PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 6
Strani 346–350

Roman Drnovšek:

EULERJEV PROBLEM DELITVE KONVEKSNEGA VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

Ključne besede: matematika, geometrija, konveksni večkotniki, Eulerjev problem.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1151-Drnovsek.pdf

EULERJEV PROBLEM DELITVE KONVEKSNEGA VEČKOTNIKA NA TRIKOTNIKE

V tem prispevku bomo odgovorili na naslednji vprašanji:

1. Na koliko različnih načinov lahko dani konveksni n-kotnik s pomočjo njegovih diagonal razdelimo na same trikotnike tako, da se začrtane diagonale v notranjosti večkotnika ne sekajo?

2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev tako, da zmnožimo vedno po dva faktorja in je tako dobljeni produkt eden od faktorjev v nadaljnjem množenju?

Prvo vprašanje je leta 1751 postavil švicarski matematik Leonhard Euler (1707 - 1783), z drugim pa se je leta 1838 prvi ukvarjal francoski matematik Catalan. Čeprav se problema na prvi pogled precej razlikujeta, pa je njuno reševanje tesno povezano.

Eulerjev problem bralcem, ki skrbno shranjujejo vse številke Preseka, ni neznan. V članku Marka Razpeta: Rezanje večkotnika na trikotnike (P 18 (1990/91), št. 1, str. 12 - 16) avtor (med drugim) bralca seznani z rešitvijo in le to tudi delno dokaže. Hkrati je v isti številki Preseka Vilko Domajnko na str. 35 zastavil Eulerjevo nalogo za naravna števila $n \leq 8$.

V Eulerjevo čast z e_n označimo število možnih delitev konveksnega n-kotnika na trikotnike. Za prvih nekaj naravnih števil lahko preprosto preštejemo vse možnosti. Tako ugotovimo, da je

$$e_3 = 1, \quad e_4 = 2, \quad e_5 = 5 \quad \text{in} \quad e_6 = 14,$$

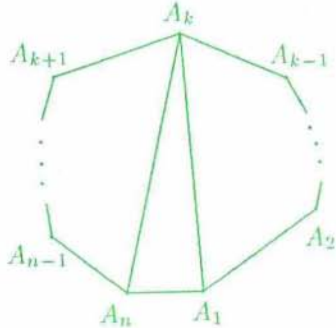
ter slej kot prej obupamo nad to metodo določanja števil e_n.

Leta 1758 je Segner, s katerim se je Euler dopisoval, našel naslednjo rekurzivno zvezo za zaporedje števil $\{e_n\}$:

$$e_n = e_2\, e_{n-1} + e_3\, e_{n-2} + e_4\, e_{n-3} + \ldots + e_{n-1}\, e_2\,, \qquad n \geq 3\,, \qquad (1)$$

kjer smo definirali $e_2 = 1$. Dokažimo to zvezo! V ta namen si oglejmo sliko 1.

Oglišča konveksnega n-kotnika označimo zaporedoma s črkami A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Pri poljubni delitvi je stranica A_nA_1 stranica nekega trikotnika, denimo $A_nA_1A_k$, kjer je k naravno število med 2 in $(n-1)$. Na eni strani tega trikotnika imamo k-kotnik $A_1A_2\ldots A_k$, na drugi stani pa $(n+1-k)$-kotnik $A_kA_{k+1}\ldots A_n$. Prvi večkotnik lahko razdelimo z diagonalami na trikotnike na e_k, drugega pa na e_{n+1-k} načinov. Ker pa poljubno delitev prvega večkotnika lahko kombiniramo s poljubno delitvijo drugega, imamo pri izbranem k natanko $e_k \cdot e_{n+1-k}$ delitev. Število k lahko zavzame poljubno naravno vrednost med 2 in $(n-1)$. Ker na ta način dobimo vse možne delitve prvotnega večkotnika, od tod dobimo (1). (Bralec naj sam premisli, zakaj je ugodno definirati $e_2 = 1$.)



Slika 1

Zvezo (1) imenujemo *Segnerjeva rekurzivna formula*. Lahko se prepričamo, da se sklada s prej določenimi vrednostmi e_3, e_4, e_5 in e_6. Dobimo pa še nekaj naslednjih členov zaporedja :

$$e_7 = e_2\,e_6 + e_3\,e_5 + e_4\,e_4 + e_5\,e_3 + e_6\,e_2 = 42\,,$$

$$e_8 = e_2\,e_7 + e_3\,e_6 + e_4\,e_5 + e_5\,e_4 + e_6\,e_3 + e_7\,e_2 = 132 \quad \text{itd.}$$

Pri velikih n tudi s pomočjo formule (1) težko določimo število e_n. Da bi dobili končno formulo za e_n, najprej rešimo drugi problem.

Začnimo z nekaj primeri: Produkt števil $2\cdot3\cdot4\cdot5$ lahko izračunamo na primer na naslednji način: $2\cdot3 = 6$, $4\cdot5 = 20$ in končno $6\cdot20 = 120$. Splošno lahko produkt štirih faktorjev $a\,b\,c\,d$ izračunamo na naslednjih pet načinov:

$$[(a\cdot b)\cdot c]\cdot d\,,\ [a\cdot(b\cdot c)]\cdot d\,,\ (a\cdot b)\cdot(c\cdot d)\,,$$

$$a\cdot[(b\cdot c)\cdot d] \quad \text{in} \quad a\cdot[b\cdot(c\cdot d)]\,.$$

Tu smo upoštevali vrstni red faktorjev. Kaj pa, če le ta ni predpisan ? Tedaj lahko na primer množimo tudi takole

$$a\cdot[c\cdot(b\cdot d)] \quad \text{ali} \quad d\cdot[(c\cdot b)\cdot a]\,.$$

Ugotovili smo, da Catalanov problem pravzaprav vsebuje dve vprašanji:

1. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če je vrstni red faktorjev predpisan ?
2. Na koliko načinov lahko izračunamo produkt n različnih faktorjev, če vrstni red faktorjev ni predpisan ?

Števili, po katerih sprašujeta vprašanji, zaporedoma zaznamujmo s c_n in z r_n. Obe števili sta v preprosti zvezi

$$r_n = c_n \cdot n! \,, \tag{2}$$

kjer je $n!$ produkt prvih n naravnih števil. To bo brez težav, ob upoštevanju, da je število vseh možnih razvrstitev (permutacij) n elementov enako $n!$, pokazal bralec sam. Kot za zaporedje števil $\{e_n\}$ bomo tudi za zaporedji $\{c_n\}$ in $\{r_n\}$ poiskali rekurzivni zvezi, s pomočjo katerih bomo dobili formule za vsa tri zaporedja.

Najprej začnimo z zaporedjem $\{r_n\}$. Predstavljajmo si, da imamo zapisanih vseh r_n načinov množenja faktorjev f_1, f_2, ..., f_n. Tem poskusimo dodati še faktor f_{n+1} (ki ga označimo krajše s f), tako da dobimo vseh r_{n+1} načinov množenja faktorjev f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1}.

Naj bo P poljubno množenje produkta n faktorjev (eno izmed r_n možnih). Očitno vsebuje $(n-1)$ produktov oblike $A \cdot B$, kjer sta A in B podprodukta. Če je na primer $n = 4$ in $P = c \cdot [(a \cdot b) \cdot d]$, imamo za A in B naslednje možnosti :

$$A = a \,, \; B = b \,; \; A = a \cdot b \,, \; B = d \quad \text{in} \quad A = c \,, \; B = (a \cdot b) \cdot d \,.$$

Če uporabimo faktor f najprej enkrat kot faktor pred A, potem za A, nadalje enkrat kot faktor pred B in nato za B, dobimo iz produkta $A \cdot B$ naslednje štiri produkte

$$(f \cdot A) \cdot B \,, \; (A \cdot f) \cdot B \,, \; A \cdot (f \cdot B) \quad \text{in} \quad A \cdot (B \cdot f) \,.$$

Ker to lahko storimo za vseh $(n-1)$ podproduktov $A \cdot B$ v P, iz produkta P tako dobimo $4\,(n-1)$ produktov $(n+1)$ faktorjev. Poleg tega iz P dobimo tudi naslednji dve mogoči množenji $f \cdot P$ in $P \cdot f$. Torej iz enega množenja produkta n faktorjev dobimo $(4n-2)$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Iz vseh r_n različnih množenj produkta n faktorjev potemtakem dobimo $(4n-2)\, r_n$ različnih množenj produkta $(n+1)$ faktorjev. Ugotovili smo torej, da je

$$r_{n+1} = (4n-2)\, r_n \,. \tag{3}$$

To je rekurzivna zveza med r_n in r_{n+1}. Da dobimo končno formulo za r_n, izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja. Očitno je $r_2 = 2$, saj faktorja a in b lahko množimo na dva možna načina: $a \cdot b$ ali $b \cdot a$. Iz (3) potem dobimo zaporedoma $r_3 = 6\, r_2 = 2 \cdot 6$, $r_4 = 10\, r_3 = 2 \cdot 6 \cdot 10$ in tako naprej. Končno dobimo

$$r_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4\,n-6)\,.$$

Poiščimo še rekurzivno zvezo za zaporedje $\{c_n\}$. Sedaj je vrstni red faktorjev predpisan, denimo, da je to že zaporedje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geq 2)$. Vsako od c_n množenj teh faktorjev je oblike $(\;)\cdot(\;)$, kjer prvi oklepaj vsebuje množenje prvih recimo k faktorjev $f_1, f_2, \ldots, f_k$, drugi pa naslednjih $(n-k)$ faktorjev $f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_n$. Tukaj je k poljubno naravno število, manjše od n. V prvem oklepaju je možnih c_k množenj, v drugem pa c_{n-k}. Ker lahko množenja v prvem oklepaju poljubno kombiniramo z množenji v drugem oklepaju, je pri danem k vseh množenj $c_k\, c_{n-k}$. Ker je k poljubno naravno število od 1 do $(n-1)$, končno dobimo

$$c_n = c_1\, c_{n-1} + c_2\, c_{n-2} + c_3\, c_{n-3} + \ldots + c_{n-1}\, c_1 \,. \tag{4}$$

Z uporabo te rekurzivne zveze iz $c_1 = 1$ in $c_2 = 1$ izpeljemo

$$c_3 = c_1\, c_2 + c_2\, c_1 = 2\,, \quad c_4 = c_1\, c_3 + c_2\, c_2 + c_3\, c_1 = 5 \quad \text{itd.}$$

S pomočjo enakosti (2) dobimo tudi končno formulo za c_n :

$$c_n = \frac{r_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4\,n-6)}{n!}\,.$$

Tako je Catalanov problem v celoti rešen. Končno rešitev Eulerjevega problema pa tudi že slutimo. Prvih nekaj členov zaporedij $\{e_n\}$ in $\{c_n\}$ se z zamikom enega člena namreč ujema, zaporedji pa zadoščata podobnima rekurzivnima enačbama. Zato postavimo hipotezo

$$e_n = c_{n-1}\,,$$

ki jo bralec s pomočjo indukcije ter zvez (1) in (4) brez težav tudi dokaže.

Končno torej lahko zapišemo

$$e_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4\,n - 10)}{(n-1)!}\,.$$

To formulo še nekoliko preoblikujmo

$$e_n = \frac{2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-5)}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{2^{n-2} \cdot (2\,n-3)!}{(n-1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)} =$$

$$= \frac{2^{n-2} \cdot (2\,n-3)!}{(n-1)! \cdot 2^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (2n-3)}\,.$$

Od tod dobimo

$$e_n = \frac{1}{2n-3}\binom{2n-3}{n-2} = \frac{1}{k}\binom{k}{t}\,,$$

kjer je $t = n-2$ število trikotnikov, ki nastanejo po delitvi konveksnega n-kotnika z diagonalami, $k = 2n-3$ pa je tedaj število vseh stranic in diagonal.

Roman Drnovšek