# POSPLOŠITVE STIRLINGOVIH ŠTEVIL 1. VRSTE

ALEKS ŽIGON TANKOSIČ

Gimnazija Nova Gorica

Math. Subj. Class. (2020): 05A05, 05A10, 05A18, 05A19, 05A20

Rešitev za klasičen permutacijski problem posedanja $n$ ljudi za $k$ okroglih miz podajajo Stirlingova števila 1. vrste. V zadnjem stoletju pa so se razvile razne posplošitve teh števil, ki posplošujejo ta problem in k problemu dodajajo razne omejitve. Posplošitve v grobem delimo na uporabne in teoretične. V članku si ogledamo štiri verjetno najbolj znane posplošitve vse od predznačenih do $(l, r)$-Stirlingovih števil.

## GENERALIZATIONS OF THE STIRLING NUMBERS OF THE 1ST KIND

The solution for the classical permutation problem of seating $n$ people around $k$ round tables is given by the Stirling numbers of the 1st kind. In the last century, however, various generalizations of these numbers have been developed, which generalize this problem and add various restrictions to the problem. Generalizations are roughly divided into practical and theoretical. In this article, we look at four of the probably most well-known generalizations, from the signed to the $(l, r)$-Stirling numbers.

## Uvod

Kombinatorika je obsežno področje matematike, ki se ukvarja s konstrukcijo, lastnostmi in številom (praviloma) končnih matematičnih struktur. Kombinatorika se deli na vsaj 16 podpodročij, povezuje pa se še z vsaj petimi drugimi področji matematike in tudi fizike. Stirlingova števila 1. vrste, ki jih obravnavamo v tem članku, sodijo v *preštevalno kombinatoriko*, ki proučuje načine preštevanja elementov dane končne množice struktur in lastnosti števil, ki jih pri tem dobimo. Zelo zanimive knjige o preštevalni kombinatoriki so [4, 10, 11].

Koliko različnih možnosti imamo, da razporedimo $n$ učencev okoli ene okrogle mize? Pri tem štejemo dve razporeditvi za enaki, če ima vsak učenec v obeh razporeditveh istega desnega soseda.

Najprej razporedimo učence v ravno vrsto, kar gre na $n!$ načinov, nato jih v dobljenem vrstnem redu posedemo za mizo. Če nastalo razporeditev zavrtimo za 0 ali 1 ali ... ali $n-1$ sedežev, se desni sosedje ne spremenijo, torej je teh $n$ razporeditev med seboj enakih. Število različnih razporeditev $n$ učencev okoli okrogle mize je torej enako $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Stirlingova števila 1. vrste ta problem posplošujejo na večje število miz. Lahko jih definiramo na več načinov (glej [8, 9]).

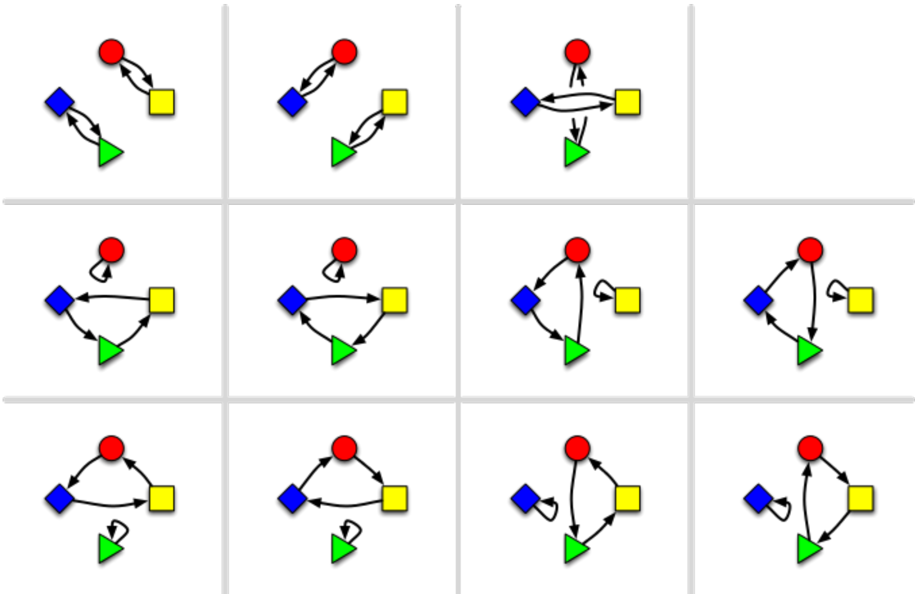
**Definicija 1 ([10]).** . Stirlingova števila 1. vrste, označimo jih z oglatim oklepajem $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, s $c(n,k)$ ali pa s $S_1(n,k)$, so števila permutacij velikosti $n$ s $k$ cikli.

**Opomba 2.** Stirlingova števila 1. vrste so med drugim tudi:

- koeficienti v razvoju rastočih potenc ($x^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$) po navadnih,

$$\alpha^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha^k,$$

- vsote vseh možnih produktov $n-k$ elementov iz množice $[n-1]$.



**Slika 1.** Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tukaj liki različnih barv predstavljajo števila od 1 do 4. Vir: Wikipedia.

**Primer 3.** Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ta zapis predstavlja število vseh permutacij velikosti 4 oz. množice $[4]$ z natanko dvema cikloma. Poiščemo permutacije velikosti 4, ki so produkt natanko dveh ciklov. Obstajajo tri permutacije z dvema cikloma velikosti 2: (12)(34), (13)(24), (14)(23). Obstaja pa še osem permutacij velikosti 4 z dvema cikloma, pri čemer je prvi cikel velikosti tri, drugi cikel pa velikosti ena: (124)(3), (142)(3), (134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1), (123)(4), (132)(4). Možnosti seštejemo: 8+3 = 11, torej je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$ (glej sliko 1).

Oglejmo si še izračun z razvoji potenc in vsotami produktov. Izpišemo vse razvoje in dobimo koeficiente, ki so Stirlingova števila 1. vrste:

$$\begin{array}{rl} \alpha^{\overline{4}} & = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) = \\ & = (\alpha^2+\alpha)(\alpha^2+5\alpha+6) \\ & = \alpha^4 + \alpha^3 \\ + & \qquad 5\alpha^3 + 5\alpha^2 \\ + & \qquad\qquad 6\alpha^2 + 6\alpha \\ \hline \alpha^{\overline{4}} = & \alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha. \end{array}$$

Koeficienti si sledijo v zaporedju 1, 6, 11, 6, 1. Tretji koeficient predstavlja vrednost $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$, ker je koeficient pri $\alpha^2$ enak 11, je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$.

Po vsotah produktov pa je $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = 11.$ ♢

### Nekaj lastnosti Stirlingovih števil 1. vrste

Navedimo še nekaj lastnosti Stirlingovih števil 1. vrste (glej [6, 8, 9]).

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = 0, k > n \quad \vee \quad k < 0$$

$$\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3n-1)\binom{n}{3}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-3 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}\binom{n}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n,0}$$

Ker je $0^0 = 1$ in prav tako tudi $x^0 = 1$, $0^{\overline{0}} = 1$, $x^{\overline{0}} = 1$, $0^{\underline{0}} = 1$ in $x^{\underline{0}} = 1$, sledi, da je

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Znano je, da za Stirlingova števila 1. vrste velja rekurzija (glej [6]):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Omenimo še, da Stirlingova števila 1. vrste lahko definiramo tudi kot matriko, pri kateri s pomočjo dveh stolpcev zapišemo rastoče produkte (glej [3]).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}$$

Naša prva posplošitev Stirlingovih števil 1. vrste, ki jo bomo obravnavali, temelji ravno na inverzih Stirlingovih matrik.

Omenimo še Stirlingova števila 2. vrste, ki so števila vseh razdelitev množice $[n]$ na $k$ nepraznih, paroma disjunktnih, neurejenih množic $B_1, B_2, \ldots, B_k$, imenovanih *bloki*, katerih unija je $A$. Stirlingova števila 2. vrste označimo z

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

ali s $S(n,k)$. Stirlingova števila 2. vrste imajo pri posplošitvah veliko povezav s Stirlingovimi števili 1. vrste.

## Predznačena Stirlingova števila 1. vrste

Vrednosti predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste najdemo v inverzni Stirlingovi matriki 1. vrste. Znano je, da so nekatere vrednosti negativne [4].

**Definicija 4.** Predznačeno Stirlingovo število 1. vrste je:

$$s(n,k) = (-1)^{n+k} \left[ {n \atop k} \right].$$

Očitno je, da velja

$$\left[ {n \atop k} \right] = |s(n,k)|.$$

Iz Stirlingove matrike 1. vrste s pomočjo rastočih in padajočih potenc izpeljemo inverzno Stirlingovo matriko. Oglejmo si primer:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 273 & 225 & 85 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 1764 & 1624 & 753 & 175 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 7 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -15 & 25 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 31 & -90 & 65 & -15 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -63 & 301 & -350 & 140 & -21 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 127 & -966 & 1701 & -1050 & 266 & -28 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\overline{2}} \\ \alpha^{\overline{3}} \\ \alpha^{\overline{4}} \\ \alpha^{\overline{5}} \\ \alpha^{\overline{6}} \\ \alpha^{\overline{7}} \\ \alpha^{\overline{8}} \end{pmatrix}
$$

V inverzni Stirlingovi matriki 2. vrste dobimo enake vrednosti kot pri Stirlingovi matriki 1. vrste, le da so nekatere vrednosti negativne. Vrednosti pa so, kot lahko ugotovimo, negativne po diagonalah. Padajočo potenco, ki se nahaja v tej matriki, računamo po formuli: $x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -120 & 273 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 720 & -1764 & 1624 & -753 & 175 & -21 & 1 & 0 \\
0 & -5040 & -13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \\ \alpha^7 \\ \alpha^8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^{\underline{2}} \\ \alpha^{\underline{3}} \\ \alpha^{\underline{4}} \\ \alpha^{\underline{5}} \\ \alpha^{\underline{6}} \\ \alpha^{\underline{7}} \\ \alpha^{\underline{8}} \end{pmatrix}
$$

Dobljena matrika je Stirlingova matrika 2. vrste in v njej najdemo vrednosti števil $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Prvotna matrika pa je matrika predznačenih Stirlingovih števil 1. vrste. Inverzi dokazujejo povezanost Stirlingovih števil obeh vrst.

**Primer 5.** Za zgled potencirajmo $\alpha^5$. Po matriki bo

$$\alpha^5 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \alpha + 15 \cdot \alpha^{\underline{2}} + 25 \cdot \alpha^{\underline{3}} + 10 \cdot \alpha^{\underline{4}} + 1 \cdot \alpha^{\underline{5}}.$$

$\diamondsuit$

Oglejmo si še inverzno relacijo med razvoji potenc in predznačenimi Stirlingovimi števili 1. vrste, ki izhaja iz inverznih Stirlingovih matrik.

**Izrek 6 ([8]).** *Če $\alpha$ zamenjamo z $-\alpha$ in namesto Stirlingovega števila 1. vrste vstavimo predznačeno Stirlingovo število 1. vrste, dobimo*

$$\alpha^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k.$$

### Stirlingova števila 1. vrste z negativnimi argumenti

Negativna cela števila se v Stirlingovem številu lahko nahajajo le, ko sta $n$ in $k$ negativni števili, ali ko je $n$ negativno celo število, $k$ pa pozitivno celo število. V preštevalni kombinatoriki nikoli ne uporabimo kombinacije, ko je $n$ pozitivno celo število, $k$ pa negativno celo število. Tukaj bomo spoznali zelo tesno povezavo med Stirlingovimi števili 1. in 2. vrste [1, 7].

#### Števili $n$ in $k$ sta negativni

**Definicija 7.** Za $n, k \in \mathbb{Z}^-$ in $k \leq n$ velja

$$\begin{bmatrix} -k \\ -n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix}.$$

S pomočjo prejšnje definicije lahko skonstruiramo tabelo 1 za Stirlingovo število 1. vrste, ko sta $n$ in $k$ negativni celi števili (glej [1]).

Število $n$ mora biti po absolutni vrednosti manjše od $k$, če želimo dobiti vrednost večjo od 0.

**Primer 8.** Izračunajmo Stirlingovi števili:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

| $n\|k$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $-2$ | 0 | 1 | 3 | 7 | 15 |
| $-3$ | 0 | 0 | 1 | 6 | 25 |
| $-4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| $-5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabela 1.** Vrednosti Stirlingovih števil 1. vrste z negativnimi argumenti za $-1 \geq n$, $k \geq -5$.

Po definiciji je:

$$\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\\4\end{Bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\-7\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}7\\4\end{Bmatrix}.$$

Dobimo rezultata 0 in 350 (vrednost lahko preberemo iz Stirlingove matrike 2. vrste). ♢

### Število $n$ je negativno, $k$ pa pozitivno

Oglejmo si rekurzijo, ki sledi iz eksplicitne formule za Stirlingova števila 2. vrste (glej [6]).

**Izrek 9 ([1]).** *Za izračun vrednosti pri $n \in \mathbb{Z}^-$ in $k \in \mathbb{N}$ velja naslednja rekurzivna zveza*

$$\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i^k}\binom{n}{i}.$$

**Primer 10.** Sedaj pa si oglejmo zgled uporabe rekurzivne zveze. Izračunajmo

$$\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{120}\left(5 - \frac{10}{2^3} + \frac{10}{3^3} - \frac{5}{4^3} + \frac{1}{5^3}\right) = \frac{1}{120}\left(5 - \frac{10}{8} + \frac{10}{27} - \frac{5}{64} + \frac{1}{125}\right).$$

Ko izračunamo vrednost izraza, dobimo $\frac{874863}{25920000}$. ♢

Ko skonstruiramo tabelo 2, se lahko hitro prepričamo, da za liha negativna števila dobimo pozitivne vrednosti.

*Bellovo število* je število vseh neurejenih razdelitev množice $[n]$ in je definirano z naslednjo vsoto

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}.$$

| $n\|k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $1\frac{3}{4}$ | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{15}{16}$ | $-\frac{31}{32}$ |
| $-3$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{11}{36}$ | $\frac{85}{216}$ | $\frac{575}{1296}$ | $\frac{3661}{7776}$ |
| $-4$ | $-\frac{1}{24}$ | $-\frac{25}{288}$ | $-\frac{415}{3456}$ | $-\frac{5845}{41472}$ | $-\frac{76111}{497664}$ |
| $-5$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{137}{7200}$ | $\frac{12019}{432000}$ | $\frac{874853}{25920000}$ | $\frac{58067611}{1555200000}$ |

**Tabela 2.** Vrednosti Stirlingovih števil 1. vrste z negativnimi argumenti za $-1 \geq n,\, k \leq 4$.

Ni težko opaziti, da po prejšnji enačbi velja (glej [1])

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(k)$$

in

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} = B(-k),$$

kjer je $B(k)$ Bellovo število z naravnim številom in $B(-k)$ Bellovo število z negativnim celim številom. Če pa je tudi $k$ negativno celo število, dobimo

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} = B(n).$$

**Primer 11.**

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = B(-2) \approx 0{,}421$$

$\diamondsuit$

Zelo zanimivo povezavo s padajočimi potencami imajo Stirlingova števila 1. vrste, ko je $n$ negativno celo število in ko je $k$ pozitivno celo število (izpeljano po definiciji v [1]): za $n \geq 0$ je

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} \alpha^{k}.$$

Podobno velja tudi trditev, ko sta $n$ in $k$ negativni celi števili (izpeljano po definiciji v [1]): za $n \geq 0$ je

$$\alpha^{-\underline{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ -k \end{bmatrix} \alpha^{-k}.$$

### $r$-Stirlingova števila 1. vrste

Broder je leta 1982 vpeljal $r$-Stirlingova števila obeh vrst [2].

**Definicija 12.** $r$-Stirlingova števila 1. vrste so števila permutacij množice $[n]$ s $k$ cikli tako, da so števila $1, 2, 3, \ldots, r$ v različnih ciklih. Označimo jih z

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r .$$

**Primer 13.** Izračunajmo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$. Zanima nas, koliko permutacij množice [4] ima natanko 2 cikla, tako da števili 1 in 2 nista v istem ciklu. Možnosti je 6, saj so možni cikli (134)(2), (143)(2), (243)(1), (234)(1), (13)(24), (14)(23). Za grafični prikaz glej sliko 2.

Oglejmo si še primer uporabe definicije iz vsakdanjika. Recimo, da so v učilnici 4 učenci. Na koliko različnih načinov jih lahko posedemo okrog dveh okroglih miz, če učenec 1 ne sme sedeti za isto mizo kot učenec 2?

Rešitev je dano $r$-Stirlingovo število 1. vrste $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$. Hitro se lahko prepričamo, da lahko to storimo na 6 načinov. ♢

**Trditev 14 ([2]).** *Vrednosti 0-Stirlingovih in 1-Stirlingovih števil 1. vrste so enake vrednostim Stirlingovih števil 1. vrste: za $n > 0$ velja*

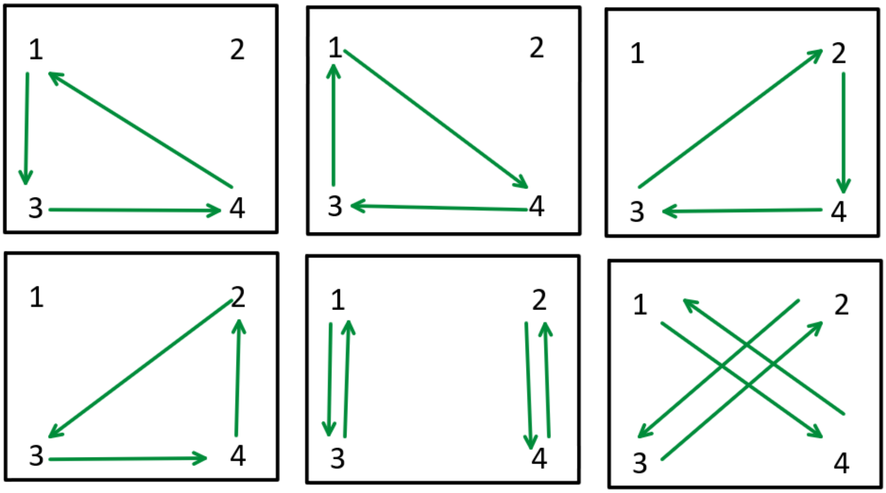
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

**Izrek 15 ([2]).** *Za $r$-Stirlingova števila 1. vrste velja trikotniška rekurzija:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0, && \text{za } n < r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{kr}, && \text{za } n = r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r, && \text{za } n > r. \end{aligned}$$

**Izrek 16 ([2]).** *Za $n \geq r > 1$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1} \left( \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r \right).$$




**Slika 2.** Grafični prikaz primera $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2$.

*Dokaz.* Ekvivalenten zapis je:

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r .$$

Desna stran šteje število permutacij s $k-1$ cikli, pri katerih so števila $1, \ldots, r-1$ nosilci ciklov (tj. najmanjši elementi ciklov), medtem ko število $r$ ni nosilec cikla. Možnosti je potemtakem

$$(r-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r ,$$

saj lahko take permutacije pridobimo na $r-1$ načinov iz permutacij s $k$ cikli, kjer so števila $1, \ldots, r$ nosilci ciklov, z dodajanjem tistega cikla, ki vsebuje število $r$, na konec nekega cikla z manjšim nosilcem. $\square$

S pomočjo prejšnjih rekurzij in lastnosti lahko skonstruiramo tabele vrednosti za $r$-Stirlingova števila 1. vrste (glej tabeli 3 in 4). S pomočjo prejšnjih trditev pa lahko pokažemo, da so vrednosti pri $r = 0$ oz. $r = 1$ enake vrednostim Stirlingovih števil 1. vrste.

| $n\|k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 6 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 24 | 26 | 9 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 120 | 154 | 71 | 14 | 1 | 0 |
| 7 | 720 | 1044 | 570 | 155 | 20 | 1 |

**Tabela 3.** Vrednosti 2-Stirlingovih števil 1. vrste za $2 \leq n,\ k \leq 7$.

| $n\|k$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 12 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 60 | 47 | 12 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 360 | 342 | 119 | 18 | 1 | 0 |
| 8 | 2520 | 2754 | 1175 | 245 | 25 | 1 |

**Tabela 4.** Vrednosti 3-Stirlingovih števil 1. vrste za $3 \leq n,\ k \leq 8$.

## $(l, r)$-Stirlingova števila 1. vrste

Leta 2021 sta Belbachir in Djemmada [5] definirala $(l, r)$-Stirlingova števila 1. vrste in predstavila njihovo kombinatorično interpretacijo. Analogno definicijo $(l, r)$-Lahovih števil najdemo v [12].

Preden ta števila definiramo, omenimo še množico nosilcev ciklov. Naj bo $\lambda$ permutacija množice $[n]$ z natanko $k$ cikli $c_1, c_2, \ldots, c_k$. *Množico nosilcev ciklov* označimo s $\mathrm{cl}(\lambda)$ in je množica najmanjših elementov ciklov te permutacije:

$$\mathrm{cl}(\lambda) = \{\min c_1, \min c_2, \ldots, \min c_k\}$$

**Definicija 17.** $(l, r)$-Stirlingova števila 1. vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ štejejo število končnih urejenih naborov $l$ permutacij $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l)$ množice $[n]$ z natanko $k$ cikli, kjer so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci ciklov in velja

$$\mathrm{cl}(\sigma_1) = \mathrm{cl}(\sigma_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\sigma_l).$$

Očitno je, da velja: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = 0$ *za* $n < r$ in $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \delta_{k,r}$ *za* $n = r$.

**Izrek 18 ([5]).** *Za $n > r$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = (n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}.$$

*Dokaz.* Nabor $l$ permutacij množice $[n]$ pod pogojem, da so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci ciklov, lahko dobimo:

- z vstavljanjem $n$-tega elementa za vsak element v vsaki permutaciji nabora $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ permutacij množice $[n-1]$ z natanko $k$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r$ prvi elementi v različnih ciklih in za katere velja $\mathrm{cl}(\lambda_1) = \mathrm{cl}(\lambda_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\lambda_l)$, za kar je $(n-1)^l \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti;
- tako, da $n$-ti element tvori cikel v vsaki od permutacij nabora $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, preostalih $[n-1]$ elementov pa mora biti razporejenih v $(k-1)$ ciklih pod prejšnjimi pogoji, za kar obstaja $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}$ možnosti. □

**Izrek 19 ([5]).** *Za $n \geq r > 1$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)} = \frac{1}{(r-1)^l} \left( \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)} \right).$$

*Dokaz.* Preštejmo število naborov permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ z natanko $(k-1)$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r-1$ nosilci cikla, število $r$ pa ni, za katere velja pogoj $\mathrm{cl}(\lambda_1) = \mathrm{cl}(\lambda_2) = \cdots = \mathrm{cl}(\lambda_l)$. Možnosti lahko preštejemo na dva načina.

- Preštejemo nabore permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ s $(k-1)$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r-1$ nosilci cikla in od teh odštejemo nabore permutacij, pri katerih je $r$ nosilec cikla. Tako dobimo:

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(l)} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(l)}.$$

- Lahko pa preštejemo nabore permutacij $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ množice $[n]$ s $k$ cikli, pri katerih so števila $1, 2, \ldots, r$ nosilci cikla, kjer nato dodamo cikel z nosilcem $r$ na konec nekega cikla z manjšim nosilcem. Za to imamo $(r-1)$ možnosti v vsaki permutaciji. Tako dobimo:

$$(r-1)^l \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(l)}. \qquad \square$$

**Posledica 20 ([5]).** *Za $n \geq r$ in $k = r$ velja*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_r^{(l)} = (r^{\overline{n-r}})^l.$$

## Zahvala

Najlepša hvala prof. dr. Marku Petkovšku za neprecenjive nasvete in podporo. Najlepša hvala mojim staršem za podporo in spodbude. Najlepša hvala prof. dr. Matjažu Konvalinki za nasvet pri urejanju članka. Najlepša hvala tudi anonimni recenzentki za natančen pregled in nasvete.

## LITERATURA

[1] D. Branson, *An extension of Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **34** (1996), 213–223.
[2] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241–259.
[3] G.-S. Cheon in J.-S. Kim, *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. **329** (2001), 49–59.
[4] Ö. Eğecioğlu in A. M. Garsia, *Lessons in enumerative combinatorics*, Grad. Texts in Math. **290**, Springer, Cham, 2021.
[5] H. Belbachir in Y. Djemmada, *The $(l, r)$-Stirling numbers: a combinatorial approach*, Filomat **37** (2023), 2587–2591.
[6] M. Konvalinka in P. Potočnik, *Diskretna matematika I*, Učbeniki – matematika **1**, Fakulteta za matematiko in fiziko UL, Ljubljana, 2019.
[7] D. E. Loeb, *A generalization of the Stirling numbers*, Discrete Math. **103** (1992), 259–269.
[8] M. Petkovšek in T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, Pi Mu Epsilon J. **12** (2007), 417–424.
[9] M. Petkovšek in T. Pisanski, *The Lah identity and the Argonauts*, Pi Mu Epsilon J. **11** (2002), 385–386.
[10] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Stud. Adv. Math. **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
[11] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.
[12] A. Žigon Tankosič, *The $(l, r)$-Lah Numbers*, J. Integer Seq. **26** (2023), Art. 23.2.6, 16 str.