PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 4
Strani 209–213

Roman Rojko:

IGRA NIM

Ključne besede: matematika, rekreacijska matematika, matematične igre, NIM.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/444-Rojko-NIM.pdf

IGRA N I M

(Predavanje na 17. seminarju DMFA 1980 - Zanimiva matematika)

1. UVOD

Ime igre NIM verjetno izvira iz nemškega velelnika "nimm", kar pomeni "vzemi", Obrnimo za šalo besedo NIM na glavo, pa dobimo besedo WIN, kar v angleščini pomeni "zmagati".

NIM je v resnici skupno ime za igre, v katerih dva igralca izmenično pobirata kamne z enega ali več kupov. Kdor naredi zadnjo možno potezo, je zmagovalec. Med seboj se te igre ločijo po številu kupov in kamnov na začetku igre in po pravilu, ki predpisuje velikost vsakega vzetka. Vsaka poteza mora seveda spremeniti celotno število kamnov v igri in mora tako vzeti najmanj en kamen.

Za vse te igre velja, da je že na začetku igre znano, kateri od obeh igralcev lahko zanesljivo zmaga, ne da bi se mu mogel pri tem nasprotnik upirati. Posledica tega pa je, da igra ni več zanimiva. Tudi mi se bomo ukvarjali z njo z enim samim namenom, raziskati namreč želimo ta zanesljivi način (strategijo) zmagovanja v igri.

2. NIM Z ENIM KUPOM

Definirajmo zdaj igro z imenom $Nim(M)$.

> Igralca imata pred seboj kup z N kamni, vzetki pa so lahko najmanj en in največ M kamnov naenkrat. Dobitnik zadnjega kamna je seveda zmagovalec.

Ni težko uganiti, da traja najdaljša igra $N/2$ potez za vsake ga igralca. Kadar je $N \leq M$, pa igra sploh ni zanimiva, saj bo prvi zmagal v prvi potezi, s katero bo vzel vse kamne.

Naloga 1 : S prijateljem poskusi igrati igro $Nim(M)$. Pred tem se dogovorita, kolikšna naj bosta M in N (recimo $M = 4$, $N = 15$).

Označimo z (X) kup, v katerem je X kamnov. Za poljuben kup bomo definirali celoštevilčno vrednost $P(X)$, ki ji bomo rekli kar VREDNOST POZICIJE igre. Do nje pridemo takole:

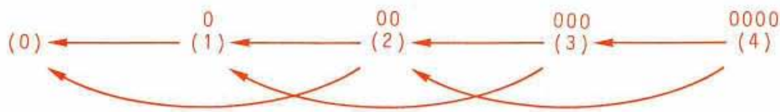
a) Prazen kup ima vrednost nič, $P(0) = 0$

b) Naj bodo (X_1), (X_2), ... (X_r) vsi možni kupi, do katerih lahko pridemo s pravilnim jemanjem s kupa (X), tedaj je

$$P(X) = \text{najmanjše nenegativno celo število, ki je različno od vseh vrednosti } P(X_i),\ i = 1,2,\dots,r$$

Primer

Vzemimo igro $Nim(2)$, ki ima na začetku 4 kamne. Vsak vzetek je torej lahko 1 ali 2 kamna. Da bomo lažje računali vrednosti pozicije, si najprej narišimo vse možne poteze v igri:



Očitno so vrednosti pozicije: $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 0$, $P(4) = 1$.

Naloga 2 : Izračunaj še nekatere vrednosti pozicij (za kupe s 5, 6, ... , 20 kamni).

Sedaj si oglejmo dvoje lastnosti vrednosti pozicije igre:

a) če je $P(X) > 0$, pomeni, da kup (X) ni prazen, igralec, ki je na vrsti, pa lahko med možnimi potezami izbere tako, da bo z njo dosegel $P(X\text{-vzetek}) = 0$. Če namreč taka poteza ne bi obstajala, bi bilo po definiciji $P(X) = 0$.

b) če je $P(X) = 0$, je lahko kup prazen in igra končana. Če kup ni prazen, pa katerakoli pravilna poteza povzroči, da je $P(X\text{-vzetek}) > 0$.

Pri $P(X) = 0$ je pozicija *IZGUBLJENA* , $P(X) > 0$ pa pomeni *DOBLJENO* pozicijo, kar se nanaša na igralca, ki je na vrsti. Torej zmeraj obstaja poteza, ki spremeni dobljeno pozicijo v izgubljeno, vsaka poteza pa spremeni izgubljeno pozicijo v dobljeno. Tako smo prišli do osnovne lastnosti igre *Nim*: Če je v začetku igre $P(N) > 0$, lahko prvi zmaga tako, da spreminja dobljeno pozicijo v izgubljeno. Drugi mu pri tem odgovarja tako, da izgubljeno pozicijo spreminja v dobljeno, dokler se kup ne izprazni.

Če je na začetku igre $P(N) = 0$, prvi nima možnosti za zmago, razen če se drugi zmoti. Zato bo prvi vzel samo en kamen, saj pomeni večji kup tudi večjo možnost za napako. Drugi seveda uporablja isto strategijo, kot bi jo prvi. Strategija ni odvisna od vrstnega reda igralcev, ampak samo od števila kamnov v kupu in pravila za poteze.

Primer

Oglejmo si potek že omenjene igre *Nim*(2) s štirimi kamni na začetku. Prvi mora vzeti en kamen, tako pusti tri kamne, ki jih drugi zmanjša na 2 ali 1, oboje pa prvi v naslednji potezi vzame in zmaga.

Naloga 3 : Ugotovi vse izgubljene pozicije iz naloge 2.

Oglejmo si še en način računanja vzetka pri *Nim*(M) :

Vsakokrat je najbolje pustiti v kupu mnogokratnik od $M+1$ kamnov, se pravi

$$\text{vzetek} = X \bmod (M+1)$$

kjer je X velikost kupa, cela desna stran pa ostanek pri deljenju X z $M+1$. Takoj vidimo, da daje ta formula največji vzetek M kamnov. Kadar je pozicija izgubljena, pa je rezultat formule enak nič, kar pa ni pravilen vzetek. V zadnjem primeru je najboljši vzetek en kamen, formulo pa bomo popravili:

$$\text{vzetek} = \max (1, X \bmod (M+1))$$

Zapišimo še enkrat vrednosti pozicije igre $Nim(M)$:

$$0,1,2,\ldots,M,0,1,2,\ldots,M,0,1,2,\ldots,M,0,1,2,\ldots$$

Vidimo, da je vrednost pozicije enaka velikosti vzetka pri poljubnem kupu, razen pri vrednosti 0. To velja nasploh samo za igro $Nim(M)$. Pri drugačnih pravilih se vzetki drugače računajo.

Naloga 4 : Kakšen je najboljši vzetek pri igrah:

a) $N = 100$, $M = 15$

b) $N = 20$, $M = 4$

c) $N = 21$, $M = 4$

Sedaj si bomo ogledali vrednosti pozicije iger z drugačnimi pravili za določanje vzetkov:

a) vzetek je liho število
   0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
b) vzetek je sodo število
   0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...
c) vzetek je največ polovica kupa + 1
   0, 1, 2, 0, 3, 1, 4, 2, 5, 0, ...
d) vzetek ni več kot polovica kupa
   0, 0, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 4, 2, ...
e) vzetek je praštevilo
   0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 0, 0, ...

Naloga 5 : Razišči vrednosti pozicij za pravilo "vzetek je kub" in velikosti kupov: 0, 1, 2, ... , 30 kamnov.

3. OBRNJENI NIM

Obrnjeni Nim ima ista pravila kot navadni, le zmagovalca določamo drugače:

zmagovalec je igralec, ki ne more narediti poteze.

V *Nim*(M) to pomeni, da izgubi tisti igralec, ki mora vzeti zadnji kamen. Tako se seveda tudi zmagovalna strategija rahlo spremeni. Prvi se bo trudil, da bo na koncu pustil natančno en kamen, ki ga bo drugi tako moral vzeti.

Obrnjeni *Nim*(M) igramo takole: začetni kup si mislimo zmanjšan za en kamen, nato pa igramo kot prej. Tako lahko pridemo do predzadnjega kamna. Kako je s pozicijami? Računanje poteka tako kot prej, le začetek je drugačen, namreč $P(0) = 1$. Vsak vzetek pa izračunamo takole:

$$\text{vzetek} = (N-1) \bmod (M+1)$$

Naloga 6: Kako lahko obrnjeni Nim s splošnejšimi pravili jemanja prevedemo na navadnega?

Roman Rojko

IGRA NIM - rešitve nalog s str. 209

2) velikost kupa: 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

velikost kupa:	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
vrednost pozicije:	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

velikost kupa:	16	17	18	19	20
vrednost pozicije:	1	2	0	1	2

3) Izgubljene pozicije imajo kupi z 0, 3, 6, 9, 12, 15 in 18 kamni.

4) a) vzetek = 4 kamne

b) vzetek je tak, da čimbolj zmedemo nasprotnika

c) vzetek = 1 kamen

5) V poštev pridejo samo kubi: 1, 8 in 27. Vrednosti pozicij so:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	2	2	2

6) Kup si mislimo zmanjšan za toliko, kot znaša najmanjši možni vzetek.

Roman Rojko