Bojan Kuzma
ZAPISKI IZ PREDAVANJ - PLOSKVE

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 6)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Katapožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(0.034.2)

KUZMA, Bojan
Zapiski iz predavanj. Ploskve [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 6)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_6_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-5-7

246643968

Zapiski iz predavanj - Ploskve

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Pričujoči zapiski so nastali kot študijski pripomoček študentom pri predmetih Analiza III in Analiza IV. V sklopu teh dveh predmetov je zajeta široka paleta snovi, ki obsega metrične prostore, funkcije več spremenljivk, mnogoterne integrale, Fourieorovo analizo, krivulje, ploskve in polja s krivuljnimi ter ploskovnimi integrali.

Kot pravijo, je dobra slika vredna tisoč besed. Še zlasti pri ploskvah je snovi težko slediti brez ustrezne geometrijske predstave. Da niti ne omenjam posebej dejstva, da je brez nje skoraj nemogoče uvideti koliko bogastva, lepote, in popolnoma neituitivnega razmišljanja se skriva v ploskvah. Zato sem pričujočo zbirko posvetil izključno ploskvam in, kolikor je le bilo možno, skušal celotno tematiko ilustrirati. Kolikor mi je poznano se lahko matematike naučiš le tako, da matematiko delaš. Tak koncept podajanja snovi je npr. v učbeniku [5], kot tudi v [2]. Tudi sam sem se odločil slediti tej usmeritvi. Zato v njej ne boste našli veliko izrekov, trditev in lem, temveč definicije in naloge, ki pa so povečini rešene. Kljub temu vas vabim, da najprej poskusite nalogo rešiti sami, saj boste tako o snovi zvedeli veliko več, kot če rešitev preberete.

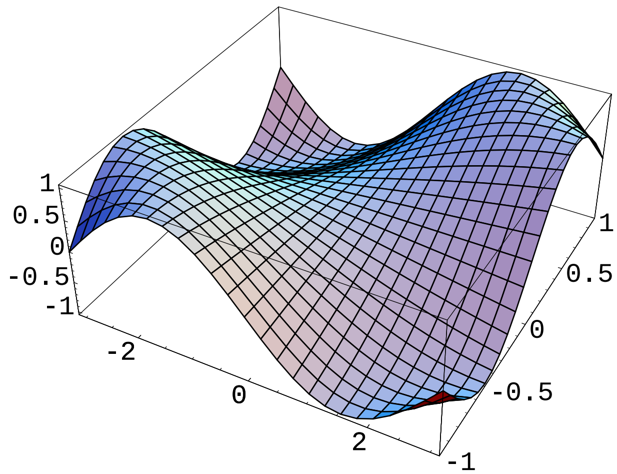
Naj dodam, da je pričujča zbirka mišljena zgolj kot uvodna seznanitev z osnovnimi pojmi ploskev. Za kaj več pa priporočam v branje npr. [5] ali [4].

Bojan Kuzma

2 Ploskve

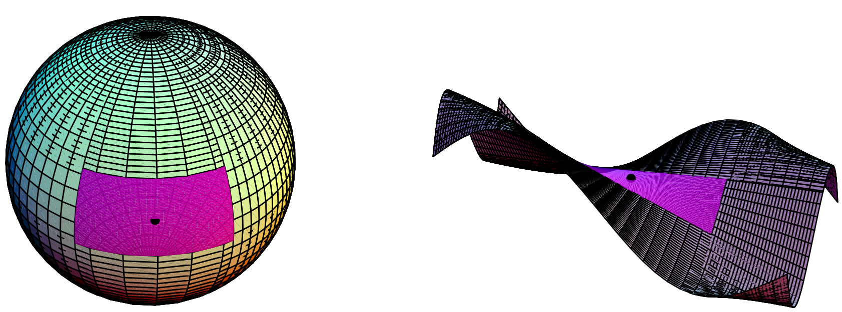
2.1 Uvod

Če se izrazimo zelo površno, je ploskev „ukrivljena ravnina.“ Mislimo si, da imamo neko ploho zelo raztegljivega materiala, ki jo nato zgubamo. Kar dobimo, je ploskev.



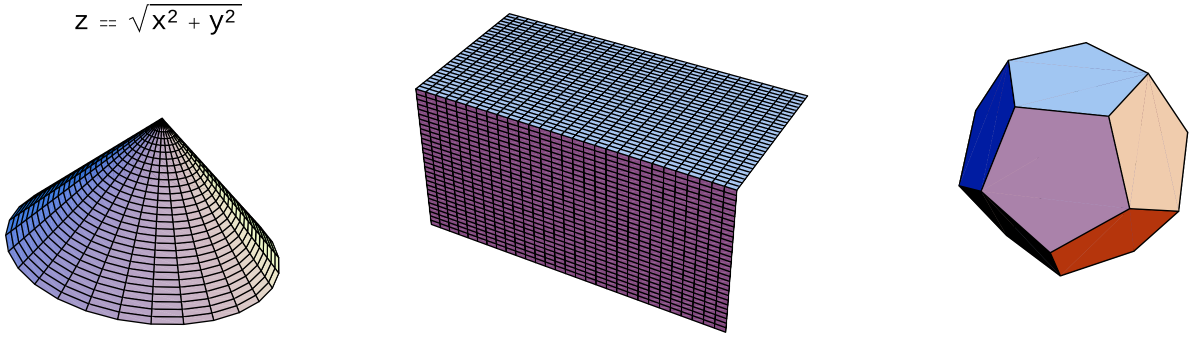
Slika 1: Ploskev

Vendar pa s tem ne zajamemo sklenjenih ploskev, kot je npr. sfera. Gornja „definicija“ torej potrebuje malce bolj precizno formulacijo: Dejansko bomo malce bolj natačneje zahtevali, da je vsak dovolj majhen košček ploskve „ukrivljen ravninski lik.“ Povedano v obrnjenem smislu: vsak dovolj majhen košček ploskve lahko zgladimo v nek ravninski lik. Tukaj pod pojmom ravninski lik razumemo neko odprto, povezano množico v $\mathbb{R}^2$.



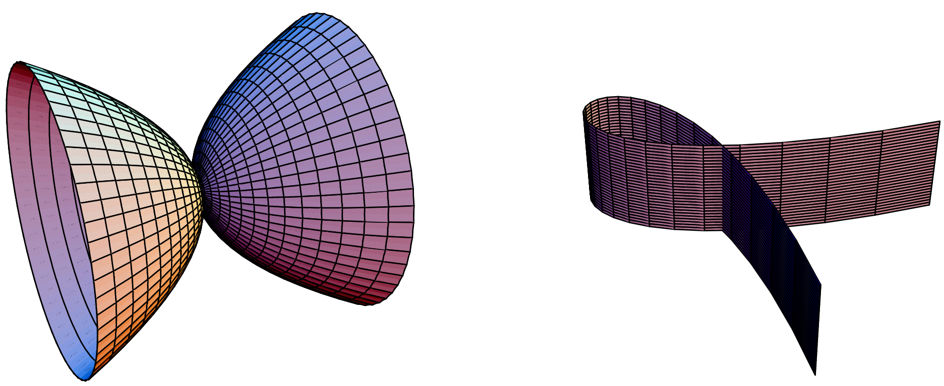
Slika 2: Zahtevamo, da ima vsaka točka ploskve neko dovolj majhno okolico, ki jo lahko zgladimo v ravni lik.

Pri tem moramo paziti, da glajenje res poteka „gladko.“ S tem takoj izključimo, da bi ploskev imela kakršnokoli ost, ali kakršenkoli oster rob.



Slika 3: Primeri objektov, ki **niso ploskve**. Prva ima ost (=špica), druga ima oster rob, tretja ima oster rob in ost. V naslednjem poglavju jih bomo imenovali „ploskve z vogali.“

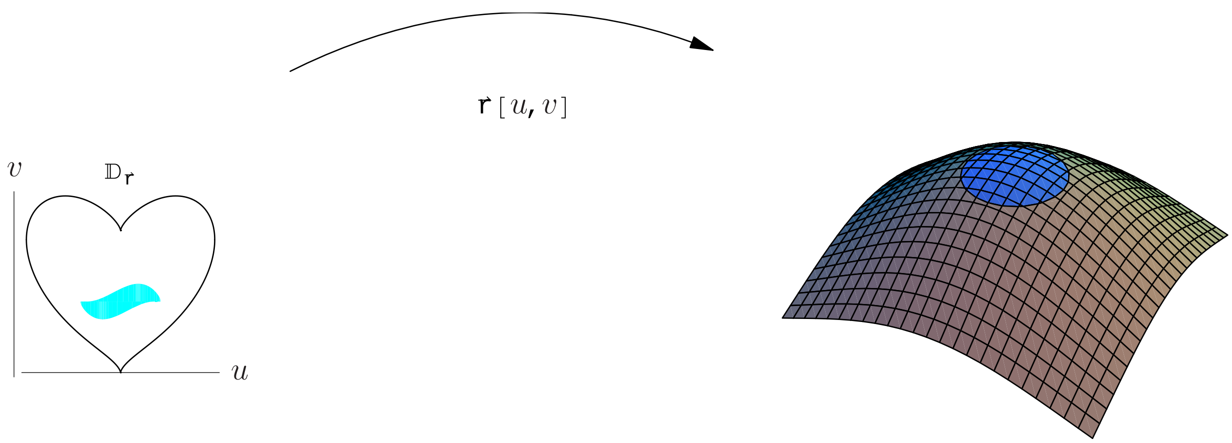
Ne bomo dovolili niti tega, da bi se ravnina „preveč zakrivila,“ in imela samopresečišča.



Slika 4: Tudi to niso ploskve. Ne dovoljujemo samopresečišč!

Kako to razmišljanje formulirati matematično? Proces gladitve koščka ploskve v ravninski lik lahko opišemo s funkcijo. Za vsako točke iz nagubane okolice povemo, na katero točko v ravninskem liku se bo preslikala. Ta funkcija mora biti povratno enolična (=bijekcija), saj po drugi strani želimo, da se dobljeni ravninski lik z zgubanjem preslika nazaj na našo okolico. Ta bijekcija mora biti tudi dovolj pohlevna (drugače bi dobili zelo „divje glajenje“). Zahtevali bomo, da je funkcija gladka, tj. da jo lahko poljubno mnogokrat parcialno odvajamo po vseh njenih spremenljivkah. Tudi obratni proces, tj. gubanje mora biti pohlevno, se pravi, da mora biti tudi inverz te funkcije gladek.

Do sem je vse lepo in prav. Toda kako bi prepovedali „samopresečišča“? Ena od možnosti je naslednja. Dejansko ne bomo gladili zgolj nek majhen košček ploskve. Raje



Slika 5: Na poti do definicije ploskve: Za vsako točko ploskve P lahko najdemo neko regularno preslikavo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : \mathscr{D}_{\mathbf{r}} \to P$, ki nek ravninski lik „zvije na delček ploskve," tj., ga preslika bijektivno na *presek ploskve z neko* (dovolj majhno) *kroglico, centrirano v tej točki.*

bomo vzeli neko (majhno) kroglico, ki ima središče na ploskvi. Nato pa bomo to kroglico pregnetli (z neko povratno enolično, gladko preslikavo) da se bo presek kroglice in ploskve izravnal v ravninski lik.

Poskušajmo sedaj tole razmišljanje preliti v matematični jezik.

Definicija 1. Množica $P \subseteq \mathbb{R}^3$ je *ploskvev* (ali tudi: *gladka ploskev*) če za vsako točko $\mathbf{p} \in P$ obstaja (i) odprta okolica $V_{\mathbf{p}} \subseteq \mathbb{R}^3$ točke $\mathbf{p}$, (ii) odprta okolica $U_{\mathbf{p}} \subseteq \mathbb{R}^3$ ter (iii) preslikava $F_{\mathbf{p}} : V_{\mathbf{p}} \to U_{\mathbf{p}}$ („glajenje"), da velja:

(i) $F_{\mathbf{p}} : V_{\mathbf{p}} \to U_{\mathbf{p}}$ je bijekcija.

(ii) $F_{\mathbf{p}}$ je gladka

(iii) Njen inverz, $F_{\mathbf{p}}$ („gubanje") je tudi gladka preslikava.

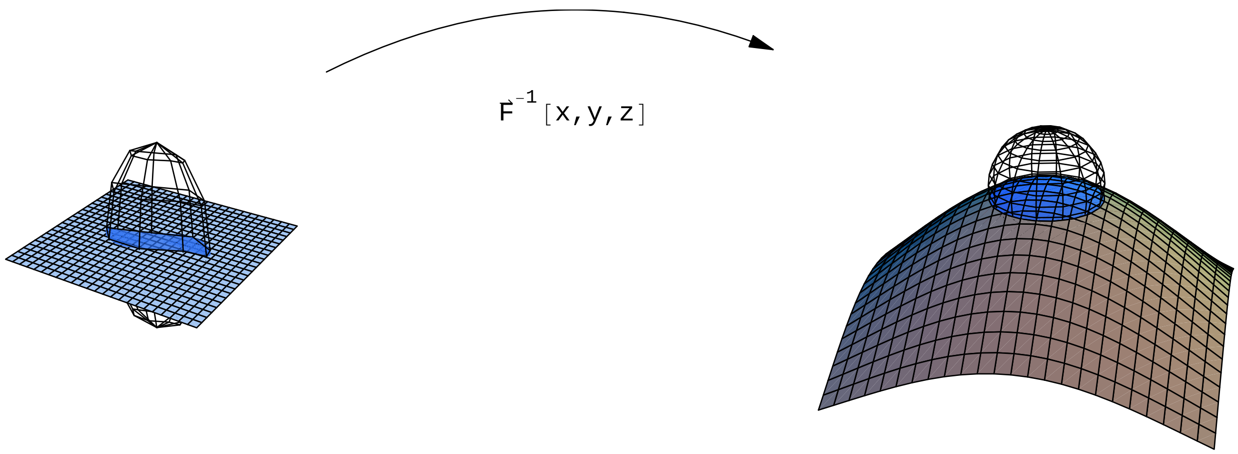
(iv) $F_{\mathbf{p}}(V_{\mathbf{p}} \cap P) = U_{\mathbf{p}} \cap \mathbb{R}^2$.

Točka (iv) pove, da se delček ploskve (tj. $V_{\mathbf{p}} \cap P$) zravna v ravninski lik (tj. $U \cap \mathbb{R}^2$). Stogo matematično bi sicer morali v točki (iv) pisati malce bolj nerodno $F_{\mathbf{p}}(V_{\mathbf{p}} \cap P) = U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

Naloga 2. *Pokaži, da dvojni stožec* $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = z^2\}$ *ne more biti ploskev (prim. sliko 4).*
(Nasvet: Točka $(0, 0, 0)$ *je problematična. Če jo odstraniš, stožec razpade na dva dela. Take lastnosti nima noben ravninski lik.)*

Denimo, da imamo preslikavo $F_{\mathbf{p}}$ kot na sliki 6. Kako bi iz nje dobili preslikavo $\mathbf{r}_{\mathbf{p}}$, ki pove na kakšen način moramo gubati ravninski lik (prim. sliko 5)? Odgovor je preprost:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{p}}(u, v) = F_{\mathbf{p}}^{-1}(u, v, 0).$$



Slika 6: Definicije ploskve: Da se izognemo samopresečiščem, si namesto delčka ploskve raje oglejmo presek ploskve z majhno kroglico (= množica $V_{\mathbf{p}}$). To kroglico nato pregnetemo (na množico U), da se njen presek z ploskvijo pri tem izravna v ravninski lik. Na sliki je prikazana obratna preslikava, ki okolico nekega ravninskega lika preslika na kroglo, in pri tem ravninski lik „zguba“ na delček ploskve.

Namreč ravninski lik sestoji natanko iz točk $(x, y, 0) \in U$. Ta del pa po definiciji funkcija $F_{\mathbf{p}}^{-1}$ preslika (=„zguba“) bijektivno na naš delček ploskve.

Opazimo še nekaj: Jacobijeva determinanta preslikave $G := F_{\mathbf{p}}^{-1}$; $G : (u, v, z) \mapsto \big(g_1(u, v, z), g_2(u, v, z), g_3(u, v, z)\big)$ je neničelna (zakaj že?) Torej ima Jacobijeva matrika od G

$$\mathscr{J}_G := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

linearno neodvisne stolpce. Iz linearne algebre se spomnimo, da sta vektorja linearno odvisna natanko tedaj ko je njun vektorski produkt ničeln. To pa za $\mathbf{r}_{\mathbf{p}}(u, v) = G(u, v, 0)$ pomeni, da je

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\tfrac{\partial g_1}{\partial u}, \tfrac{\partial g_2}{\partial u}, \tfrac{\partial g_3}{\partial u}\right) \times \left(\tfrac{\partial g_1}{\partial v}, \tfrac{\partial g_2}{\partial v}, \tfrac{\partial g_3}{\partial v}\right) \neq \vec{0}. \tag{1}$$

Opomba 3. Če za gladko preslikavo $\mathbf{r} : \mathscr{D}_{\mathbf{r}} \to \mathbb{R}^3$ velja (1) v vsaki točki, jo bomo imenovali *regularna* (nekaj podobnega smo že srečali pri krivuljah).

Naloga 4. *Pokaži, da velja — vsaj lokalno — tudi obrat: Denimo da imamo na neki odprti množici $\mathscr{D}_{\mathbf{r}} \subseteq \mathbb{R}^2$ definirano regularno preslikavo $\mathbf{r} : \mathscr{D}_{\mathbf{r}} \to \mathbb{R}^3$ („gubanje“), Potem lahko $\mathbf{r}$ razširimo do gladke preslikave treh spremenljivk $H = (h_1(u, v, z), h_2(u, v, z), h_3(u, v, z))$, ki neko okolico U točke $(u_0, v_0, 0)$ slika bijektivno na neko okolico V točke $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.*
(Nasvet: Poskusi z $H(u, v, z) := \mathbf{r}(u, v) + z\mathbf{e}_3 = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v) + z)$, kjer so r_1, r_2, r_3 komponente preslikave $\mathbf{r}$, tj. $\mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$. Stolpci njene Jacobijeve matrike so linearno neodvisni, torej lahko uporabimo izrek o lokalno inverzni preslikavi.)

Rešitev. Ker je $\mathbf{r}$ regularna preslikava, sta v točki $\mathbf{a} := (u_0, v_0)$ vektorja $\mathbf{r}_u$ in $\mathbf{r}_v$ linearno neodvisna. To pomeni, da sta stolpca Jacobijeve matrike preslikave $\mathbf{r}$, tj.

$$\mathscr{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

linearno neodvisna, oz, rank $\mathscr{J}_{\mathbf{r}}(\mathbf{a}) = 2$. Iz linearne algebre se spomnimo, da je stolpični rang enak vrstičnemu. Torej sta vsaj dve vrstico linerno neodvisni. Privzemimo, da to velja kar za prvi dve. To pomeni, da

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sedaj pa kot v nasvetu naredimo funkcijo treh spremenljivk

$$H(u, v, z) := (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v) + z).$$

Njena Jacobijeva matrika je enaka

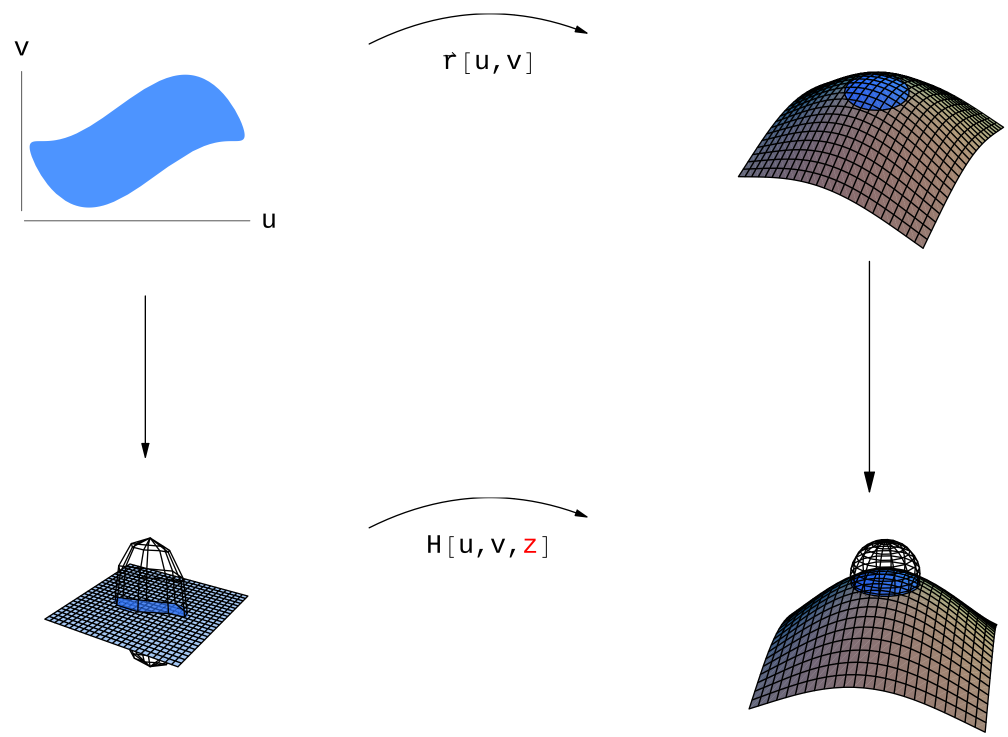
$$\mathscr{J}_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_1}{\partial z} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial z} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} & \frac{\partial (z+r_3)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} & 1 \end{pmatrix}.$$

Njena deteriminanta je torej enaka

$$\det \mathscr{J}_H = \det \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \quad \frac{\partial r_1}{\partial v} \frac{\partial r_2}{\partial u} \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} \right)$$

in je neničelna v točki $T_0 := (u_0, v_0, z = 0)$. Po izreku o lokalno inverzni preslikavi obstajata odprta okolica U točke T_0 in odprta okolica V točke $H(T_0) = H(u_0, v_0, 0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, da je $H|_U : U \to V$ bijekcija z gladkim inverzom (tj. H^{-1} je tudi parcialno zvezno odvedljiva).

Mimogrede: Ker je zožitev $H|_U$ bijektivna, se edinole ravninske točke $(u, v, z = 0)$ slikajo v množico $P = \mathbf{r}(U) := \{\mathbf{r}(u, v);\ \ (u, v, 0) \in U\}$. Torej je P ploskev: za vsako točko $\mathbf{P}$ na njej vzamemo kar $U_{\mathbf{p}} := U$ in $V := V_{\mathbf{p}}$, ter seveda $F_{\mathbf{p}} := H^{-1}$.



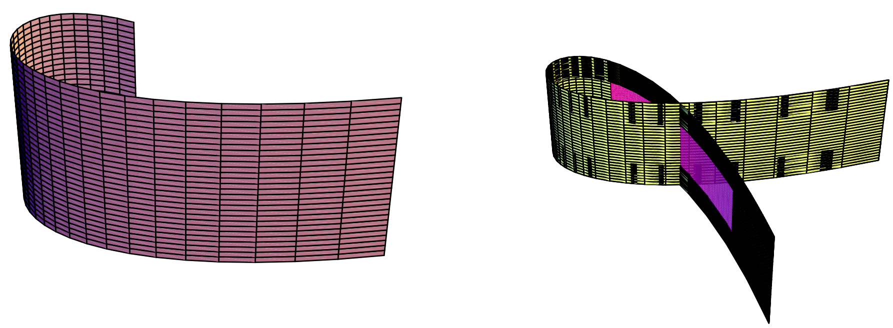
Slika 7: Vsako regularno preslikavo lahko lokalno razširimo do bijektivne preslikave treh spremenljivk.

Zgled 5. Gornja naloga ima zanimivo posledico: Čim je $\mathbf{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : \mathscr{D}_{\mathbf{r}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularna preslikava, je na neki dovolj majhni okolici $U \subseteq \mathscr{D}_{\mathbf{r}}$ njena slika,

$$\mathbf{r}(U) := \big\{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big);\ \ (u,v) \in U\big\}$$

ploskev. Seveda pa U ne sme biti prevelika, drugače ima lahko $\mathbf{r}(U)$ samopresečišča! V takem primeru $\mathbf{r}(U)$ dejansko tudi izgleda kot zgubana ravnina.

Če dobimo ploskev kot sliko neke regularne, bijektivne preslikave $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, bomo $\mathbf{r}(U)$ imenovali tudi *elementarna ploskev*, preslikavo $\mathbf{r}$ pa njeno regularno *parametrizacijo*.



Slika 8: Leva stran je ploskev. Je celo elementarna ploskev, saj ima regularno parametrizacijo $\mathbf{r}(u,v) := (u^2, u - u^3/3, v)$, ki ploskev v celoti pokrije. Na desni smo šli s parametroma (u,v) že predaleč, in dobili samopresečišča.

Zgled 6. Neposredno iz definicije ploskve vidimo, da ima vsaka točka na ploskvi neko okolico (tisto, ki smo jo izgladili v ravninski lik), ki je sama zase elementarna ploskev, in ima torej regularno parametrizacijo. Ploskev je torej sestavljena iz elementarnih kosov.

Slika regularne preslikave je torej ploskev, če le nismo s parametri zašli predaleč. V splošnem je to težko ugotoviti. Imamo pa še en, zelo uporaben način da določimo, ali je neka množica ploskev.

Zgled 7. Recimo, da imamo neko gladko funkcijo treh spremenljivk $F = F(x,y,z)$. Označimo s $P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad F(x,y,z) = 0\}$ množico njenih ničel. Če je za $\operatorname{grad} F \neq \vec{0}$ na točkah iz množice P, je P ploskev. Imenujemo jo tudi *implicitno podana ploskev*.

Naloga 8. *Poskusi to dokazati.*

(Nasvet: Poljubno izberi $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in P$. $\operatorname{grad} F \neq 0$, torej mora biti vsaj en od parcialnih odvodov neničeln; recimo, da je to $\frac{\partial F}{\partial z}$. Iz izreka o implicitni funkciji dobiš $z = z(x,y)$; potem je $\mathbf{r}(x,y) := (x, y, z(x,y))$ regularna parametrizacija.)

Rešitev. Sledimo navodilom. Gladka funkcija $F = F(x,y,z) = F(\mathbf{x}, z)$ ima (i) ničlo v točki $(\mathbf{x}_0, z_0) := (x_0, y_0, z_0)$, in (ii) $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji obstajata okolici $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ točke $\mathbf{x}_0$ in $I \subseteq \mathbb{R}$ točke z_0, da velja sledeče: Pri vsakem $\mathbf{x} \in \Omega$ lahko najdemo natanko eno ničlo funkcije F, ki leži znotraj škatlaste okolice $W := \Omega \times I$ točke $\mathbf{p}$. Še več, če je $(\mathbf{x}, z(\mathbf{x}))$ ta ničla, je $z = z(\mathbf{x}) = z(x,y)$ parcialno zvezno odvedljiva.

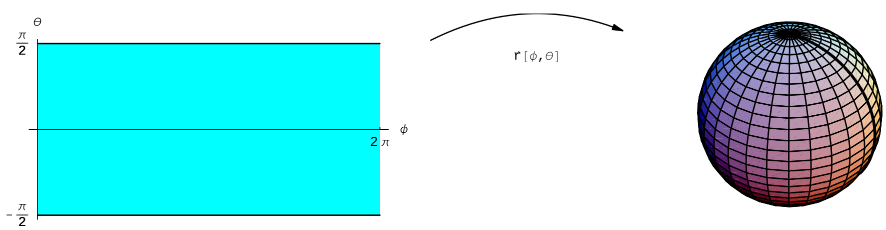
Tedaj pa je $\mathbf{r}(x,y) := (x, y, z(x,y))$ regularna preslikava (pokaži!). Po potrebi še malce zmanjšamo Ω in W, da bomo lahko s pomočjo Naloge 4 preslikavo $\mathbf{r}$ razširili do gladke bijekcije $G_{\mathbf{p}_0} : U \to W$, kjer je $U \supseteq \Omega \times \{0\}$ neka okolica točke $\mathbf{p}_0$.

Znotraj W so edine možne ničle funkcije F oblike $\mathbf{r}(x,y)$ za nek $(x,y) \in \Omega$. Torej $W \cap P = \mathbf{r}(\Omega) = G_{\mathbf{p}}(\Omega \times \{0\}) = G_{\mathbf{p}}(U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$. To pa ustreza definiciji ploskev.

Zgled 9. Kot zgled: $F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Množica ničel te funkcije je enotska sfera. Poleg tega je $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$. Vidimo, da je $\operatorname{grad} F$ sicer lahko ničelni vektor, vendar se to zgodi le v točki s koordinatami $x = 0 = y = z$; taka točka pa seveda ni ničla naše funkcije. Torej je enotska sfera ploskev.

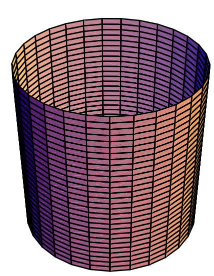
Enotska sfera sicer ni elementarna ploskev: Ne moremo je dobiti kot sliko neke regularne bijekcije. Če pa ji odrežemo en poldnevnik, pa dobimo elementarno ploskev; regularno parametrizacijo podaja preslikava

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) := (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$



Slika 9: Sferične koordinate na sferi. Meridiane dobimo, če fiksiramo $\theta = \theta_0$, poldnevnike pa, če fiksiramo $\phi = \phi_0$. Če hočemo imeti regularnost (kar med drugim implicira tudi povratno enoličnost), moramo vzeti $\phi \in (0, 2\pi)$ in $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Torej je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, \theta)$ regularna parametrizacije ploskve, ki jo dobimo, če sferi odrežemo poldnevnik (prikazan z debelo črto).

Zgled 10. Valj je množica točk, ki jo dobimo kot sliko regularne preslikave $\mathbf{r}(\varphi, v) := (\cos\varphi, \sin\varphi, v)$. Vsekakor je dovolj majhen košček valja ploskev. Kaj pa celoten valj?



Iz parametrizacije bi odgovor težko presodili. Kljub temu je odgovor pritrdilen: Valj je množica točk, kjer je $F(x,y,z) := x^2 + y^2 = 0$. Gradient te funkcije pa, vsaj na valju, nikoli ni nič.

Zgled 11. Graf zvezno odvedljive funkcije dveh spremenljivk je vedno ploskev. Kajti graf je enak

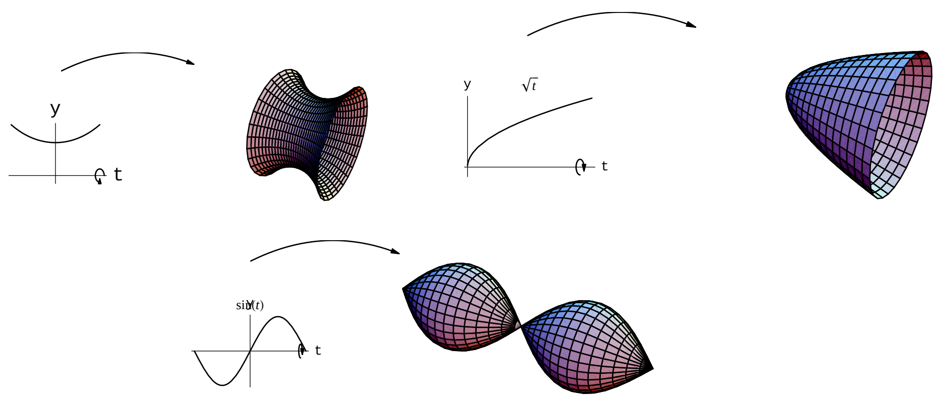
$$\mathscr{G}_f := \{(x, y, f(x, y)); \;\; (x, y) \in \mathscr{D}_f\}$$

in se ujema z množico ničel funkcije $F(x, y, z) := z - f(x, y)$, katere gradient nikoli ni nič.

Zgled 12. Vrtenino dobimo, če graf pozitivne funkcije $f = f(t) : (a, b) \to \mathbb{R}$, zarotiramo okoli abscise. Vrtenina je enaka množici točk oblike $(t, f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi)$, ko $t \in \mathscr{D}_f$. Takoj preberemo implicitno enačbo:

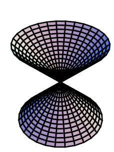
$$y^2 + z^2 - f(t)^2 = \big(f(t)\cos\varphi\big)^2 + \big(f(t)\sin\varphi\big)^2 - f(t)^2 = 0.$$

Gradient funkcije $F(t, y, z) := y^2 + z^2 - f(t)^2$ je enak $(2ff', 2y, 2z)$. To bi bilo enako nič edinole, če $y = 0 = z$ pri nekem t. To je možno edinole, če $f(t) = 0$, torej f ne bi bilo pozitivna funkcija, protislovje.
Vrtenina pozitivne funkcije je ploskev; imenujemo jo tudi *rotacijska ploskev*.



Slika 10: Rotacija gladkih funkcij. Če je $f(x) > 0$ je rotacija vedno ploskev, kot na prvi sliki. Na drugi rotiramo $f(x) := \sqrt{x}$, ki ima v točki 0 ničlo. Kljub temu še vedno dobimo ploskev! Najlažje to vidimo iz njene implicitne enačbe $F(x, y, z) := y^2 + z^2 - x = 0$; $\operatorname{grad} F = (-1, 2y, 2z) \neq \vec{0}$. Nazadnje rotiramo $f(x) := \sin(x)$. Dobljena rotacija ni ploskev, saj ima dve osti, in je še „preščipnjena“ na sredini.

V prejšnjem zgledu smo videli, da množica rešitev enačbe $F(x, y, z) = 0$ ni vedno ploskev. To se seveda lahko primeri le v primeru, ko je $\operatorname{grad} F = 0$ v kaki točki, ki istočasno tudi ustreza $F(x, y, z) = 0$. Tukaj sta še dva zgleda:



Slika 11: Dvojni stožec ni ploskev

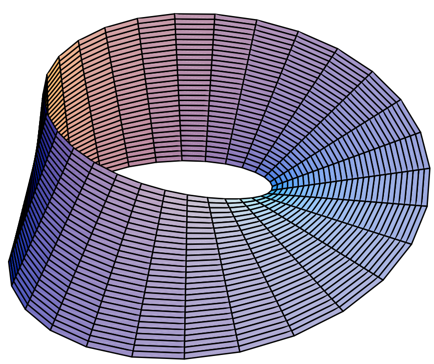
Zgled 13. Enačba $F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ne določa ploskve. Rešitev je dvojni stožec, ki je v sredini 'preščipnjen.' Ravno ta točka pa je problematična , saj če jo odstrnimo, razpade množica na dva dela — take lastnosti nima noben ravninski lik. Problem je v tem, ker je v koordinatnem izhodišču $F(0, 0, 0) = 0$, pa tudi $(\operatorname{grad} F)(0, 0, 0) = \vec{0}$.

Zgled 14. Od prej že vemo, da parametrizacija $\mathbf{r}(u,v) := (u^2, u - u^3/3, v)$ globalno ne določa ploskve, saj ima samopresečišča (prim. sliko 5). Ploskev bi dobili le, če bi parameter u omejili na dovolj majhno okolico.

Poskusimo dobiti implicitno enačbo za sliko te parametrizacije, tj. za množico $M := \{\mathbf{r}(u,v);\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$. Točka (x,y,z) je v M natanko tedaj, ko je $x = u^2$ in $y = u - u^3/3$ ter $z = v$ pri nekih parametrih (u,v). Iz prve enačbe izračunamo u in vstavimo v drugo, pa dobimo $y = \pm\sqrt{x}(1 + x/3)$. Kvadrirajmo, in preuredimo, pa dobimo implicitno enačbo množice M: To je natanko množica vseh rešitev enačbe $F(x,y,z) := 9y^2 - x(x-3)^2$. Toda v točkah $(3,0,z) \in M$ je gradient F ničeln.

Pomemben zgled ploskve je Moebiusov trak.

Naloga 15. *Pokaži, da je* $\mathbf{r}(u,v) := (\cos u, \sin u, 0) + v(\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2})$ *regularna parametrizacija. Če parametra omejimo na* $-\pi \le u \le \pi$ *in* $-1/2 \le v \le 1/2$, *je slika te parametrizacije ploskev. Imenuje se* Moebiusov trak.



Slika 12: Moebiusov trak

Parametrizacijo Moebiusovega traku lahko zapišemo v obliki $\mathbf{r}(u,v) := \mathbf{x}(u) + v\mathbf{v}(u)$, kjer $\mathbf{v}(u) \neq \vec{0}$. Take ploskve so *premonosne*, namreč dobimo jih tako, da vzdolž krivulje, parametrizirane z $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ „sučemo“ daljico; njen smerni vektor v točki $\mathbf{x}(u)$ kaže vzdolž vektorja $\mathbf{v}(u)$.

Če Moebiusov trak malce raztegnemo (vendar brez rezanja ali lepljenja!) še vedno ostane Moebiusov trak. Edino oblike je malenkost drugačne.

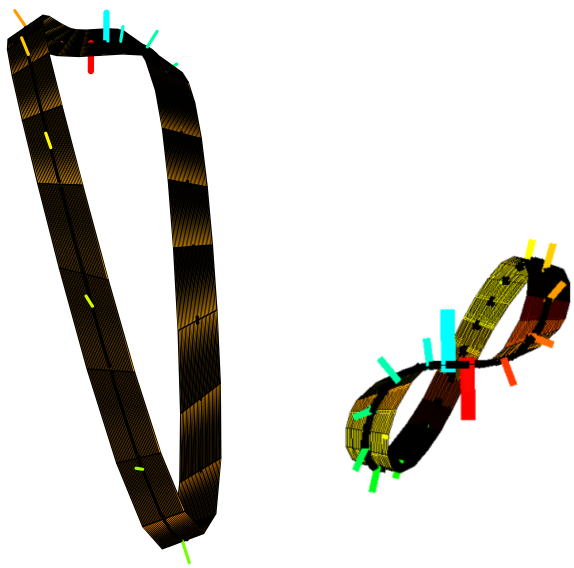
Naloga 16. *Pokaži, da je tudi*

$$\mathbf{r}(s,t) := \mathbf{x}(s) + t\Big(\mathbf{B}(s) + \tfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}\mathbf{T}(s)\Big),$$

regularna parametrizacija neke ploskve; tu je $\mathbf{x}(s) := (\sin s, (1-\cos s)^3, (1-\cos s)\sin s)$, *poleg tega pa je* $\mathbf{B}(s)$ *binormala na krivuljo ki jo določa* $\mathbf{x}(s)$, *in je* $\mathbf{T}(s)$ *njena tangenta,* $\tau(s)$ *njena torzijska ukrivljenost,* $\kappa(s)$ *pa njena fleksijska ukrivljenost.*
Pokaži, da točka $T(x,y,z)$ *na tej ploskvi ustreza enačbi*

$$y^2 + 6x^2y - 8y + x^6 = 0 = x^3y - z^3$$

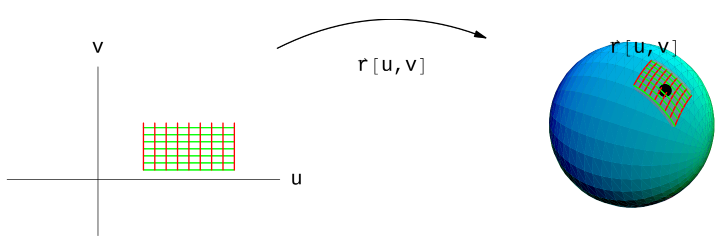
Tudi ta ploskev je Moebiusov trak (le malce drugačne oblike kot zgoraj) Za razliko od Moebiusovega traku iz prejšnje naloge lahko tega naredimo iz kosa papirja. Več informacij se najde v G. Schwarz: *A pretender to the title "canonical Moebius strip."* Pacific J. Math. Volume 143, Number 1 (1990), 195-200.



Slika 13: Drugačen Moebiusov trak. Tega lahko naredimo tudi iz kosa papirja. To je primer neorientabilne ploskve — če bi dvodimenzionalna bitja živela na njem, in bi ga obkrožila, bi se jim leva roka spremenila v desno (in obratno). Na sliki je to ponazorjeno z narisanimi pravokotnicami na trak, ki se zvezno spreminjajo. Pa vendar: Ko naredimo poln obhod, kaže pravokotnica v nasprotno smer, kot takrat, ko smo obhod začeli. Na sliki smo zaceli z modro, ko pa z njo zvezno potujemo naokoli, končamo z rdečo.

2.2 Krivočrtne koordinate

Izberimo si neko regularno parametrizacijo $\mathbf{r}(u,v)$ enega koščka ploskve P. Vsakemu paru (u,v) tedaj ustreza natanko ena točka na našem koščku, tj. $\mathbf{r}(u,v)$. Velja seveda tudi obratno: Za vsako točko $\mathbf{p}$ na koščku ploskve lahko določimo natanko en par (u,v), da je $\mathbf{f}(u,v)=\mathbf{p}$.



Slika 14: Krivočrtni koordinatni sistem na delčku ploskve. Če variiramo u, dobimo eno družino krivočrtnih krivulj, če pa variiramo v, pa dobimo še eno družino.

Zaradi te enoličnosti lahko imamo, pri izbrani regularni parametrizaciji $\mathbf{r}$, par števil (u,v) za koordinate točke na našem koščku ploskve. Imenujemo jih tudi *krivočrtne ko-*

ordinate točke T. Pravimo tudi, da opisujemo položaj točk v *krivočrtnem koordinatnem sistemu*. Seveda je krivočrtni koordinatni sistem odvisen od izbire regularne parametrizacije.

Sedaj fiksirajmo prvo krivočrtno koordinato $u = u_0$ in naj druga potuje. Točka $\mathbf{r}(u_0, v)$ pri tem opiše neko krivuljo na ploskvi, parametrizirano z $t \mapsto \mathbf{r}(u_0, t)$. Imenujemo jo *krivočrtna koordinatna krivulja*. Podobno bi lahko fiksirali drugo krivočrtno koordinato $v = v_0$, in bi pustili, da u teče. Dobili bi neko drugo krivuljo na ploskvi; to pot parametrizirano z $\tau \mapsto \mathbf{r}(\tau, v_0)$. Na tak način ploskev prepletemo s krivočrtnimi koordinatnimi krivuljami. Krivočrtni koordinatni sistem je *pravokoten*, če se poljubni dve krivočrtni koordinatni krivulji sekata pod kotom $90°$

Zgled 17 (Sferične koordinate na enotski sferi)**.** Enotska sfera je ploskev. Odrežimo ji en poldnevnik, in izberimo naslednjo regularno parametrizacijo

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) := \big(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta\big).$$

Tukaj so krivočrtne koordinatne krivulje parametrizirane z

$$\mathbf{k}_1(t) := \mathbf{r}(t, \theta_0) = \big(\cos t\cos\theta_0, \sin t\cos\theta_0, \sin\theta_0\big),$$

$$\mathbf{k}_2(\tau) := \mathbf{r}(\varphi_0, \tau) := \big(\cos\varphi_0\cos\tau, \sin\varphi_0\cos\tau, \sin\tau\big).$$

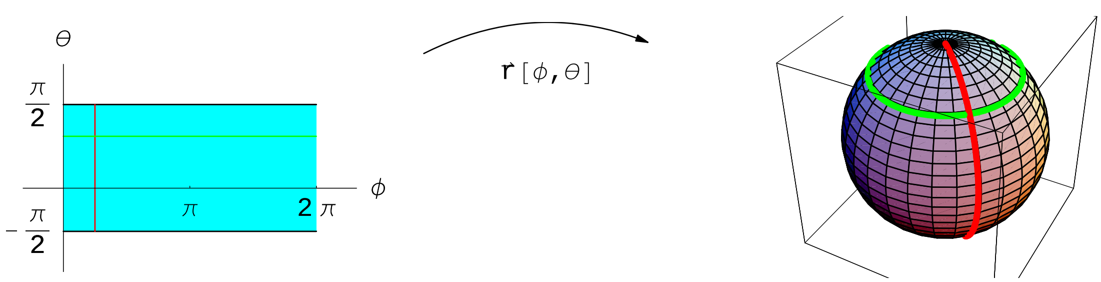
Kot, pod katerim se sekata je po definiciji enak kotu med ustreznima tangentnima vektorjema. Tangentni vektor na prvo krivuljo je enak

$$\mathbf{T}_1 := \frac{\dot{\mathbf{k}}_1(t)}{\|\dot{\mathbf{k}}_1(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta_0}}\left(-\cos\theta_0\sin t, \cos t\cos\theta_0, 0\right),$$

na drugo krivuljo pa

$$\mathbf{T}_2 := \frac{\dot{\mathbf{k}}_2(\tau)}{\|\dot{\mathbf{k}}_2(\tau)\|} = \left(-\cos\varphi_0\sin\tau, -\sin\tau\sin\varphi_0, \cos\tau\right).$$

Njun skalarni produkt je nič, torej imamo pravokoten krivočrten koordinaten sistem.



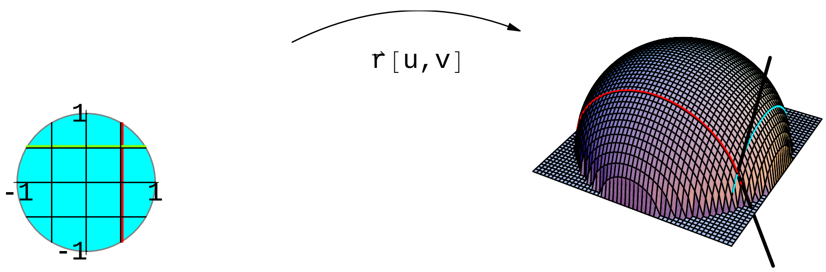
Slika 15: Sferični koordinatni sistem $\mathbf{r}(\varphi, \theta) := \big(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta\big)$ na sferi. Če hočemo povratno enoličnost, moramo omejiti $0 < \phi < 2\pi$ ter $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Na tak način enolično popišemo vse točke sfere, z izjmo točk vzdolž poldnevnika.

Naloga 18. *Obratno, če imamo točko $T(x,y,z)$ na enotski sferi, pokaži, da so njene sferične koordinate enake*

$$\begin{cases} \phi = \arctan\frac{y}{x},\ \theta = \arccos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}; & x>0, z>0 \\ \phi = \pi + \arctan\frac{y}{x},\ \theta = \arccos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}; & ,x<0, z>0 \\ \arctan\frac{y}{x},\ \theta = -\arccos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}; & x>0, z<0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x},\ \theta = -\arccos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}; & x<0, z<0 \end{cases}$$

Zgled 19. Zgornjo polovico enotske sfere pa lahko parametriziramo tudi kot $\mathbf{r}(x,y) := (x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

V tem primeru so tangentni vektorji krivočrtnih koordinatnih krivulj enaki $\mathbf{r}_x(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{y^2-1}}\left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ oziroma $\mathbf{r}_y(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{x^2-1}}\left(1, 0, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$. Njihov skalarni produkt pa ni nič, torej to pot nimamo pravokotnega krivočrtnega koordinatnega sistema.



Slika 16: Nepravokoten krivočrten koordinatni sistem na sferi. Kot med krivočrtnimi koordinatnimi krivuljami se spreminja od točke do točke. Na sliki je prikazan z debelima daljicama v eni izbrani točki.

2.3 Tangentna ravnina

Vzemimo sedaj v precep neko fiksno točko $\mathbf{p}$ na ploskvi P. Izberimo neko regularno parametrizacijo $\mathbf{r} : \mathscr{D}_{\mathbf{r}} \to P$ delčka ploskve, ki vsebuje $\mathbf{p}$. S tem smo predpisali tudi krivočrtni koordinatni sistem na tem delčku. Krivočrtne koordiante točke $\mathbf{p}$ so npr, (u_0, v_0); torej $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Pa denimo, da do $\mathbf{p}$ vodi neka gladka krivulja, ki v celoti leži na ploskvi — imenujmo jo *ploskovna krivulja* (mislimo si, da imamo na ploskvi z imenom Zemlja speljano neko cesto do kraja $\mathbf{p}$). V krivočrtnih koordinatah je krivulja parametrizirana z $u = u(t), v = v(t)$; denimo še, da $u(0) = u_0$ in $v(0) = v_0$ (to slednje lahko vedno dosežemo; v nasprotnem pač reparametriziramo krivuljo). Krivulja na ploskvi je tedaj parametrizirana z $t \mapsto \mathbf{r}\big(u(t), v(t)\big)$. Kako dobiti njen tangentni vektor v točki $\mathbf{p}$ (iz vsakdanjega življenja: Če avto vozi po cesti in pride do kraja $\mathbf{p}$, kam kažejo njegovi žarometi?)

Tangetni vektor kaže v smeri odvoda krivulje, torej v smeri vektorja $\frac{d}{dt}\mathbf{r}\big(u(t), v(t)\big)$. Zapišimo po komponentah:

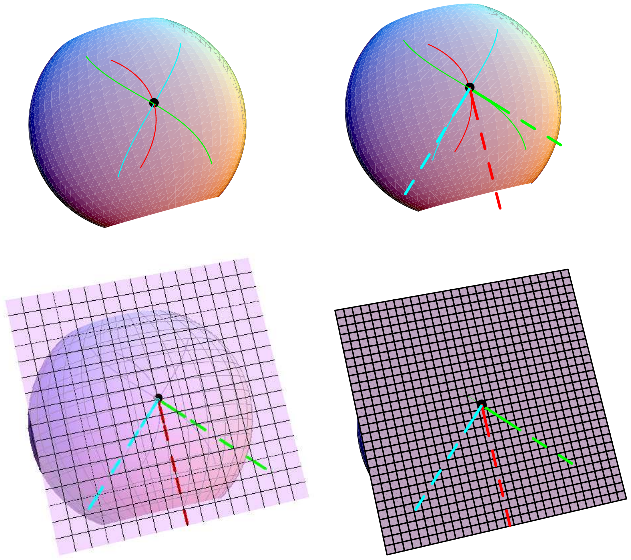
$$\mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big),$$

vstavimo $u = u(t), v = v(t)$, odvajajmo po verižnem pravilu, in dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} &= \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} \cdot \big(x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, z_u \dot{u} + z_v \dot{v}\big) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} (x_u, y_u, z_u)\dot{u} + (x_v, y_v, z_v)\dot{v} = \mathbf{r}_u \tfrac{\dot{u}}{\dot{\mathbf{r}}} + \mathbf{r}_v \tfrac{\dot{v}}{\dot{\mathbf{r}}}.\end{aligned}$$

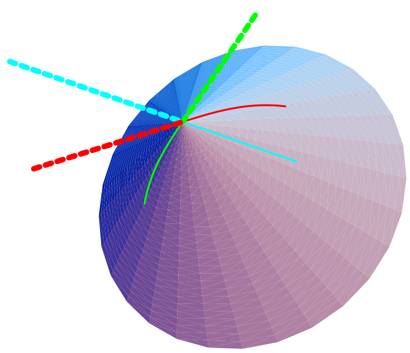
Kot običajno smo pri parcialnem odvodu x_u izpustili argumente; natančneje bi bilo $x_u = x_u(u(t), v(t))$; podobno za preostale parcialne odvode. Pri $t = 0$ pridemo ravno v točko $\mathbf{p}$. Tangentni vektor krivulje pa je neka linearna kombinacija dveh vektorjev $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ in $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Gornjo izpeljavo lahko ponovimo za poljubno gladko krivuljo skozi $\mathbf{p}$.

Sklepamo, da tangentni vektorji raznoraznih ploskovnih krivulj v točki $\mathbf{p}$ ležijo v eni in isti ravnini, ki je napeta na $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ in $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ (*Zakaj že ta dva vektorja res razpenjata ravnino, in ne premice?*). To ravnino vzporedno premaknemo, da bo vsebovala tudi točko $\mathbf{p}$, pa smo prišli do *tangentne ravnine.*



Slika 17: Tangentna ravnina. Raznorazne ploskovne krivulje imajo v dani točki tangentne vektorje (označene na 2. in 3. sliki z odebeljeno črtkano daljico), ki ležijo na eni in isti ravnini.

Naloga 20. *Pokaži, da tangentni vektorji krivulj na stožcu, tj. grafu funkcije* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$*, v točki* $T(0,0,0)$ *ne ležijo na skupni ravnini. Torej stožec ne more biti ploskev.*



Slika 18: Stožec. Tangentni vektorji krivulj so prikazani z odebeljeno lomljeno črto. Vidimo, da ne ležijo na skupni ravnini.

Zanimivo bi bilo dobiti formulo za tangentno ravnino v primeru, ko imamo ploskev podano parametrično ali pa implicitno.

Naloga 21. *Denimo, da je* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ *regularna parametrizacija ploskve. Pokaži, da ima tangetna ravnina v točki* $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ *enačbo*

$$\big((X,Y,Z) - \mathbf{r}(u_0,v_0)\big) \cdot \big(\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)\big) = 0$$

Zgled 22. Kot zgled si oglejmo ploskev, podano parametrično z $\mathbf{r}(u,v) := (u, v, u^2 - v^2)$. Zanima pa nas tangetna ravnina v točki s krivočrtnimi koordiantami $(u,v) = (1,1)$. Odvajajmo $\mathbf{r}_u = (1,0,2u)$, $\mathbf{r}_v = (0,1,-2v)$. Njun vektorski produkt v je pri $(u,v) = (1,1)$ enak $(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(1,1) = (-2,2,1)$. Enačba tangentne ravnine je torej $(X-1, Y-1, Z-0) \cdot (-2,2,1) = 0$, oziroma $-2X + 2Y + Z = 0$.

Naloga 23. *Denimo, da je ploskev graf neke gladke funkcije* $f = f(x, y)$. *Pokaži, da ima tangentna ravnina v točki* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *enačbo*

$$(X - x_0)p + (Y - y_0)q = (Z - z_0); \qquad \big(p := f_x(x_0, y_0),\ q := f_y(x_0, y_0),\ z_0 := f(x_0, y_0)\big).$$

Naloga 24. *Denimo, da je ploskev podana implicitno kot množica ničel funkcije* $F = F(x, y, z)$; *poleg tega pa naj* $\operatorname{grad} F \neq \vec{0}$ *na točkah iz ploskve. Pokaži, da ima tangetna ravnina v točki* (x_0, y_0, z_0) *enačbo*

$$\big(X - x_0, Y - y_0, Z - z_0\big) \cdot (\operatorname{grad} F)(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Zgled 25. Vzemimo isto ploskev kot v prejšnjem zgledu. Poiščimo njeno implicitno enačbo, in iz nje tangentno ravnino. Točke na ploskvi imajo koordinate $(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Torej je $x^2 - y^2 - z = u^2 - v^2 - (u^2 - v^2) = 0$. Dobili smo implicitno enačbo: $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z = 0$. Njen gradient je $\operatorname{grad} F = (2x, 2y, -1)$. Tangetna ravnina v točki $\mathbf{r}(1, 1) = (1, 1, 0)$ pa je

$$0 = (X - 1, Y - 1, Z - 0) \cdot (2, 2, -1) = 2X + 2Y - Z.$$

Obakrat smo dobili isto tangentno ravnino. Kaj pa, če bi vzeli drugačno parametrizacijo naše ploskve (tj. druge krivočrtne koordinate), npr. $\mathbf{r}_1(s, t) := (s + t, t - s, 4st)$, ali bi v točki $(1, 1, 0) = \mathbf{r}_1(0, 1)$ dobili isto enačbo za tangentno ravnino?

Naloga 26. *Pokaži, da je tangentna ravnina v točki* $\mathbf{p} \in P$ *neodvisna od izbire regularne parametrizacije ploskve* P.
(Nasvet: Če sta $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ *in* $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s, t)$ *dve regularni parametrizaciji istega delčka ploskve, ki vsebuje točko* $\mathbf{p}$, *sta med sabo povezani: Obstaja preslikava* $h = h(s, t) = \big(u(s, t), v(s, t)\big)$, *da* $\mathbf{r}_1(s, t) = (\mathbf{r} \circ h)(s, t) = \mathbf{r}\big(u(s, t), v(s, t)\big)$. *Dobimo jo kot kompozitum* $h = \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r}_1$. *Prepričaj se, da je odvedljiva (uporabi Nalogo 4 in izrek o lokalno inverzni preslikavi), nato pa vstavi to povezavo v enačbo za tangentno ravnino.)*

2.4 Merjenje na ploskvi: Prva osnovna forma

Kako merimo na ploskvi? Kaj sploh lahko merimo? Vprašanja niso enostavna, niti odgovori nanje. V najenostavnejši ploskvi, tj. ravnini lahko merimo npr. razdalje med točkami, površine likov, dolžine krivulj, kote med krivuljami. Isto bomo merili tudi na „zgubanih ravninah,“ tj. na ploskvah.

Vzemimo za začetek elementarno ploskev P, in bodi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ njena regularna parametrizacija. Točki $\mathbf{r}(u + du, v + dv)$ in $\mathbf{r}(u, v)$ sta v prostoru $\mathbb{R}^3$ oddaljeni za

$$\|\mathbf{r}(u + du, v + dv) - \mathbf{r}(u, v)\|$$

Razbijmo po komponentah: $\mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, in vsako od komponent razvijmo po Taylorjevi formuli reda $n = 1$. Tako npr. $x(u + du, v + dv) = x(u, v) + x_u(u, v)\,du + x_v(u, v)\,dv + o_1(du, dv)$; tu je $o_1(du, dv)$ ostanek Taylorjeve vrste in zanj velja $\lim_{(du,dv)\to(0,0)} \frac{o_1(du,dv)}{\sqrt{du^2+dv^2}} = 0$. Podobno je tudi $y(u + du, v + dv) = y(u, v) + y_u(u, v)\,du +$

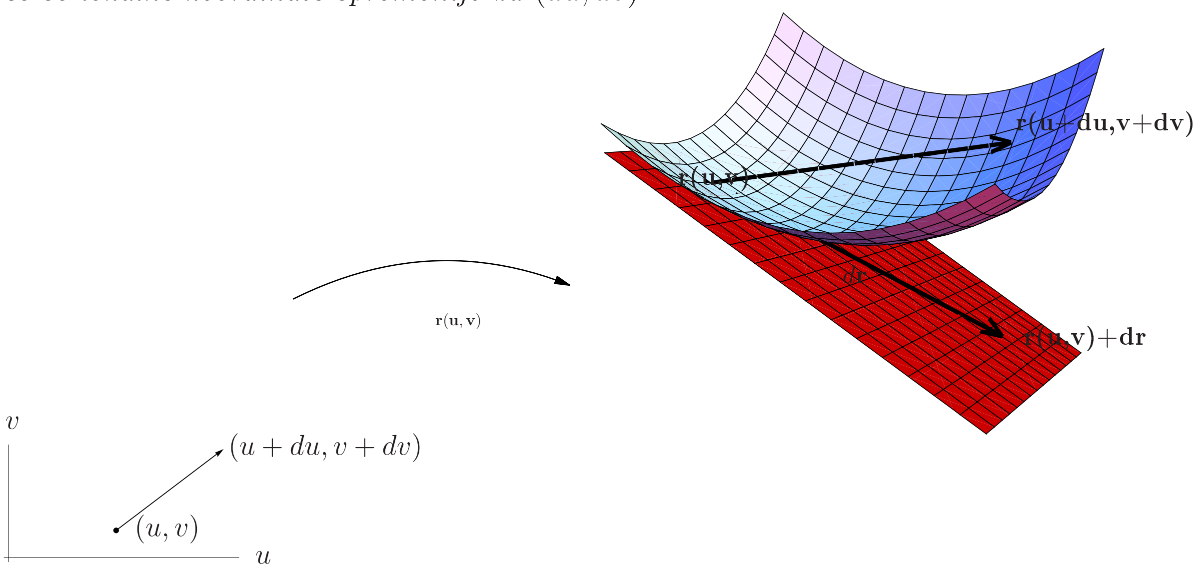
$y_v(u,v)\,dv + o_2(du,dv)$ in podobno za tretjo komponento. Če zaradi krajšega zapisa opustimo pisanje argumentov (u,v), vidimo, da

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u+du,v+dv)-\mathbf{r}(u,v) &= (x_u,y_u,z_u)\,du + (x_v,y_v,z_v)\,dv + \big(o_1(du,dv), o_2(du,dv), o_2(du,dv)\big)\\ &= \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv + \mathbf{o}(du,dv) = d\mathbf{r} + \mathbf{o}(du,dv)\end{aligned}$$

Tu je (du,dv) diferencial krivočrtnih koordinat, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv$ pa diferencial preslikave $\mathbf{r}$. Zaradi $\lim_{(du,dv)\to(0,0)} \frac{\|\mathbf{o}(du,dv)\|}{\sqrt{du^2+dv^2}} = 0$ je, pri majhnih spremembah (du,dv), diferencial $d\mathbf{r}$ glavni prispevek razlike na levi strani enačbe.

Diferencial krivočrtnih koordinat, (du,dv), ni nič drugega kot njuna sprememba, tj. $(du,dv) = (\Delta u, \Delta v)$. Katero spremembo pa meri $d\mathbf{r}$?

Naloga 27. *Pokaži, da* $d\mathbf{r}$ *meri spremembo tangentne ravnine na ploskev* P *v točki* $\mathbf{r}(u,v)$*, če se lokalne koordinate spremenijo za* (du,dv)*.*



Slika 19: Merjenje na ploskvi. V okolice naše točke $T = \mathbf{r}(u,v)$ se ploskev (dobra predstava za ploskev je tukaj npr. kar planet Zemlja!) zdi ravna; ukrivljenost opazimo šele na dolgih razdaljah. Lokalno torej merimo razdalje na ploskvi tako, da privzamemo, da je ploskev ravna, tj., da se v okolici točke ujema s tangentno ravnino, na sliki prikazano rdeče. Krivočrtne koordinate $\mathbf{r}(u+du,v+dv)$ razvijemo po Taylorjevi formuli $\mathbf{r}(u+du,v+dv) - \mathbf{r}(u,v) = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) + ost.$ Linearni del razlike, tj. vektor $d\mathbf{r} := (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)$ leži v tangetni ravnini. Njegova dolžina, $\|(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)\|$ predstavlja glavni doprinos k razdalji od $T = \mathbf{r}(u,v)$ do točke $\mathbf{r}(u+du,v+dv)$.

Oglejmo si sedaj dolžino glavnega dela spremembe $\mathbf{r}(u+du,v+dv) - \mathbf{r}(u,v)$! Merimo jo s skalarnim produktom:

$$\begin{aligned}d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv)\cdot(\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv) = (\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u)\,du^2 + 2(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v)\,du\,dv + (\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v)\,dv^2\\ &= Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2,\end{aligned}$$

kjer smo označili

$$E := (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u); \quad F := (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v), \quad G := (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v). \tag{2}$$

Forma

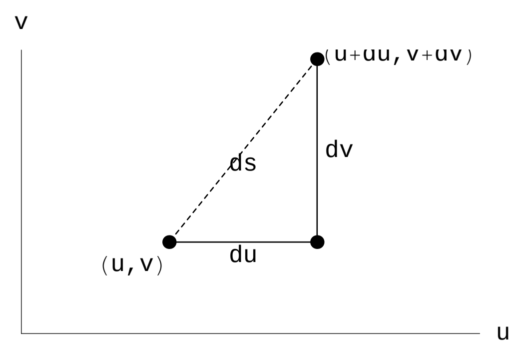
$$I(du, dv) := Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2$$

se imenuje *prva osnovna forma* ploskve, parametrizirane z $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (ali malce bolj površno: prva osnovna forma, izražena v krivočrtnih koordinatah (u, v)). Njeni koeficienti, E, F, G se imenujejo *prvi osnovni koeficienti* ploskve; iz (2) vidimo, da so funkcije krivočrtnih koordinat (u, v), in se torej spreminjajo od točke do točke po ploskvi. Kakšen geometrijski pomen ima ta forma?

Zgled 28. Ravnina $z = 0$ ima regularno parametizacijo $\mathbf{r}(x, y) := (x, y, 0)$. Tukaj je $E = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_x = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1$. Podobno je tudi $G = 1$. Za F pa dobimo $F = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$. Prva osnovna forma se glasi:

$$I(dx, dy) = dx^2 + dy^2 = ds^2$$

kar ni nič drugega kot Pitagorov izrek.



Slika 20: Prva osnovna forma na ravnini. Če se koordinate točke spremenijo za (du, dv), smo prišli do nove točke, ki je od prvotne oddaljena za $ds = \|d\mathbf{r}\|$.

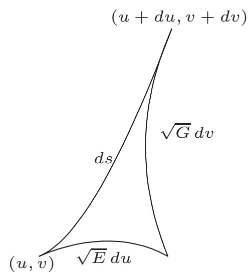
Prva osnovna forma je posplošitev Pitagorovega izreka za infinitezimalno majhne izkrivljene trikotnike na ploskvah.

Zgled 29. Kot drugi zgled si oglejmo prvo osnovno formo na sferi. Izberimo sferični krivočrtni koordinatni sistem $\mathbf{r}(\varphi, \theta) := (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta)$. Sedaj je $E = \mathbf{r}_\varphi \cdot \mathbf{r}_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) \cdot (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) = \cos^2\theta$, ter $G = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = (-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \cdot (-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = 1$, ter $F = \mathbf{r}_\varphi \cdot \mathbf{r}_\theta = 0$. Torej je prva osnovna forma:

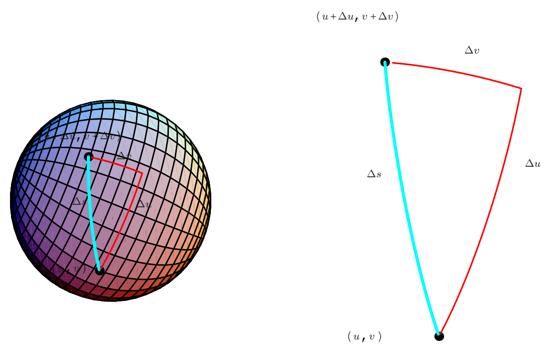
$$I(d\varphi, d\theta) = \cos^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2,$$

in dobimo posplošitev Pitagorovega izreka na sferi.

V obeh primerih je $F = 0$. To ni naključje, kajti krivočrtni koordinantni sistem je bil v obeh primerih pravokoten. Velja namreč tale ugotovitev:



Slika 21: Prva osnovna forma na ploskvah: Če se koordinatnni krivulji u in v malenkostno spremenita za du oz. dv, dobimo na ploskvi infinitezimalen izkrivljen trikotnik. Dolžino njegove tretje stranice nam da prva osnovna forma: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$



Slika 22: Sfera in izkrivljen pravokotni trikotnik na njej.

Trditev 30. *Krivočrtni koordinatni sistem je pravokoten natanko tedaj, ko je* $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$ *za vsako točko* (u, v). $\square$

Zgled 31 (Neodvisnost prve osnovne forme od izbire parametrizacije)**.** Sfero smo že parametrizirali v sferičnih krivočrtnih koordinatah $\mathbf{r}(\varphi, \theta) := \big(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta\big)$, s prvo osnovno formo

$$I(d\varphi, d\theta) = \cos^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2.$$

Lahko pa izberemo drugačno parametrizacijo, npr. $\mathbf{r}^*(x,y) := \big(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\big)$ je parametrizacija zgornje polovice sfere (prim. sliko 19). Prva osnovna forma je sedaj drugačna kot v sferični parametrizaciji:

$$E^* = \mathbf{r}^*_x \cdot \mathbf{r}^*_x = (1, 0, \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) \cdot (1, 0, \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = 1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2}$$

$$F^* = \mathbf{r}^*_x \cdot \mathbf{r}^*_y = (1, 0, \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) \cdot (0, 1, \tfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = \frac{xy}{1-x^2-y^2}$$

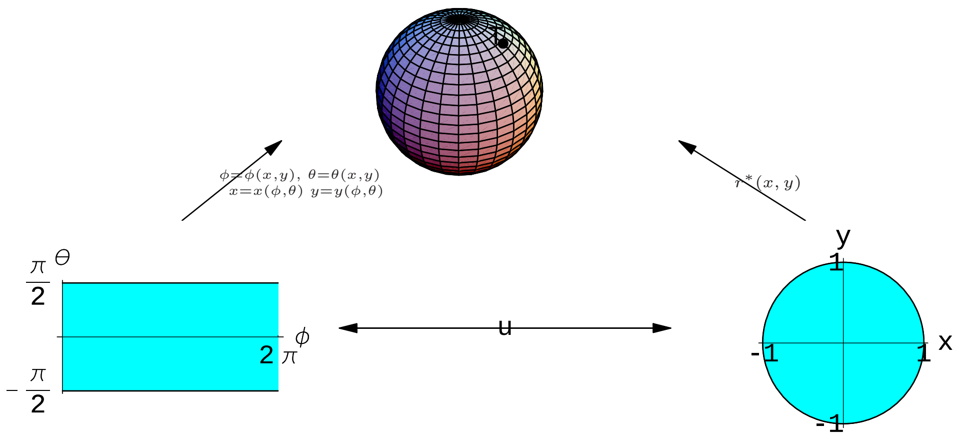
$$G^* = \mathbf{r}^*_y \cdot \mathbf{r}^*_y = (0, 1, \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) \cdot (0, 1, \tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = 1 + \frac{y^2}{1-x^2-y^2},$$

in s tem je prva osnovna forma v parametrizaciji $\mathbf{r}^*$ enaka

$$I^*(dx, dy) = \frac{(y^2-1)}{x^2+y^2-1}\, dx^2 - \frac{2xy}{x^2+y^2-1}\, dy\, dx + \frac{(x^2-1)}{x^2+y^2-1}\, dy^2.$$

Pa vendar sta obe formi povezani med sabo! Namreč, isto točko na sferi lahko zapišemo v dveh različnih krivočrtnih koordinatnih sistemih: $\mathbf{r}$ oziroma $\mathbf{r}^*$:

$$T = T(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta) = T\left(x, y, \sqrt{-x^2 - y^2 + 1}\right)$$



Slika 23: Na dovolj majhni okolici obstaja povratno enolična povezava med različnima parametrizacijama iste ploskve.

S primerjavo koordinat je torej $x = \cos\phi\cos\theta = x(\phi,\theta)$ in $y = \sin\phi\cos\theta = y(\phi,\theta)$. Oziroma bolj splošno: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \mathbf{r}^*(x(\phi,\theta), y(\phi,\theta))$.

Kaj pa povezava med diferenciali (dx, dy) in $(d\phi, d\theta)$? Po verižnem pravilu za totalni diferencial velja

$$dx = x_\phi\, d\phi + x_\theta\, d\theta$$

$$dy = y_\phi\, d\phi + y_\theta\, d\theta$$

Se pravi, da sta prvi osnovni formi res povezani, namreč

$$\begin{aligned} I^*(dx, dy) &= \|d\mathbf{r}^*\|^2 = \|\mathbf{r}_x^*\, dx + \mathbf{r}_y^*\, dy\|^2 = \|\mathbf{r}_x^*\, (x_\phi\, d\phi + x_\theta\, d\theta) + \mathbf{r}_y^*\, (y_\phi\, d\phi + y_\theta\, d\theta)\|^2 \\ &= \|(\mathbf{r}_x^*\, x_\phi + \mathbf{r}_y^*\, y_\phi)\, d\phi + (\mathbf{r}_x^*\, x_\theta + \mathbf{r}_y^*\, y_\theta)\, d\theta\|^2 = \|\mathbf{r}_\phi\, d\phi + \mathbf{r}_\theta\, d\theta\|^2 \\ &= I(d\phi, d\theta) \end{aligned} \tag{3}$$

Oziroma, če v $I^*(dx, dy) = \frac{\left(y^2-1\right)}{x^2+y^2-1}\, dx^2 - \frac{2xy}{x^2+y^2-1}\, dy\, dx + \frac{\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2-1}\, dy^2$ vstavimo $x = \cos\phi\cos\theta = x(\phi,\theta)$, $y = \sin\phi\cos\theta = y(\phi,\theta)$ ter upoštevamo naslednjo enakost med diferenciali $dx = x_\phi\, d\phi + x_\theta\, d\theta$ oziroma $dy = y_\phi\, d\phi + y_\theta\, d\theta$, bomo dobili natanko $I(d\phi, d\theta) = \cos^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$.

Dejansko iz gornjega zgleda sklepamo na še veliko več: Prva osnovna forma ploskve je neodvisna od izbire regularne parametrizacije! Popolnoma jo določa oblika ploskve.

Naloga 32. *Denimo, da sta* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ *in* $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(x, y)$ *dve regularni parametrizaciji ploskve* P.

(i) Pokaži, da sta parametra (x, y) zvezno odvedljivi funkciji od (u, v), tj. $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$.

(ii) Odvod prehodne preslikave $\Xi(u, v) := (x(u, v), y(u, v))$, ki povezuje parametra (x, y) z (u, v) je linearni operator, ki ga lahko predstavimo z Jacobijevo matriko. Pokaži, da preslika vektor (du, dv) v vektor (dx, dy), določen z $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, oziroma $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$.

(iii) Pokaži, da sta prvi osnovni formi v tej korespondenci med diferenciali (dx, dy) oz. (du, dv) enaki, tj. $I(du, dv) = I^*\big(dx, dy\big)$.

S prvo osnovno formo lahko merimo dolžino krivulj na ploskvi:

Če je Γ neka gladka krivulja na ploskvi, jo lahko parametriziramo v krivočrtnih koordinatah kot $u = u(t)$ ter $v = v(t)$; $(t \in [a, b])$; gre torej za krivuljo s parametrizacijo $\gamma(t) := \mathbf{r}(u(t), v(t))$. Njeno dolžino podaja formula

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot\gamma \cdot \dot\gamma(t)}\, dt.$$

Odvod računamo po verižnem pravilu: $\dot\gamma = \mathbf{r}_u\dot u + \mathbf{r}_v\dot v$, odkoder je $\dot\gamma\cdot\dot\gamma = E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2$. Torej

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2)(t)}\, dt$$

Zgled 33. Na sferi v sferičnih krivočrtnih koordinatah imamo krivuljo, parametrizirano z $\varphi = \varphi(t) := t$ in $\theta = \theta(t) := 2\arctan e^t$. Koliko dolžino opravi ta pot, ko $t \in [0, \pi/2]$?

Prvo osnovno formo smo že izračunali: $I(d\varphi, d\theta) = \cos^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$. Dierenciala krivočrtnih koordinat dobimo z lahkoto: $du = dt$ in $dv = d(2\arctan e^t) = \frac{2e^t}{1+e^{2t}}\, dt$. Vstavimo v izpeljano formulo za izračun dolžine:

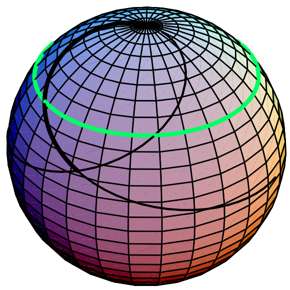
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(2\arctan e^t)\, dt^2 + \left(\tfrac{2e^t}{1+e^{2t}}\right)^2 dt^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\tfrac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}\right)^2 + \left(\tfrac{2e^t}{1+e^{2t}}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

S koeficienti prve osnovne forme lahko določimo tudi kote med dvema krivuljama na ploskvi:

Vzemimo dve krivulji, in ju parametrizirajmo v krivočrtnih koordinatah z $\gamma_1(t) := \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t))$ oziroma $\gamma_2(s) := \mathbf{r}(u_2(s), v_2(s))$. Denimo, da se sekata pri $t = t_0$ in $s = s_0$. Tedaj je cosinus kota med njima enak

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = \frac{\dot\gamma_1 \cdot \dot\gamma_2}{\|\dot\gamma_1\| \cdot \|\dot\gamma_2\|}\,\Big|_{\substack{t=t_0\\ s=s_0}} &= \frac{\big(\mathbf{r}_u \cdot \dot u_1 + \mathbf{r}_v\dot v_1\big)\cdot\big(\mathbf{r}_u \cdot \dot u_2 + \mathbf{r}_v\dot v_2\big)}{\sqrt{I(\dot u_1, \dot v_1)}\cdot\sqrt{I(\dot u_2, \dot v_2)}}\,\Big|_{\substack{t=t_0\\ s=s_0}} \\
&= \frac{E\dot u_1\dot u_2 + F(\dot u_1\dot v_2 + \dot u_2\dot v_1) + G\dot v_1\dot v_2}{\sqrt{I(\dot u_1, \dot v_1)}\cdot\sqrt{I(\dot u_2, \dot v_2)}}\,\Big|_{\substack{t=t_0\\ s=s_0}} \\
&= \frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{I(du_1, dv_1)}\cdot\sqrt{I(du_2, dv_2)}}\,\Big|_{\substack{t=t_0\\ s=s_0}}
\end{aligned}$$

Zgled 34. Pod kakšnim kotom sekata krivulja iz Zgleda 33 in druga krivočrtna koordinata (= meridian)?



Slika 24: Krivulja $\phi = t$, $\theta = 2\arctan(e^t)$ in krivočrtna koordinatna krivulja $\theta = c_0 = const$

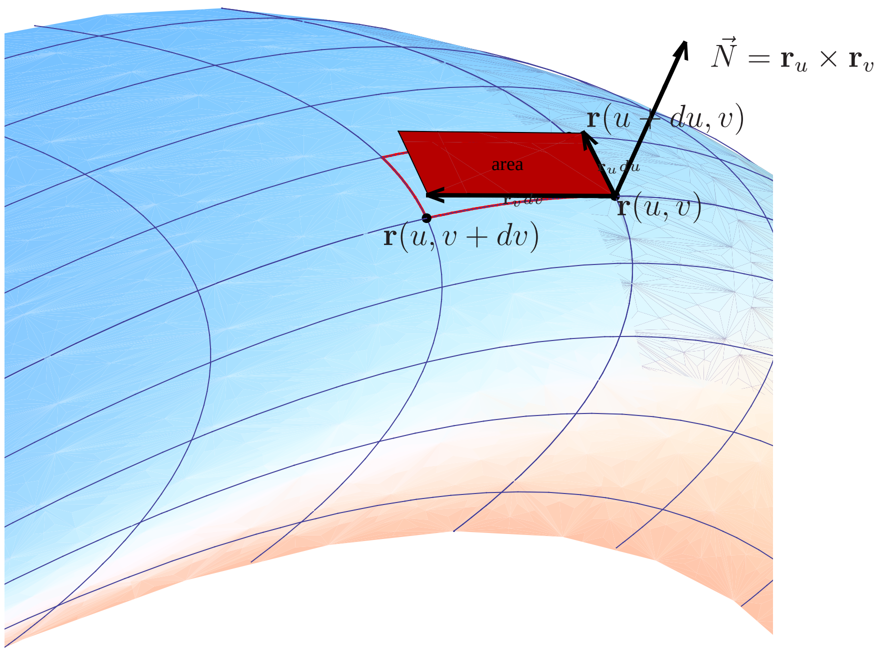
Najprej ju parametrizirajmo s krivočrtnimi koordinatami. Prva ima parametrizacijo $\gamma_1(t) = \mathbf{r}(t, 2\arctan(e^t))$, druga pa $\gamma_2(s) = \mathbf{r}(s, c_0)$. Še lažje je podati parametrizacijo v krivočrtnih koordinatah: Prva krivulja je parametrizirana z $\phi_1(t) = t$, $\theta_1(t) = 2\arctan(e^t)$, druga pa z $\phi_2(s) = s$ in $\theta_2(s) = c_0$. Hitro najdemo tudi presečišča: Sekata se v točkah z istimi krivočrtnimi koordinatami. Torej $\phi_1(t) = \phi_2(s)$ oz $\theta_1(t) = \theta_2(s)$. Takoj preberemo, da $t = s$ in $2\arctan(e^t) = c_0$. Sedaj pa v formuli za izračun kotov upoštevamo, da je $d\phi_1 = dt$ in $d\phi_2 = ds$ ter $d\theta_1 = d\big(2\arctan(e^t)\big) = \frac{2e^t}{1+e^{2t}}\,dt$ in $d\theta_2 = d(const) = 0$. Vstavimo v formulo, pa dobimo

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{E d\phi_1\, d\phi_2 + F(d\phi_1\, d\theta_2 + d\phi_2\, d\theta_1) + G d\theta_1\, d\theta_2}{\sqrt{I(d\phi_1, d\theta_1)}\cdot\sqrt{I(d\phi_2, d\theta_2)}}\,\Bigg|_{s=t=\ln(\tan\frac{c_0}{2})} \\
&= \frac{\cos^2\theta\cdot d\phi_1\, d\phi_2 + 0 + 1\cdot d\theta_1\, \overset{=0}{d\theta_2}}{\sqrt{\cos^2\theta\cdot d\phi_1^2 + \theta_1^2}\sqrt{\cos^2\theta\cdot d\phi_2^2 + d\theta_2^2}}\,\Bigg|_{\substack{\theta=c_0\\ \phi=\ln(\tan\frac{c_0}{2})}} \\
&= \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta) + d\theta_1^2}\sqrt{\cos^2(\theta)}}\,\Bigg|_{\substack{\theta=c_0\\ \phi=\ln(\tan\frac{c_0}{2})}} \\
&= \frac{\cos^2 c_0}{\sqrt{\cos^2 c_0 + \left(\frac{2e^t}{1+e^{2t}}\right)^2\Big|_{t=\ln\tan(c_0/2)}}\cdot\sqrt{\cos^2 c_0}} = \cos c_0
\end{aligned}
$$

Koeficiente I. osnovne forme E, F, G smo pač računali v presečišcu krivulj, torej pri $\theta = c_0$ in $\phi = \ln(\tan\frac{c_0}{2})$.

S koeficienti prve osnovne forme pa lahko merimo celo površino likov na ploskvah. Najprej moramo sploh definirati kaj je to površina.

Zopet si za začetek oglejmo elementarno ploskev z regularno parametrizacijo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. S krivočrtnimi koordinata jo razrežimo na drobne ploskvice. Kot glavni prispevek h površini posamezne ploskvice si izberimo kar paralelogram iz tangentne ravnine, napet



Slika 25: Površina ploskve. S krivočrtnimi koordinatnimi krivuljami jo razrežemo na podploskve. Če je razrez dovolj gost, je površina posamezne ploskvice (na sliki obrobljena z rdečo) približno enaka površini paralelograma, napetega na vektorja $\mathbf{r}_u\,du$ oz. $\mathbf{r}_v\,dv$. Ta površina pa je enaka dolžini njunega vektorskega produkta, torej area$= \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$.

na vektorja $\delta\mathbf{w}_1 := \mathbf{r}_u du$ in $\delta\mathbf{w}_2 := \mathbf{r}_v dv$. Če privzamemo $du, dv > 0$, je njegova površina enaka $\Delta S = \|\delta\mathbf{w}_1 \times \delta\mathbf{w}_2\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv$. Spomnimo se na povezavo med dolžino vektorskega in skalarnega produkta: $\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2$, pa lahko površino paralelogramčka izrazimo s koeficienti prve osnovne forme:

$$\Delta S = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv = \sqrt{\|\mathbf{r}_u\|^2 \cdot \|\mathbf{r}_v\|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2}\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Mimogrede smo tudi pokazali, da je $EG \geq F^2$! Sedaj pa vse te prispevke seštejmo, in limitirajmo $(du, dv) \to (0, 0)$, Kar sama se ponuja naslednja definicija površine:

Definicija 35. Če je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : \mathscr{D}_\mathbf{r} \to P$ regularna parametrizacija ploskve P, je njena *površina* število

$$S(P) := \iint\limits_{\mathscr{D}_\mathbf{r}} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,du\,dv = \iint\limits_{\mathscr{D}_\mathbf{r}} \sqrt{EG - F^2}, du\,dv,$$

kjer so E, F, G koeficienti prve osnovne forme.

Kaj pa, če bi vzeli kako drugo regularno reprezentacijo, ali bi dobili enako površino, ali ne? Če je odgovor ne, potem je gornja definicija povsem neprimerna, in moramo poiskati drugačno definicijo površine. K sreči je odgovor da.

Naloga 36. *Pokaži, da je definicija površine elementarne ploskve neodvisna od izbire regularne parametrizacije. Torej, če je* $\overset{*}{\mathbf{r}} = \overset{*}{\mathbf{r}}(s,t) : \mathscr{D}_{\overset{*}{\mathbf{r}}} \to P$ *neka druga regularna parametrizacija iste ploskve* P, *je*

$$\iint\limits_{\mathscr{D}_{\mathbf{r}}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint\limits_{\mathscr{D}_{\overset{*}{\mathbf{r}}}} \sqrt{\overset{*}{E}\overset{*}{G} - \overset{*}{F}{}^2}\, ds\, dt.$$

Če ploskev ni elementarna, jo razrežemo na posamezne elementarne kose, za vsakega od njih izračunamo ploščino, in vse skupaj seštejemo. Z malce več truda se da pokazati, da je dobljena površina enaka, neglede na to, kako razrezujemo ploskev na njene elementarne podploskve.

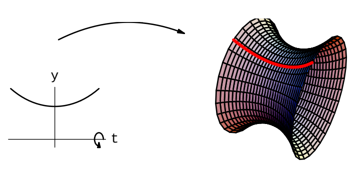
Zgled 37. Izračunajmo površino enotske sfere. To sicer ni elementarna ploskev, zato ji odstranimo en meridian. Na površini se ne pozna, če ploskvi odstranimo (ali dodamo) končno mnogo gladkih krivulj. Sedaj izberimo kar sferične koordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \theta) : (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \to P$, v katerih že imamo izračunano prvo osnovno formo: $I(d\varphi, d\theta) = \cos^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$. Površina enotske sfere je torej

$$S = \iint\limits_{(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)} \sqrt{\cos^2\theta \cdot 1 - 0^2}\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos\theta|\, d\theta = 4\pi.$$

Zgled 38. Površina vrtenine funkcije $f : (a, b) \to [0, \infty)$. Spomnimo se regularne parametrizacije vrtenine: $\mathbf{r}(t, \varphi) := (t, f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi)$. Odtod lahko takoj izračunamo prvo osnovno formo $I(dt, d\varphi) = (f'(t)^2 + 1)\, dt^2 + f(t)^2\, d\varphi^2$. Vidimo, da je koeficient $F \equiv 0$, torej imamo pravokoten krivočrtni koordinatni sistem. Površina vrtenine pa je

$$S = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(t)^2 + 1) f(t)^2 - 0^2}\, d\varphi = 2\pi \int_a^b \sqrt{(f'(t)^2 + 1)} f(t)\, dt,$$

formula, ki jo že poznamo iz analize 1.

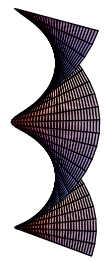


Slika 26: Verižnico $y = \operatorname{ch} t$ zarotiramo okoli abscisne osi. Dobimo vrtenino, parametrizirano z $\mathbf{r}(t, \theta) = (t, \cos\theta \operatorname{ch} t, \operatorname{ch} t \sin\theta)$. Če hočemo povratno enoličnost parametrizacije, moramo omejit $\theta \in (0, 2\pi)$, in vrtenino prerezati vzdolž krivulje $\{(t, \operatorname{ch} t, 0); t \in \mathbb{R}\}$.

2.5 Uporaba prve osnovne forme

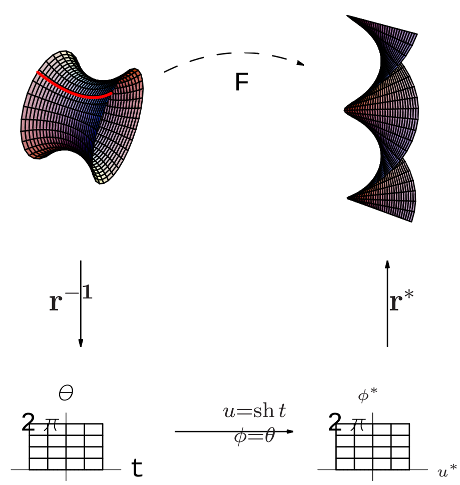
Vzemimo dve ploskvi; prvo dobimo, če rotiramo verižnico $f(t) = \cos(t)$ okoli absice (slika 38). Parametrizirana je z $\mathbf{r}(t, \theta) := (t, \operatorname{ch} t \cos\theta, \operatorname{ch} t \sin\theta)$. Ta parametrizacija bo povratno enolična, če ploskev prerežemo vzdolž (tj. odstranimo) krivulje $\{(t, \operatorname{ch} t, 0);\ \ t \in \mathbb{R}\}$.

Druga ploskev pa naj bo parametrizirana z $\mathbf{r}^*(u, \phi) := (u\cos\phi, u\sin\phi, \phi)$.



Slika 27: Ploskev, parametrizirana z $\mathbf{r}^*(u, \phi) := (u\cos\phi, u\sin\phi, \phi)$. Da je to res ploskev najlažje vidimo iz njene implicitne enačbe $y/x = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \tan z$, oziroma $F(x, y, z) := y - x\tan z = 0$

Med tema dvema ploskvama lahko najdemo preslikavo F, ki točko $\mathbf{p}$ s krivočrtnimi koordinatami (t, θ) preslika v točko $F(\mathbf{p})$ s krivočrtnimi koordinatami $(u^*, \phi^*) = (\operatorname{sh} t, \theta)$.



Slika 28: Preslikavo F med dvema ploskvama poznamo, če povemo kam se preslika točka $\mathbf{p}$ s krivočrtnimi koordinatami (t, θ) iz prve ploskve. Preslika se v točko $F(\mathbf{p})$ na drugi ploskvi, in ima tam krivočrtne koordinate $(u^*, \phi^*) := (\operatorname{sh} t, \theta)$.

V točki $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t, \phi) = (t, \operatorname{ch} t \cos\theta, \operatorname{ch} t \sin\theta)$ je prva osnovna forma enaka

$$I(dt, d\theta) = (1 + \operatorname{sh}^2 t)\, dt + 0\, dt\, d\theta + d\theta^2.$$

Ta točka se preslika v točko $\mathbf{p}^* = F(\mathbf{p}) = \mathbf{r}^*(u,\phi)|_{\substack{u=\mathrm{sh}\, t\\ \phi=\theta}} = (u\cos\phi, u\sin\phi, \phi)|_{\substack{u=\mathrm{sh}\, t\\ \phi=\theta}}$. Prva osnovna forma v preslikani točki pa je

$$I^*(du, d\phi) = du^2 + 0\, du\, dv + (u^2+1)\, d\phi^2|_{\substack{u=\mathrm{sh}\, t\\ \phi=\theta}} = (\mathrm{ch}\, t\, dt)^2 + (\mathrm{sh}^2\, t + 1)(d\theta)^2,$$

kar je zaradi $\mathrm{ch}^2\, t = 1 + \mathrm{sh}^2\, t$ identično $I(dt, d\theta)$. Torej o koficienti iz prve osnovne forme v točki $\mathbf{p}$ identični koeficientom iz prve osnovne forme na preslikani točki $F(\mathbf{p})$, ki leži na drugi ploskvi.

Še eno možno interpretacijo preslikave F podaja naslednja naloga.

Naloga 39. *S pomočjo preslikave F lahko dosežemo, da sta obe ploskvi parametrizirani na istem definicijskem območju, prva še vedno z $\mathbf{r}(t,\theta) := (t, \mathrm{ch}\, t\cos\theta, \mathrm{ch}\, t\sin\theta)$, druga ploskev pa z parametrizacijo $\mathbf{r}^{**} = F\circ\mathbf{r} : (t,\theta) \mapsto F(\mathbf{r}(t,\theta) = \mathbf{r}^*(u,\phi)|_{\substack{u=\mathrm{sh}\, t\\ \phi=\theta}} = (\mathrm{sh}\, t\cos\theta, \mathrm{sh}\, t\sin\theta, \theta)$. Pokaži, da za koeficiente prve osnovne forme velja zveza $E = E^{**}$, $F = F^{**}$ in $G = G^{**}$.*

Spomnimo, da zgolj s pomočjo koeficientov prve osnovne forme merimo dolžino krivulj, kote med krivuljami, in ploščino likov na ploskvah. Naša preslikava F ima potemtakem zanimivo lastnost: Ohranja dolžino krivulj, ohranja velikost kotov med krivuljama, in ohranja ploščine likov. Takim preslikavam rečemo *izometrije*.

Izkaže se, da je F izometrija natanko tedaj, ko ohranja koeficiente prve osnovne forme.

Naloga 40. *Poišči izometrijo med valjem in koščkom ravnine.*
(Nasvet: Poskusi z $F : (\cos t, \sin t, z) \mapsto (t, z, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.)

Literatura

[1] F. Brešar, *Matematika III*, Univerza v Mariboru, Maribor 1995.

[2] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer; 2nd rev. and enlarged ed. edition, 1982.

[3] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-day INC. London, 1964.

[4] A. Gray, *Modern differentioal geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press, London, 1998.

[5] Martin M. Lipschutz, *Schaum's Outline of Differential Geometry*, McGraw-Hill; 1 edition, 1969.

[6] N. Prijatelj, *Uvod v matematično analizo 2. del*, DMFA, Ljubljana, 1999

[7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition, 1986.

[8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[9] G. Schwarz: *A pretender to the title "canonical Moebius strip."* Pacific J. Math. Volume 143, Number 1 (1990), 195-200.

[10] Murray R. Spiegel, *Schaum's outline of theory and problems of advanced calculus*, Schaum Publishing CO., New York, 1963.

[11] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.

[12] I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS Ljubljana, 1974.

[13] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*. Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.