Odvod funkcije brez uporabe limit

The derivative of a function without the usage of limits

Janez Žerovnik
Univerza v Ljubljani

Σ Povzetek

Predstavljena je stara metoda računanja tangente na graf algebraične funkcije, ki vodi k prav tako zelo stari Caratheodoryjevi formulaciji definicije odvedljivosti. Komentiramo primernost pristopa za poučevanje v srednji šoli.

Ključne besede: analiza, odvod funkcije, limita, zveznost, tangente, Descartes, Caratheodory

Σ Abstract

Presented is an old method of calculating the tangent to the graph of the algebraic function, which leads to the likewise venerable Caratheodory's formulation of the definition of differentiability. We comment the appropriateness of this approach approach for teaching in high school.

Keywords: *analysis, derivative of the function, limit, continuity, tangents, Descartes, Carathéodory*

Sporočilo uredništva. Uredništvo revije Matematika v šoli podpira različen pogled na poučevanje in učenje matematike, zato smo se odločili za objavo tega prispevka. Predstavljen način obravnave odvoda še ni bil preizkušen v praksi v Sloveniji, zato morajo biti učitelji pozorni pri takem načinu obravnave.

α Uvod

Range v [5] predstavi Descartesovo metodo računanja tangent in odpira vprašanje, ali bi bilo smiselno ponovno razmisliti o osnovah kalkulusa, kar bolj ali manj ustreza našemu uvodu v analizo. Pojem limite je abstrakten in sorazmerno zahteven koncept. Posebej je problematično, ker si v srednji šoli težko izmislimo primere, ko je limito zares smiselno računati, saj imamo opravka praviloma z vsaj odsekoma zveznimi funkcijami. Izjema so limite z $x \to \infty$ (Drugi primer so nezveznosti funkcij v točkah nedefiniranosti, ki pa jih pogosto odpravimo kar z deljenjem ali malo bolj zahtevnim preoblikovanjem.)

Po drugi strani pa limito vpeljemo sorazmerno zgodaj in na tem temeljimo veliko poznejše obravnave. Tako na primer rečemo, da je funkcija zvezna na intervalu, če je zvezna v vsaki točki intervala. Tu se pojavi limita: funkcija je zvezna v točki, če je tam njena vrednost enaka limiti. Precejšnja zmeda ali nepotrebna komplikacija za dijaka, ki pozna samo zvezne funkcije. Tu se lahko vprašamo, ali ne bi bilo bolj naravno definirati zveznosti brez omembe limit, in potem verjetno bližje dijakovemu znanju namesto zveznosti v točki takoj definirati zveznost na intervalu, a o tem na kakem drugem mestu.

Pojem odvoda je med težjimi abstraktnimi pojmi v srednješolski matematiki, po drugi strani pa se mu nikakor ne moremo in nočemo odreči zaradi očitne uporabnosti pri zelo elementarnih uporabnih nalogah. Za običajno vpeljavo pojma odvoda potrebujemo najprej pojem limite funkcije, potem pa opazujemo, ali konvergira limita diferenčnega kvocienta. Standardni obravnavi [6] sledijo srednješolski učbeniki, na primer [1] (ki je trenutno edini potrjeni učbenik za 4. razred gimnazije [9]). Ali se lahko odrečemo vpeljavi odvoda z limito funkcije?

Že Descartes je v 17. stoletju poznal metodo za direktno računanje tangent, ki pa je danes nekoliko pozabljena [4,5]. Tangente na graf funkcije in seveda tudi smerni koeficient tangente lahko izračunamo brez uporabe odvoda za veliko družino funkcij. In zgodbo lahko obrnemo: najprej računamo tangente, potem pa odvod definiramo kot smerni koeficient tangente. Descartesov pristop naravno vodi h Caratheodoryjevi definiciji odvedljivosti, še eni skoraj pozabljeni dobri ideji [2,3,8]. Ta pristop je predstavljen tudi v [7], potem ko je bila tema nezanimiva za revijo Obzornik za matematiko in fiziko!

Tu bomo najprej povzeli Descartesovo metodo, s katero lahko tangente na grafe mnogih funkcij izračunamo brez vpeljave odvoda. Še več, smerni koeficient tangente lahko v mnogih primerih izračunamo algebraično brez pojma limite. Za funkcije, pri katerih se pojmu limite ne moremo izogniti, pa na naraven način pridemo do alternativne definicije odvoda, ki je enakovredna običajni. Alternativna Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti in odvoda temelji na pojmu zveznosti funkcije, ki je videti bolj naraven in intuitivno lažje razumljiv kot pojem limite.

V nadaljevanju najprej predstavimo Descartesovo metodo računanja tangent, na podlagi katere je dana definicija odvoda polinoma. S primeri pokažemo, da je lastnosti odvoda mogoče sorazmerno preprosto izpeljati. Šele za splošno definicijo odvoda potrebujemo uporabo limite ali, enakovredno in morda primernejšo, zveznosti funkcije. Zapisana je Caratheodoryjeva definicija odvoda, ki je naravna posplošitev prejšnje definicije. Spet na primerih vidimo, da je izpeljava lastnosti odvodov sorazmerno nezahtevna.

Nezahtevnost ali zahtevnost tega ali onega pristopa je seveda težko opredeliti oziroma je zelo odvisna od (pred)znanja, pa tudi od drugih dejavnikov. Navsezadnje tudi od pridobljenih navad in izobrazbe učiteljev.

Namesto sklepa tu zapišimo osnovno sporočilo prispevka. Tudi pri poučevanju standardnih vsebin matematike je smiselno vedno znova premišljati o najprimernejšem načinu vpeljave pojmov. Pogosto nam že znane, a včasih po krivici pozabljene ideje lahko pomagajo, da se temu približamo, ne da bi pri tem izgubili splošnost ali celo formalno logično korektnost obravnave. Seveda je na drugi strani potrebna velika previdnost, saj lahko majhna sprememba v definiciji kakega osnovnega pojma povzroči nepričakovane težave na kakem drugem mestu obravnave.

β Descartesova metoda

Poglejmo najprej primer, kako lahko izračunamo tangento na parabolo, torej tangento na graf kvadratne funkcije. Ni težko razumeti, da premica seka parabolo v eni, dveh, ali v nobeni točki. Premica, ki seka graf kvadratne funkcije v dveh točkah, je sekanta, premica, ki graf seka v eni točki, torej se ga dotika, pa je tangenta. Algebraično recimo, da imamo funkcijo s predpisom $f(x) = x^2$ in želimo izračunati predpis linearne funkcije, katere graf bo tangenta v točki (a, a^2).

Enačba tangente bo $y = a^2 + k(x - a)$, torej dobimo

$$x^2 - a^2 = k(x - a)$$

in od tod

$$((x + a) - k)(x - a) = 0.$$

Ker imata tangenta in parabola eno skupno točko, mora imeti enačba dvakratni koren $x = a$, zato $(x + a) - k = 0$ in dobimo $k = 2a$.

Če poskusimo razmišljati, kako bi to naredili intuitivno jasno in preprosto, bi šlo lahko takole, morda v praksi tudi s pomočjo grafične animacije. Tangenta ni katera koli premica, ki ima skupno točko z grafom funkcije, ampak jo dobimo tako, da sekanto, ki graf preseka v dveh bližnjih točkah, premikamo, tako da se dve presečišči približujeta.

Algebraično to pomeni, da se bosta dva korena ustrezne enačbe združila v večkratni koren. To bi dijaki lahko intuitivno razumeli na podlagi že znane obravnave parabole in premice. V animaciji bi tako na primer lahko začeli z grafom polinoma tretje stopnje in premico, ki bi ta graf sekala v treh točkah, nazadnje pa bi imeli tangento, ki bi imela z grafom polinoma še eno presečišče.

Podobno lahko razmišljamo, če je funkcija polinom stopnje $r \geq 2$.

Tangenta v točki $(a, P(a))$ je premica z enačbo $y = P(a) + k(x - a)$, $x = a$ pa mora biti vsaj dvakratni koren enačbe $P(x) = P(a) + k(x - a)$. Ker je $x = a$ ničla polinoma $P(x) - P(a)$, lahko zapišemo

$$P(x) - P(a) = q(x)(x - a),$$

kjer je q polinom stopnje $r - 1$. Potrebovali smo samo znanje deljenja polinomov. Zapišimo enačbo presečišč grafa polinoma in naše premice - tangente:

$$P(x) = P(a) + k(x - a).$$

Kot prej preoblikujmo in dobimo

$$(q(x) - k)(x - a) = 0$$

in ker mora biti $x = a$ dvakratni koren sklepamo, da mora biti $q(a) = k$.

Ker ima tudi $q(x) - q(a)$ ničlo pri $x = a$, lahko zapišemo $q(x) - q(a) = r(x)(x - a)$, in

$$\begin{aligned} P(x) - P(a) - k(x - a) &= (q(x) - k)(x - a) = \\ &=(q(a) - k)(x - a) + (q(x) - q(a))(x - a) \\ &=(q(a) - k)(x - a) + r(x)(x - a)^2 \end{aligned}$$

Iz zadnjega zapisa sklepamo, da ima enačba $P(x) = P(a) + k(x - a)$ večkratni koren pri

$x = a$ natanko tedaj, ko je $q(a) = k$. Torej je $q(a)$ smerni koeficient tangente na graf polinoma P v točki $(a, P(a))$. Iz zapisa tudi sledi, da ima graf polinoma dobro definirano tangento v vsaki točki in lahko definiramo:

Definicija tangente in odvoda polinoma. *Tangenta na graf polinoma P v točki (a, P(a)) je enolično določena premica, ki v točki (a, P(a)) seka graf polinoma z večkratnostjo vsaj dva. Smerni koeficient tangente je enak q(a), kjer je q(x) določen z $P(x) - P(a) = q(x)(x - a)$. Smerni koeficient tangente imenujemo odvod polinoma P pri x = a, in ga označimo s P'(a).*

Podobno lahko obravnavamo racionalne funkcije, obravnavo pa lahko razširimo na algebraične funkcije [4].

γ Osnovne lastnosti odvoda

Za tu definirani odvod veljajo znane lastnosti, dokazi pa so preprosti. Poglejmo nekaj zgledov izpeljave pravil za odvajanje. Omejimo se na množico funkcij $\mathcal{F}$, ki je zaprta za osnovne operacije (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje), komponiranje funkcij in inverze. Potem lahko, seveda na primernih definicijskih območjih, privzamemo, da za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{F}$ obstaja $\varphi \in \mathcal{F}$, tako da je $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$ [4]. Trditev očitno velja za množico polinomov, pa tudi za množico racionalnih funkcij.

Privzemimo, da sta f in g iz množice funkcij $\mathcal{F}$, torej da velja

$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$, za neko funkcijo $\varphi \in \mathcal{F}$ (1)

in

$g(x) - g(a) = \psi(x)(x - a)$, za neko funkcijo $\psi \in \mathcal{F}$ (2)

Seštejmo (1) in (2),

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \\ &= f(a) + g(a) + \varphi(x)(x - a) + \psi(x)(x - a) \\ &= f(a) + g(a) + \varphi(x) + \psi(x))(x - a) \\ &= f(a) + g(a) + q(x)(x - a). \end{aligned}$$

Torej ima $f + g$ v točki a odvod in

$$(f + g)'(a) = \varphi(a) + \psi(a) = f'(a) + g'(a).$$

Dobili smo znano pravilo za odvod vsote odvedljivih funkcij. Tu rečemo, da je funkcija odvedljiva v točki, če v tej točki obstaja odvod. Po prejšnji definiciji je to ekvivalentno obstoju tangente na graf funkcije. Pozneje to definicijo posplošimo in jo razširimo na odvedljive funkcije v standardnem pomenu.

Za dokaz pravila za produkt pomnožimo $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$ in $g(x) = g(a) + \psi(x)(x - a)$ ter preuredimo $f(x)g(x) - f(a)g(a) = (\varphi(x)g(a) + f(a)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - a))(x - a)$.

Vstavimo $x = a$ v oklepaj na desni in z upoštevanjem $\varphi(a) = f'(a)$ in $\psi(a) = g'(a)$ preberemo znano pravilo

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= (\varphi(a)g(a) + f(a)\psi(a) + 0) = \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

Zelo kratek je tudi dokaz izreka o odvodu posredne funkcije.

Izrek. *Naj bo $y = f(x)$ odvedljiva funkcija v točki a in $z = g(y)$ odvedljiva funkcija v točki $b = f(a)$. Potem je $g \circ f(x) = g(f(x))$ odvedljiva funkcija v točki a in velja*

$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a)\, f'(a)$$

Za dokaz zapišimo definicijo odvedljivosti za funkcijo g z novimi oznakami

$$g(y) - g(b) = \psi(y)(y - b)$$

ter vstavimo $y = f(x)$, $b = f(a)$ in $y - b = f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \psi(f(x))\, \varphi(x)(x - a).$$

Torej je kompozitum $g \circ f$ odvedljiva funkcija v točki a in

$$(g \circ f)'(a) = \psi(f(a))\, \varphi(a) = g'(f(a))\, f'(a)$$

Podobno kratki in predvsem konceptualno nezahtevni so tudi dokazi drugih lastnosti odvoda, ki jih tu ne bomo navajali.

δ Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti

Pri posplošitvi odvoda na večji razred funkcij ne gre brez uporabe limit. Tudi tu lahko limite skrijemo v definicijo zveznosti, ki je verjetno dijakom precej bolj intuitivno razumljiva, saj poznajo skorajda samo funkcije, ki so zvezne na svojih definicijskih območjih. Limite uporabimo šele v konkretnih primerih oziroma tedaj, ko res ne gre brez njih.

Primerna definicija zveznosti je seveda vredna posebne pozornosti, in kot že omenjeno, podrobna obravnava presega namen tega prispevka. Vsekakor je dijakom vredno povedati, da gre za formalizacijo lastnosti funkcije, katere graf je neprekinjena krivulja. Potem bi bilo naravno govoriti o zveznosti na (zaprtem) intervalu in uporabiti standardno definicijo enakomerne zveznosti. Potem lahko rečemo, da je funkcija zvezna tudi v vsaki točki intervala in imamo ekvivalentno definicijo običajni. Bistveno sporočilo tega odstavka je, da je mogoče in morda smiselno definirati zveznost funkcije pred definicijo limite, manj pomembno pa je tu vprašanje, ali to naredimo na tu nakazani ali na standardni način, ko začnemo z definicijo zveznosti funkcije v točki.

V nadaljevanju predpostavljamo, da so zvezne funkcije in njihove lastnosti znane. Sklepi so, kot bomo videli na primerih, vedno zelo podobni: ker je nek izraz, sestavljen iz zveznih funkcij, zvezna funkcija, sklepamo, da je obravnavana funkcija odvedljiva in iz oblike izraza preberemo pravilo za izračun njenega odvoda.

Naj bo zdaj f poljubna realna funkcija, zanima nas tangenta na graf funkcije f v točki $x = a$. Enačba tangente mora biti $y = f(a) + k(x - a)$. Kot prej mora imeti enačba $f(x) = f(a) + k(x - a)$ pri $x = a$ rešitev, ki ni enostavna. Zapišimo

$$f(x) - f(a) = g(x)(x - a) = g(a)(x - a) + (g(x) - g(a))(x - a).$$

Izkaže se, da je dovolj zahtevati $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, ali drugače rečeno, g mora biti zvezna funkcija v točki a. Potem lahko rečemo, da je za $k = g(a)$

$$y = f(a) + k(x - a)$$

tangenta na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$. To nas je pripeljalo do Cartheodoryjeve definicije odvoda:

Definicija odvoda odvedljive funkcije (Caratheodory) [2,3]. *Funkcija f je odvedljiva v točki x_0 natanko tedaj, ko obstaja funkcija φ, zvezna v točki x_0, tako da je*

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)\,(x - x_0) \tag{3}$$

Vrednost $\varphi(x_0)$ imenujemo odvod funkcije f v točki x_0 in jo označimo z $f'(x_0)$.

Odvedljivost funkcije f z leve (z desne) je ekvivalentna obstoju funkcije φ zvezne z leve (z desne).

Caratheodoryjeva definicija je posplošitev prej zapisane definicije odvoda polinoma in je enakovredna običajni definiciji odvoda, ki ga definiramo kot limito diferenčnega kvocienta, kot v [6] (in podobno [1]):

Definicija. *Odvod funkcije f v točki x_0 je enak limiti*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \tag{4}$$

Funkcija je v točki x_0 odvedljiva, če eksistira limita na desni, na kakršen koli način gre h proti 0.

Ekvivalentnost definicij je mogoče hitro videti. Res, iz (3) sledi, da je povsod razen pri $x = x_0$

$$\varphi(x) = \frac{(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (5)$$

Funkcija φ je zvezna v točki x_0 natanko tedaj, ko obstaja limita diferenčnega kvocienta (4). Tedaj je $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

ε Pravila za odvajanje v splošnem

Privzamemo, da poznamo definicijo in izreke o zveznosti vsote, produkta, kompozituma … zveznih funkcij. Za primer zapišimo dokaz pravila za odvod inverzne funkcije in za odvod kvocienta. Videli bomo, da so tehnično dokazi enaki kot prej, le $\varphi \in \mathcal{F}$ v $f(x) - f(a) = \varphi(x)\,(x-a)$ zamenjamo z zvezno fukcijo.

Naj bo f na neki okolici točke x_0 injektivna. Če v definiciji (3) zamenjamo $x = f^{-1}(y)$ in $x_0 = f^{-1}(y_0)$, y $= f(x)$ in $y_0 = f(x_0)$, dobimo $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y_0)) + \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$, upoštevamo $y = f(f^{-1}(y))$, $y_0 = f(f^{-1}(y_0))$, in preuredimo

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}\,(y - y_0)\,.$$

Če je $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) \neq 0$, predpis $\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ da realno funkcijo, ki je zvezna v točki y_0 in

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi((f^{-1})'(y))} = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Nekaj več, a še vedno ne veliko, računanja je treba za dokaz pravila za odvod kvocienta. Naj bo $g(x_0) \neq 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{-\big(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)\big) + \big(f(x)g(x) - f(x_0)g(x)\big)}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{-f(x)\psi(x)(x-x_0) + g(x)\varphi(x)(x-x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{-f(x)\psi(x) + g(x)\varphi(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0)$$

Ker je funkcija s predpisom $\frac{-f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)g(x_0)}$ zvezna v točki x_0, je kvocient $\frac{f}{g}$ odvedljiva funkcija in

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{-f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} =$$

$$= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)g(x_0)}$$

η Za konec

V prispevku smo skicirali alternativni pristop k definiciji odvoda, kjer odvod najprej definiramo kot smerni koeficient tangente na graf funkcije. Kot smo videli, lahko pri preprostih funkcijah, kot so polinomi in racionalne funkcije, to storimo brez uporabe pojma limite.

Tako lahko na primer odvod potence $f(x) = x^n$ pri $x = a$ dobimo tako, da zapišemo

$$f(x) - f(a) = x^n - a^n = (x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})(x-a) = q(x)(x-a)$$

in odtod, ali še bolj nazorno, iz enakosti

$$f(x) = f(a) + q(x)(x-a)$$

vidimo, da je $x = a$ odvedljiva funkcija, njen odvod pri pa je enak

$$g(a) = na^{n-1}.$$

Ker je v izpeljavi poljubno realno število, sledi $f'(x) = g(x) = nx^{n-1}$.

Pravila za odvod vsote, produkta in kvocienta, ki smo jih omenili v razdelku lastnosti odvoda, lahko potem uporabimo za računanje odvodov racionalnih funkcij, še vedno brez uporabe pojma limite. Tehnika odvajanja je tu seveda povsem enaka kot pri običajnem pristopu, le vpeljava je bila drugačna.

Za razširitev obravnave na vse funkcije, ki jih srečamo v srednji šoli, pa za definicijo odvoda potrebujemo pojem limite, ali ekvivalentno, pojem zveznosti funkcije, kot smo naredili v razdelku Caratheodoryjeva definicija odvedljivosti. Za zgled izračunajmo odvod funkcije sinus v poljubni dani točki a. Zapišimo adicijski izrek, ki ga dijaki poznajo,

$$\sin x - \sin a = 2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$$

recimo, da je $x \neq a$ in pomnožimo z $\frac{x-a}{x-a}$.

$$2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}(x-a).$$

Zdaj seveda ne gre brez limite

$$\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos a$$

Funkcija *sin* je torej v točki a odvedljiva, njen odvod v točki a je enak $\cos a$. Ker je bila a poljubna točka, je za vsak realen x

$$\sin' x = \cos x.$$

Videli smo, da je pravila za odvajanje in odvode potenc mogoče izpeljati brez vpeljave limit, ki so za povprečnega srednješolca dokaj zahteven pojem. Za popolnitev običajne tabele elementarnih odvodov brez limit ne gre, a pomembno je, da jih uporabimo šele takrat, ko je nujno potrebno.

Osnovno sporočilo člankov [4,5] in tega prispevka je, da je mogoče znaten del obravnave narediti pred vpeljavo pojma limite.

Zahvala. Avtor se zahvaljuje anonimnemu recenzentu za konstruktivne pripombe, urednici Jerneji Bone pa za potrpežljivost pri usklajevanju in tehnično pomoč pri pripravi zadnje različice članka.

ϑ Literatura

1. Bon Klanjšček, M., Felda, D. (2012), Matematika 4, Učbenik za gimnazije, DZS, Ljubljana.
2. Carathéodory, C. (1950), Funktionentheorie, Birkhäuser.
3. Hairer, E., Warner, G. (1995), Analysis by its history, Springer.
4. Range, R.M. (2011), Where are Limits Needed in Calculus, Amer. Math. Monthly, letn. 118, str. 404–417.
5. Range, R. M. (2014), Descartes's Double Point Method for Tangents: An Old Idea Suggests New Approaches to Calculus, Notices of the AMS, letn. 61, str. 387–389.
6. Vidav, I. (1987), Višja matematika I, DMFA, Ljubljana.
7. Žerovnik, J. (2002/03), O definiciji odvedljivosti, Matematika v šoli, letn. 10, str. 85–88.
8. Žerovnik, J. (2009), Matematika 1, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana.
9. Seznam učbenikov na http://www.zrss.si/ dostop maj 2014.