PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **2** (1974/1975)
Številka 1
Strani 24–25

Jože Malešič:

O FORMULI ZA VSOTO PRVIH n NARAVNIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, aritmetika, geometrija, vsota naravnih števil, vsota kvadratov naravnih števil, volumen piramide.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/2/2-1-Malesic.pdf

O FORMULI ZA VSOTO PRVIH n NARAVNIH ŠTEVIL

Ali se da izračunati vsota prvih n naravnih števil, ne da bi seštevali vsa ta števila? Pred to nalogo je bil postavljen znani matematik K.F.Gauss še v šolarskih letih; učitelj je naročil učencem, naj seštejejo vsa števila od 1 do 100. Gauss je izračunal na pamet: 5050. Sklepal je takole:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\ldots+49+50+51+52+\ldots+98+99+100 = \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(49+52)+(50+51) = \\ &= \underbrace{101+101+101+\ldots+101+101}_{50\text{-krat}} = \\ &= 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

Zdaj lahko izračunamo vsoto od 1 do n, če je n sodo število:

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\ldots+\tfrac{1}{2}n+(\tfrac{1}{2}n+1)+\ldots+n = \\ &= (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}n+1) = \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\frac{1}{2}n\text{-krat}} = \\ &= \tfrac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

Če je število n liho, ne moremo sklepati na ta način, kajti $\frac{1}{2}n$ ni celo število - rezultat pa je vseeno pravilen, t.j., za vsako naravno število n velja formula:

$$1+2+3+\ldots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Sami poskusite dokazati, da formula velja tudi za lihe n! Navodilo: najprej seštejte vsa števila do $n-1$, ki je sodo število, nato vsoti prištejte n.

Zgornjo formulo bomo izpeljali še enkrat na geometrijski način. Iz kvadratov s stranico 1 cm sestavimo stopnišče iz n stopnic (na sliki je $n = 5$):

V prvi stopnici je en kvadrat, v drugi sta dva, v peti jih je pet, v n-ti pa n kvadratov. Zato je vsota $1+2+3+\ldots+n$ enaka ploščini stopničastega lika (v cm^2). Te ploščine pa ni težko najti: lik je sestavljen iz polovice kvadrata s stranico n cm - to da $\frac{1}{2}n^2$ cm^2 - in iz n polovičk - to da $n\frac{1}{2}$ cm^2, vsega skupaj je

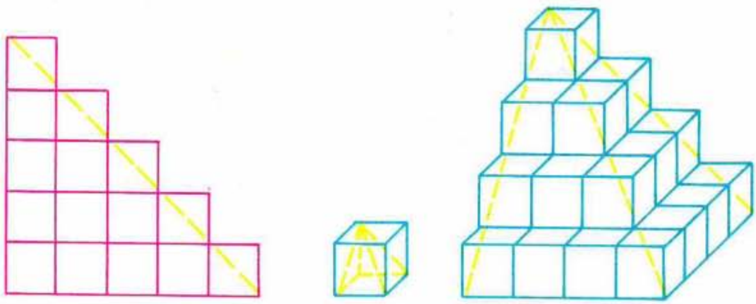
$$\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \quad cm^2$$

in tako smo pri naši formuli

$$1+2+3+\ .\ .\ .\ +n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Zdaj pa nekoliko težja naloga: poiščite formulo, po kateri bi izračunali vsoto kvadratov prvih n naravnih števil, $1^2+2^2+..+n^2$!

Navodilo: idejo vam da naša geometrijska izpeljava formule za $1+2+3+...n$. Namesto stopnišča vzemite telo, sestavljeno iz kock - najbolj je podobno četrtini azteške piramide:



Sestavljeno je iz (navadne) piramide, označene s črtkanimi črtami, iz polovic kock in iz kock, ki jim je izrezana piramida (ena taka kocka je na sliki).

Rabili boste formulo za prostornino (navadne) piramide:

$$V = \tfrac{1}{3}\ O.v$$

kjer je v višina piramide, O ploščina osnovne ploskve, V pa prostornina. Prav vam bo tudi prišla naša izpeljana formula za vsoto prvih n naravnih števil.

Rezultat preskusite za $n = 1,2,3$!

Dobili boste:

$$1^2+2^2+3^2+\ ...\ +n^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

Jože Malešič