

Formula Strassnitzkega

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Računanje približkov števila π , to je razmerja med obsegom in premerom kroga, je dolga stoletja, od Arhimeda, ki je živel v 3. stoletju pred našim štetjem, pa do Isaaca Newtona (1643–1727), temeljilo na metodi krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov. Računanje na nekaj deset decimalk je bilo dolgotrajno in naporno. Poleg osnovnih štirih računskih operacij je bilo treba izračunati tudi veliko kvadratnih korenov.

Newton je bil eden prvih, ki so za računanje približkov števila π uporabljali številske vrste. Z njimi so dosegli v razmeroma kratkem času mnogo več pravilnih decimalk kot s staro arhimedsko metodo. Newton in še nekateri so našli take formule, v katerih je še en kvadratni koren, drugi pa so našli take, kjer ni nobenega korena, ampak računanje poteka samo v okviru osnovnih štirih računskih operacij. Take možnosti ponuja funkcija arkus tangens ($\arctg$) in njen

razvoj v potenčno vrsto

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (1)$$

ki konvergira za $|x| \leq 1$, in sicer tem hitreje, čim manjši je x . Vrsto (1) so v Evropi poimenovali po Jamesu Gregoryju (1638–1675), znana pa je bila v Indiji že v 14. stoletju. Ker je (1) alternirajoča (izmenična) vrsta, lahko ocenimo razliko med vsoto vrste in njeno n -to delno vsoto:

$$\left| \arctg x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}. \quad (2)$$

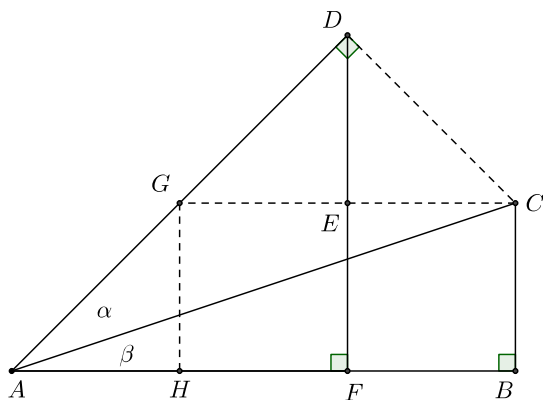
Izraz na desni strani relacije (2) omogoča oceniti, koliko členov vrste je treba sešteti, da dobimo $\arctg x$ s predpisano natančnostjo. Videti je, da bi približke števila π najlažje izračunali z vrsto

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \quad (3)$$

ki pa zelo počasi konvergira. Samo za 10 decimalk števila $\pi/4$ bi morali sešteti zelo veliko členov. Koliko? Z oceno (2) nastavimo za $x = 1$ neenačbo $1/(2n+1) < 10^{-10}$, iz katere dobimo, da je n okroglo pet milijard. Zato je vrsta (3) za računanje števila π neuporabna.

Matematiki pa so našli formule, s katerimi so veliko decimalk števila π kar hitro izračunali, če so bili le dovolj potrpežljivi in se niso motili v računih. Take pripravne formule vsebujejo dve, tri ali več vrednosti funkcije $\arctg$ racionalnih števil. Ena najpreprostejših formul, ki jo pripisujejo Leonhardu Eulerju (1707–1783) in Charlesu Huttonu (1737–1823), je

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}. \quad (4)$$



SLIKA 1.

K izpeljavi formule (4)

Formulo (4) bomo izpeljali po geometrijski poti (slika 1). Do nje je mogoče priti tudi z uporabo enakosti, ki veljajo za funkcijo $\arctg$.

Najprej načrtamo pravokotni trikotnik ABC , ki ima daljšo kateto AB dolgo tri enote, krajšo BC pa eno enoto. Nato načrtamo enakokraki pravokotni trikotnik AFD , katerega kateta AF je dolga dve enoti, oglišče F pa leži na kateti AB prvega trikotnika, druga kateta FD pa je nanjo pravokotna. Trikotnik ACD je pravokotni s pravim kotom ob oglišču D . Da se o tem prepričamo, konstruiramo daljico CG , ki je vzporedna kateti AB . Krajišče G razpolavlja hipotenuzo AD drugega pravokotnega trikotnika, tako da je $|AG| = |GD| = |CD|$. Kot GDC je pravi, ker ga razpolavlja daljica DF , ki očitno oklepa z daljicama DC in DG kot $\pi/4$. Kot CAD označimo z α , kot BAC pa z β . Ker je $\alpha + \beta = \pi/4$, $\tg \alpha = 1/2$ in $\tg \beta = 1/3$ oziroma $\alpha = \arctg(1/2)$ in $\beta = \arctg(1/3)$, res velja formula (4).

Leopold Karol Schulz pl. Strassnitzki (1803–1852) je našel formulo

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{8}, \quad (5)$$

ki jo imenujejo po njem. Tudi do nje lahko pridemo po geometrijski poti (slika 2).

Načrtamo pravokotni trikotnik ABC , ki ima daljšo kateto AB dolgo 24 enot, krajšo BC pa tri enote. Nato načrtamo pravokotni trikotnik ADE , katerega daljša kateta AE meri 15 enot in leži na kateti AB prvega trikotnika, krajša pa je dolga tri enote. Oglišči C

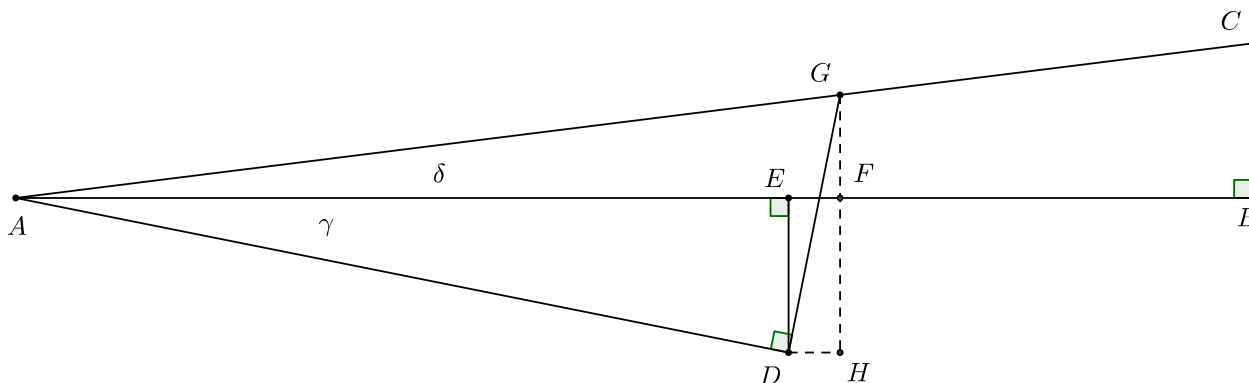
in D sta na nasprotnih bregovih premice nosilke katete AB . Nazadnje načrtamo še pravokotni trikotnik AFG , katerega daljša kateta AF je dolga 16 enot in leži na kateti AB , oglišče G pa na hipotenuzi AC .

Trdimo, da je trikotnik ADG pravokotni s pravim kotom ob oglišču D . Najprej je zaradi podobnosti trikotnikov ABC in AFG kateta FG dolga dve enoti. Poiščemo presečišče H vzporednice kateti AB skozi D in pravokotnice na to kateto skozi F . Očitno je daljica DH dolga eno enoto, tako kot daljica EF . Po Pitagorovem izreku dobimo:

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= 15^2 + 3^2 = 234, & |DG|^2 &= 5^2 + 1^2 = 26, \\ |AG|^2 &= 16^2 + 2^2 = 260. \end{aligned}$$

Ker je $|AD|^2 + |DG|^2 = |AG|^2$, je trikotnik ADG res pravokotni. Kateti v njem pa sta v lepem razmerju: $|DG|/|AD| = 1/3$. Označimo z γ kot DAE , z δ pa kot BAC . Potem je očitno kot DAG enak vsoti $\gamma + \delta$. Ker je $\tg(\gamma + \delta) = 1/3$, $\tg \gamma = 3/15 = 1/5$ in $\tg \delta = 3/24 = 1/8$, velja $\gamma + \delta = \arctg(1/3) = \arctg(1/5) + \arctg(1/8)$. Če to upoštevamo v formuli (4), dobimo formulo (5). Kot zanimivost pripomnimo, da so števila 2, 5 in 8, ki nastopajo v (5), Fibonaccijeva števila, kar ni zgolj slučaj.

S formulo (5) je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) v dveh mesecih izračunal približek števila π na točnih 200 decimal, kar je bila velika izboljšava približka Jurija Vege (1754–1802) iz leta 1794, ki je bil točen na 136 decimal. Formula (5) je ugodna za računanje, ker deljenje z 2 ni težko,



SLIKA 2.

Kako do $\arctg(1/3)$?



deljenje s 5 pa je enakovredno množenju z 2 in nato deljenju z 10, kar tudi ni težko, deljenje z 8 pa je isto kot trikratno zapovrstno deljenje z 2. Dasejev izračun s komentarjem Strassnitzkega je bil objavljen leta 1844 v ugledni nemški matematični reviji Crelles Journal. Revija izhaja še danes, le da pod drugim imenom: Journal für die reine und angewandte Mathematik – Revija za čisto in uporabno matematiko. Dase, ki ni bil posebno dober matematik, je slovel kot izvrsten računar na pamet, s čimer se je preživiljal. Sodeloval je tudi z matematikoma Gaussom (1777–1855) in Jacobijem (1804–1851).

Strassnitzki, po rodu iz Krakova, je od leta 1827 do leta 1834 poučeval matematiko na ljubljanskem liceju. Pot ga je zanesla v Ljubljano, ker bliže doma in Dunaja ni našel službe. Napisal je več matematičnih učbenikov, v Ljubljani je prirejal javna predavanja iz matematike in astronomije, ukvarjal pa se je tudi s kristalografijo. Odlično se je razumel z Matijo Čopom (1797–1835), ki je takrat služboval na isti ustanovi. Strassnitzki je navdušil za študij matematike tudi Franca Močnika (1814–1892), matematičnega pedagoga, šolskega nadzornika in pisca številnih učbenikov za matematiko. Študent Strassnitzkega je bil tudi Mihael Peterkel (1808–1884), duhovnik, profesor, naravoslovec, polihistor, politehnik in samouk, ki je na Močnikov predlog postal leta 1852 ravnatelj prve trirazredne ljubljanske realke. Do razpada Avstro-Ogrske monarhije je bil edini Slovenec, ki je na tej šoli opravljal tako pomembno funkcijo.

Znane so podrobnosti, kako je Jurij Vega računal število π . Združeval je po dva in dva člena v vrsti (1), da je lahko računal samo s pozitivnimi členi. Ni pa znano, kako je računal Dase. Zagotovo je člene računal na malo več kot 200 decimalk zaradi nujnega zapisa le končnega števila decimalk, pri čemer nastane napaka na zadnjih decimalkah v končnem rezultatu.

- Preverite formuli (4) in (5) z uporabo enakosti

$$\text{tg}(u + v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \text{tg } v}.$$

- Z oceno (2) nastavite za vsak sumand v (5) neenakost za potrebnih 200 točnih decimalk. Ocenite, najmanj koliko členov je moral Dase v ta namen sešteti.

× × ×

Kovinska razmerja



MARKO RAZPET

→ Obravnavali bomo kovinska razmerja, ki so splošitev dobro znanega zlatega razmerja. Pot, ki jo bomo ubrali, bo najprej vodila preko verižnih ulomkov, nato pa bomo podali še geometrijsko razlago. Da pa bomo za to imeli motiv, začnimo pri pisarniških listih, s katerimi imamo opravka skoraj vsak dan.

Pisarniški list papirja formata A4 je pravokotne oblike in ima to lastnost, da po prerezu po njegovi krajši srednjici dobimo dva lista, ki sta podobna začetnemu. Nova lista sta formata A5. Delitev lahko na ta način nadaljujemo in dobimo formate A6, A7 itd. Lahko pa gremo tudi v obratni smeri. Lahko rečemo, da je list formata A4 nastal z opisano delitvijo lista formata A3, ta z delitvijo lista formata A2, ta z delitvijo lista formata A1. Ker se moramo nekje ustaviti, je začetni format A0 tisti, ki z opisano delitvijo da format A1. Pola papirja formata A0 pa je tako opredeljena, da meri ploščina izbrane strani 1 m^2 . Listi formata A so pripravljeni ravno zato, ker z razpolavljanjem dobimo spet liste formata A. Pri tem ne nastajajo nepotrebni odpadki. Pa tudi pakete, v katerih je po nekaj sto takih listov, lahko lepo zlagamo enega na drugega, ne da bi nastale med paketi velike špranje.

Kolikšne so stranice lista formata A0? Vsi listi formata A so pravokotne oblike. Če ima A0 krajšo stranico dolžine a in daljšo stranico dolžine b , potem ima A1 krajšo stranico dolgo $b/2$, daljšo pa a . Ker si morata biti ustrezna pravokotnika podobna, velja: $b/a = a/(b/2)$. Iz te relacije dobimo enačbo $b^2 = 2a^2$, kar pomeni $b = a\sqrt{2}$. Pri vseh formatih A je torej daljša stranica lista $\sqrt{2}$ -krat daljša od krajše stranice. Pri formatu A0 pa je po opredelitvi ploščina $p = ab = b^2/\sqrt{2} = 1 \text{ m}^2$. Torej ima format A0