PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 6
Strani 332–333

Dragoljub M. Milošević, prevod in priredba Tomaž Košir:

KOMBINATORNA GEOMETRIJA

Ključne besede: matematika, geometrija.

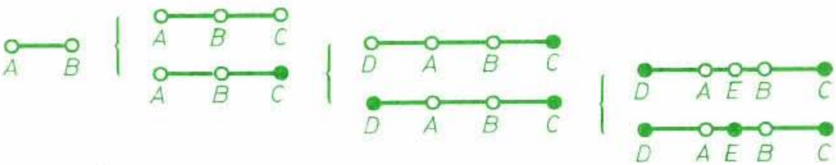
Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/1005-Milosevic-Kosir.pdf

KOMBINATORNA GEOMETRIJA

Namen tega zapisa je bralce seznaniti s kombinatorno geometrijo, eno mlajših vej matematike. Danes je še težko zadovoljivo odgovoriti na vprašanje, kaj je kombinatorna geometrija. Med drugim kombinatorna geometrija raziskuje odnose med točkami, premicami, deli ravnine in deli prostora. Najbolje jo bomo predstavili z nekaj primeri.

Primer 1. Bela ravnina je poljubno popackana s črno barvo. Pokaži, da na ravnini obstaja daljica, katere končni točki in središče so enake barve.

Izberimo točki A in B, ki sta enake barve (denimo bele). Točko C izberimo tako, da je B središče daljice AC (slika 1). Ločimo dve možnosti:



Slika 1

točka C je bela ali točka C je črna. V primeru, ko je C bele barve, je dokaz končan (daljica AC ima središče v točki B). Če je točka črna, poiščimo še točko D, ki leži tako, da je točka A sredšče daljice DB. Če je točka D bele barve, je iskana daljica DB s središčem v A. V primeru, ko je D črne barve, pa poglejmo, kakšne barve je središče E daljice AB. V obeh primerih lahko najdemo daljico z iskano lastnostjo. Če je točka E bele barve, daljica AB ustreza pogojem trditve, v nasprotnem primeru pa je to daljica DB.

Primer 2. Pokaži, da v vsakem konveksnem enajstkotniku obstajata vsaj dve taki diagonali, da manjši kot med premicama, na katerih ležita, ni večji od 5°.

Če obstajata vzporedni diagonali, trditev velja (saj je kot med nosilnima premicama 0°). Predpostavimo, da nobeni dve diagonali nista vzporedni. Vseh diagonal je $(11 \cdot (11-3)) : 2 = 44$. Skozi izbrano točko v ravnini potegnimo 44 premic vzporednih z diagonalami. Premice tako delijo cel kot na 88 delov. Vsaj eden od teh je manjši od 5°, ker je $360 : 88 = 4.09\ldots$.

Primer 3. Na kvadrat s stranico 1 dm vržemo 76 točk. Pokaži, da med temi točkami obstajajo najmanj 4, ki jih lahko prekrijemo s krogom s polmerom $\frac{1}{7}$.

Najprej razdelimo kvadrat na manjše kvadrat(k)e s stranico 0,2 dm. (Nariši sliko!) Takih kvadratkov je 25. Ker je točk 76, obstaja kvadratek, ki vsebuje vsaj 4 točke. Temu kvadratku očrtajmo krog. Njegov polmer je $r = \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ker je $r^2 = \frac{1}{50}$ manj od $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$, lahko očrtani krog prekrijemo s krogom z istim središčem in polmerom $\frac{1}{7}$.

NALOGE

1. Vsaka točka ravnine je obarvana z eno od treh barv. Pokaži, da obstajata dve točki, ki sta enake barve in je razdalja med njima 1 cm.
2. V ravnini izberemo 6 točk, od katerih nobene tri ne ležijo na isti premici. Poljubni dve točki zvežemo z modro ali rdečo daljico. Pokaži, da obstaja trikotnik, ki ima vse 3 stranice enake barve.
3. V ravnini izberemo 1990 točk. Pokaži, da obstaja premica p, ki ne vsebuje nobene dane točke in deli ravnino na dve polravnini, ki vsebujeta vsaka po 995 točk.
4. V krogu s premerom 29 izberemo 1990 točk. Pokaži, da med njimi obstajajo vsaj 4 točke, ki določajo štirikotnik s ploščino manjšo od 1.
5. Pokaži, da lahko kvadrat razrežemo na 1990 manjših kvadratov (ki pa niso nujno enako veliki).
6. Največ koliko ostrih kotov ima lahko konveksen 1990-kotnik ?

Dragoljub M. Milošević
prevedel in priredil *Tomaž Košir*