PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 355–357

Roman Drnovšek:

CAUCHYJEVA NEENAKOST

Ključne besede: matematika, Cauchy.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Drnovsek.pdf

CAUCHYJEVA NEENAKOST

V Preseku 14 (1986/87) št. 1 smo spoznali *Jensenovo neenakost.* Tokrat bomo obravnavali še eno tudi pomembno neenakost: Cauchy–jevo neenakost (izg. Koši). Ime je dobila po francoskem matematiku *Augustin Louisu Cauchyju* (1789 – 1857).

Neenakost se glasi:

Za realna števila $a_1, a_2, ..., a_n$ in $b_1, b_2, ..., b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ velja:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$$

pri čemer velja znak enakosti samo v primeru, ko je $a_1 = t.b_1$, $a_2 = t.b_2$, ..., $a_n = t.b_n$ za neko realno število t ali pa je $b_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$.

Neenakost bomo dokazali na dva načina:

1. Hitro se prepričamo o veljavnosti *Lagrangeove enakosti* za realna števila a_i, b_i $(i = 1, 2, ..., n)$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) =$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

saj se po kvadriranju in množenju na desni strani dvojni produkti $2.a_i a_j b_i b_j$ $(i, j = 1, 2, ..., n$ in $i < j)$ uničijo, ostane samo vsota kvadratov $(a_i b_j)^2$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$, kar pa je enako levi strani. Ker je vsota na desni strani enakosti nenegativna, je veljavnost Cauchyjeve neenakosti očitna. Enakost velja natanko tedaj, ko je $a_i b_j = a_j b_i$. Sedaj ločimo dva primera:

a) Če niso vsi b_i enaki nič, lahko predpostavimo, da obstaja tako naravno število i, da je $b_i \neq 0$. Tedaj je za vsa naravna števila j med 1 in n res $a_j = a_i.b_j/b_i$. Če pišemo $t = a_i/b_i$, potem je $a_j = t.b_j$.

b) Vsi b_i so enaki nič za vsa naravna števila i med 1 in n. V tem primeru tudi velja enakost.

Tako je prvi dokaz neenakosti končan.

2. Izhajamo iz očitne neenakosti, ki velja za poljubna realna števila $a_1, a_2, ..., a_n$ in $b_1, b_2, ..., b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ter t:

$$(a_1 - b_1 t)^2 + (a_2 - b_2 t)^2 + ... + (a_n - b_n t)^2 \geqslant 0$$

saj je vsota kvadratov realnih števil vedno nenegativna. Po kvadriranju in urejanju členov po potencah števila t dobimo:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - 2.(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n).t + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)t^2 \geqslant 0$$

Na levi strani neenakosti smo dobili kvadratno funkcijo. Ker je pri poljubnem realnem številu t nenegativna, je njena diskriminanta nepozitivna:

$$4.(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-4.(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leqslant 0$$

Odtod takoj sledi Cauchyjeva neenakost:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je diskriminanta enaka nič,oziroma natanko tedaj, ko obstaja realno število t, da velja $a_i-b_it=0$ oziroma $a_i=tb_i$ za vsako naravno število i med 1 in n.

Oglejmo si še dve posledici Cauchyjeve neenakosti:

1. V neenakost postavimo $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$ in naj bo $a_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Tako dobimo:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).n\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$$

od koder po korenjenju in deljenju z n sledi:

$$\sqrt{((a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)/n)}\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$$

V izrazu na desni strani prepoznamo *aritmetično sredino* nenegativnih realnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$, na levi pa *kvadratno sredino* istih števil. Ugotovili smo, da kvadratna sredina ni manjša od aritmetične sredine poljubnih nenegativnih števil. Enakost velja le v primeru $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

2. Sedaj pa v Cauchyjevo neenakost postavimo $a_i=\sqrt{x_i}$, $b_i=1/\sqrt{x_i}$, kjer so x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ poljubna pozitivna realna števila. Tako dobimo po urejanju še eno pomembno neenakost:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n\geqslant n/(1/x_1+1/x_2+\ldots+1/x_n)$$

Izraz na desni strani neenakosti se imenuje *harmonična sredina* pozitivnih realnih števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aritmetična sredina pozitivnih realnih števil je večja ali kvečjemu enaka harmonični sredini. Za konec rešimo še eno nalogo, ki naj bo primer uporabe Cauchyjeve neenakosti.

Če za poljubna pozitivna realna števila x_i, y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ velja x_1+x_2+ $+\ldots+x_n=1$, $y_1+y_2+\ldots+y_n=1$, potem je resnična tudi neenakost:

$$x_1^2/y_1+x_2^2/y_2+\ldots+x_n^2/y_n\geqslant 1$$

Rešitev: Če v Cauchyjevi neenakosti napravimo zamenjave $a_i=x_i/\sqrt{y_i}$ in $b_i=\sqrt{y_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ dobimo neenakost:

$$(x_1^2/y_1+x_2^2/y_2+\ldots+x_n^2/y_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)\geqslant(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$$

Po upoštevanju pogojev naloge takoj sledi:

$$x_1^2/y_1 + x_2^2/y_2 + \ldots + x_n^2/y_n \geqslant 1$$

kar je bilo treba dokazati. Hitro se prepričamo, da velja enakost le v primeru $x_i = y_i$ za i med 1 in n.

Za vajo priporočamo bralcu, da poskusi rešiti naslednje naloge:

1. Reši gornjo nalogo tudi brez uporabe Cauchyjeve neenakosti in ugotovi, kdaj velja enačaj. (Nasvet: najprej dokaži neenakost $x_i^2/y_i \geqslant 2.x_i - y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.)
2. V trikotniku ABC s stranicami a, b in c poišči točko P, da bo izraz $a.x^2 + b.y^2 + c.z^2$ imel najmanjšo vrednost, če so x, y in z zaporedoma oddaljenosti točke P od stranic a, b in c.
3. Dokaži *trikotniško neenakost:*

$$\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} + \sqrt{(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{((x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2)}$$

Pri tem so x_i in y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ poljubna realna števila. Kdaj velja enakost?

4. Kakšen je geometrijski pomen trikotniške neenakosti za $n = 2$ in $n = 3$, če so x_i, y_i in $(x_i + y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koordinate točk v ravnini oziroma prostoru? Ali sedaj veš, zakaj se neenakost imenuje trikotniška?
5. Dokaži, da velja neenakost:

$$c\sqrt{2} \geqslant a + b$$

kjer je c hipotenuza, a in b pa kateti pravokotnega trikotnika. Za katere trikotnike velja enakost?

Roman Drnovšek