Linearne preslikave ravninskih likov

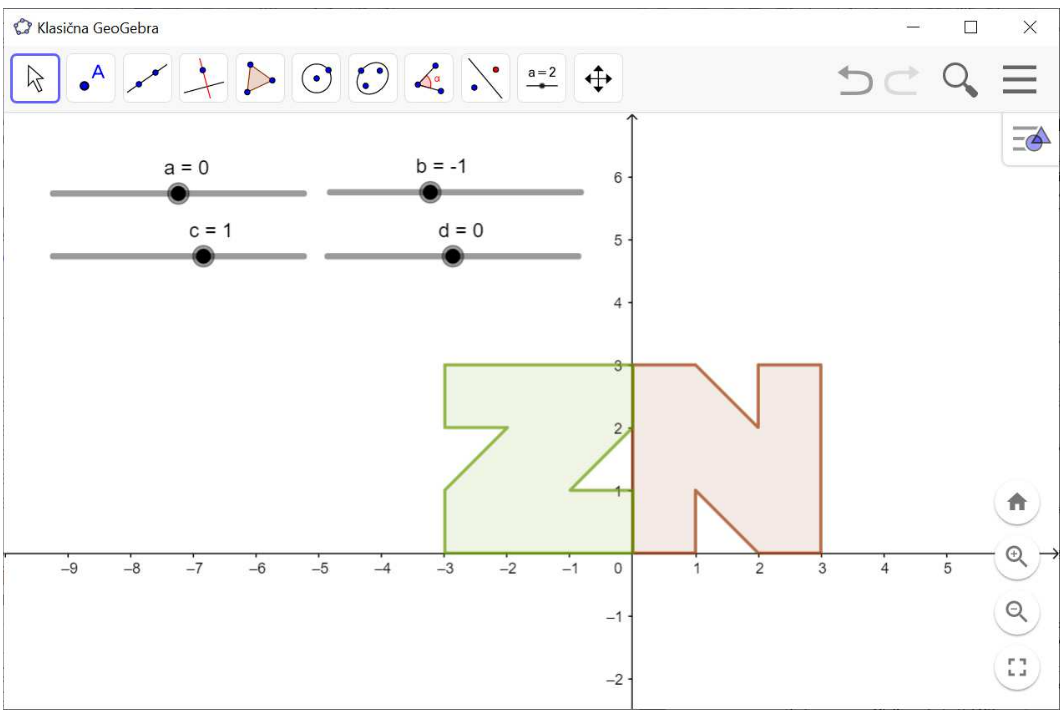
BOŠTJAN KUZMAN

Ob gledanju izjemno dodelanih digitalnih grafik in animacij na današnjih računalniških in TV zaslonih hitro pozabimo, koliko matematičnega znanja je potrebnega že za prikaz preprostih grafičnih objektov v ravnini. V tokratnem prispevku si bomo ogledali, kako v GeoGebri izdelati aplet za ponazoritev linearnih preslikav na ravninskih likih.

V GeoGebri lahko z uporabo ukaza Mnogokotnik narišemo različne poligonske like tako, da naštejemo njihova zaporedna oglišča, ki jih program potem poveže z daljicami. Če si nato zamislimo zrcaljenje, vrtenje, razteg ali podobno preslikavo ravnine, lahko z njo preslikamo oglišča začetnega lika, jih povežemo z daljicami in tako dobimo preslikani lik. V ta namen si bomo natančneje ogledali preslikave, ki točko (x, y) preslikajo v točko $(ax + by, cx + dy)$, kjer so a, b, c, d poljubno izbrani parametri. Take preslikave imenujemo *linearne preslikave* in jih pogosto predstavimo s pomočjo množenja matrik:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Učinek linearne preslikave je natanko določen z izbiro koeficientov a, b, c, d. Vsaka linearna preslikava



SLIKA 1. Začetni lik je rdeče, preslikani pa zelene barve. Učinek preslikave je odvisen od vrednosti koeficientov a, b, c, d; pri trenutni izbiri smo dobili vrtenje za $90°$ okoli izhodišča.

ohranja točko $(0,0)$, poljubno daljico pa preslika bodisi v neko točko bodisi v neko daljico; v zadnjem primeru preslikava ohranja tudi medsebojno vzporednost daljic.

V našem apletu bomo opazovali učinek različnih preslikav na lik v obliki črke N, ki jo bomo narisali na risalno površino. To storimo z naslednjimi koraki:

- Vnesemo seznam oglišč mnogokotnika, ki predstavlja črko N v ravnini: `N=(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0),(3,3),(2,3),(2,2),(1,3),(0,3)`
- Ustrezni mnogokotnik narišemo z ukazom `mnogN=Mnogokotnik(N)`.
- Na risalno površino vstavimo štiri drsnike a, b, c, d. Vsak naj zavzame vrednosti med -5 in 5 s koraki 0.1.
- Vrednosti drsnikov zberemo v matriko `A={{a,b},{c,d}}`. Začetne vrednosti lahko postavimo na $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, kar ustreza identični preslikavi.
- Zdaj sestavimo seznam preslikanih oglišč tako, da k-to oglišče iz prvotnega zaporedja pomnožimo z matriko A: `AN=Zaporedje(A*Element(N,k),k,1,Dolžina(N))`.
- Z ukazom `mnogAN=Mnogokotnik(AN)` narišemo preslikano črko N. Izklopimo prikaz odvečnih točk in obarvamo novi lik z drugo barvo.

Zdaj lahko raziskujemo, kako s spreminjanjem koeficientov a,b,c,d dobimo različne preslikave. Radovednemu bralcu in bralki priporočamo, da se poigra z naslednjimi nastavitvami koeficientov:

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (razteg v smeri osi x)
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (zrcaljenje čez točko $(0,0)$)
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (zrcaljenje čez premico $y=x$)
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (strig v smeri osi x)
- $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ (pravokotna projekcija na premico $y=x$)
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vrtenje za kot $\pi/2$ okrog točke $(0,0)$ v pozitivni smeri)

Bralec in bralka sta morda opazila, da se pri tovrstnih preslikavah točka $(1,0)$ vselej preslika v točko (a,c), točka $(0,1)$ pa v točko (b,d), ali še natančneje, učinek preslikave je natanko določen s slikama točk $(1,0)$ in $(0,1)$ oziroma baznih vektorjev. Ta ugotovitev nam pomaga izbrati vrednost koeficientov glede na želeno preslikavo. Če želimo, denimo, določiti matriko vrtenja za poljuben kot φ v pozitivni smeri okoli točke $(0,0)$, je dovolj iz skice razbrati, da se pri vrtenju točka $(1,0)$ preslika v točko $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, točka $(0,1)$ pa v točko $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Vrtenju zato ustreza matrika

- $V_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Podobno bi tudi ugotovili, da zrcaljenju čez premico skozi točko $(0,0)$, ki z osjo x oklepa kot φ, ustreza matrika

- $Z_\varphi = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

To lahko preizkusimo s približnimi vrednostmi, npr. za $\varphi = \pi/6$. V tem primeru je matrika vrtenja približno $\begin{pmatrix} 0.7 & -0.5 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$, matrika zrcaljenja pa približno $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & -0.5 \end{pmatrix}$. Bralci in bralke lahko vse to preizkusijo tudi sami s svojim apletom.

Popravek k članku Kotaljenje kolesa in število π

V prejšnji številki je v GeoGebrinem kotičku prišlo do napake pri navodilu za risanje špic v zadnjem delu članka. Ustrezni ukaz za risanje točk na kolesu je `tocke=Zaporedje(S+(sin(t+2*k*pi/n),cos(t+2*k*pi/n)),k,0,n-1)`.

× × ×