Zaključek

Vsakoletna objava recenzije zanimivih nalog ima dva namena: prvič, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, in drugič, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bo kdo našel spodbudo oziroma idejo za svojo raziskovalno nalogo. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja tudi zanje.

Viri in literatura

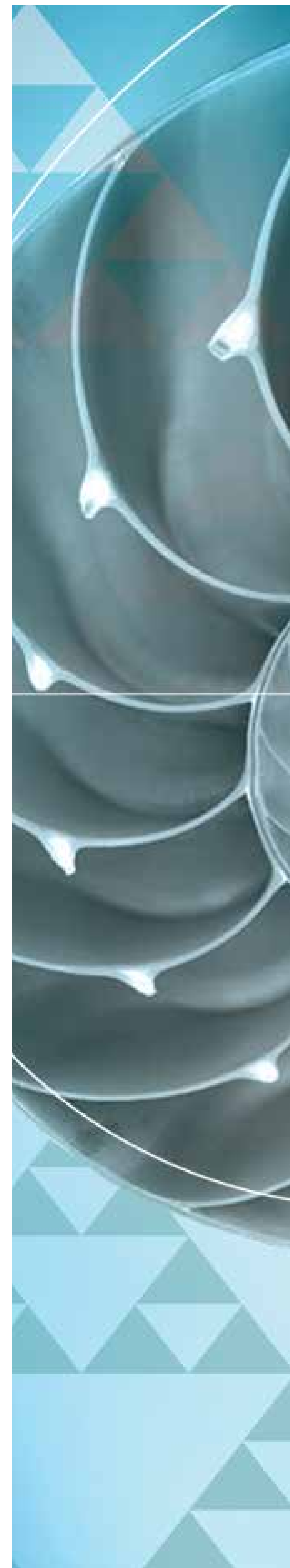
Maraž, S., Božič, T., Torkar, M. (2016). *Origamika.* Raziskovalna naloga iz matematike.

Vavpetič, I. (2016). *Magični kvadrati.* Raziskovalna naloga iz matematike.

Mathematics in school

1 2017, Volume 23

CONTENTS

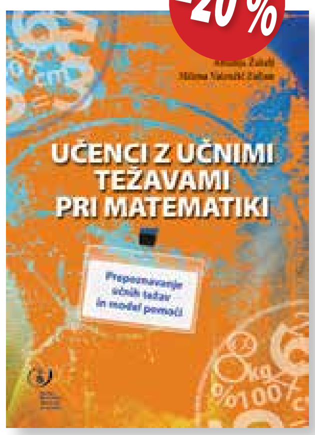


IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Razširjajmo znanje

Ugoden nakup strokovne literature v APRILU

-20 %

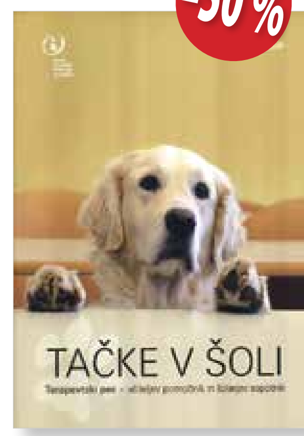


~~25,00 €~~ **20,00 €**

-50 %

~~28,50 €~~ **14,25 €**

-50 %



~~24,50 €~~ **12,25 €**

-15 %

~~34,50 €~~ **29,33 €**

Dopolnite svojo strokovno knjižnico z ugodnim nakupom. Izbor **117 znižanih publikacij** najdete na spletni strani **www.zrss.si/zalozba/akcija**.

Iz knjig do vaših učencev

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

60 let

Naročanje:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana
T 01 300 51 00
F 01 300 51 99
E zalozba@zrss.si
S www.zrss.si

akcija · arhiv revij · facebook ZRSŠ · twitter ZRSŠ

ISSN 1318-010X
9 771318 010005