PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 6
Strani 372–375

Roman Drnovšek:

RAČUNANJE PRIBLIŽKOV KVADRATNEGA KORENA IZ NARAVNEGA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1320-Drnovsek.pdf

RAČUNANJE PRIBLIŽKOV KVADRATNEGA KORENA IZ NARAVNEGA ŠTEVILA

Znanih je več metod za računanje racionalnih približkov iracionalnega števila $\sqrt{2}$. Eno izmed njih lahko opišemo z rekurzivnim zaporedjem

$$x_1 = 1\,, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \qquad \text{za} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5\,, \\ x_3 &= \frac{3/2+2}{3/2+1} = \frac{7}{5} = 1.4\,, \\ x_4 &= \frac{7/5+2}{7/5+1} = \frac{17}{12} \approx 1.41667\,, \\ x_5 &= \frac{17/12+2}{17/12+1} = \frac{41}{29} \approx 1.41379\,. \end{aligned}$$

Ker je $\sqrt{2} \approx 1.41421$, postavimo domnevo, da zaporedje $\{x_n\}$ *konvergira* proti $x = \sqrt{2}$. To pomeni, da poljuben odprti interval (a, b), ki vsebuje število x, vsebuje vse člene zaporedja, razen (morda) končno mnogo. Povedano drugače: Za vsak par realnih števil a in b z lastnostjo $a < x < b$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da velja $a < x_n < b$ za vsako naravno število $n \geq N$, tj. členi x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, $\ldots$ ležijo na intervalu (a, b).

V tem članku bomo to metodo posplošili na računanje racionalnih približkov kvadratnega korena iz poljubnega naravnega števila, jo utemeljili in s tem potrdili zgoraj omenjeno domnevo.

Naj bo k poljubno naravno število. Očitno je zanimiv le primer, ko k ni kvadrat naravnega števila. Ponovimo najprej, kaj je *celi del* $[x]$ realnega števila x. To je največje celo število, ki ne presega števila x. Tako je npr. $[5] = 5$, $[\sqrt{2}] = 1$ in $[-\sqrt{2}] = -2$. Ker celemu številu $[x]$ sledi celo število $[x] + 1$, velja neenačba

$$[x] \leq x < [x] + 1\,. \tag{2}$$

Sedaj definirajmo zaporedje

$$x_1 = [\sqrt{k}]\,, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + k}{x_n + 1} \qquad \text{za} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Očitno v primeru $k = 2$ dobimo zaporedje (1). Oglejmo si še en primer. Vzemimo $k = 5$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= [\sqrt{5}] = 2\,,\\
x_2 &= \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3} \approx 2.33333\,,\\
x_3 &= \frac{7/3+5}{7/3+1} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2.2\,,\\
x_4 &= \frac{11/5+5}{11/5+1} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2.25\,,\\
x_5 &= \frac{9/4+5}{9/4+1} = \frac{29}{13} \approx 2.23077\,,\\
x_6 &= \frac{29/13+5}{29/13+1} = \frac{94}{42} = \frac{47}{21} \approx 2.23810 \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Če dobljene približke primerjamo z vrednostjo korena $\sqrt{5}$, ki je na 5 decimalk natančno enaka 2.23607, vidimo, da je

$$x_1 < x_3 < x_5 < \sqrt{5} \quad \text{in} \quad x_2 > x_4 > x_6 > \sqrt{5}\,.$$

Zato upravičeno domnevamo, da členi zaporedja (3) z lihimi indeksi strogo naraščajo in so manjši od $\sqrt{k}$, členi s sodimi indeksi pa strogo padajo in so večji od $\sqrt{k}$. Bralec bo potrdil to domnevo, ko bo rešil prve tri naloge ob koncu tega članka.

Tukaj bomo dokazali, da zaporedje (3) konvergira proti $\sqrt{k}$. Dokaz tega dejstva bomo oprli na naslednjo oceno:

Za vsako realno število $x \geq [\sqrt{k}] - 1$ velja neenakost

$$\left|\frac{x+k}{x+1} - \sqrt{k}\right| \leq c\,|x - \sqrt{k}|\,, \tag{4}$$

kjer je $c = (\sqrt{k} - 1)/[\sqrt{k}] < 1$.

Dokažimo jo. Najprej je zaradi ocene (2) število c manjše od 1. Očitno je neenakost (4) ekvivalentna z neenakostjo

$$[\sqrt{k}]|x + k - x\sqrt{k} - \sqrt{k}| \le (\sqrt{k} - 1)(x + 1)|x - \sqrt{k}|,$$

oziroma

$$[\sqrt{k}]|(1 - \sqrt{k})(x - \sqrt{k})| \le (\sqrt{k} - 1)(x + 1)|x - \sqrt{k}|.$$

Če je $x = \sqrt{k}$, potem neenakost očitno velja, sicer jo pokrajšamo s pozitivnim številom $(\sqrt{k} - 1)|x - \sqrt{k}|$. Ker dobljena neenakost

$$[\sqrt{k}] \le x + 1$$

velja po predpostavki, je ocena (4) tako dokazana.

Z namenom, da oceno (4) uporabimo za $x = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), se prepričajmo, da za zaporedje $\{x_n\}$ velja neenakost

$$x_1 \le x_n \le \frac{k - x_1}{x_1 - 1} = y. \tag{5}$$

Očitno (5) velja za $n = 1$, z neposrednim računom pa ugotovimo, da velja tudi za $n = 2$. Princip matematične indukcije zagotavlja, da je dovolj dokazati, da iz $x_1 \le x_n \le y$ sledi $x_1 \le x_{n+1} \le y$. Ker je

$$x_{n+1} = 1 + \frac{k-1}{x_n + 1}$$

in ker po indukcijski predpostavki velja $x_1 \le x_n \le y$, imamo

$$x_{n+1} \le 1 + \frac{k-1}{x_1 + 1} = \frac{x_1 + k}{x_1 + 1} = x_2 \le y$$

in

$$x_{n+1} \ge 1 + \frac{k-1}{y+1} = x_1,$$

torej je $x_1 \le x_{n+1} \le y$. S tem je neenakost (5) potrjena.

Če torej v oceno (4) vstavimo $x = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), dobimo neenakost

$$|x_{n+1} - \sqrt{k}| \le c\,|x_n - \sqrt{k}|.$$

Z večkratno uporabo zadnje neenakosti izpeljemo verigo neenakosti

$$|x_n-\sqrt{k}| \leq c\,|x_{n-1}-\sqrt{k}| \leq c^2\,|x_{n-2}-\sqrt{k}| \leq \ldots \leq c^{n-1}\,|x_1-\sqrt{k}| < c^{n-1}\,.$$

Zadnja neenačba je posledica ocene $|x_1 - \sqrt{k}| = \sqrt{k} - [\sqrt{k}] < 1$. Tako smo pokazali, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt{k} - c^{n-1} < x_n < \sqrt{k} + c^{n-1}\,. \qquad (6)$$

Od tod sledi, da zaporedje $\{x_n\}$ konvergira proti številu $\sqrt{k}$. Res! Vzemimo poljuben odprti interval (a,b), ki vsebuje število $\sqrt{k}$. Potem je zaradi neenakosti (6) pogoj $a < x_n < b$ zanesljivo izpolnjen, če je

$$a < \sqrt{k} - c^{n-1} \quad \text{in} \quad \sqrt{k} + c^{n-1} < b\,,$$

oziroma

$$c^{n-1} < \sqrt{k} - a \quad \text{in} \quad c^{n-1} < b - \sqrt{k}\,,$$

kar lahko zapišemo na kratko $c^{n-1} < d$, kjer je $d = \min\{\sqrt{k} - a, b - \sqrt{k}\}$. Ker je $a < \sqrt{k} < b$, je $d > 0$. Izberimo tako naravno število N, da je $c^{N-1} < d$. To je mogoče, ker je $0 < c < 1$. (Za N lahko vzamemo poljubno naravno število, ki je večje od števila $1 + \ln d/\ln c$.) Potem za vsako naravno število $n \geq N$ velja $c^{n-1} \leq c^{N-1} < d$, in zato $x_n \in (a,b)$ za vsak $n \geq N$. Dokazali smo torej, da zaporedje $\{x_n\}_{n\in}$ konvergira proti številu $\sqrt{k}$.

Članek končajmo z nalogami. Rešitve prvih treh nalog so elementarne, zadnja pa zahteva poznavanje pojma logaritma.

1. Dokaži, da za zaporedje (3) velja enakost

   $$x_{n+2} = \frac{(k+1)x_n + 2k}{2x_n + (k+1)}$$

   za vsako naravno število n.

2. S pomočjo naloge 1 pokaži, da so členi zaporedja (3) z lihimi indeksi manjši od $\sqrt{k}$, členi s sodimi indeksi pa večji.

3. S pomočjo naloge 2 dokaži, da členi zaporedja (3) z lihimi indeksi strogo naraščajo, členi s sodimi indeksi pa strogo padajo, torej $x_1 < x_3 < x_5 < \ldots$ in $x_2 > x_4 > x_6 > \ldots$.

4. Kateri členi zaporedja (1) ležijo na intervalu $(1.414, 1.415)$?

Roman Drnovšek