Geometrie

für

Knaben-Bürgerschulen

von

Dr. Franz von Močnik.

I.

[illegible] Auflage.

fl. – 40

Geographie.

Rothaug, J. G., Lehrbuch der Geographie für Bürgerschulen in drei Stufen. Mit vielen Abbild.
I. Stufe. Mit mehr. in den Text gedr. Holzst. Preis geh. 44 kr. In L.=Einb. 54 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

II. Stufe. Mit mehr. in den Text gedr. Holzst. Preis geh. 44 kr. In L.=Einb. 54 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

III. Stufe. Mit mehr. in den Text gedr. Holzst. Preis geh. 44 kr. In L.=Einb. 54 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Rothaug, J. G., Lehrbuch der Geographie für Bürgerschulen. Ausgabe in 1 Band. Preis geheftet 90 kr.

Rothaug, J. G., Österreichischer Schulatlas in 22 Karten nach methodischen Grundsätzen. Preis geheftet 60 kr. In Leinwand=Einband 75 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Rothaug, J. G., Österreichischer Schulatlas in 25 Karten nach methodischen Grundsätzen. Ausgabe für Niederösterreich. Preis geh. 60 kr. In Leinw.=Einb. 75 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Geschichte.

Gindely, Anton, Lehrbuch der Geschichte für Bürgerschulen.

Ausgabe für Knabenbürgerschulen in drei Theilen.

I. Theil. Mit m. Abb. u. 7 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=Einb. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

II. Theil. Mit mehr. Abbild. u. 7 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=E. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

III. Theil. Mit mehr. Abbild. u. 6 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=E. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Ausgabe für Mädchenbürgerschulen in drei Theilen.

I. Theil. Mit mehr. Abbild. u. 7 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=E. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

II. Theil. Mit mehr. Abbild. u. 7 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=E. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

III. Theil. Mit mehr. Abbild. u. 6 Karten in Farbendr. Preis geh. 48 kr. In L.=E. 58 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Naturgeschichte.

Pokorny, Dr. Alois, Naturgeschichte für Bürgerschulen in drei Stufen.

I. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 60 kr. In Leinwand=Einb. 70 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

II. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 60 kr. In Leinw.=Einband 70 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

III. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 60 kr. In Leinw.=Einband 70 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Naturlehre.

Schindler, Franz, Physik und Chemie für Bürgerschulen. In 3 concentrischen Lehrstufen.
I. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 40 kr. In Leinw.=Einb. 50 kr.
II. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 40 kr. In Leinw.=Einb. 50 kr.
III. Stufe. Mit vielen Abbild. Preis geheftet 50 kr. In Leinw.=Einb. 60 kr.

Rechnen.

Močnik, Franz Ritter von, Rechenbuch für die erste Classe der Knabenbürgerschulen. Preis geheftet 30 kr. In Leinwand=Einband 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

— — Rechenbuch f. d. zweite Classe der Knabenbürgerschulen. Preis geh. 40 kr. In L.=E. 50 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

— — Rechenbuch f. d. dritte Classe der Knabenbürgerschulen. Preis geh. 30 kr. In L.=E. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Močnik, Dr. Franz Ritter v., Rechenbuch für die erste Classe der Mädchenbürgerschulen. Preis geheftet 30 kr. In L.=Einb. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

— — Rechenbuch f. d. zweite Classe der Mädchenbürgerschulen. Preis geh. 30 kr. In L.=E. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

— — Rechenbuch f. d. dritte Classe der Mädchenbürgerschulen. Preis geh. 30 kr. In L.=E. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Nagel, Johann, Rechenbücher. Aufgaben für das mündliche und schriftliche Rechnen.

Ausgabe für Knabenbürgerschulen.

Erstes Heft. Preis geheftet 15 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Zweites Heft. Preis geheftet 20 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Drittes Heft. Preis geheftet 20 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Ausgabe für Mädchenbürgerschulen.

Erstes Heft. Preis geheftet 15 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Zweites und drittes Heft. Preis geheftet 25 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Geometrie.

Močnik, Dr. Franz Ritter v., Geometrie und geometrisches Zeichnen für Knabenbürgerschulen.

Erstes Heft. (Für die 1. Classe.) Preis geh. 30 kr. In Leinw.=Einb. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Zweites Heft. (Für die 2. Classe.) Preis geh. 30 kr. In Leinw.=Einb. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Drittes Heft. (Für die 3. Classe.) Preis geh. 36 kr. In Leinw.=Einb. 46 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Napravnik, Franz, Geometrische Formenlehre f. Mädchenbürgerschulen. Ausg. in 2 Theilen.

I. Theil. Preis geheftet 30 kr. In Leinw.=Einb. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

II. Theil. Preis geheftet 30 kr. In Leinw.=Einb. 40 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Singen.

Schober & Labler, Liederhain für österr. Bürgerschulen. Preis geh. 60 kr. In L.=E. 70 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Wiener Liederstrauß für Bürgerschulen. Preis geheftet 50 kr. In Leinw.=Einband 60 kr.
Vom hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht allgemein zulässig erklärt.

Proschwitzer, Sammlung 3= und 4=stimmiger Lieder für österr. Bürgerschulen. Preis geh. 30 kr.

Sämmtliche, hier angezeigte Lehrbücher tragen den verschiedenen Richtungen der neuen Lehrpläne Rechnung. — Wo es sich um Einführung eines Buches handelt, steht dem betreffenden Herrn Lehrer ein Freiexemplar desselben zu näherer Prüfung zu Diensten. Auch wird die Einführung durch Lieferung vom Freiexemplaren für arme Schüler gern erleichtert. Derartige Wünsche bittet die Verlagsbuchhandlung direct an sie zu richten.

F. Tempsky,

Verlagsbuchhandlung in Prag.

K. k. Hofbuchdruckerei A. Haase, Prag.

f. Verwegak

Geometrie

und

geometrisches Zeichnen

für

Knaben-Bürgerschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Erstes Heft. (Für die erste Classe.)

Fünfte verbesserte Auflage.

Mit 107 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Mit h. k. k. Ministerialerlass v. 12. Februar 1888, Z. 1651 allgemein zulässig erklärt.

Preis geheftet 30 kr., gebunden 40 kr.

Prag. F. Tempsky.

Wien. F. Tempsky.

Leipzig. G. Freytag.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

1888.

K. k. Hofbuchdruckerei A. Haase, Prag.

Vorwort zur fünften Auflage.

Die vorliegende Auflage der Geometrie für Knaben-Bürgerschulen unterscheidet sich sowohl bezüglich der Anordnung des Lehrstoffes als auch bezüglich der Anwendungen desselben vielseitig von den letzten zwei Auflagen dieses Buches.

Was die Anordnung betrifft, so kam früher in der Planimetrie zuerst die Bestimmung des Umfanges der verschiedenen ebenen Figuren und dann abgesondert davon die Bestimmung des Flächeninhaltes derselben Gebilde vor; hier wird für jedes einzelne Gebilde mit dem Umfange sogleich auch der Flächeninhalt in Betrachtung gezogen. Ebenso sind auch in der Stereometrie die früher gesondert behandelten Aufgaben über die Oberfläche und den Cubikinhalt der Körper vereint zusammengestellt worden. Diese Zusammenziehung ermöglicht nicht nur eine kürzere und übersichtlichere Fassung der bezüglichen Rechenaufgaben, sondern fördert zugleich die bessere Unterscheidung der Längen-, Flächen- und Körpermaße.

Über mehrseitig geäußerte Wünsche sind insbesondere in praktischer Richtung viele Änderungen und Bereicherungen vorgenommen worden. Die Zahl der Constructionsaufgaben wurde durchgängig erheblich vermehrt; namentlich gilt dies von den Aufgaben über die regelmäßigen Vielecke, über die Berührung der Kreise, die Verwandlung und Theilung der Figuren.

Den Abschnitten über die geraden Linien und Winkel, über die Drei-, Vier- und Vielecke, sowie über den Kreis wurden Zeichenübungen angefügt, welche den Zweck haben, diese Gebilde in verschiedenen Zusammenstellungen für das geometrische Ornament zu verwerten.

Der Abriss über das Feldmessen mit Kette und Stäben erhielt eine entsprechende Erweiterung. Bei den Grundzügen des Situationszeichnens habe ich den Erklärungen über die conventionelle Bezeichnung der einzelnen

Gegenstände zur leichteren Auffassung auch Abbildungen beigegeben und deren praktische Anwendung an einem kleinen Situationsplane zur Anschauung gebracht.

Bei der projectivischen Darstellung der Körper ist in der vorliegenden Auflage dort, wo der Grund- und Aufriss einen Körper nicht unzweideutig bestimmen, mit diesen beiden Projectionen auch der Kreuzriss des Körpers in Verbindung gesetzt worden; außerdem wurden in dem bezüglichen Abschnitte zahlreiche Übungsaufgaben eingeflochten.

Den Schluss des Buches bildet ein Anhang über das Zeichnen einfacher Objecte des Bau- und Maschinenfaches, selbstverständlich in jenem beschränkten Umfange, der durch die Zwecke der Bürgerschule bedingt ist.

Um für den Schüler die Anschaffung des Buches zu erleichtern, ist dasselbe in gleicher Weise, wie mein Rechenbuch für Bürgerschulen, in drei Hefte getheilt worden, welche folgeweise für die erste, zweite und dritte Classe bestimmt sind. Dabei wurde der Abschnitt über das Feldmessen mit Kette und Stäben, da dieser Gegenstand nach den verschiedenen Lehrplänen an einigen Bürgerschulen der zweiten, an anderen der dritten Classe zugewiesen ist, sowohl in das zweite als in das dritte Heft aufgenommen. Im allgemeinen ist bei der Anordnung des Lehrstoffes und der Zeichenübungen auf den Lehrplan für Knaben-Bürgerschulen in Niederösterreich besondere Rücksicht genommen worden.

Ich unterstütze die Einführung dieses Buches durch Freiexemplare für arme Schüler und durch Lieferung von Handexemplaren für die Herren Lehrer.

Graz, im December 1886.

Der Verfasser.

Einleitung.

Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§. 1. Jedes Ding, das einen Raum einnimmt, heißt ein Körper. Jeden Körper kann man sich aus Theilen bestehend denken; er ist also eine Größe, und zwar, weil er sich im Raume ausdehnt, eine Raumgröße. Der Raum, den ein Körper einnimmt, ist nach allen Seiten hin begrenzt. Man sagt darum: Ein Körper ist ein nach allen Seiten begrenzter Raum.

Ein Körper, wie er in der Wirklichkeit vorkommt, besitzt außer der Eigenschaft, einen Raum einzunehmen, noch verschiedene andere Merkmale, als: Stoff, Farbe, Härte, Gewicht u. dgl. Ein solcher Körper heißt ein physischer Körper. Denkt man sich von einem physischen Körper alle anderen Eigenschaften hinweg und betrachtet an ihm nur den Raum, den er einnimmt, so hat man die Vorstellung eines mathematischen Körpers. Das einzige Merkmal, das einem mathematischen Körper zukommen muss, ist also das Ausgedehntsein im Raume.

Jeder Körper dehnt sich nach drei Hauptrichtungen aus, in die Länge, Breite und Höhe, auch Tiefe oder Dicke.

§. 2. Die Grenzen der Körper heißen Flächen. Eine Fläche ist eine Raumgröße, welche nur zwei Ausdehnungen hat, Länge und Breite.

§. 3. Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Eine Linie ist eine Raumgröße, welche nur eine Ausdehnung hat, die Länge.

§. 4. Die Grenzen der Linien heißen Punkte. Der Punkt ist weder lang, noch breit, noch dick, er hat keine Ausdehnung und ist daher keine Größe.

Körper, Flächen, Linien und Punkte heißen auch Raumgebilde.

Entstehung und Eintheilung der Linien, Flächen und Körper.

§. 5. Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so entsteht eine Linie.

Die Linien theilt man in gerade und krumme ein. Bewegt sich ein Punkt ununterbrochen in derselben Richtung fort, so heißt die dadurch entstehende Linie eine gerade Linie oder eine Gerade. Wenn aber der Punkt bei der Bewegung seine Richtung fortwährend ändert, so heißt die dadurch beschriebene Linie eine krumme Linie.

Ein Stein, den man frei fallen läßt, fällt in einer geraden Linie zur Erde; ein Stein, welcher seitwärts geworfen wird, beschreibt eine krumme Linie.

Eine Linie, welche aus lauter geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, heißt eine gebrochene Linie.

§. 6. Wenn sich eine Linie im Raume in einer anderen Richtung als in der ihrer Verlängerung fortbewegt, so entsteht eine Fläche.

Zur Versinnlichung dieser Bewegung kann man sich eines Stäbchens oder eines Drahtes bedienen.

Die Flächen theilt man in ebene und krumme ein. Eine Fläche, in welcher nach jeder beliebigen Richtung eine gerade Linie gezogen werden kann, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Eine Fläche, in welcher sich entweder nur nach einer oder nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen lassen, heißt eine krumme Fläche.

§. 7. Wenn sich eine Fläche in einer anderen Richtung als in der ihrer Erweiterung fortbewegt, so entsteht ein Körper.

Zur Versinnlichung dieser Bewegung kann man sich eines Papierblattes bedienen.

Die Körper theilt man in eckige und runde ein. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger oder ebenflächiger Körper. Ein Körper, welcher nicht von lauter Ebenen, sondern entweder bloß von krummen oder theils von ebenen, theils von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein runder oder krummflächiger Körper.

Betrachte die Modelle der geometrischen Grundkörper und gib bei jedem derselben an, wie viele Punkte, wie viele und was für Linien, wie viele und was für Flächen daran vorkommen, ob daher der Körper ein eckiger oder ein runder ist.

Figuren.

§. 8. Allseitig begrenzte Raumgrößen heißen Figuren. Man unterscheidet ebene und räumliche Figuren. Jene liegen in einer und derselben Ebene, diese liegen nicht in einer und derselben Ebene.

Die ebenen Figuren sind nach der Beschaffenheit ihrer Grenzen entweder geradlinig oder krummlinig oder gemischtlinig.

Die räumlichen Figuren sind nach der Beschaffenheit ihrer Grenzen entweder ebenflächig oder krummflächig oder gemischtflächig.

Größe und Gestalt der Raumgrößen.

§. 9. Bei jeder Raumgröße nimmt man insbesondere auf zwei Sachen Rücksicht, auf die Größe und auf die Form oder Gestalt.

Zwei Raumgrößen können verschiedene Gestalt, aber gleiche Größe haben. So kann eine krumme Linie dieselbe Länge haben, wie eine gerade; eine rund begrenzte Wiese kann eben so viel Flächenraum einschließen, als eine viereckige; hier ist also die Gestalt verschieden, die Größe gleich. Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.

Umgekehrt können zwei Raumgrößen dieselbe Gestalt haben, während sie sich in der Größe unterscheiden, z. B. zwei Kreise, oder zwei Würfel, welche verschiedene Größen haben. Raumgrößen, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich. Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, heißen congruent. Zwischen zwei congruente Größen wird, da sie gleich und ähnlich sind, das Zeichen $\cong$ gesetzt. Zwei congruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, in dem sie sich befinden; sie müssen daher, wenn die eine durch Verschieben oder Umwenden an die Stelle der andern gelegt wird, sich vollständig decken.

Geometrie und ihre Eintheilung.

§. **10.** Die Lehre von den Raumgebilden wird Geometrie genannt.

Sie zerfällt in zwei Hauptheile: in die Planimetrie und in die Stereometrie. Die Planimetrie handelt von jenen Raumgebilden, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber beschäftigt sich mit jenen Raumgebilden, welche sich nicht in einer und derselben Ebene, sondern im dreifach ausgedehnten Raume befinden.

Planimetrie.

1. Punkte, gerade Linien und Winkel.

1. Punkte.

Darstellung der Punkte und ihre gegenseitige Lage.

§. **11.** Ein Punkt kann, da er weder Länge, noch Breite, noch Dicke besitzt, nicht gesehen, sondern nur gedacht werden. Um nun die Stelle, wo man sich einen Punkt denkt, dem Auge sichtbar zu machen, bringt man dort mit dem Bleistifte, mit der Feder oder Kreide einen Tupfen an. Solche Tupfen sind jedoch nicht wirkliche Punkte, sie sind nur Zeichen der Punkte.

Ein Punkt wird dadurch angegeben, dass man zu dem ihn versinnlichenden Tupfen einen Buchstaben oder eine Zahl setzt; man sagt: Der Punkt a, der Punkt 1.

Zwei Punkte können entweder neben einander, oder gerade über einander, oder schräg oberhalb oder unterhalb einander liegen.

Zeichne zwei Punkte in jeder dieser Lagen.

Welche und wie viele Lagen sind bei drei Punkten möglich? Zeichne dieselben.

Zeichne vier Punkte, welche a) nebeneinander, b) gerade über einander, c) in derselben Richtung schräg oberhalb einander liegen.

2. Gerade Linien.

Bestimmung und Darstellung der Geraden.

§. **12.** Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Richtungen ziehen. Ist noch ein zweiter Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Richtungen der Geraden eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht. Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie vollkommen bestimmt.

Zwei Gerade, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.

Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren Durchschnittspunkt.

§. **13.** Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punkt halb begrenzte Gerade heißt Strahl. Eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte.

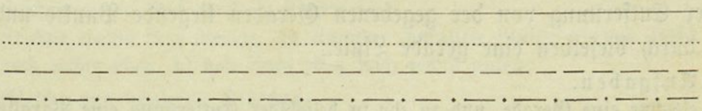
Die Strecke zwischen zwei Punkten ist die kürzeste Linie, welche zwischen den zwei Punkten gezogen werden kann; sie bestimmt daher die Entfernung oder den Abstand derselben.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

§. **14.** Da eine Linie durch die stetige Bewegung eines Punktes entsteht, so ergibt sich daraus auch die Art und Weise, wie man eine Linie sichtbar darstellen kann. Um den Weg kenntlich zu machen, den der Punkt während der Bewegung durchlaufen hat, muss man die Spitze einer farbelassenden Feder oder eines Bleistiftes, welche den sich bewegenden Punkt vorstellt, etwas andrücken, wodurch überall die Spur der Bewegung zurückbleibt. Diese zurückgelassene Spur ist jedoch, da sie nicht bloß Länge, sondern auch immer etwas Breite und Dicke hat, keine wirkliche Linie, sondern nur das Zeichen der Linie.

Die gezeichneten Linien heißen **volle**, **punktierte**, **gestrichelte** oder **gestrichelt punktierte**, je nachdem sie ohne Unterbrechung, oder durch Punkte, oder durch Striche, oder durch Striche und Punkte dargestellt sind (Fig. 1).

Fig. 1.



Zum **geometrischen Zeichnen** gerader Linien bedient man sich des **Lineals**.

Wie prüft man die Richtigkeit eines Lineals?

Aufgaben.

1. Bestimme zwei Punkte und verbinde sie aus freier Hand durch eine Strecke.
2. Verlängere diese Strecke über den einen Endpunkt hinaus.
3. Bestimme drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, und ziehe durch je zwei eine Gerade. Wie viele Gerade sind da möglich?
4. Wie viele Strecken sind zwischen einer bestimmten Anzahl von Punkten, von denen je drei nicht in einer geraden Linie liegen, möglich?

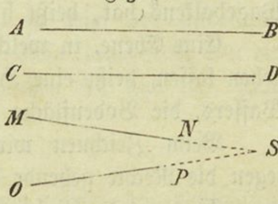
Zwischen 2 Punkten ist nur 1 Strecke möglich,
„ 3 „ sind $1+2=3$ Strecken möglich,
„ 4 „ „ $1+2+3=6$ „ „
„ 5 „ „ $1+2+3+4=10$ „ „ u. s. w.

Gesetz!

Parallele und nicht parallele Gerade.

§. **15.** Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen, haben entweder dieselbe **Richtung**, oder sie weichen in ihren Richtungen von einander ab. Haben zwei gerade Linien dieselbe Richtung, so dass sie überall gleich weit von einander abstehen, so heißen sie **parallel**; wenn aber ihre Richtungen von einander abweichen, so dass sie sich auf der einen Seite nähern, auf der andern entfernen, so heißen sie **nichtparallel**. Die nichtparallelen Geraden werden nach jener Seite hin, wo sie sich nähern, **convergierend**, nach der andern Seite **divergierend** genannt. So sind (Fig. 2) AB und CD parallele Linien, MN und OP convergierend, NM und PO divergierend.

Fig. 2.



Dass AB mit CD parallel ist, drückt man so aus: AB || CD.

Zwei parallele Gerade können, weil sie durchaus gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert; zwei nichtparallele Gerade aber müssen, hinlänglich verlängert, in einem Punkte zusammentreffen, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher sie convergieren. Convergierende Gerade haben daher immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, aber auch nur einen einzigen.

Um zu einer schon gezeichneten Geraden eine Parallele aus freier Hand zu zeichnen, bestimme man zuerst zwei oder mehrere in gleicher Entfernung von der gegebenen Geraden liegende Punkte und zieht dann durch dieselben eine gerade Linie.

Aufgaben:

1. Zeichne eine Gerade, und zu ihr in beliebiger Entfernung eine Parallele.
2. Zeichne eine Gerade, und zu ihr durch einen nicht in ihr liegenden Punkt eine Parallele.
3. Zeichne zwei Parallele, und zu ihnen noch eine dritte Parallele.
4. Zeichne eine Gerade in beliebiger Richtung, und zu ihr in gleichen Entfernungen drei Parallele.
5. In wie vielen Punkten können sich eine bestimmte Anzahl gerader Linien, von denen je zwei nicht parallel sind, schneiden?

2 Gerade haben 1 Durchschnittspunkt,
3 „ „ $1+2=3$ Durchschnittspunkte,
4 „ „ $1+2+3=6$ „
5 „ „ $1+2+3+4=10$ „ u. s. w.
Gesetz!

Verticale, horizontale und schräge Gerade.

§. **16.** 1. Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilothes d. i. eines freihängenden, durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt vertical oder lothrecht. Ein freifallender Körper fällt in verticaler Richtung.

Wird durch eine verticale Gerade eine Ebene gelegt, so heißt diese eine Vertical-Ebene.

Beim Zeichnen wird die Verticale durch eine von oben nach unten oder umgekehrt gezogene Gerade dargestellt.

2. Eine Gerade, welche die Richtung eines am ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens oder eines auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens hat, heißt horizontal oder wagrecht.

Eine Ebene, in welcher sich nach allen Richtungen horizontale Gerade ziehen lassen, heißt eine Horizontal-Ebene; z. B. die Oberfläche des Wassers, die Bodenfläche eines Zimmers.

Beim Zeichnen wird die Horizontale durch eine von der Linken gegen die Rechte gehende Gerade dargestellt.

Eine gerade Linie, welche weder vertical noch horizontal ist, heißt schräge oder schief.

Aufgaben.

1. Wie viele verticale Linien sind durch einen Punkt möglich?
2. Wie viele horizontale Linien sind durch einen Punkt möglich?
3. Ziehe auf deiner Schreibtafel eine beliebige Gerade und bringe dann die Tafel in eine solche Lage, dass die Gerade a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schräge Richtung hat.
4. Zeichne in gleichen Entfernungen fünf horizontale Linien.
5. Zeichne ebenso fünf verticale Linien.
6. Zeichne ebenso fünf schräge, zu einander parallele Linien a) von links unten nach rechts oben, b) von links oben nach rechts unten.

Gleiche und ungleiche Strecken.

§. **17.** Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer Länge zu vergleichen lege man sie so aufeinander, dass sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen dann die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken gleich. Fallen aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Strecke liegt, diese die größere.

Wenn zwei Strecken gleich sind, muss man sich dieselben auch so vorstellen können, dass sie auf einander gelegt sich decken.

Um anzuzeigen, dass die Strecken AB und CD ungleich sind, schreibt man

AB $>$ CD, wenn AB größer ist als CD und

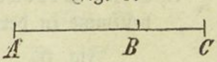
AB $<$ CD, wenn AB kleiner ist als CD.

Zeichne in gleichen Entfernungen a) sechs horizontale, b) sechs verticale, c) sechs schräge Strecken, welche gleich lang sind.

Summe und Differenz der Strecken.

§. **18.** 1. Zeichnet man (Fig. 3) eine Strecke AB und verlängere sie um die Strecke BC, so ist die verlängerte Strecke AC so groß, als AB und BC zusammengenommen, oder es ist AC die Summe der beiden Strecken AB und BC, was so angeschrieben wird:

Fig. 3.



$$AC = AB + BC.$$

2. Zeichnet man eine Strecke AC (Fig. 3) und trägt auf dieselbe eine kleinere Strecke BC von C aus bis B auf, so zeigt der unbedeckte Theil AB der größeren Strecke an, um wie viel diese länger ist als die kleinere Strecke; AB ist also die Differenz zwischen AC und BC, was so ausgedrückt wird:

minus

$$AB = AC - BC.$$

Aufgaben.

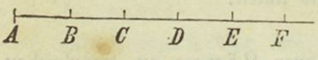
1. Zeichne eine Strecke AC, und nimm darin irgendwo zwischen den Endpunkten einen Punkt B an. Welche zwei Strecken sind dadurch entstanden? Was ist die ursprüngliche Strecke in Bezug auf dieselben? — Wie wird daher eine Strecke als Summe zweier Strecken dargestellt?

2. Zeichne eine Strecke AB, verlängere sie über B hinaus um ein beliebiges Stück BC. Um wieviel ist die verlängerte Strecke AC größer als die Verlängerung BC? — Wie kann man also eine Strecke als Differenz zweier Strecken darstellen?

Vielfache und Theile der Strecken.

§. **19.** 1. Trägt man (Fig. 4) auf eine Gerade von A aus die gleichen Strecken AB, BC, CD, DE, . . . auf, so ist

Fig. 4.



AC das Doppelte von AB,
AD das 3fache von AB,
AE das 4fache von AB, u. s. w.

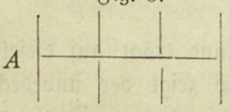
Die erhaltenen Strecken sind also *Vielfache* der Strecke AB.

2. Umgekehrt ist AB die Hälfte von AC, das Drittel von AD, der 4te Theil von AE, u. s. w. Die Strecke AC ist also durch den Punkt B in 2, AD durch die Punkte B und C in 3, AE durch die Punkte B, C und D in 4 gleiche *Theile* getheilt.

Aufgaben.

1. Zeichne eine Strecke und verlängere sie so, daß sie 3mal so lang wird, als sie ursprünglich war.
2. Zeichne zwei horizontale Strecken, von denen die zweite 5mal so groß ist als die erste.
3. Zeichne sechs parallele Strecken so, daß die zweite das Doppelte der ersten, die dritte das 3fache der ersten, . . . die sechste das 6fache der ersten sei.
4. *Eine gegebene Strecke aus freier Hand in 2 gleiche Theile zu theilen oder zu halbieren.* — Man bestimme in der Strecke einen Punkt so, daß er von den beiden Endpunkten derselben gleich weit entfernt ist.
5. Zeichne eine Strecke, theile sie in 2 gleiche Theile und dann jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile. Wie viele gleiche Theile erhältst du?— Wie wird also eine Strecke in 4 gleiche Theile getheilt?
6. Wie wird eine Strecke in 8, 16 gleiche Theile getheilt.
7. *Eine Strecke AB (Fig. 5) in 3 gleiche Theile zu theilen.* — Man bestimme in der Strecke zwei Punkte so, daß sie von einander und von den Endpunkten der Strecke gleich weit abstehen.

Fig. 5.



Im allgemeinen wird man bei der Theilung einer Strecke in gleiche Theile die beiläufig bestimmten Theilungspunkte mit dem Bleistifte zuerst sehr fein bezeichnen, dann durch die Theilungspunkte und durch die Endpunkte kleine parallele Linien ziehen und ihre Abstände vergleichen. Sind diese gleich, so ist die Theilung richtig; sind sie ungleich, so müssen die etwa unrichtigen Theilungspunkte so lange nach rechts oder links verschoben werden, bis jene Abstände gleich groß erscheinen.

8. Theile eine gezeichnete Strecke in 2 gleiche Theile und dann jeden Theil wieder in 3 gleiche Theile. — Wie wird also eine Strecke in 6 gleiche Theile getheilt?
9. Wie wird eine Strecke in 12, 24, — in 9, 18 gleiche Theile getheilt?

10. Theile eine Strecke in 5, 7 gleiche Theile. (Der Vorgang ist ähnlich wie bei der Theilung einer Strecke in 3 gleiche Theile.)

11. Wie wird eine Strecke in 10, 15, 20, — in 14 gleiche Theile getheilt?

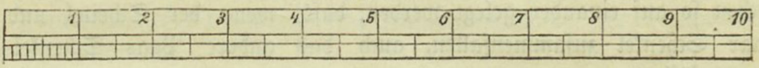
Messen der Strecken.

§. **20.** Die Länge einer Strecke bestimmen, heißt dieselbe messen. Um eine Strecke zu messen, nimmt man irgend eine Strecke von bestimmter Länge als Einheit an, und untersucht, wie oft die als Einheit angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dies anzeigt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter (*m*), das in 10 Decimeter (*dm*) à 10 Centimeter (*cm*) à 10 Millimeter (*mm*) eingetheilt wird. 1000 Meter = 1 Kilometer (*km*), 10 Kilometer = 1 Myriameter (*μm.*)

Zum Ausmessen der Länge dienen Stäbe von Holz oder Metall, worauf eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Untertheilungen aufgetragen sind; sie heißen Maßstäbe. Fig. 6 stellt die Länge eines Decimeters mit dessen Eintheilung in Centimeter und Millimeter vor.

Fig. 6.



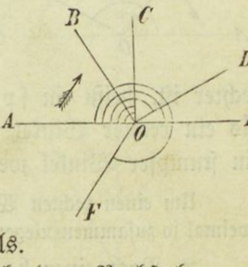
Anfängern ist anzurathen, dass sie zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abschätzen und dann mit dem Maßstabe genau messen.

3. Winkel.

Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§. **21.** Dreht sich der Strahl OA (Fig. 7) in einer und derselben Ebene um den Grenzpunkt O, so dass er nach und nach in die Lagen OB, OC, OD, . . . und zuletzt wieder in die ursprüngliche Lage zu stehen kommt, so weicht er bei dieser Drehung von seiner ursprünglichen Lage OA immer mehr ab.

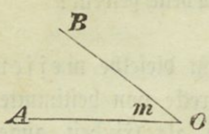
Fig. 7.



Die Abweichung der Richtungen zweier Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, heißt ein Winkel; die Strahlen, welche den Winkel bilden, nennt man die Schenkel, und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel, und zuletzt der Buchstabe am andern Schenkel ausgesprochen wird. In dem Winkel (Fig. 8) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel; der Winkel heißt daher: Winkel O, oder Winkel m, oder Winkel AOB oder BOA.

Fig. 8.



Ein Winkel wird desto größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen; die Länge der Schenkel hat keinen Einfluss auf die Größe eines Winkels.

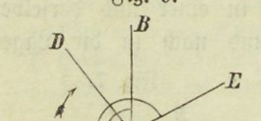
§. **22**. Legt man die Flächen zweier Winkel so auf einander, dass die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, so sind die beiden Winkel gleich, wenn das andere Paar Schenkel ebenfalls zusammenfällt, die Winkel sich also decken, und ungleich, wenn das andere Paar Schenkel nicht zusammenfällt. Im zweiten Falle ist derjenige Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt, dieser der größere.

Umgekehrt: Sind zwei Winkel gleich, so können sie mit den Winkelflächen so auf einander gelegt werden, dass, wenn der Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, auch das andere Paar Schenkel zusammenfällt.

Arten der Winkel.

§. **23**. 1. Dreht sich in einer Ebene der Strahl OA (Fig. 9) um den Grenzpunkt O, bis er den vierten Theil einer vollen Umdrehung gemacht hat, so heißt der dadurch erzeugte Winkel AOB ein rechter Winkel. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 9.



Der Winkel AOD, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel. Der Winkel AOE, welcher größer als ein rechter Winkel ist, heißt ein stumpfer Winkel. Ein spitzer und ein stumpfer Winkel werden auch schiefe Winkel genannt.

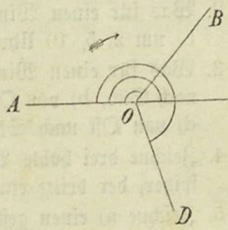
Um einen rechten Winkel zu erhalten, braucht man nur ein Stück Papier zweimal so zusammenzulegen, dass die Buglinien genau auf einander fallen.

2. Nach einer halben Umdrehung kommt der bewegliche Strahl in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung gerade entgegengesetzt ist. Der Winkel AOC (Fig. 10), welcher durch diese Drehung entsteht,

heißt ein gestreckter Winkel. Seine Schenkel bilden eine gerade Linie. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten.

Ein Winkel AOB, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler Winkel. Ein Winkel AOD, welcher größer als ein gestreckter ist, heißt ein erhabener Winkel.

Fig. 10.



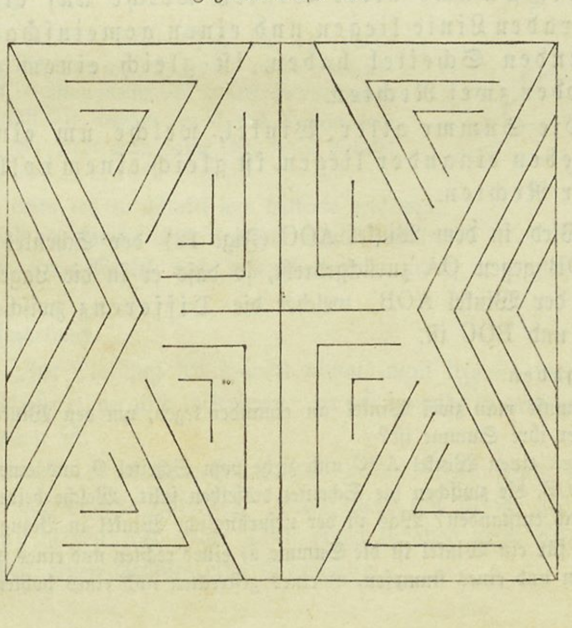
Der rechte, der spitze und der stumpfe Winkel sind hohle Winkel.

Von je zwei Strahlen werden immer zwei Winkel gebildet, ein hohler und ein erhabener; übrigens ist im allgemeinen immer der hohle zu verstehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

3. Nach einer ganzen Umdrehung gelangt der bewegliche Strahl wieder in seine ursprüngliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein voller Winkel. Seine Schenkel fallen zusammen. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

Figuren-Tafel 11 enthält eine Zusammenstellung der verschiedenen Arten von Winkeln.

Figuren-Tafel 11.

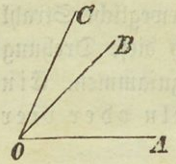


Aufgaben.

1. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten, in 1 Stunde?
2. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr a) um 6, 3, 9 Uhr, b) um 2, 5, 10 Uhr?
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich a) von Nord nach Süd, b) von Ost nach Süd, c) von Süd durch West und Nord nach Ost, d) von Ost nach Südwest dreht?
4. Zeichne drei hohle Winkel, von denen der erste ein rechter, der zweite ein spitzer, der dritte ein stumpfer Winkel ist.
5. Zeichne a) einen gestreckten, b) einen erhabenen, c) einen vollen Winkel.

Summe und Differenz der Winkel.

Fig. 12.



§. **24.** 1. Dreht man in dem Winkel AOB (Fig. 12) den Schenkel OB von OA weg, bis er in die Lage OC kommt, so entsteht der Winkel AOC, welcher so groß ist, als die beiden Winkel AOB und BOC zusammengenommen; der Winkel AOC ist also die Summe der Winkel AOB und BOC.

Folgende zwei Sätze können hiernach durch entsprechende Zeichnung zur Anschauung gebracht werden.

a) Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich einem gestreckten Winkel oder zwei Rechten.

b) Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum neben einander liegen, ist gleich einem vollen Winkel oder vier Rechten.

2. Wird in dem Winkel AOC (Fig. 12) der Schenkel OC um den Winkel COB gegen OA zurückgedreht, so dass er in die Lage OB kommt, so entsteht der Winkel AOB, welcher die Differenz zwischen den Winkeln AOC und BOC ist.

Aufgaben.

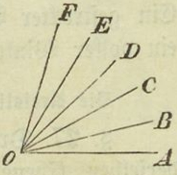
1. Wie muss man zwei Winkel an einander legen, um den Winkel zu erhalten, welcher ihre Summe ist?
2. Zeichne einen Winkel AOC und ziehe vom Scheitel O aus eine beliebige Gerade OB, die zwischen die Schenkel desselben fällt. Welche beiden Winkel sind dadurch entstanden? Was ist der ursprüngliche Winkel in Bezug auf dieselben?
3. Was für ein Winkel ist die Summe a) eines rechten und eines spitzen, b) eines rechten und eines stumpfen, c) eines gestreckten und eines hohlen Winkels?

4. Wie muss man zwei Winkel an einander legen, um den Winkel zu erhalten, der ihre Differenz ist?
5. Zeichne einen Winkel AOB und ziehe vom Scheitel O aus eine beliebige Gerade OC, die nicht zwischen die Schenkel desselben fällt. Um wie viel ist der dadurch vergrößerte Winkel AOC größer als der Vergrößerungswinkel BOC?

Vielfache und Theile der Winkel.

§. **25.** 1. Sind (Fig. 13) die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, . . . einander gleich, so ist der Winkel AOC das Doppelte des Winkels AOB, AOD das Dreifache, AOE das Vierfache von AOB u. s. w. Die Winkel AOC, AOD, AOE, . . . sind also Vielfache des Winkels AOB.

Fig. 13.

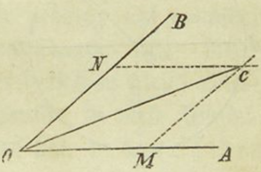


2. Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Theil von AOD, der vierte Theil von AOE u. s. w.

Aufgaben.

1. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2mal, der dritte 3mal so groß ist als der erste.
2. Was für ein Winkel ist das Doppelte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten Winkels?
3. Was für ein Winkel ist die Hälfte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten, d) eines erhabenen, e) eines vollen Winkels?
4. Einen Winkel AOB (Fig. 14) in zwei gleiche Theile zu theilen, oder zu halbieren. — Man mache OM = ON und bestimme einen Punkt C so, dass er von M und N gleich weit entfernt ist; zieht man dann OC, so ist Winkel AOC = BOC = $\frac{1}{2}$AOB.

Fig. 14.



5. Zeichne einen rechten Winkel und halbiere denselben.
6. Wie wird ein Winkel in 4, 8 gleiche Theile getheilt?
7. Versuche einen Winkel nach dem Augenmaße in 3, 5, 6 gleiche Theile zu theilen.

Das Winkelmaß.

§. **26.** Zur Messung der Winkel nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Einheit an und untersucht, wie oft derselbe in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes bildet wegen seiner unveränderlichen Größe der rechte Winkel. Man theilt ihn in 90 gleiche Winkel, welche Grade heißen; der 60ste Theil eines Grades heißt eine Minute, der 60ste Theil einer Minute eine Secunde.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viel Grade und Gradtheile er enthält. Die Grade, Minuten und Secunden eines Winkels bezeichnet man durch °, ′, ″; z. B. 57 Grade 48 Minuten 15 Secunden = 57° 48′ 15″.

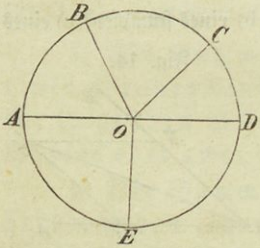
Aus den Erklärungen in §. 23 folgt:

Ein hohler Winkel enthält weniger als 180° und zwar insbesondere ein spitzer weniger als 90°, ein rechter 90°, ein stumpfer mehr als 90°. Ein gestreckter Winkel hat 180°, ein erhabener Winkel mehr als 180°, ein voller Winkel 360°.

Die Kreislinie.

§. **27.** Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 15) um den Punkt O in derselben Ebene so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt während dieser Drehung der Punkt A eine krumme Linie ABCDEA, welche Kreislinie oder Kreis heißt. Die Kreislinie ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass alle ihre Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit entfernt sind.

Fig. 15.



Der Punkt O, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum; die ganze Kreislinie selbst wird auch Umfang oder Peripherie des Kreises genannt.

Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises, z. B. OA, OB, OC. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind alle Halbmesser eines Kreises einander gleich.

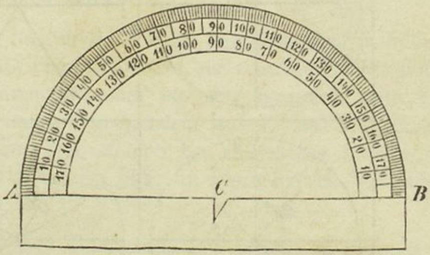
Eine Strecke AD, welche von einem Punkte des Umfanges durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter). Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser desselben, daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich.

Jeder Theil des Umfanges, wie AB, wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, und der vierte Theil ein Quadrant.

Zum geometrischen Zeichnen des Kreises bedient man sich des Zirkels.

§. 28. Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bogen, welche man Bogengrade oder bloß Grade nennt, eingetheilt. Es kommen daher auf den Halbkreis 180, auf den Quadranten 90 Grade. Die Eintheilung des Halbkreises in Grade sieht man an dem Transporteur (Fig. 16), bei welchem die Kante AB den Durchmesser, und der Einschnitt C den Mittelpunkt vorstellt. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, Bogenminuten, und jede Minute in 60 Bogensecunden eingetheilt.

Fig. 16.



Man bezeichnet die Grade, Minuten und Secunden bei den Bogen auf gleiche Weise wie bei den Winkeln.

Messen der Winkel durch Kreisbogen.

§. 29. Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 Bogengrade und zieht von dem Mittelpunkte zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt 360 Winkel, welche alle unter einander gleich sind, weil bei je zweien, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden, die Schenkel zusammenfallen. Die Summe aller dieser Winkel ist gleich 360 Winkelgraden; folglich ist einer derselben gleich einem Winkelgrade. Da hiernach ein Winkel am Mittelpunkte so viele Winkelgrade enthält, als der zugehörige Bogen Bogengrade hat, so kann jeder Winkel durch den Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, gemessen werden.

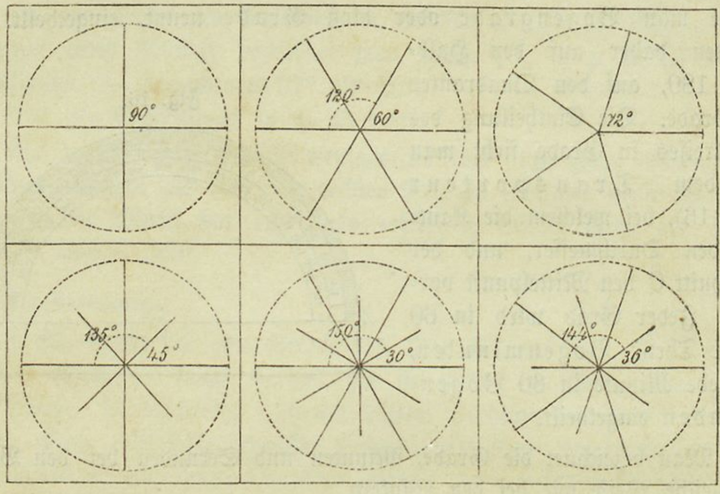
Darauf beruht der Gebrauch des Transporteurs zum Messen gezeichneter Winkel, und zum Zeichnen in Graden angegebener Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab, und miss sie dann mit dem Transporteur.
2. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße aus freier Hand, und dann mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90°, 45°, 60°, 30°, 58°, 87°, 3°, 100°, 118°, 176°.

Die in der Figuren-Tafel 17 dargestellten Winkel kommen in der Praxis besonders häufig vor.

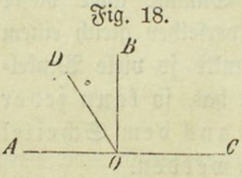
Figuren-Tafel 17.



Nebenwinkel.

§. **30**. Wird ein Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide anderen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer geraden Linie liegen. Solche Winkel heißen Nebenwinkel.

Fig. 18.



AOB (Fig. 18) ist ein Nebenwinkel von BOC; ebenso sind AOD und COD Nebenwinkel. Da je zwei Nebenwinkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel geben, so folgt: Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Aufgaben.

1. Was für Winkel sind Nebenwinkel, wenn sie gleich sind, und was für Winkel sind sie, wenn sie ungleich sind?
2. Wie groß ist der Nebenwinkel von 20°, 35°, 64°, 100°, 148°, 55° 40′, 115° 16′ 45″?

Senkrechte und schiefe Gerade.

§. **31**. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel, so sagt man: sie steht auf ihr senkrecht oder normal. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei ungleiche Nebenwinkel, so steht sie auf ihr schief.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, auf welcher sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzen und einen stumpfen Winkel.

In Fig. 18 ist BO senkrecht auf AC, was man so bezeichnet: BO $\perp$ AC; dagegen steht DO auf AC schief.

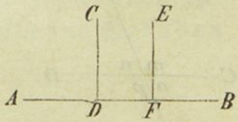
Wenn sich eine horizontale und eine verticale Linie durchschneiden, so bilden sie stets einen rechten Winkel, stehen also immer senkrecht auf einander. Aber nicht von je zwei senkrechten Linien kann man sagen, dass die eine horizontal und die andere vertical ist. Bei der Wage steht immer das Zünglein senkrecht auf dem Wagebalken; jedoch ist das Zünglein nur dann vertical und der Wagebalken horizontal, wenn die beiden Schalen leer oder gleich belastet sind; in jedem andern Falle sind sie schräge.

Ziehe eine Gerade, nimm darin fünf Punkte an, und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte. Welche Lage gegen einander haben diese Senkrechten?

Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen fünf Punkte an, und fällt aus jedem auf die andere Gerade eine Senkrechte. Wie verhalten sich diese Senkrechten in Bezug auf ihre Länge?

§. **32.** Es sei (Fig. 19) CD $\perp$ AB. Wenn die CD längs der AB mit sich selbst parallel fortschreitet, bis sie in die Lage EF kommt, so wird während dieser Bewegung die Lage der CD gegen die AB nicht geändert; es wird daher CD auch in der Lage EF auf AB senkrecht stehen. Daraus sieht man:

Fig. 19.



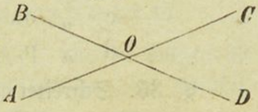
1. Steht eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht, so ist auch jede mit der ersteren Parallele auf der zweiten Geraden senkrecht.

2. Stehen zwei Gerade auf derselben dritten senkrecht, so sind sie unter einander parallel.

Scheitelwinkel.

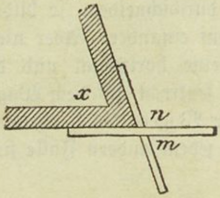
§. **33.** Verlängert man beide Schenkel eines Winkels AOB (Fig. 20) über den Scheitel O hinaus, so heißt der von diesen Verlängerungen gebildete Winkel COD der Scheitelwinkel des gegebenen Winkels AOB. Scheitelwinkel werden also von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet.

Fig. 20.



Da zwei sich schneidende Gerade auf beiden Seiten des Durchschnittspunktes ihre Richtungen beibehalten, so ist auch die Abweichung dieser Richtungen auf beiden Seiten dieselbe; d. h. je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 21.



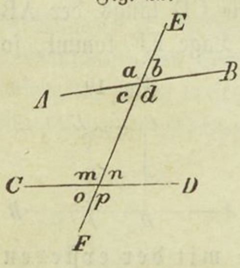
Dieser Satz findet praktische Anwendung, wenn (Fig. 21) ein Innenwinkel x eines Gebäudes, eines Gartens oder eines eckigen Gefäßes gemessen werden soll und man nicht in das Innere gelangen kann; man darf nur den äußeren Scheitelwinkel m messen und x = m setzen.

Man kann hier auch den äußeren Nebenwinkel n messen; dann ist $x = 180^\circ - n$.

Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

§. **34.** Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die anderen vier äußere Winkel. In Fig. 22 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade; c, d, m und n sind innere, a, b, o und p sind äußere Winkel.

Fig. 22.

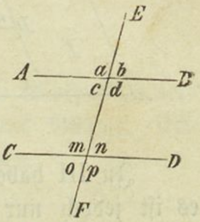


Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Gegenwinkel. Zwei äußere Winkel oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden Wechselwinkel genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Anwinkel.

Gegenwinkel	Wechselwinkel	Anwinkel
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

§. **35.** Schreitet (Fig. 23) die Gerade AB längs der EF mit sich selbst parallel fort, bis sie in die Lage CD kommt, so wird sie, da sich

Fig. 23.



dabei ihre Lage gegen die EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel bilden; es werden also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander fallen, also einander gleich sein; je zwei Wechselwinkel werden in zwei Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sein; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, also zusammen 180° betragen. Es ist also

1) $a = m$,	2) $a = p$,	3) $a + o = 180^0$,
$b = n$,	$b = o$,	$b + p = 180^0$,
$c = o$,	$c = n$,	$c + m = 180^0$,
$d = p$,	$d = m$,	$d + n = 180^0$; d. h.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind

1. je zwei Gegenwinkel einander gleich,
2. je zwei Wechselwinkel einander gleich,
3. je zwei Anwinkel zusammen gleich 180°.

Umgekehrt folgt: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder zwei Anwinkel zusammen 180° betragen, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Aufgaben.

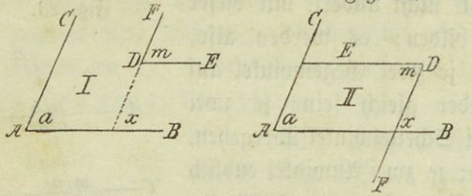
1. Zeichne zwei parallele Gerade AB und CD und durchschneide sie durch eine dritte Gerade EF, welche die anderen in G und H trifft. Benenne jeden der dadurch entstehenden Winkel mit drei Buchstaben. Gib alle Paare von Neben-Scheitel-, Gegen-, Wechsel- und Anwinkeln an.
2. Es sei (Fig. 23) der Winkel $a = 112^0$; wie groß ist b, c, d, m, n, o, p?
3. Welche Richtungen haben die Schenkel a) zweier gleicher Gegenwinkel, b) zweier gleicher Wechselwinkel?

§. 36. Es sei (Fig. 24) AB || DE und AC || DF.

In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet und ist, da W. $a = x$ und $m = x$ als Gegenwinkel, auch $a = m$.

In II sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet; da a dem Winkel x als Gegenwinkel und m dem Winkel x als Wechselwinkel gleich ist, so ist auch in diesem Falle $a = m$.

Fig. 24.



In III haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzte Seiten gerichtet. Da $a + y = 2R$ und $n = y$ ist, so ist auch $a + n = 2R$.

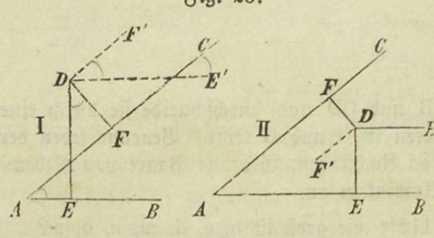
Daraus folgt:

a) *Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite, oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.*

b) *Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.*

§. **37.** Es sei (Fig. 25) $DE \perp AB$ und $DF \perp AC$. Man drehe die Schenkel DE und DF des Winkels EDF als eine feste Verbindung um den Scheitel D um einen rechten Winkel, so daß sie in die Lage DE′ und DF′ kommen.

Fig. 25.



In I haben nun die Winkel E′DF′ und BAC paarweise parallele und nach denselben Seiten gerichtete Schenkel; also ist Winkel $E'DF' = BAC$, folglich auch Winkel $EDF = BAC$. In II sind auch die Schenkel der Winkel E′DF′ und BAC paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist

$$E'DF' + BAC = 180^{\circ}, \text{ folglich auch Winkel } EDF + BAC = 180^{\circ}.$$

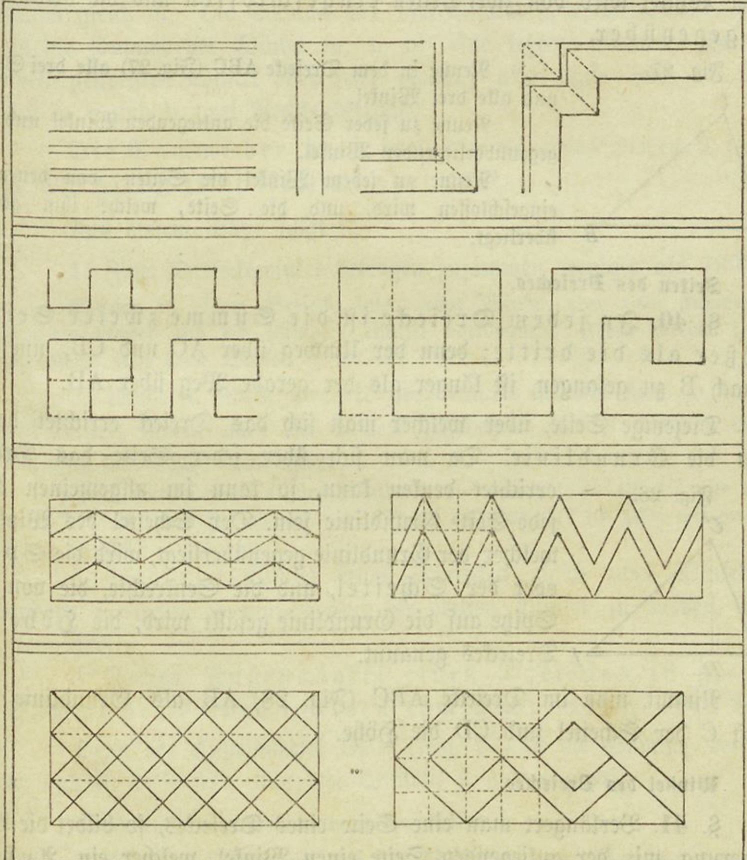
Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise auf einander senkrecht stehen, sind entweder gleich, oder ihre Summe ist gleich 180°.

Wann findet die erste und wann die zweite Beziehung statt?

4. Zeichenübungen.

§. 38. Zusammenstellungen von geraden Linien und Winkeln zu verschiedenen Formen (Figuren=Tafel 26): Einfaßlinien und Bänder, Eckeinfassungen, Mäander, Zickzack, Netze und Verschlingungen.

Figuren=Tafel 26.



II. Geradlinige Figuren.

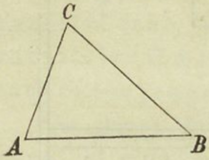
1. Dreiecke.

Bestandtheile der Dreiecke.

§. **39.** Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein *Dreieck*. Die drei Strecken heißen *Seiten* des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei *Seiten* und drei *Winkel*. Jede Seite hat zwei *anliegende* und einen *gegenüberliegenden* Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten *eingeschlossen* und die dritte liegt ihm *gegenüber*.

Fig. 27.



Nenne in dem Dreiecke ABC (Fig. 27) alle drei Seiten und alle drei Winkel.

Nenne zu jeder Seite die anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel.

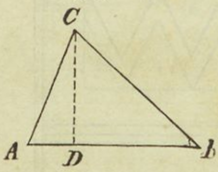
Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von denen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt.

Seiten des Dreieckes.

§. **40.** *In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte*; denn der Umweg über AC und CB, um von A nach B zu gelangen, ist länger als der gerade Weg über AB.

Diejenige Seite, über welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, heißt die *Grundlinie*. Da man sich über jeder Seite das Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird die *Spitze* oder der *Scheitel*, und die Senkrechte, die von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, die *Höhe* des Dreieckes genannt.

Fig. 28.



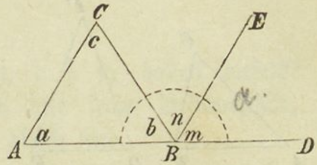
Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 28) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe.

Winkel des Dreieckes.

§. **41.** Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anliegenden Seite einen Winkel, welcher ein *Außenwinkel* des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreiecke *innere Winkel* sind.

CBD (Fig. 29) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 29.



Verlängere jede Seite eines Dreieckes nach beiden Seiten. Wie viele Außenwinkel werden dadurch gebildet? Welche unter ihnen sind als Scheitelwinkel gleich? Nenne zu jedem Außenwinkel den inneren anliegenden, und die beiden nicht anliegenden Winkel.

§. **42.** Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 29) die Seite AB verlängert und durch B die BE || AC gezogen, so entstehen die zwei Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, c, b ist daher so groß, als die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muss auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen.

Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreieckes ist also gleich zwei Rechten oder 180°.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? Jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitze Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180° subtrahiert.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind: a) 65° und 87°; b) 43° 10′ und 102° 27′; c) 25° 46′ 21″ und 74° 48′ 49″; d) 57° 38′ 34″ und 61° 10′ 16″; wie groß ist der dritte Winkel?

3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines andern Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

4. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

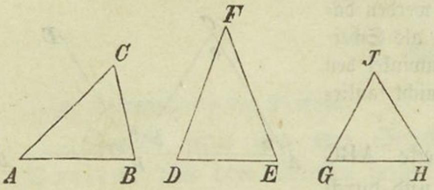
Denn der Außenwinkel CBD (Fig. 27) ist die Summe der Winkel m und n; diese sind aber den Winkeln a und c gleich.

Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.

§. **43.** In Beziehung auf die Länge der Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke.

Ein Dreieck ABC (Fig. 30), in welchem alle drei Seiten einander ungleich sind, heißt ungleichseitig; ein Dreieck DEF, in welchem zwei

Fig. 30.



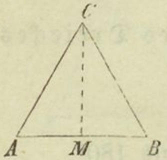
Seiten einander gleich sind, heißt *gleichschenklig*; ein Dreieck GHJ, in welchem alle drei Seiten gleich sind, wird *gleichseitig* genannt.

Im *gleichschenkligen* Dreiecke heißen die gleichen Seiten *Schenkel*, die dritte Seite die *Grundlinie* und der ihr gegenüberliegende Eckpunkt der *Scheitel*.

Aufgaben.

1. *Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.*

Fig. 31.



Zeichne (Fig. 31) eine Strecke AB, errichte in der Mitte M derselben eine Senkrechte und bestimme in ihr den dritten Dreieckspunkt C so, daß er von A und von B so weit entfernt ist, wie A von B.

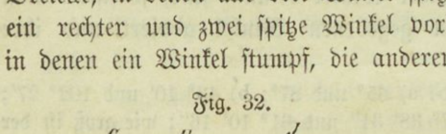
2. *Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen.*

Errichte in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte und nimm einen beliebigen Punkt derselben als dritten Dreieckspunkt an.

Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

§. **44**. Mit Rücksicht auf die *Winkel* gibt es *spitzwinklige* Dreiecke, in denen alle drei Winkel spitz sind; *rechtwinklige*, in denen ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen; und *stumpfwinklige*, in denen ein Winkel stumpf, die anderen zwei spitz sind.

Fig. 32.



In Fig. 32 ist ABC ein spitzwinkliges, FDE ein rechtwinkliges und JGH ein stumpfwinkliges Dreieck.

Im *rechtwinkligen* Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite EF die *Hypotenuse*; die beiden Seiten DE und DF, welche den rechten Winkel einschließen, werden *Katheten* genannt.

Aufgaben.

1. *Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen.*

Zeichne einen rechten Winkel und verbinde zwei Punkte der Schenkel durch eine Strecke.

2. Zeichne a) einen spitzen, b) einen rechten, c) einen stumpfen Winkel, schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke. Was für ein Dreieck erhältst du?

2. Congruenz der Dreiecke.

Construction und Congruenz der Dreiecke.

§. 45. Zwei Dreiecke sind congruent, d. i. sie haben dieselbe Größe und dieselbe Gestalt, wenn in denselben alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sind.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestandstücken in zwei Dreiecken auf ihre Congruenz schließen.

Um zu sehen, wie viele und welche Bestandstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke congruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wie viele und welche Stücke erforderlich sind, um mit denselben ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt zu construieren, weil dann alle Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sein müssen.

Ist nur ein Bestandstück, oder sind zwei Bestandstücke gegeben, so lassen sich mit denselben unzählig viele verschiedene Dreiecke construieren.

Damit ein Dreieck der Größe und der Gestalt nach vollkommen bestimmt werde, sind wenigstens drei Bestandstücke erforderlich; es können gegeben sein:

1. alle drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel,
4. eine Seite und zwei Winkel,
5. alle drei Winkel.

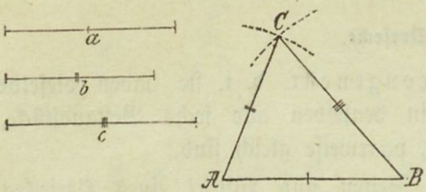
Da jedoch durch drei Winkel zwar die Gestalt, nicht aber auch die Größe eines Dreieckes bestimmt wird, so liefert der letzte der angeführten fünf Fälle keine bestimmte Construction.

Es bleiben demnach nur die ersten vier Fälle zu untersuchen übrig.

§. 46. Ein Dreieck zu construieren, wenn die drei Seiten gegeben sind.

Es seien (Fig. 33) a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke AB = a auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Beschreibt man dann aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesseer c Kreisbogen, welche sich im

Fig. 33.



Punkte C schneiden, so ist C der dritte Endpunkt des Dreieckes. Man ziehe daher die Strecken AC und BC; dann ist ABC das verlangte Dreieck. Durch drei Seiten ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Geschieht die Auflösung einer Aufgabe, wie hier, mittelst des Lineals und des Zirkels, und gründet sie sich auf die Lehren der Geometrie, so heißt die Zeichnung eine geometrische Construction.

Zeichnet man mit denselben drei Seiten a, b, c noch ein zweites Dreieck, so muss dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben, also mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

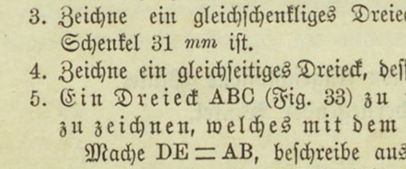
(I. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben alle drei Seiten paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne vier Dreiecke mit den Seiten a) 3 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm*; b) 5 *cm*, 4 *cm*, 3 *cm*; c) 37 *mm*, 24 *mm*, 28 *mm*; d) 2 *cm* 6 *mm*, 3 *cm* 2 *mm*, 4 *cm* 1 *mm*.
2. Versuche mit den Strecken 2 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm* ein Dreieck zu construieren. Wie müssen die drei gegebenen Strecken beschaffen sein, damit man mit ihnen ein Dreieck zeichnen könne?
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 25 *mm* und dessen Schenkel 31 *mm* ist.
4. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a) 3 *cm*, b) 2 *cm* 2 *mm* beträgt.
5. Ein Dreieck ABC (Fig. 33) zu übertragen, d. i. ein Dreieck DEF zu zeichnen, welches mit dem Dreiecke ABC congruent ist.

   Mache DE = AB, beschreibe aus D mit dem Halbmesser AC, und aus E mit dem Halbmesser BC Kreisbogen, welche sich in F schneiden. Ziehe dann DF und EF, so entsteht das Dreieck DEF, welches mit ABC congruent ist.

Fig. 34.

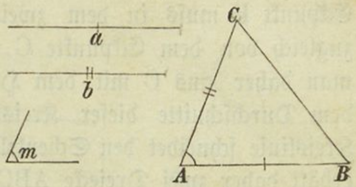


6. Einen Winkel BAC (Fig. 34) zu übertragen, d. i. einen Winkel zu zeichnen, welcher dem Winkel BAC gleich ist.

   Ziehe DE; dann beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe auch aus D einen Bogen, welcher DE in E durchschneidet; endlich fasse mit dem Zirkel den Abstand MN, und durchschneide damit aus E den von D aus beschriebenen Bogen in F. Wird nun DF gezogen, so ist der Winkel EDF = BAC, da △ DEF ≅ AMN ist.

§. 47. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 35.



Es seien (Fig. 35) a und b die zwei gegebenen Seiten und m der von ihnen eingeschlossene Winkel. Construiert man in A den gegebenen Winkel m und trägt auf dessen Schenkeln AB = a und AC = b auf, so ist dadurch die Lage der Eckpunkte B und C, daher auch die dritte Seite BC bestimmt. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Construiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck, so muss es mit dem früheren in der Größe und Gestalt übereinstimmen, d. h. mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(II. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

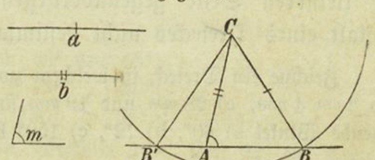
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben die Katheten paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Construiere folgende Dreiecke:
   a) zwei Seiten 3 *cm* und 4 *cm*, eingeschlossener W. 60°;
   b) „ „ 35 *mm* „ 23 *mm*, „ „ 45°;
   c) „ „ 2 *cm* 2 *mm* „ 6 *cm* 6 *mm*, „ „ 120°.
2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 21 *mm* und 29 *mm*.
3. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel 2 *cm* 8 *mm* und dessen Winkel am Scheitel 76° ist.

§. 48. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Fig. 36.



Der gegebene Winkel kann der größeren oder kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

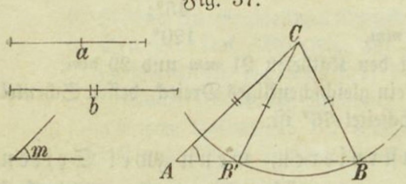
a) Es seien (Fig. 36) a und b die beiden gegebenen Seiten und zwar a größer als b; der der größeren Seite a gegenüberliegende Winkel sei m.

Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b, deren gegenüberliegender Winkel nicht gegeben ist; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muss in dem zweiten Schenkel AB des Winkels liegen und zugleich von dem Eckpunkte C um die Strecke a entfernt sein. Beschreibt man daher aus C mit dem Halbmesser a eine Kreislinie, so muss B in dem Durchschnitte dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB liegen. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B′, und man erhält daher zwei Dreiecke ABC und AB′C. Von diesen enthält jedoch nur das erste Dreieck ABC die gegebenen drei Stücke; das zweite AB′C hat zwar auch die zwei gegebenen Seiten, aber nicht den gegebenen Winkel, sondern dessen Nebenwinkel, genügt somit der Aufgabe nicht. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken noch ein zweites Dreieck, so muss dieses mit dem früheren gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben. Daraus folgt:

(III. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich sind.

Fig. 37.



b) Es seien (Fig. 37) a und b die zwei gegebenen Seiten und zwar a kleiner als b, und der Winkel, welcher der kleineren Seite a gegenüberliegt, sei m. Durch das gleiche Verfahren, wie oben, erhält man zwei Dreiecke ABC und AB′C, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

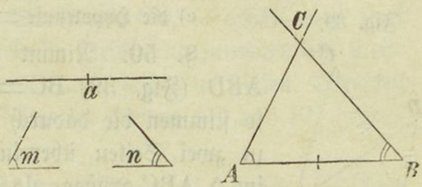
Zeichne ein Dreieck, in welchem zwei Seiten a) 4 *cm* und 2 *cm*, b) 3 *cm* 2 *mm* und 2 *cm* 4 *mm*, c) 28 *mm* und 19 *mm* sind, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel a) 60°, b) 72°, c) 150° beträgt.

§. **49.** Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden, oder es ist der eine ein anliegender, der andere der gegenüberliegende Winkel.

a) Es seien (Fig. 38) a die gegebene Seite m und n die ihr anliegenden Winkel.

Fig. 38.



Man ziehe AB = a; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A den Winkel m und in B den Winkel n auf, so muss der dritte Eckpunkt C in dem **Durchschnittspunkte** der beiden Geraden AC und BC, welche mit der Seite AB die gegebenen Winkel bilden, liegen. Man erhält also das Dreieck ABC, welches eine völlig bestimmte Größe und Gestalt hat. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Wird mit denselben drei Stücken a, m und n noch ein zweites Dreieck gezeichnet, so muss es mit ABC gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, also mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(IV. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die ihr anliegenden Winkel paarweise gleich sind.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmt; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt, und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel wird ein Dreieck vollkommen bestimmt.

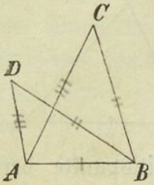
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Kathete und ein spitzer Winkel, oder die Hypotenuse und ein spitzer Winkel paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne folgende Dreiecke:
   a) eine Seite 4 *cm*, anliegende Winkel 60° und 45°;
   b) „ „ 3 *cm*, „ „ 72° „ 30°;
   c) „ „ 2·8 *cm*, „ „ 120° „ 36°.
2. Versuche mit der Seite 2 *dm* und den Winkeln 120° und 72° ein Dreieck zu zeichnen. Wie müssen die anliegenden Winkel beschaffen sein, damit die Construction des Dreieckes möglich sei?

3. Construiere mit Hilfe des Transporteurs ein Dreieck, in welchem eine Seite 27 *mm*, ein anliegender Winkel 59° und der gegenüberliegende Winkel 72° beträgt.
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete = 2 *cm* 5 *mm* und der anliegende spitze Winkel = 72°;
   b) eine Kathete = 3 *cm* und der gegenüberliegende Winkel = 60°;
   c) die Hypotenuse = 4 *cm* und ein anliegender Winkel = 45°.

Fig. 39.



§. **50**. Nimmt man in den Winkeln ABC und ABD (Fig. 39) BC = BD an, und zieht AC und AD, so stimmen die dadurch entstehenden Dreiecke ABC und ADB in zwei Seiten überein; dagegen ist die dritte Seite AC im △ ABC größer, als die dritte Seite AD im △ ABD; zugleich ist der der Seite AC gegenüberliegende Winkel ABC im △ ABC größer als der der Seite AD gegenüberliegende Winkel ABD im △ ABD.

Daraus folgt:

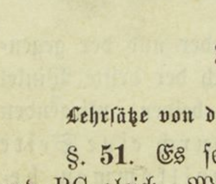
1. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren dieser Seiten auch ein größerer Winkel gegenüber.
2. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren dieser Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

3. Anwendung der Congruenzsätze.

Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt.

§. **51**. Es seien in dem Dreiecke ABC (Fig. 40) zwei Seiten AC und BC gleich. Man halbiere die Seite AB im Punkte D und vergleiche die beiden Dreiecke ACD und BCD; es ist in denselben die Seite CD gemeinschaftlich, ferner AC = BC nach der Voraussetzung, und AD = BD vermöge der Construction; in den beiden Dreiecken sind also alle drei Seiten paarweise gleich, folglich sind die Dreiecke ACD und BCD congruent. In congruenten Dreiecken müssen die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein; der gemeinschaftlichen Seite CD liegt im Dreiecke ACD der Winkel A, im Dreiecke BCD der Winkel B gegenüber; also ist A = B. Wenn also im Dreiecke ABC die Seite AC = BC ist, so muss auch der Winkel B = A sein, d. h.

Fig. 40.



Sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich.

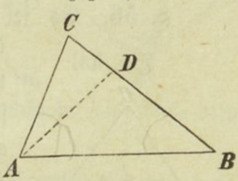
§. **52.** Es sei umgekehrt in dem Dreiecke ABC (Fig. 40) der Winkel A = B, so läſst sich zeigen, daſs auch die Seite BC = AC sein müsse. Fällt man nämlich von C auf AB die Senkrechte CD, so erhält man zwei Dreiecke, welche alle drei Winkel paarweise gleich und überdies die Seite CD gemeinschaftlich haben, die also congruent sind; in diesen Dreiecken liegen den gleichen Winkeln ADC und BDC die Seiten AC und BC gegenüber, also ist AC = BC.

Sind also in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich.

§. **53.** Sind in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 41) der Winkel BAC größer als ABC; so läſst sich zeigen, daſs auch BC größer sein müsse als AC. Schneidet man von dem größeren Winkel bei A durch die Gerade AD einen Theil ab, so daſs der Rest BAD = ABD sei, so ist im Dreiecke ABD auch AD = BD. Es ist nun im Dreiecke ACD die Summe von AD und DC größer als AC; AD und DC ist aber so viel als BD und DC, folglich soviel als BC; also ist wirklich BC größer als AC.

Fig. 41.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse, im stumpfwinkligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

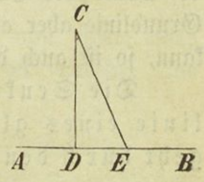
Aus dem III. Congruenzsatze (§. 48) folgt dann auch:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich sind.

§. **54.** Zieht man vom Punkte C (Fig. 42) zu der Geraden AB die Senkrechte CD und überdies irgend eine andere Gerade z. B. CE, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CDE, und es muſs darin die Hypotenuse CE größer sein, als die Kathete CD.

Die Senkrechte ist daher die kürzeste Gerade, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Fig. 42.



Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade dient dazu, um die Entfernung jenes Punktes von der Geraden zu messen.

Lehrsätze von den gleichschenkligen Dreiecken.

§. 55. Jn einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich. (Folgt aus §. 51.)

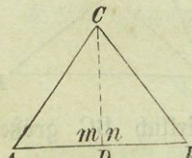
Jn einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich.

Aufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
2. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie a) 52°, b) 37° 12′ 50″ ist?
3. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel a) 71°, b) 25° 46′, c) 59° 19′ 42″ beträgt?
4. Wie groß ist jeder spitze Winkel in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke?
5. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs folgende gleichschenklige Dreiecke:
   a) Grundlinie = 3 *cm*, ein Winkel an der Grundlinie = 41°;
   b) Grundlinie = 27 *mm*, Winkel am Scheitel = 68°;
   c) ein Schenkel = 35 *mm*, ein Winkel an der Grundlinie = 62°;
   d) ein Schenkel = 2 *cm* 6 *mm*, Winkel am Scheitel 84°.
6. Zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 38 *mm* ist.

§. 56. Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 43) CD ⊥ AB. Die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD haben die Hypotenuse gleich und eine Kathete gemeinschaftlich, folglich sind sie congruent, und es müssen auch die zweiten Katheten darin gleich sein, nämlich AD = BD. Die Grundlinie AB ist also im Punkte D halbiert worden.

Fig. 43.



Zieht man daher in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel eine Senkrechte auf die Grundlinie, so wird diese dadurch halbiert.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist auch noch giltig, wenn AB = AC = BC d. i. wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Jm gleichschenkligen sowie im gleichseitigen Dreiecke wird also die Grundlinie von der Höhe halbiert.

Da nach dem obigen Satze die Strecke zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser senkrecht steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann, so ist auch der folgende Satz richtig:

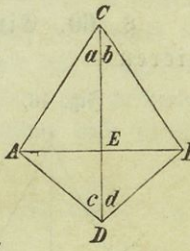
Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel.

§. **57.** Es sei das Dreieck ABC (Fig. 43) gleichschenklig, nämlich AC = BC. Halbiert man die Grundlinie AB im Punkte D, und zieht die Strecke CD, so sind die zwei Dreiecke ACD und BCD congruent. Es müssen daher die Winkel m und n, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein; sind aber diese Winkel gleich, so steht CD senkrecht auf AB. Daraus folgt:

Die Strecke, welche in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel verbindet, steht auf der Grundlinie senkrecht.

§. **58.** Zeichnet man über der Grundlinie AB (Fig. 44) zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD und zieht durch die Scheitel C und D die Strecke CD, so sind die Dreiecke ACD und BCD congruent (warum?); folglich müssen darin die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein. Den gleichen Seiten AD und BD liegen die Winkel a und b gegenüber, also ist a = b; den gleichen Seiten AC und BC liegen die Winkel c und d gegenüber, also ist c = d. Durch die Gerade CD wird also jeder Winkel am Scheitel halbiert.

Fig. 44.



Weil nun AC = BC, CE = CE und a = b ist, so ist △ ACE ≅ BCE, daher AE = BE. Die Grundlinie AB wird also durch die Gerade CD im Punkte E halbiert.

Aus der Congruenz der Dreiecke ACE und BCE folgt ferner, dass auch die Winkel AEC und BEC gleich sind, oder dass CE ⊥ AB ist.

Zeichnet man daher über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbiert 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf der Grundlinie senkrecht.

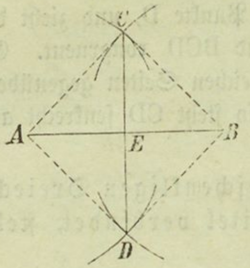
Constructionsaufgaben.

§. **59.** Eine gegebene Strecke AB (Fig. 45) zu halbieren.

Die Auflösung beruht auf dem Satze: Zeichnet man über einer Strecke zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese die Grundlinie.

Man braucht nur über AB zwei gleichschenklige Dreiecke zu construieren und ihre Scheitel C und D durch eine Gerade zu verbinden.

Fig. 45.



Dabei sind jedoch die Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke für die Lösung der Aufgabe entbehrlich. Die Auflösung ist also:

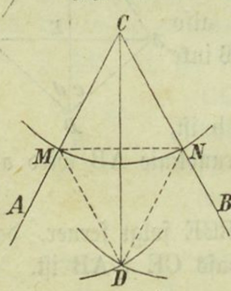
Um eine Strecke zu halbieren, beschreibe man aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch die beiden Punkte eine Gerade; diese Gerade halbiert die gegebene Strecke.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Strecken und halbiere jede derselben.
2. Zeichne eine Strecke und theile sie in 4, 8 gleiche Theile.

§. **60**. Einen gegebenen Winkel ACB (Fig. 46) zu halbieren.

Fig. 46.



Man mache zuerst den Winkel ACB zum Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, indem man von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke CM und CN abschneidet. Dann braucht man nur noch über der Grundlinie MN ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND zu construieren und durch die Scheitel beider Dreiecke die Gerade CD zu ziehen. Das Zeichnen der Grundlinie MN und der Schenkel MD und ND ist für die Lösung nicht nothwendig. Man hat demnach folgende Auflösung:

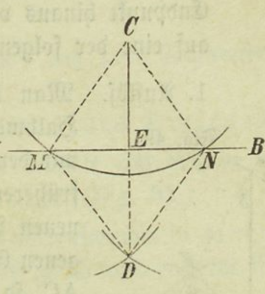
Um einen Winkel zu halbieren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel schneidet; aus den Durchschnittspunkten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe dann durch diesen Punkt und den Scheitel des Winkels eine Gerade; diese Gerade halbiert den gegebenen Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Winkel und halbiere sie.
2. Zeichne einen Winkel und theile ihn in 4 gleiche Theile.

§. **61**. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 47) von einem außer ihr befindlichen Punkte C eine Senkrechte zu fällen.

Fig. 47.



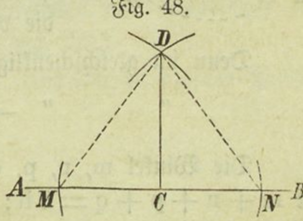
Es handelt sich zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Scheitel der Punkt C ist, und dessen Grundlinie in die Gerade AB fällt. Zu diesem Ende beschreibt man aus C mit einem hinlänglich großen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwei Punkten M und N schneidet; dadurch ist die gemeinschaftliche Grundlinie MN bestimmt. Construiert man dann über dieser Grundlinie ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND und zieht die Gerade CD, so muss diese auf MN, also auch auf AB senkrecht sein. Man hat daher folgende Auflösung:

Um aus einem Punkte zu einer Geraden eine Senkrechte zu ziehen, beschreibe man aus jenem Punkte einen Kreisbogen, welcher die Gerade in zwei Punkten schneidet; aus diesen beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Punkte schneiden, und verbinde diesen Punkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

§. **62.** In einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten.

a) Die Auflösung beruht auf dem Satze: Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel eine Gerade zu der Mitte der Grundlinie, so steht diese Gerade auf der Grundlinie senkrecht.

Fig. 48.



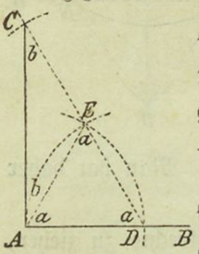
Es sei (Fig. 48) AB die gegebene Gerade und C ein Punkt derselben. Man braucht nur ein gleichschenkliges Dreieck MND zu construieren, dessen Grundlinie in die Gerade AB so hineinfällt, dass der Punkt C die Mitte der Grundlinie MN ist, und dann den Scheitel D mit dem Punkte C zu verbinden.

Um daher in einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, schneide man von jenem Punkte aus an der Geraden gleiche Stücke ab, beschreibe aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe durch diesen und den gegebenen Punkt eine Gerade, diese ist die gesuchte Senkrechte.

b) Ist der gegebene Punkt A ein Endpunkt der gegebenen Strecke AB, so verlängere man die Gerade über diesen Endpunkt hinaus und verfahre sodann wie vorhin. Läſst sich aber die Linie nicht über den Endpunkt hinaus verlängern, so kann man die verlangte Senkrechte auf eine der folgenden Arten erhalten:

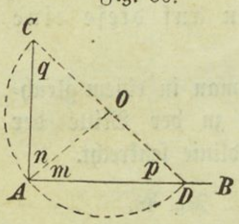
1. Auflöſ. Man beschreibe (Fig. 49) aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die AB in D schneidet; mit demselben Halbmesser durchschneide man aus D den früheren Kreisbogen in E, und beschreibe aus E einen neuen Bogen, welcher von der durch D und E gezogenen Geraden in C geschnitten wird. Zieht man nun die AC, so steht diese auf AB senkrecht.

Fig. 49.



Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Vermöge der Construction ist das Dreieck ADE gleichseitig und das Dreieck ACE gleichschenklig. Im $\triangle$ ADE ist daher jeder der drei Winkel $a = 60^0$; im $\triangle$ ACE ist jeder der zwei gleichen Winkel b an der Grundlinie die Hälfte des Außenwinkels a, also $b = 30^0$. Mithin ist Winkel $BAC = a + b = 60^0 + 30^0 = 90^0$, und daher $AC \perp AB$.

Fig. 50.



2. Auflöſ. Man nehme (Fig. 50) über der Geraden AB einen Punkt O an, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser OA einen Kreisbogen CAD und ziehe durch D und O eine Gerade, welche jenen Bogen in C durchschneidet; verbindet man diesen Punkt C mit dem gegebenen Punkte A durch eine Gerade AC, so ist diese die verlangte Senkrechte.

Denn im gleichschenkligen $\triangle$ ADO ist Winkel $m = p$,
" " $\triangle$ ACO ist Winkel $n = q$,
daher $m + n = p + q$.

Die Winkel m, n, p, q bilden nun die Winkel eines Dreieckes, also ist $m + n + p + q = 2R$; folglich ist die halbe Summe $m + n = R$, mithin $AC \perp AB$.

§. 63. Geometrische Construction einzelner Winkel.

1. Einen Winkel von a) 60^0, b) 30^0, c) 120^0, d) 150^0 geometrisch zu construieren.

a) Durch Construction eines gleichseitigen Dreieckes.

b) Durch Halbierung des Winkels von 60^0.

c) und d) Durch Construction des Nebenwinkels von 60^0, bezüglich von 30^0.

2. Einen Winkel von a) 90°, b) 45°, c) 135° geometrisch zu construieren.

a) Nach §. 61 oder §. 62.

b) und c) Durch Halbierung des Winkels von 90°, und durch Construction des Nebenwinkels von 45°.

§. **64**. Die vier merkwürdigen Punkte eines Dreieckes.

1. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und errichte auf dieselbe in der Mitte eine Senkrechte — eine Mittelsenkrechte. (Fig. 51.)

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkte, der von den drei Eckpunkten des Dreieckes gleich weit entfernt ist.

Fig. 51.

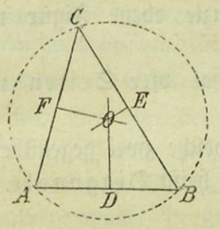
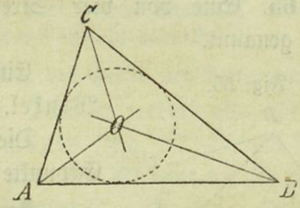


Fig. 52.



2. Ziehe von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Gerade, welche den Winkel an jener Ecke halbiert — eine Winkelhalbierungslinie. (Fig. 52.)

Die drei Winkelhalbierungslinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkte, der von den drei Seiten des Dreieckes gleich weit entfernt ist.

3. Fälle von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite — eine Höhe. (Fig. 53.)

Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkte.

Fig. 53.

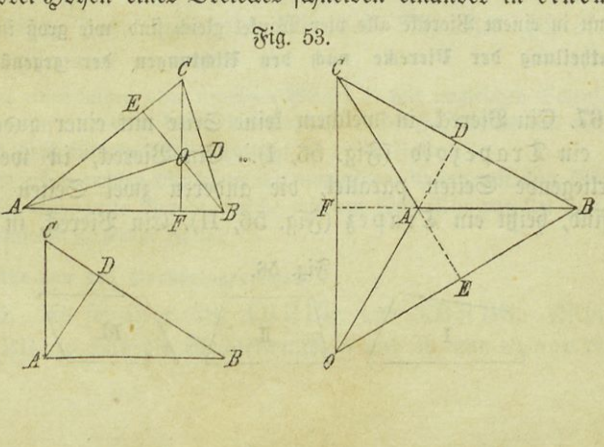
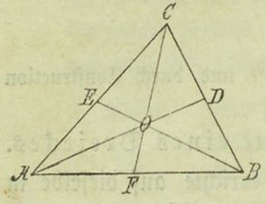


Fig. 54.



4. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und ziehe von jeder Mitte eine Strecke zu dem gegenüberliegenden Eckpunkte — eine Mittellinie. (Fig. 54.)

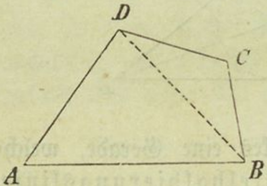
Die drei Mittellinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkte, welcher der Schwerpunkt des Dreieckes heißt.

4. Vierecke.

Bestandtheile der Vierecke.

§. **65**. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 55.



Ein Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Die Strecke, welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale.

Aufgaben.

1. Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?
2. Nenne in dem Vierecke ABCD (Fig. 55) alle vier Seiten und alle vier Winkel. Nenne die Diagonale.

§. **66**. Zieht man in einem Viereck eine Diagonale, so betragen alle Winkel des Viereckes eben so viel als die Winkel der beiden Dreiecke, in welche das Viereck zerlegt wird; die Winkel in jedem der zwei Dreiecke betragen nun zwei Rechte, daher die Winkel des Viereckes vier Rechte.

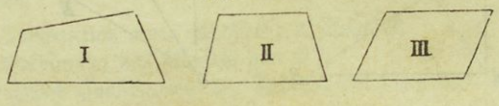
In einem Vierecke beträgt also die Summe aller Winkel vier Rechte oder 360°.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder?

Eintheilung der Vierecke nach den Richtungen der gegenüberliegenden Seiten.

§. **67**. Ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ſt, heißt ein Trapezoid (Fig. 56, I). Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nicht-parallel sind, heißt ein Trapez (Fig. 56, II). Ein Viereck, in welchem je

Fig. 56.



zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (Fig. 56, III).

Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig.

In einem Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, die darauf von der gegenüberliegenden Seite gefällt wird, ist dann die Höhe. In einem Trapeze versteht man unter der Höhe eine Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gefällt wird.

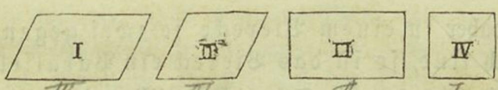
Aufgaben.

1. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez.
2. Zeichne zwei Parallele, dann eben so zwei andere Parallele, welche die früheren durchschneiden. Was für ein Viereck entsteht dadurch?

Eintheilung der Parallelogramme nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 68. Ein Parallelogramm, in welchem weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, heißt ein Rhomboid (Fig. 57, I); ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, ein Rhombus (Fig. 57, II); ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel gleich sind, ein Rechteck (Fig. 57, III); ein Parallelogramm endlich, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, ein Quadrat (Fig. 57, IV).

Fig. 57.



Im Rechtecke und im Quadrate ist jeder Winkel ein rechter; im Rhomboid und im Rhombus kommen zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe Winkel vor. Darum werden das Rechteck und das Quadrat auch rechtwinklige, das Rhomboid und der Rhombus schiefwinklige Parallelogramme genannt.

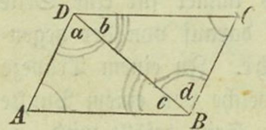
Zeichne einen spitzen oder stumpfen Winkel a) mit ungleichen Schenkeln, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

Zeichne einen rechten Winkel a) mit ungleichen, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

Lehrsätze von den Parallelogrammen.

§. 69. Es sei (Fig. 58) AB || CD und AD || BC. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel a und d, und eben so die Wechselwinkel c und b einander gleich; daher ist $\triangle$ ABD $\cong$ BCD. Dann ist auch Winkel A $=$ C, also auch B $=$ D, und Seite AB $=$ CD, AD $=$ BC. Daraus folgt:

Fig. 58.



1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

2. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

3. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich; oder:

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Aus dem letzten Satze folgt auch:

Senkrechte zwischen Parallelen sind einander gleich.

§. **70.** 1. Es seien in dem Vierecke ABCD (Fig. 58) die Seiten AB $=$ CD und AD $=$ BC. Zieht man die Diagonale BD, so erhält man die Dreiecke ABD und BCD, welche congruent sind, weil sie alle drei Seiten paarweise gleich haben; es müssen daher die den gleichen Seiten AB und CD gegenüberliegenden Winkel a und d gleich, daher, weil diese Winkel Wechselwinkel sind, die Geraden AD und BC parallel sein; wegen AD $=$ BC folgt eben so c $=$ b, und weil diese Winkel Wechselwinkel sind, AB $\parallel$ CD. Es ist also AB $\parallel$ CD und AD $\parallel$ BC, mithin das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

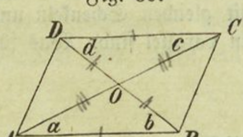
Wenn daher in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

2. Es sei (Fig. 58) die Seite AB $=$ CD und AB $\parallel$ CD. Da c und A als Wechselwinkel gleich sind, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ BCD und folglich bD $=$ BC; dann ist aber nach 1. das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Sind also in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. **71.** Es sei ABCD (Fig. 59) ein Parallelogramm, also AB $\parallel$ CD, AD $\parallel$ BC. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist wegen AB $=$ CD, a $=$ c und b $=$ d das Dreieck ABO $\cong$ CDO, folglich AO $=$ CO, BO $=$ DO; d. i. *die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbieren einander.*

Fig. 59.



Zusatz. Von den Diagonalen der Parallelogramme gelten noch folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Kann unter Anwendung des II. Congruenzsatzes (§. 47) bewiesen werden.

2. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander.

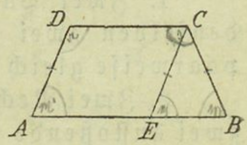
Die Wahrheit dieses Satzes beruht auf §. 58.

3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht aufeinander.

Lehrsätze von den Trapezen und den Parallelen im Dreiecke.

§. **72.** Zieht man in dem Trapeze ABCD (Fig. 60) die CE || DA, so zerfällt dasselbe in ein Parallelogramm AECD und in ein Dreieck ECB, welches letztere die zwei nichtparallelen Seiten und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat.

Fig. 60.

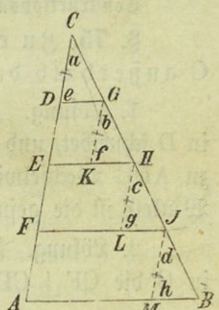


Ist das Trapez ABCD gleichschenklig, so ist es auch das Dreieck EBC, daher ist Winkel B = CEB = A. Ebenso ist dann Winkel BCD = D. Daraus folgt:

1. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der Parallelseiten einander gleich.

2. Umgekehrt: Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden Parallelseiten einander gleich, so ist das Trapez gleichschenklig.

Fig. 61.



§. **73.** Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 61) die Seite AC in mehrere, z. B. 4 gleiche Theile getheilt, also CD = DE = EF = FA, und man ziehe DG, EH und FJ sämmtlich parallel mit der Seite AB; dann läßt sich beweisen, daß dadurch auch CB in 4 gleiche Theile getheilt wird. — Man ziehe die Linien GK, HL und JM parallel mit AC. Weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, so ist GK = DE, HL = EF und JM = FA. Nach der Voraussetzung sind die Strecken CD, DE, EF und FA gleich, daher müssen auch die Strecken CD, GK, HL und JM gleich sein; in den Dreiecken CDG, GKH, HLJ und JMB sind überdies die Winkel a, b, c und d als Gegenwinkel gleich, ferner die Winkel e, f, g und h gleich, weil ihre Schenkel parallel sind. Die genannten vier Dreiecke haben also eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, sind folglich congruent; den gleichen Winkeln e, f, g und h stehen in diesen Dreiecken die Seiten CG, GH, HJ und JB gegenüber, also ist CG = GH = HJ = JB. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in 4 gleiche Theile getheilt worden.

Wenn also in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt ist und man zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in ebenso viele unter einander gleiche Theile getheilt.

Congruenz und Construction der Vierecke.

§. **74**. Zwei Vierecke sind congruent, wenn in denselben alle vier Seiten und alle vier Winkel nach der Ordnung paarweise gleich sind.

Hieraus folgt:

1. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

2. Zwei Rechtecke sind congruent, wenn in denselben zwei anstoßende Seiten paarweise gleich sind.

3. Zwei Quadrate sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben.

Ein Parallelogramm ist demnach durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite unzweideutig bestimmt.

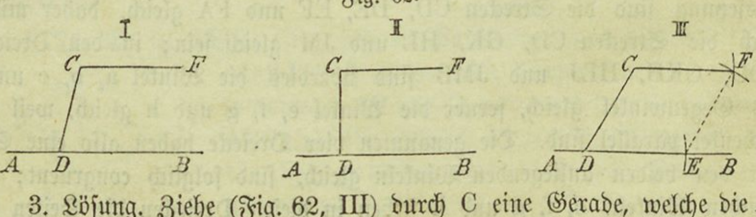
Constructionsaufgaben.

§. **75**. Zu einer Geraden AB (Fig. 62) durch einen Punkt C außerhalb derselben eine Parallele zu ziehen.

1. Lösung. Ziehe (Fig. 62, I) durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und trage in C einen Winkel DCF = ADC so auf, dass er zu ADC Wechselwinkel wird; der zweite Schenkel CF des construierten Winkels ist die gesuchte Parallele (§. 35).

2. Lösung. Fälle (Fig. 62, II) von C die CD ⊥ AB und errichte in C die CF ⊥ CD; dann ist CF || AB (§. 32, 2).

Fig. 62.



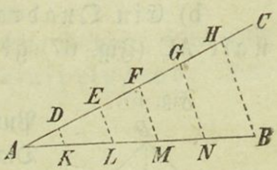
3. Lösung. Ziehe (Fig. 62, III) durch C eine Gerade, welche die AB in D scheidet, und beschreibe aus D mit dem Halbmesser CD einen Kreisbogen, welcher die AB in E schneidet; beschreibt man dann mit demselben

Halbmesser aus C und E zwei Kreisbogen, welche sich in F schneiden, und zieht CF, so ist CDEF ein Parallelogramm (§. 70), daher CF || DE, oder CF || AB.

§. **76.** Eine gegebene Strecke in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

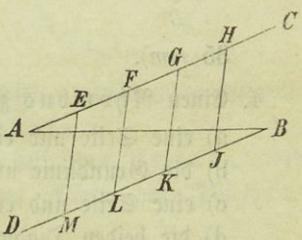
a) Es sei die Strecke AB (Fig. 63) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine andere Gerade AC von beliebiger Richtung und Länge, und trage darauf von A aus 5 beliebige gleiche Theile. Verbindet man den Endpunkt H des fünften Theiles mit B durch die HB, und zieht durch D, E, F, G Parallele mit HB, so theilen diese auch die AB in 5 gleiche Theile AK, KL, LM, MN, NB (§. 73).

Fig. 63.



b) Um die vielen Parallelen zu vermeiden, lege man an AB (Fig. 64) durch A die beliebige Gerade AC, und durch B die BD || CA, trage sowohl auf die AC als BC 4 gleiche Theile auf, und ziehe durch die Theilungspunkte die geraden Linien EM, FL, GK, HJ, so theilen diese die AB in 5 gleiche Theile.

Fig. 64.



§. **77.** 1. Ein Parallelogramm zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man zeichne in A (Fig. 65) einen Winkel = m, schneide von den Schenkeln AB = a und AD = b ab; hierauf beschreibe man aus B mit dem Halbmesser AD einen Bogen und durchschneide ihn aus D mit dem Halbmesser AB; dann ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Fig. 65.

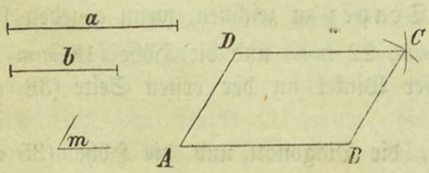
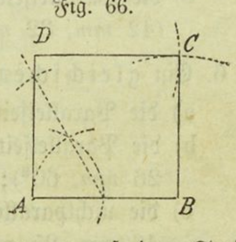


Fig. 66.



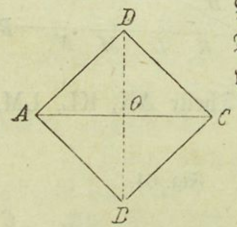
2. a) Ein Quadrat zu construieren, wenn seine Seite AB (Fig. 66) gegeben ist.

Man errichte im Endpunkte A der gegebenen Seite AB auf diese eine Senkrechte, mache AD = AB und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser AB zwei Kreisbogen, welche sich in C schneiden; ABCD ist das verlangte Quadrat.

Oder: Man errichte in beiden Endpunkten A und B der AB Senkrechte, trage auf denselben AB bis D und C auf und ziehe DC.

b) Ein Quadrat zu construieren, wenn seine Diagonale AC (Fig. 67) gegeben ist.

Fig. 67.



Man halbiere AC in O, ziehe durch diesen Punkt eine Senkrechte und trage auf ihr die halbe Diagonale bis B und D auf; ABCD ist dann das verlangte Quadrat.

3. Ein Rechteck zu construieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten (28 *mm* und 19 *mm*);

b) eine Seite und die Diagonale (25 *mm*, 35 *mm*).

4. Einen Rhombus zu construieren, wenn gegeben sind:

a) eine Seite und ein Winkel (38 *mm*, 45°);

b) die Grundlinie und die Höhe (32 *mm*, 24 *mm*);

c) eine Seite und eine Diagonale (20 *mm*, 34 *mm*);

d) die beiden Diagonalen (38 *mm*, 28 *mm*).

5. Ein Trapez zu construieren, wenn gegeben sind:

a) eine Parallelseite mit den ihr anliegenden Winkeln und eine der nichtparallelen Seiten (35 *mm*, 60°, 45° und 12 *mm*);

b) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (46 *mm*, 24 *mm*, 60°, 45°);

c) die Parallelseiten, eine der nichtparallelen Seiten und die Höhe (42 *mm*, 32 *mm*, 35 *mm*, 28 *mm*).

6. Ein gleichschenkliges Trapez zu zeichnen, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten (26 *mm*, 22 *mm*) und die Höhe (18 *mm*);

b) die Parallelseiten und der Winkel an der ersten Seite (38 *mm*, 26 *mm*, 60°);

c) die nichtparallele Seite, die Diagonale und die Höhe (35 *mm*, 46 *mm*, 25 *mm*.)

5. Vielecke.

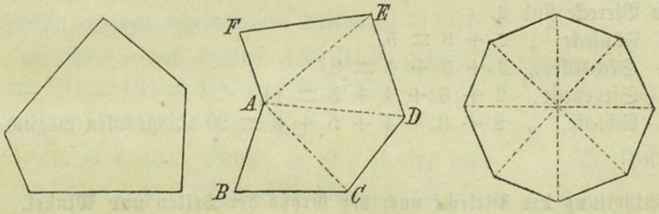
Bestandtheile der Vielecke.

§. **78.** Eine von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur heißt *Vieleck* oder *Polygon*.

Jedes Vieleck hat so viele Seiten als Winkel; zwischen je zwei Seiten liegt ein Winkel, zwischen je zwei Winkeln eine Seite; ferner liegen an jeder Seite zwei Winkel und zwei Seiten.

Die Winkel eines Vieleckes können spitze, rechte, stumpfe, und selbst auch erhabene sein; die letzten nennt man auch *einspringende Vieleckswinkel*.

Fig. 68.



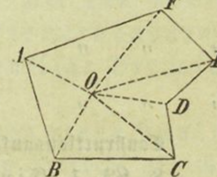
Eine Strecke AC, welche zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt *Diagonale*.

Die Summe aller Seiten eines Vieleckes heißt der *Umfang*, und die Größe der von den Seiten eingeschlossenen Fläche der *Flächeninhalt* desselben.

§. **79.** *In jedem Vieleck ist die Summe aller Winkel gleich so vielmal zwei Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechten.*

Nimmt man innerhalb des Vieleckes ABCDEF (Fig. 69) einen beliebigen Punkt O an und zieht von diesem zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal 2 Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Unter den Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und die zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muss man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch 4 Rechte subtrahieren.

Fig. 69.



Eintheilung der Vielecke nach der Anzahl der Seiten.

§. 80. Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, u. s. w. eingetheilt.

Im engeren Sinne versteht man unter Vieleck eine Figur, welche mehr als vier Seiten hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes? — eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneckes?
2. Wie viele Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wie viele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?
3. Wie viele verschiedene Diagonalen sind überhaupt in einem Vielecke möglich?

Im Vierecke sind 2,
„ Fünfecke „ $2 + 3 = 5$,
„ Sechsecke „ $2 + 3 + 4 = 9$,
„ Siebenecke „ $2 + 3 + 4 + 5 = 14$,
„ Achtecke „ $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ Diagonalen möglich.

Gesetz!

Eintheilung der Vielecke nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 81. Ein Vieleck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind; sonst ungleichseitig. Ein Vieleck heißt gleichwinklig, wenn alle Winkel einander gleich sind; sonst ungleichwinklig. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind; sonst unregelmäßig. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt und dann dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiert. So beträgt

ein Winkel des regelmäßigen Dreieckes . . $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

„ „ „ „ Viereckes . . $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

„ „ „ „ Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

„ „ „ „ Sechseckes . . $\frac{720^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

Constructionsaufgaben.

§. 82. 1. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Bestimme die Größe eines Vieleckswinkels, zeichne eine Strecke, welche der Seite des Vieleckes gleich ist, und trage in den Endpunkten derselben den Vieleckswinkel auf; von den neuen Schenkeln schneide Stücke ab, welche der angenommenen Vielecksseite gleich sind, trage in den Endpunkten wieder den Vieleckswinkel auf und setze dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist.

2. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck. (Die Prüfung geschieht, indem man alle Diagonalen zieht und nachsieht, ob je eine mit einer Seite parallel ist.)

3. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck. (Es müssen je zwei gegenüberliegende Seiten und eine Diagonale parallel sein.)

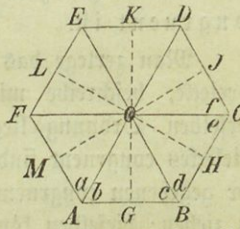
4. Zeichne ein regelmäßiges a) Achteck, b) Zehneck.

Einfacher geschieht die Construction regelmäßiger Vielecke mit Hilfe des Kreises, wovon später bei der Kreislehre die Rede sein wird.

Lehrsätze von den regelmäßigen Vielecken.

§. **83.** Es sei das Vieleck ABCDEF (Fig. 70) regelmäßig,
also AB = BC = CD = DE = EF = FA,
und A = B = C = D = E = F.

Fig. 70.



Halbiert man zwei Winkel A und B, die an einer Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABO. Zieht man von dem Scheitel O desselben zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD, OE, . . . so wird dadurch das Vieleck in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt; denn legt man das erste Dreieck ABO um die Seite OB, so deckt es das Dreieck BCO, dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden u. s. f. Die Strecken OA OB, OC, . . . sind also einander gleich. Da congruente gleichschenklige Dreiecke auch gleiche Höhen haben, so sind auch die von O auf die Seiten gefällten Senkrechten OG, OH, OJ, . . . einander gleich. Daraus folgt:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Umfangswinkel und verbindet den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes durch Strecken, so wird dadurch das Vieleck in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt.

2. In jedem regelmäßigen Vielecke gibt es einen Punkt der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

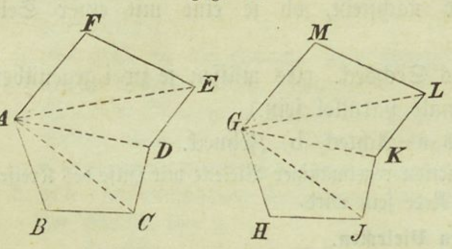
Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes. Man findet ihn, indem man zwei aufeinander folgende Vieleckswinkel halbiert.

Congruenz der Vielecke.

§. **84** Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM (Fig. 71), welche aus gleich vielen der Ordnung nach congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst congruent.

Fig. 71.



Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, dass zwei gleichliegende Dreiecke auf einander fallen, z. B. ABC auf GHJ, so muss auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, . . . ; daher decken sich auch die ganzen Vielecke.

§. **85**. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 71) zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, welches mit dem Vielecke ABCDEF congruent ist.

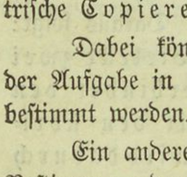
Man zerlege das gegebene Vieleck von A aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes congruent sind. Die dadurch entstehende Figur GHJKLM ist mit der gegebenen congruent. Es ist hier nicht nöthig die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

§. **86**. Auf dem Zeichnen congruenter Vielecke beruht das geometrische Copieren der Gebilde in gleicher Größe.

Dabei können die Hauptpunkte des Gebildes, wie bei der Lösung der Aufgabe in §. 85, mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen bestimmt werden.

Ein anderes geometrisches Verfahren beim Copieren besteht in der Bestimmung der Hauptpunkte durch Coordinaten.

Fig. 72.

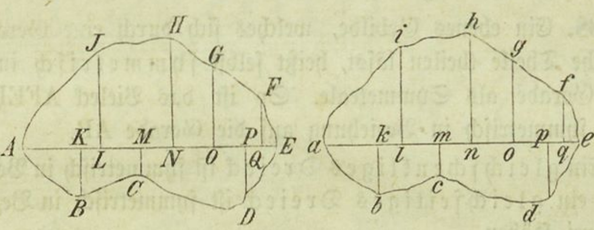


Zieht man in einer Ebene von einem bestimmten Punkte A (Fig. 72) einen Strahl AX, und fällt von irgend einem Punkte M auf diesen Strahl eine Senkrechte MP, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück AP des Strahles die Abscisse, die Senkrechte MP selbst aber die Ordinate, und beide zusammen die Coordinaten jenes Punktes M. Der Strahl AX heißt die Abscissenlinie, der Punkt A des Anfangspunkt.

Wenn der Anfangspunkt A und die Richtung der Abscissenlinie AX gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes M vollkommen bestimmt, wenn dessen Coordinaten AP und MP bekannt sind; denn man braucht nur von A aus an der Abscissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abscisse AP gleich ist, dann im Punkte P eine Senkrechte zu errichten und die Ordinate PM darauf aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Um mittelst der Coordinaten ein Gebilde ABCDE . . . . (Fig. 73) zu copieren, nehme man im Originale irgend eine Gerade AE als Abscis-

Fig. 73.



senlinie und A als Anfangspunkt derselben an, und fälle von allen Hauptpunkten Senkrechte auf die Abscissenlinie. Sodann ziehe man auf dem Copierblatte die Abscissenlinie ae in schicklicher Lage, trage darauf in der Ordnung alle Abscissen von a bis k, l, m, n, . . . auf, errichte in diesen Punkten Senkrechte und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, . . . auf, so ist dadurch die Lage aller Punkte in der Copie bestimmt; man braucht sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden.

Mechanische Methoden des Copierens: das Copieren mittelst der Quadratnetze, das Pikieren (Durchstechen des Originals), das Durchzeichnen, besonders auf durchscheinendem Papier u. s. w.

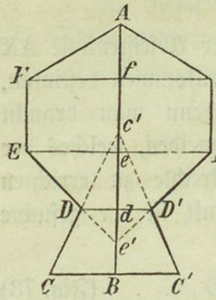
Aufgaben.

Zeichne ein beliebiges Sechseck, Achteck, Zehneck, und copiere es in gleicher Größe a) mittelst des Durchschnittes von Kreisbogen, b) mit Hilfe von Abscissen und Ordinaten, c) mittelst der Quadratnetze.

Symmetrische Gebilde.

§. **87.** Fällt man in der Figur ABCDEF (Fig. 74) von den Eckpunkten die Senkrechten Dd, Ee, Ff auf AB und wendet die Figur als

Fig. 74.



eine feste Verbindung um AB als Achse um, so heißt das Gebilde ABC'D'E'F', welches man dadurch erhält, mit dem gegebenen Gebilde ABCDEF *symmetrisch*, und die Gerade AB, um welche die Umwendung geschieht, die *Symmetrieachse* oder *Symmetrale*.

Zwei symmetrische Gebilde haben demnach die Eigenschaft, daſs die Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte derselben auf der Symmetrale senkrecht steht und von ihr halbiert wird.

Zwei symmetrische ebene Gebilde sind immer auch congruent; ihre gleichen Bestandstücke folgen jedoch in Beziehung auf die Symmetrale in entgegengesetzter Ordnung auf einander.

§. 88. Ein ebenes Gebilde, welches sich durch eine Gerade in zwei symmetrische Theile theilen läſst, heißt selbst *symmetrisch* in Beziehung auf diese Gerade als Symmeteale. So ist das Vieleck AFEDCC'D'E'F' (Fig. 74) symmetrisch in Beziehung auf die Gerade AB.

1. Ein *gleichschenkliges Dreieck* ist symmetrisch in Beziehung auf die Höhe; ein *gleichseitiges Dreieck* ist symmetrisch in Beziehung auf jede der drei Höhen.

2. Ein *Rhombus* ist symmetrisch in Bezug auf jede seiner Diagonalen.

3. Ein *Rechteck* ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert.

4. Ein *Quadrat* ist symmetrisch sowohl in Bezug auf jede Diagonale, als auch in Bezug auf jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert.

5. Ein *gleichschenkliges Trapez* ist symmetrisch in Bezug auf die Gerade, welche die zwei parallelen Seiten halbiert.

6. Ein *regelmäßiges Vieleck* ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt und entweder durch einen Eckpunkt oder durch die Mitte einer Seite geht; es hat eben so viele Symmetralen, als es Seiten hat.

Aufgabe.

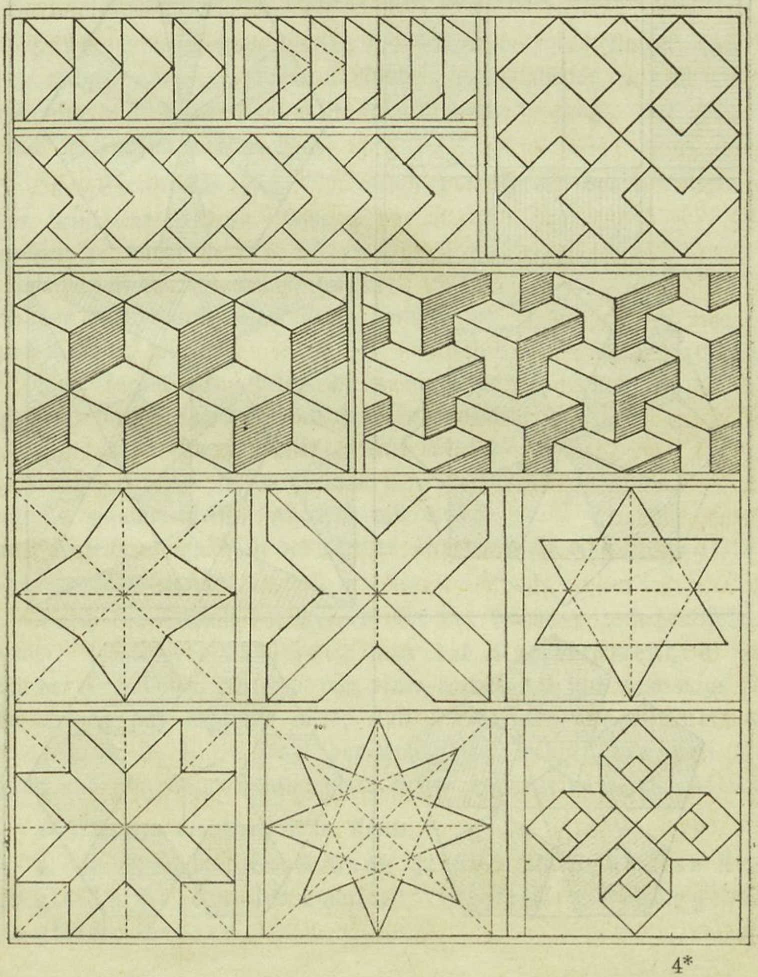
Ein symmetrisches Vieleck zu übertragen. (Fig. 74.)

Man ziehe in dem gegebenen Vielecke die Symmetrale AB und auf diese von den Eckpunkten Senkrechte. Dann bestimmt man in der Copie zuerst die Symmetrale, trägt auf ihr die einzelnen Abschnitte der gegebenen Symmetrale auf, errichtet durch die so gefundenen Punkte Senkrechte auf die neue Symmetrale und schneidet von denselben beiderseits gleich lange der früheren Länge entsprechende Stücke ab; dadurch erhält man die Eckpunkte des verlangten neuen Vieleckes.

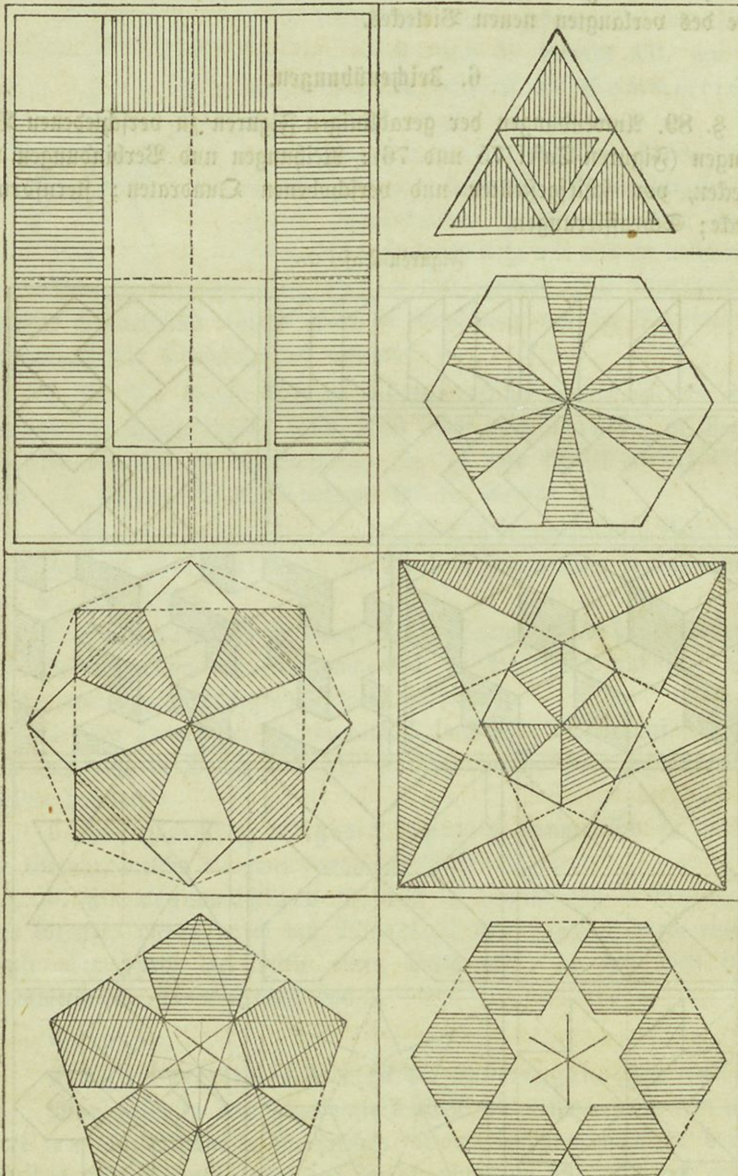
6. Zeichenübungen.

§. **89.** Anwendungen der geradlinigen Figuren zu verschiedenen Verzierungen (Figuren-Tafel 75 und 76): Reihungen und Verbindungen von Dreiecken, von schiefgestellten und verschobenen Quadraten; sternförmige Vielecke; Schraffierungen.

Figuren-Tafel 75.



Figuren=Tafel 76.



III. Der Kreis.

1. Der Punkt und der Kreis.

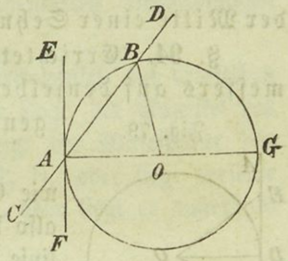
§. 90. Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, oder in dem Umfange desselben, oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises. (§. 27.)

2. Die Gerade und der Kreis.

§. 91. Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Eine Strecke AB (Fig. 77), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Eine Sehne ist um so größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt; die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht, nämlich der Durchmesser, wie AG.

Fig. 77.



Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinausgeht, heißt eine Secante. Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur in einem Punkte A zusammentrifft, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren: 1. der Kreisabschnitt oder das Kreissegment, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AB und dem dazu gehörigen Bogen AB begrenzt wird; und 2. der Kreisausschnitt oder Kreissector, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, wie AOBA.

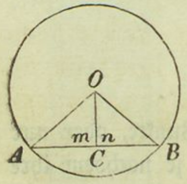
Lehrsätze von den Geraden im Kreise.

§. 92. Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen; und umgekehrt: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen.

Von der Richtigkeit dieser zwei Sätze kann man sich überzeugen, indem man die betreffenden Kreisabschnitte übereinander legt; man findet, dass unter jeder der zwei obigen Voraussetzungen die beiden Kreisabschnitte vollkommen übereinander fallen, folglich im ersten Falle auch die Bogen, im zweiten auch die Sehnen sich decken.

§. **93.** Jede Sehne AB (Fig. 78) eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden. Die in §§. 56 und 57 von den gleichschenkligen Dreiecken bewiesenen Sätze lassen sich daher für den Kreis so ausdrücken:

Fig. 78.



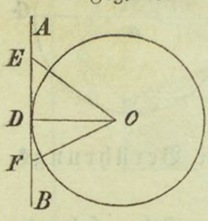
1. Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte eine Senkrechte auf eine Sehne, so wird diese dadurch halbiert.

2. Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Sehne eines Kreises auf dieselbe errichtet, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

3. Die Strecke, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

§. **94.** Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf denselben eine Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Fig. 79.



Es sei (Fig. 79) AB ⊥ OD. Jede schiefe Strecke wie OE, OF, . . . ist länger als die Senkrechte OD; also liegen die Punkte E, F . . . außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreises; AB ist also eine Tangente des Kreises.

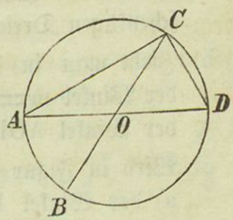
3. Der Winkel und der Kreis.

§. **95.** Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises liegt, dessen Schenkel daher Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Centriwinkel.

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

AOB (Fig. 76) ist ein Centriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

Fig. 80.



Gehen die Schenkel eines Peripheriewinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers, wie bei dem Winkel ACD, so heißt derselbe ein Winkel im Halbkreise.

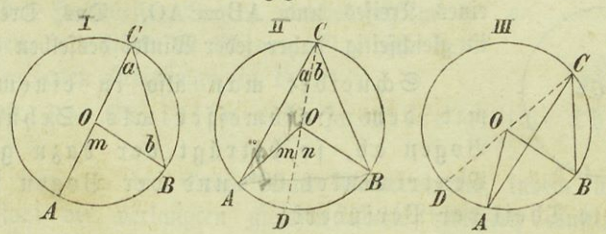
Lehrsätze von den Winkeln im Kreise.

§. **96**. Zu gleichen Centriwinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Sehnen und Bogen; umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel, und: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Centriwinkel.

Von der Richtigkeit dieser drei Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Centriwinkel, oder zwei gleiche Sehnen, oder im dritten Satze zwei gleiche Bogen annimmt, und dann die betreffenden Kreisausschnitte über einander gelegt denkt; man findet, dass sich unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte vollkommen decken, dass also für jede Voraussetzung auch die angeführten Behauptungen richtig sind.

§. **97**. Stehen ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen eines Kreises, so sind in Bezug auf die Lage der Schenkel des Peripheriewinkels drei Fälle möglich: entweder liegt der Mittelpunkt des Kreises in einem Schenkel des Winkels (Fig. 81, I), oder liegt derselbe zwischen den Schenkeln des Winkels (Fig. 81, II), oder liegt er außerhalb der Winkelfläche (Fig. 81, III).

Fig. 81.



a) In Figur 81, I ist m als ein Außenwinkel des Dreieckes BOC gleich der Summe der innern entgegengesetzten Winkel, also $m = a + b$;

nun sind b und a als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes einander gleich, daher $m = a + a = 2a$.

b) Zieht man in Figur 81, II den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel $m = 2a$, $n = 2b$, daher auch $m + n = 2(a + b)$, d. i. der Winkel $AOB = 2ACB$.

c) Wird in Figur 81, III der Durchmesser CD gezogen, so ist nach a) der Winkel $BOD = 2BCD$, ferner $AOD = 2ACD$; daher auch $BOD - AOD = 2(BCD - ACD)$, d. i. Winkel $AOB = 2ACB$.

Es findet somit allgemein der Satz statt:

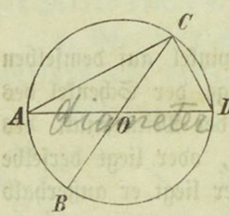
Wenn ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so ist der Centriwinkel doppelt so groß, als der Peripheriewinkel.

Daraus folgt:

Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.

§. **98.** ACD (Fig. 82) ist ein Winkel im Halbkreise. Zieht man den Durchmesser CB, so sind nach dem vorhergehenden Satze die Peripheriewinkel ACB und DCB einzeln die Hälfte der Centriwinkel AOB und DOB, daher muss auch die Summe der ersteren die Hälfte von der Summe der letzteren sein. Nun betragen AOB und DOB zusammen zwei Rechte, also muss die Summe $ACD + DCB$, d. i. der Winkel ACD im Halbkreise, gleich einem Rechten sein.

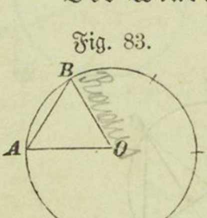
Fig. 82.



Der Winkel im Halbkreise ist also ein Rechter.

§. **99.** Es sei (Fig. 83) O der Mittelpunkt eines Kreises und $AB = AO$. Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60°.

Fig. 83.



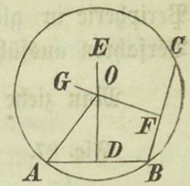
Schneidet man also in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen ab, so beträgt der dazu gehörige Centriwinkel 60° und der Bogen selbst ist der sechste Theil der Peripherie.

Constructionsaufgaben.

§. **100.** 1. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 84), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte in den Mitten derselben die Senkrechte DE und FG; dann ist nach §. 93, 2 der Durchschnitt O dieser Senkrechten der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Fig. 84.



2. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Man ziehe zwei Sehnen und errichte auf dieselben in ihren Halbierungspunkten Senkrechte; der Durchschnittspunkt der beiden Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt.

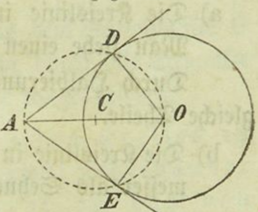
§. **101.** 1. Durch einen Punkt in dem Umfange des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe zu dem gegebenen Punkte einen Halbmesser und errichte darauf eine Senkrechte; diese ist die verlangte Tangente (§. 94).

2. Durch einen Punkt A (Fig. 85) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises durch die Strecke AO, halbiere diese in C, und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten D und E durchschneidet. Zieht man nun AD und AE, so sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises (§. 98).

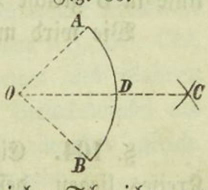
Fig. 85.



§. **102.** Einen Kreisbogen AB (Fig. 86) zu halbieren.

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bogen, welche sich in C durchschneiden, und ziehe die Gerade CO; diese halbiert den gegebenen Kreisbogen in D.

Fig. 86.



§. **103.** Die Kreislinie in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man bestimme die Größe eines Centriwinkels, indem man 360° durch die Zahl der verlangten gleichen Theile dividiert, construiere den gefundenen Winkel am Mittelpunkte, und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne in der Peripherie herum.

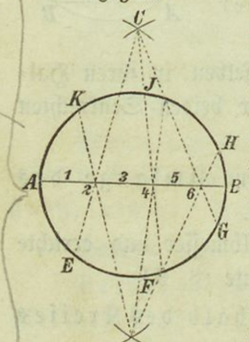
Mechanisch geschieht die Construction der Winkel und daher die Kreistheilung mit Hilfe des Transporteurs.

Ohne Hilfe des Transporteurs kann man die Theilung der Peripherie in gleiche Theile näherungsweise durch das nachstehende Verfahren ausführen:

Reinaldische Verfahren

Man ziehe (Fig. 87) den Durchmesser AB, beschreibe um A und B mit AB als Halbmesser Kreisbogen, welche sich in C und D schneiden, theile den Durchmesser in so viele gleiche Theile, als der Kreis Theile erhalten soll, z. B. in 7 gleiche Theile, und ziehe durch C und D und durch die geraden Theilungspunkte 2, 4, 6 des Durchmessers die Strecken CE, CF, CG, DH, DJ, DK, bis sie die Peripherie des Kreises auf der hohlen Seite treffen; die Punkte A, E, F, G, H, J, K sind dann die verlangten Theilungspunkte der Kreislinie.

Fig. 87.



Geometrisch lassen sich nur diejenigen Theilungen der Kreislinie ausführen, bei denen der entsprechende Centriwinkel geometrisch construiert werden kann. Hierher gehören zunächst folgende Aufgaben:

a) Die Kreislinie in 2 gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe einen Durchmesser.

Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 4, 8, 16, ... gleiche Theile.

b) Die Kreislinie in 6 gleiche Theile zu theilen. Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise herum (§. 99).

Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so ist die Kreislinie in 3 gleiche Theile getheilt.

Wie wird man die Peripherie in 12, 24 gleiche Theile theilen?

4. Das Vieleck und der Kreis.

§. **104.** Ein Vieleck, dessen alle Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben und der Kreis heißt um das Vieleck beschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben und der Kreis heißt in das Vieleck beschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck heißt auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

Jedem Dreiecke läſst sich ein Kreis um- und einschreiben.

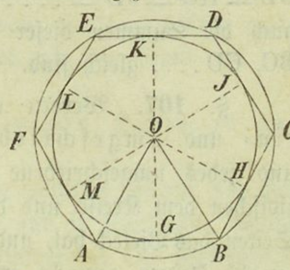
Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 in §. 64.

Lehrsätze von den regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecken.

§. **105.** Jedem regelmäßigen Vielecke läſst sich ein Kreis ein- und umschreiben.

Es sei ABCDEF (Fig. 88) ein regelmäßiges Vieleck. Halbiert man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbierungslinien die Eigenschaft, daſs er von allen Seiten und eben so von allen Eckpunkten gleichweit absteht. Beschreibt man daher aus O mit der auf AB Senkrechten OG als Halbmesser einen Kreis, so muſs der Umfang desselben durch die Punkte G, H, I, K, L, M gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben. Beschreibt man ebenso aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO einen Kreis, so muſs derselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umgeschrieben.

Fig. 88.



§. **106.** 1. Theilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile und zieht durch je zwei aufeinander folgende Theilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

Ist (Fig. 88) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt, und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FA, so sind in dem Vielecke ABCDEF die Seiten als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, und die Vieleckswinkel als Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen aufstehen, einander gleich. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig.

Zusatz. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser des Kreises (§. 99).

2. Theilt man einen Kreis in mehrere gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Tangente, so wird von diesen Tangenten ein regelmäßiges Vieleck eingeschlossen.

Ist (Fig. 88) die aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt, und errichtet man in den Punkten G, H, I, J, K, L, M auf die zu denselben gezogenen Halbmesser Senkrechte, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck ABCDEF; und es ist zu beweisen, dass dieses gleichseitig und gleichwinklig sei. Da die Centriwinkel des Kreises nach der Annahme gleich sind, so ist leicht einzusehen, dass die Vierecke GOMA, GOHB, HOJC, ... über einander gelegt sich vollkommen decken, also congruent sind. Aus dieser Congruenz aber folgt erstlich, dass der Winkel A = B = C ... ist, ferner dass sowohl GB = HG = JD = ... als auch AG = BH = JC = ... ist, somit auch die Summen dieser gleichen Strecken, nämlich die Vieleckseiten AB, BC, CD .... gleich sind.

§. **107.** Werden einem Kreise verschiedene regelmäßige Vielecke ein- und umgeschrieben, so ist jedes eingeschriebene Vieleck kleiner und jedes umgeschriebene Vieleck größer als der Kreis; der Unterschied zwischen dem Kreise und dem Vielecke wird jedoch um so kleiner, je mehr Seiten das Vieleck hat, und kann durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenanzahl kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine gegebene Größe.

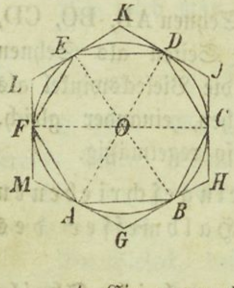
In diesem Sinne sagt man:

Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

Constructionsaufgaben.

§. **108.** 1. Einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck a) einzuschreiben, b) umzuschreiben. (Fig. 89.)

Fig. 89.



Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und ziehe durch die Theilungspunkte a) Sehnen, b) Tangenten des Kreises.

2. Einem gegebenen Kreise a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck ein- und umzuschreiben. (§. 103, b.)

3. Einem gegebenen Kreise a) ein Quadrat, b) ein regelmäßiges Achteck ein- und umzuschreiben. (§. 103, a.)

4. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Zehneck ein- und umzuschreiben. (§. 103, c.)

5. In einen Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck beschrieben; man beschreibe in denselben ein solches von doppelt so viel Seiten.

§. **109.** 1. Zeichne ein Dreieck, in welchem die Seiten 28 *mm* und 20 *m* den Winkel 60° einschließen, und construiere den diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreis. (§. 64, 1.)

2. Zeichne ein Dreieck, in welchem der Seite 25 *mm* die Winkel 60° und 45° anliegen, und construiere dann den diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreis. (§. 64, 2.)

3. Um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Man halbiere (Fig. 88) zwei Vieleckswinkel A und B, die einen Schenkel gemein haben; aus dem Durchschnittspunkte O der beiden Halbierungslinien beschreibe man dann mit dem Halbmesser OA einen Kreis, welcher durch alle Eckpunkte des Vieleckes geht und somit um das Vieleck umgeschrieben ist.

4. In ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu bebeschreiben.

Man halbiere (Fig. 88) zwei auf einander folgende Seiten AB und BC, und errichte in den Halbierungspunkten G und H Senkrechte, welche sich in O durchschneiden. Der aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreis wird alle Seiten des gegebenen Vieleckes berühren und daher dem Vielecke eingeschrieben sein.

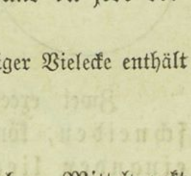
5. Construiere a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein Quadrat, c) ein regelmäßiges Sechseck und beschreibe um jede dieser Figuren und in jede derselben einen Kreis.

Eine ausführlichere Lehre über die Construction regelmäßiger Vielecke enthält das II. Heft.

5. Lage der Kreise gegen einander.

§. **110.** Zwei Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise, wie Fig. 90.

Fig. 90.



Die zwischen ihren Peripherien liegende Fläche heißt ein Kreisring.

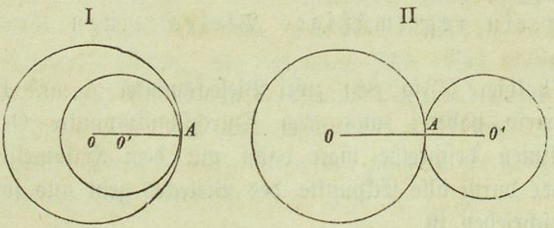
Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen excentrische Kreise. Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt die Centrale der beiden Kreise.

Zwei excentrische Kreise können sich entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen

(Fig. 91, I), oder von außen (Fig. 91, II), je nachdem der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Bei der inneren Berührung zweier Kreise ist die Centrale OO′ gleich der Differenz der Halbmesser AO—AO′; bei der äußeren Berührung ist die Centrale OO′ gleich

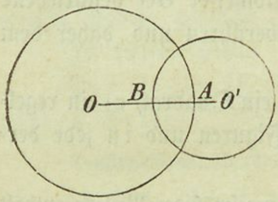
Fig. 91.



der Summe der Halbmesser AO + AO′. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Zwei Kreise schneiden sich, wenn ihre Peripherien (Fig. 92) zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinschaftliche Stück der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

Fig. 92.



Beim Durchschnitte zweier Kreise ist die Centrale OO′ größer als die Differenz der Halbmesser AO—BO′, aber kleiner als die Summe derselben AO + BO′.

Zwei excentrische Kreise, welche sich weder berühren noch schneiden, können entweder ganz in einander oder ganz außer einander liegen. Die Centrale ist im ersten Falle kleiner als die Differenz, im zweiten Falle größer als die Summe der Halbmesser.

Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich? Wie viele Punkte haben drei sich schneidende Kreise mit einander gemeinschaftlich?

Constructionsaufgaben.

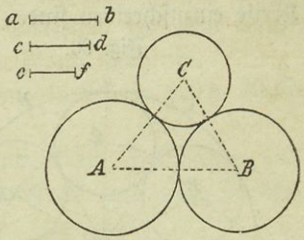
§. **111.** 1. Construiere mit den Halbmessern 24 *mm* und 15 *mm* zwei Kreise, die sich a) von innen, b) von außen berühren.

2. Beschreibe in einen gegebenen Kreis zwei gleiche Kreise so, dass sie denselben von innen und sich selbst von außen berühren.

3. Mit den Halbmessern ab, cd, ef (Fig. 93) drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig von außen berühren.

Man construiere mit den Seiten AB $= ab + cd$, $AC = ab + ef$ und $BC = cd + ef$ ein Dreieck ABC, beschreibe aus A mit dem Halbmesser ab, aus B mit cd, und aus C mit ef Kreise, so werden diese die verlangte Eigenschaft haben.

Fig. 93.

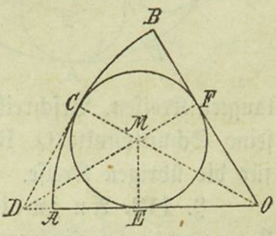


Wie wird die Auflösung geschehen, wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben?

4. In einen Kreisausschnitt einen Kreis so einzuschreiben, daſs er die beiden Schenkel und den Bogen des Winkels berührt.

Es sei AOB (Fig. 94) der gegebene Kreisausschnitt. Man halbiere den Winkel AOB durch die OC, errichte in C auf OC die Senkrechte CD, welche den verlängerten Halbmesser OA in D schneidet, und halbiere auch den Winkel CDO. Der Punkt M, in welchem die Halbierungslinie DM den Halbmesser OC trifft, ist dann der Mittelpunkt und $MC = ME = MF$ der Halbmesser des verlangten Kreises.

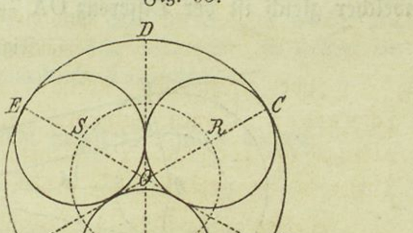
Fig. 94.



5. In einen Kreis drei Kreise so einzuschreiben, daſs jeder die beiden anderen und den gegebenen Kreis berührt.

Es sei ABDF (Fig. 95) der gegebene Kreis. Man theile ihn in sechs gleiche Theile und ziehe zu den Theilungspunkten die Halbmesser OA, OB, OC, ... In A errichte man auf OA die Senkrechte AN, welche den verlängerten Halbmesser OB in N trifft, und halbiere den Winkel ANO durch die Gerade NP; dann ist P der Mittelpunkt und PA der Halbmesser des einen der drei verlangten Kreise. Macht man nun $OR = OS = OP$, so sind R und S die Mittelpunkte der beiden anderen Kreise.

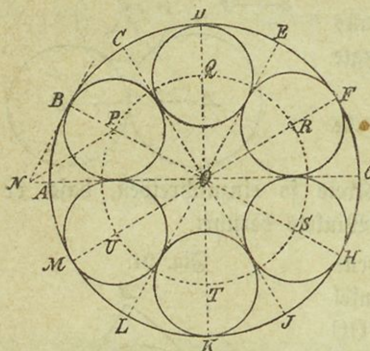
Fig. 95.



6. In einen gegebenen Kreis eine beliebige Anzahl gleicher Kreise (oder Kreisbogen) so einzuschreiben, daß sie einander und den gegebenen Kreis berühren.

Es sei ADGK (Fig. 96) der gegebene Kreis, in welchen z. B. sechs Kreise einzuschreiben sind.

Fig. 96.



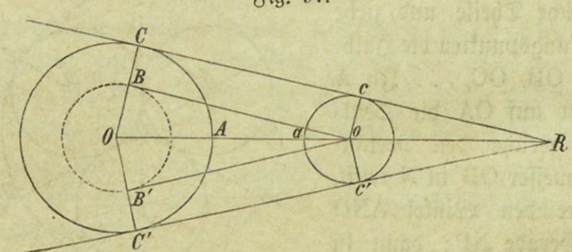
Man theile den Kreisumfang in doppelt so viele, also in 12 gleiche Theile, ziehe zu den Theilungspunkten die Halbmesser und errichte auf einen dieser Halbmesser OB im Endpunkte B eine Senkrechte, welche die Verlängerung des nächsten Halbmessers OA in N trifft. Halbiert man nun den Winkel ONB, so ist, wenn die Halbierungslinie den Halbmesser OB in P schneidet, P der Mittelpunkt und PB der Halbmesser des einen von den 6 verlangten Kreisen. Beschreibt man dann aus O mit OP einen Kreis, so geben seine Schnittpunkte Q, R, S, T, U mit den Halbmessern die Mittelpunkte für die übrigen Kreise.

§. **112.** An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Es seien O und o die Mittelpunkte, OA und oa die Halbmesser der zwei Kreise.

a) Man beschreibe (Fig. 97) aus O mit einem Halbmesser OB, welcher gleich ist der Differenz OA — oa der gegebenen Halbmesser, einen

Fig. 97.



Kreis und ziehe an denselben von o die Tangenten oB und oB′. Verlängert man dann die Halbmesser OB und OB′ bis zum Durchschnitte des gegebenen Kreises in C und C′ und zieht oc || OC und oc′ || OC′, so sind die Geraden Cc und C′c′ zwei gemeinschaftliche, und zwar die äußeren Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

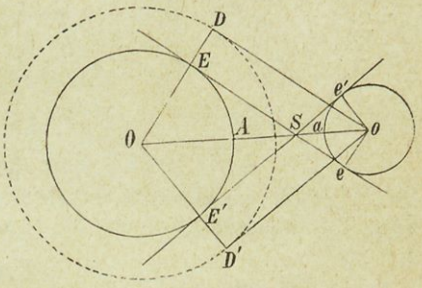
Denn das Viereck BCco ist, da die Seiten BC und oc gleich und parallel sind, ein Parallelogramm (§. 79, 2); da in diesem ein Winkel

CBo ein rechter ist, so sind es auch die anderen; also ist BCc = R und ocC = R, d. i. Cc ist eine gemeinschaftliche Tangente der zwei Kreise. Ebenso folgt, dass auch C'c' eine Tangente der beiden Kreise ist.

Die äußeren Tangenten zweier Kreise schneiden sich in einem Punkte der verlängerten Centrale.

b) Man beschreibe (Fig. 98) aus O mit einem Halbmesser OD welcher gleich ist der Summe OA + oa, einen Kreis und ziehe an denselben von o die Tangenten oD und OD'. Zieht man dann die Halbmesser OD und OD', welche den gegebenen Kreis in E und E' schneiden, ferner oe || OE und oe' || OE', so sind die Geraden Ee und E'e' ebenfalls zwei gemeinschaftliche, und zwar die inneren Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Fig. 98.



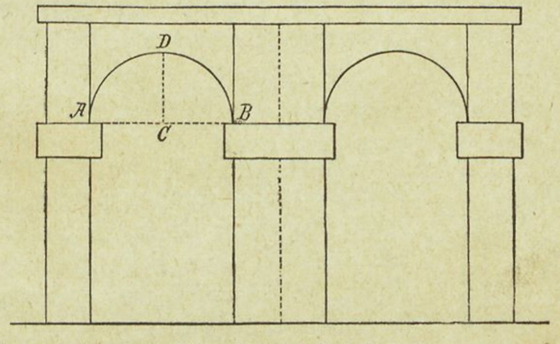
Die Richtigkeit dieser Lösung läßt sich eben so, wie die der früheren unter a) erweisen.

Die inneren Tangenten zweier Kreise schneiden sich in einem Punkt der Centrale.

Wenn die zwei gegebenen Kreise außerhalb einander liegen, so haben sie immer vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei äußere und zwei innere. In welcher Lage haben zwei Kreise nur drei, nur zwei gemeinschaftliche Tangenten; in welcher Lage haben sie nur eine, in welcher keine gemeinschaftliche Tangenten?

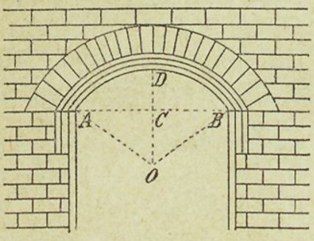
6. Construction der wichtigsten architektonischen Bogen.

Fig. 99.



§. **113.** 1. Wird über einer gegebenen Strecke AB (Fig. 99) aus ihrem Mittelpunkte C ein Halbkreis beschrieben, so heißt dieser ein Rundbogen oder voller Bogen; die Strecke AB nennt man die Spannweite, die Punkte A und B die Anläufe, die in C auf AB errichtete Senkrechte CD die Pfeilhöhe und D den Schluss des Bogens.

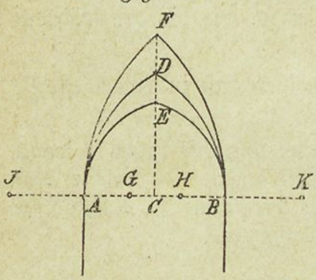
Fig. 100.



2. Wird der Bogen ADB (Fig. 100) dadurch beschrieben, dass man einen Punkt O der abwärts verlängerten Pfeilhöhe DC als Mittelpunkt und OA als Halbmesser annimmt, so heißt derselbe ein Segmentbogen.

3. Ein Spitzbogen oder gothischer Bogen (Fig. 101) ist aus zwei sich schneidenden Kreisbogen zusammengesetzt. Er ist entweder gleichseitig, oder gedrückt, oder überhöht.

Fig. 101.

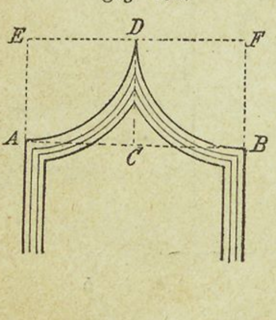


Ein gleichseitiger Spitzbogen ADB entsteht, wenn man aus den Anläufen A und B mit der Spannweite AB zwei sich treffende Bogenstücke beschreibt.

Ein gedrückter Spitzbogen AEB entsteht, wenn man innerhalb der Spannweite zwei von den Anläufen gleichweit abstehende Punkte G und H annimmt und aus diesen mit dem Halbmesier GB = HA zwei Kreisbogen beschreibt.

Um einen erhöhten Spitzbogen AFB zu construieren, nimmt man in der verlängerten Spannweite in gleichen Abständen von den Anläufen die Punkte J und K an und beschreibt aus denselben mit dem Halbmesser JB = KA zwei Kreisbogen.

Fig. 102.



4. Einen umgekehrten Spitzbogen ADB (Fig. 102) zu zeichnen.

Man errichte auf die Spannweite AB in ihren Endpunkten Senkrechte, trage auf diese die halbe Spannweite CA = CB bis E und F auf und beschreibe aus diesen Punkten mit dem Halbmesser EA = FB zwei Kreisbogen, die sich im Punkte D treffen.

5. Theilt man (Fig. 103) die Spannweite in vier gleiche Theile, errichtet in den drei Theilungspunkten E, C, F Senkrechte und macht EG = CH = FK = AE, so bilden die aus E, H und F mit dem Halbmesser AE beschriebenen, in den Punkten G und K zusammenstoßenden drei Kreisbogen die Bogenlinie AGDKB, welche ein Kleebogen heißt.

Beschreibt man aus denselben Mittelpunkten mehrere concentrische Bogen, so haben diese ihre Zusammenstoßpunkte in der aus C durch G und K gezogenen Geraden.

Fig. 103.

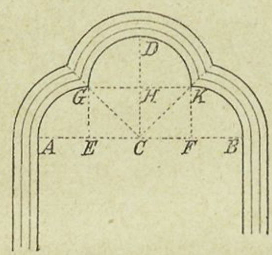
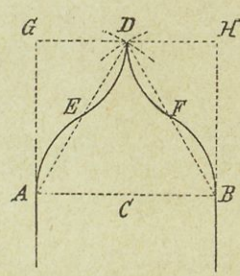


Fig. 104.

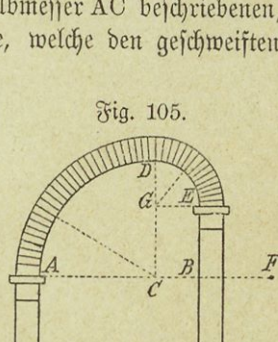


6. Der geschweifte Spitzbogen, auch persischer Bogen genannt, ist aus zwei einwärts und zwei auswärts gekrümmten Kreisbogen zusammengesetzt. Um ihn zu construieren, beschreibe man über der Spannweite AB (Fig. 104) das gleichseitige Dreieck ABD und halbiere dessen Seiten in den Punkten C, E und F. Zieht man dann durch D eine Parallele zu AB und errichtet auf AB die Senkrechten AG und BH, so sind C, G und H die Mittelpunkte der mit dem Halbmesser AC beschriebenen, in E und F zusammenstoßenden vier Bogenstücke, welche den geschweiften Spitzbogen AEDFB bilden.

7. Einen steigenden Bogen (Schwanenhals) zu construieren.

Man errichte in einem Endpunkte der Spannweite AB (Fig. 105) die Senkrechte BE von gegebener Länge, verlängere AB so, dass BF = der gegebenen Höhe BE wird, halbiere AF in C und ziehe CD ⊥ AB. Zieht man noch EG || BA und beschreibt aus C den Viertelkreis AD und aus G den Viertelkreis DE, so ist ADE der verlangte steigende Bogen.

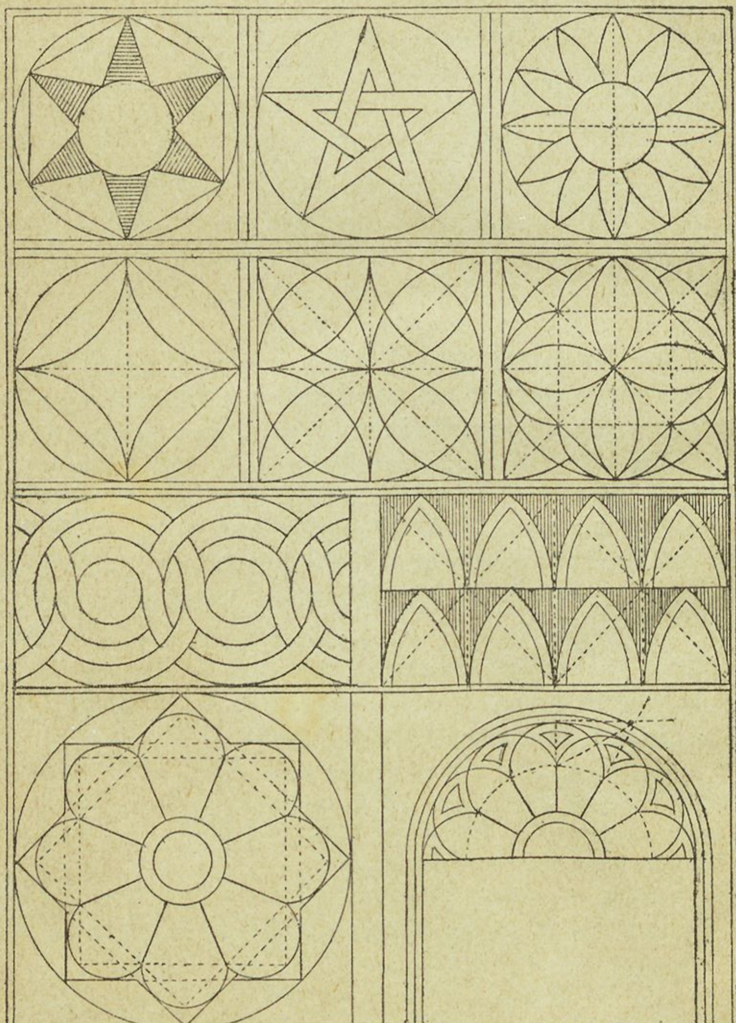
Fig. 105.



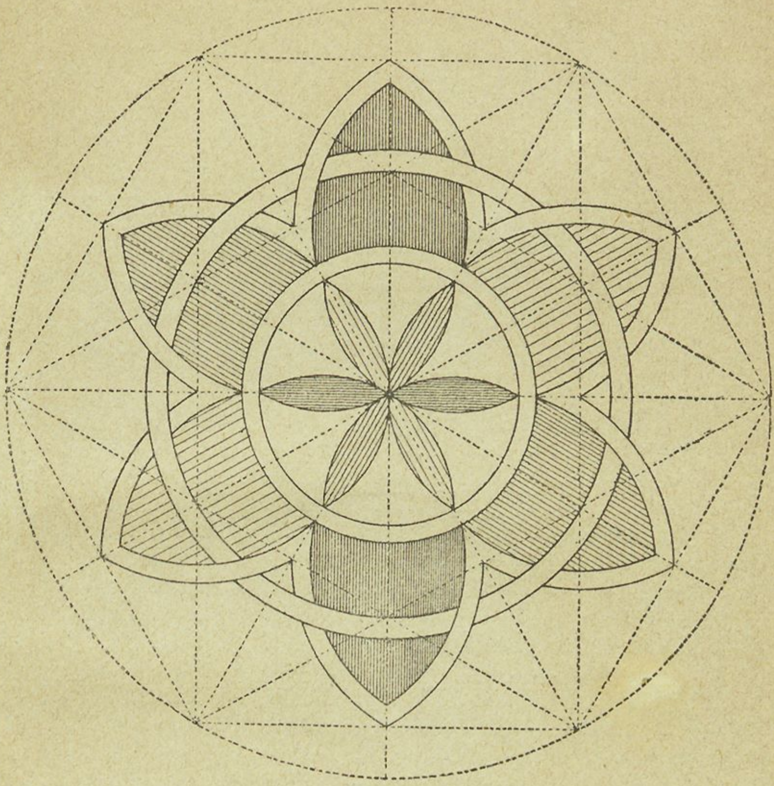
7. Zeichenübungen.

§. **114.** Anwendungen des Kreises für das geometrische Ornament (Fig. 106 und 107) Sternfiguren, Verbindungen von Kreisbogen, ringartig verschlungene Formen, ein fünfblättriger voller Bogen.

Figuren-Tafel 106.



Figur 107.



Inhalt des ersten Heftes.