

Naloge z okroglim mestom

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ V prispevku bomo na primerih treh nalog spoznali delček srednjeveške kitajske matematike. Kitajci so v svoji večtisočletni zgodovini v matematiki dosegli lepe uspehe. Zato ne bo odveč, da jim posvetimo nekaj besed. Do nekaterih ugotovitev so prišli celo več stoletij prej kot Evropejci. Več o tem lahko preberemo npr. v [2] in [3].

Pri zapisovanju kitajskih besed v latinici bomo uporabljali mednarodno priznani sistem *pinyin*, namesto modernih poenostavljenih kitajskih pismenk pa kar tradicionalne, da bomo tako ostali bliže avtorjem iz 13. stoletja. Zaradi pravilne tonske izgovorjave uporablja pinyin, če je potrebno, še posebna znamenja nad samoglasniki, ker bi sicer enako napisana beseda lahko imela več pomenov. Glede pisave in izgovorjave nam je lahko v veliko pomoč svetovni splet.

V času vladanja dinastije Song (960–1279) (Sòng, 宋) je na Kitajskem živel matematik Li Ye (1192–1279) (Lǐ Yě, 李冶), ki se je rodil kot Li Zhi (Lǐ Zhì,

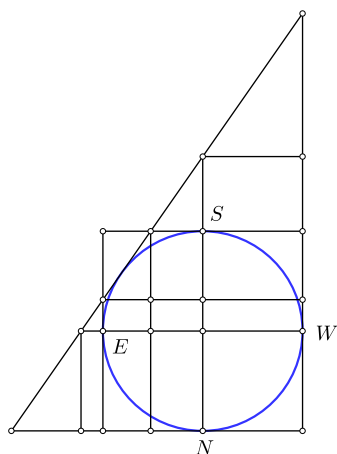
李治), a je kasneje spremenil svoje ime. Kitajcem je v tistem obdobju kljub pogostim vojnám s severnimi sosedi na znanstvenem in tehničnem področju kar dobro šlo. Omenimo samo, da so Kitajci takrat že dolgo časa poznali papir in tisk, iznašli pa so tudi mehansko uro za pogon astronomskih naprav (glej npr. [4]).

Leta 1248 je Li Ye dokončal pomembno delo z ne navadnim naslovom *Ceyuan haijing* (Cèyuán hǎijìng, 測圓海鏡), kar pomeni *Morsko ogledalo meritev kroga*. V njem rešuje nekatere geometrijske naloge z algebrskimi metodami, ki pripeljejo do polinomskih enačb. Metodo imenuje *tian yuan shu* (tiān yuán shù, 天元術), kar pomeni *metoda nebesne neznanke*.

Na začetku Lijevega dela je *diagram okroglega mesta*, *yuan cheng tu shi* (yuán chéng tú shì, 圓城圖式). Na njem so točke označene s kitajskimi pismenkami. Krog predstavlja obzidje mesta, ki ima štiri vrata v smeri glavnih strani neba: sever *bei* (běi, 北), jug *nan* (nán, 南), vzhod *dong* (dōng, 東) in zahod *xi* (xī, 西). Na sliki 1, ki je nepopoln preris originala, so vrata označena s *N, S, E, W*. Druge točke bomo označili v konkretnih primerih, ki jih bomo obravnavali. Posebnost slike je tudi v tem, da so strani neba prilagojene pogledu od severa proti jugu. Na sliki je več pravokotnih trikotnikov, ki so po kitajski tradiciji postavljeni tako, da je ena kateta vodoravna, ena pa navpična. Krogu sta očrtana kvadrat in pravokotni trikotnik tako, kot kaže slika 1. Krožci predstavljajo tiste točke, ki jih je označil Li Ye in na podlagi slike sestavil zbirko 170 nalog, pri katerih je večinoma treba iz danih podatkov izračunati velikost mesta, njegov polmer ali premer. Podatki se izražajo z nekaterimi razdaljami med označenimi točkami. Zanimivo je tudi, da Li dotikališča hipotenuze s krogom sploh ne uporablja.

Predpostaviti je treba, da mesto, ki je omenjeno v nalogah, stoji na idealni ravnini, da se v vseh smereh zunaj mesta dobro vidi in da je mogoče priti peš, kamor je pač treba.

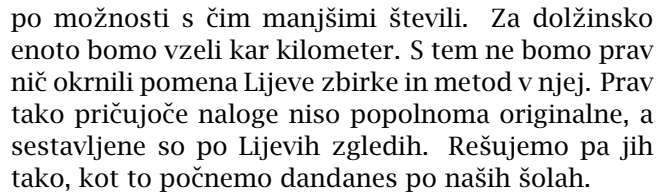
V obravnavanih nalogah bomo delali s splošnimi podatki in šele na koncu rešili celoštevilski primer,



SLIKA 1.

Diagram okroglega mesta (pogled od severa proti jugu)





Rešitev. Pomagamo si s sliko 2. Krog s središčem O naj ima polmer x , vzhodna vrata so v točki E , zahodna v točki W , drevo v točki D , iz točke A pa človek opazi drevo v smeri hipotenuze pravokotnega trikotnika AWD . Hipotenuza se kroga dotika v točki B . Označimo $a = |WD|$, $b = |AE|$.

Če iz prve izrazimo $|AB|$ in vstavimo v drugo, dobimo po preurejanju in krajšanju za neznan polmer kroga enačbo

Če načrtamo grafa funkcij $x \mapsto 2x^3$ in $x \mapsto a^2b - bx^2$, takoj opazimo, da ima enačba (1) samo eno pozitivno rešitev, ki je iskani polmer okroglega mesta.

Pripomba. V vseh treh tukaj obravnavanih nalogah sta a in b racionalni števili, zato imajo polinomi na levi strani enačb (1), (2) in (3) racionalne koeficiente. Če je potrebno, odpravimo ulomke, tako da imamo na levi strani enačb polinome s celimi koeficienti. Nastane pa težava, kako poiskati ničle teh polinomov. Pri polinomih stopnje 1 in 2 to v srednjem veku ni bilo težko, vemo pa, da je bilo to težje pri polinomih tretje, četrte in višjih stopenj. Pri racionalni ničli p/q polinoma s celimi koeficienti, če taka ničla



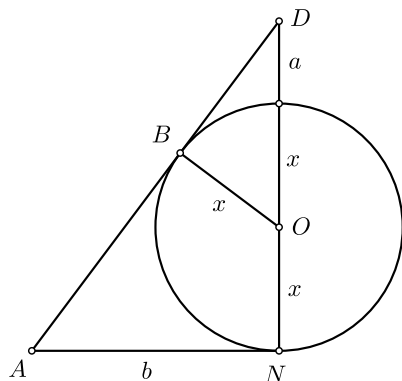
sploh obstaja, je števec p delitelj konstantnega člena in q delitelj vodilnega koeficienta polinoma. Ulomkov p/q pa ima polinom lahko zelo veliko in hitro se zgodi, da nam preverjanje vzame veliko časa, ničle pa kljub vsemu ne najdemo. V veliko pomoč nam je *Hornerjeva*, tudi *Ruffini-Hornerjeva metoda* (več o tem npr. v [1]), po kateri hitro, samo z množenjem, seštevanjem in odštevanjem, izračunamo vrednost polinoma v dani točki x_0 . Za ime metode sta zaslužna italijanski matematik Paolo Ruffini (1765–1822) in britanski matematik William George Horner (1786–1837).

V resnici pa so tako metodo poznali Kitajci že veliko stoletij pred Hornerjem in Ruffinijem. V delu *Matematika v devetih poglavjih*, kitajsko *Shushu jiuzhang* (Shùshū jiǔzhāng, 數書九章) iz leta 1247, jo uporablja avtor Qin Jiushao (1202–1261) (Qín Jiǔsháo, 秦九韶). Tudi Qin je reševal 2. nalogo, dobil pa je za iskani polmer polinomsko enačbo pete stopnje in jo za konkretni razdalji a in b tudi pravilno rešil.

Preostali rešitvi enačbe $x^3 + x^2 - 36 = 0$ najlažje dobimo ravno s Hornerjevo metodo. V našem primeru račun poteka takole:

To se pravi, da smo našli razcep $x^3 + x^2 - 36 = (x - 3)(x^2 + 4x + 12)$. Toda enačba $x^2 + 4x + 12 = 0$ ima konjugirano kompleksni rešitvi $-2(1 \pm i\sqrt{2})$, kar pomeni, da je $x = 3$ edina rešitev naloge.

2. naloga. Visoko drevo raste 2 km od južnih vrat proti jugu. Nekdo gre od severnih vrat proti vzhodu in zagleda omenjeno drevo, ko prehodi 6 km. Kako veliko je mesto?



SLIKA 3.

Razmere pri 2. nalogi

Rešitev. Označimo točke in razdalje tako, kot kaže slika 3. Pravokotna trikotnika AND in BOD sta si podobna, ker se ujemata v skupnem kotu z vrhom D in v pravem kotu. Za trikotnik BOD velja Pitagorov izrek. Dobimo zvezi

$$\frac{a + 2x}{b} = \frac{|BD|}{x}, \quad |BD|^2 = (x+a)^2 - x^2 = a(a+2x).$$

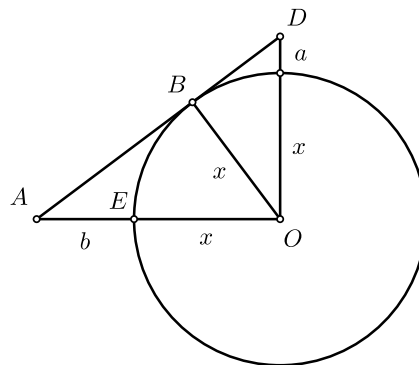
Če iz prve izrazimo $|BD|$ in vstavimo v drugo, dobimo po preurejanju in krajšanju za neznan polmer kroga enačbo

$$2x^3 + ax^2 - ab^2 = 0, \quad (2)$$

ki ima eno samo pozitivno rešitev. V našem primeru je $a = 2, b = 6$. Tedaj je treba rešiti enačbo $2x^3 + 2x^2 - 72 = 2(x^3 + x^2 - 36) = 0$. Spet dobimo rešitev $x = 3$. Premer mesta je potemtakem 6 km.

3. naloga. Visoko drevo raste $3/4$ km južno od južnih vrat. Neka oseba gre od vzhodnih vrat proti vzhodu in zagleda omenjeno drevo, ko prehodi 2 km. Kako veliko je mesto?

Rešitev. Označimo točke in razdalje tako, kot kaže slika 4. Za pravokotna trikotnika BOD in AOB zapišemo Pitagorov izrek, za pravokotni trikotnik AOD



SLIKA 4.

Razmere pri 3. nalogi

pa višinski izrek

$$\begin{aligned} (a+x)^2 &= x^2 + |BD|^2, \quad (b+x)^2 = x^2 + |AB|^2, \\ |AB| \cdot |BD| &= x^2. \end{aligned}$$

Iz vseh treh enačb izločimo $|BD|$ in $|AB|$. Dobimo relacijo

$$x^4 = (a^2 + 2ax)(b^2 + 2bx).$$

Po preureditvi je pred nami enačba

$$x^4 - 4abx^2 - 2ab(a+b)x - a^2b^2 = 0, \quad (3)$$

ki ima eno samo pozitivno rešitev. V našem primeru je $a = 3/4, b = 2$. Tedaj je treba rešiti enačbo $4x^4 - 24x^2 - 33x - 9 = 0$. Spet dobimo rešitev $x = 3$. Premer mesta je 6 km.

Literatura

- [1] Z. Bohte, *Numerično reševanje enačb*, Knjižnica Sigma, Ljubljana, Mladinska knjiga 1964.
- [2] U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press 1973.
- [3] J.-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Berlin in drugje, Springer 2006.
- [4] M. Saje, *Zgodovina Kitajske*, Ljubljana, Slovenska matica 2015.

× × ×