Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2023, letnik 29 1

OSREDNJA TEMA:

Preiskovanje

Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem

Učitelj matematike preiskuje svojo poučevalno prakso

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2023, letnik 29 1

VSEBINA

mag. Sonja Rajh
Preiskovanje kot pristop, kjer se učijo učenci in učitelji 1

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

David Janet in Jerneja Bone
Izzivi pri vrednotenju preizkusov nacionalnega preverjanja znanja matematike 2

mag. Karmen Svetlik
Učni dosežki pri matematiki in motivacija za učenje 13

dr. Kristijan Cafuta, dr. Selena Praprotnik
Preiskovanje v matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence 20

IZ RAZREDA

mag. Mojca Suban
Preiskovanje širjenja govoric 27

Irena Rauter Repija in mag. Mateja Škrlec
Uvod v lastnosti funkcij: Marelična marmelada 37

Natalija Horvat in Štefka Štrakl
Uredimo podstrešno sobico 46

Daniela Beroš, Milena Ćulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić
Od primerov do modelov 51

Renata Pučko Ivanuša
Preverjanje znanja sklopa trikotniki s tvorjenjem daljšega pisnega besedila 59

Preiskovanje kot pristop, kjer se učijo učenci in učitelji

Osrednja tema te številke revije *Matematika v šoli* je **preiskovanje**. V članskih je opisano, kako preiskujejo učenci in ob njih tudi učitelji.

Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem je pristop k poučevanju matematike, ki spodbuja aktivno vključevanje učencev v proces preiskovanja in odkrivanja matematičnih konceptov skozi reševanje problemov. Pri tradicionalnem poučevanju matematike so učenci velikokrat bolj pasivni prejemniki informacij, ki jim jih posreduje učitelj, pri učenju in poučevanju matematike s preiskovanjem pa prevzamejo aktivno vlogo pri grajenju svojega matematičnega znanja. V pristopu učenja in poučevanja s preiskovanjem postane učitelj vodnik, moderator in svetovalec, ki usmerja in spodbuja učence, da postavljajo vprašanja, oblikujejo domneve, preiskujejo, analizirajo podatke, razvijajo lastne strategije za reševanje matematičnih problemov, izpeljujejo zaključke, iščejo različne rešitve. Na ta način učenci poglabljajo razumevanje matematičnih konceptov, izboljšujejo svoje kritično razmišljanje, logično sklepanje, sposobnost samostojnega učenja, po drugi strani pa tudi sposobnost sodelovanja in komunikacije z drugimi, kjer se urijo v argumentaciji, saj morajo svoje misli jasno izraziti in zagovarjati svoje ideje. Tak pristop spodbuja radovednost, ustvarjalnost, inovativnost, samoiniciativnost, vztrajnost ter povečuje dosežke učencev, trajnost njihovega znanja, motivacijo za učenje matematike, predvsem pa na ta način razvijajo pozitiven odnos do matematike ter jo dojemajo kot pomembno, zanimivo in uporabno za življenje.

Na podoben način kot se učenci aktivno učijo s **preiskovanjem problemov**, učitelji izboljšujejo svoje poučevanje s **preiskovanjem lastne poučevalne prakse**, ko v skupini z drugimi učitelji analizirajo, »kaj deluje in kaj ne«, kot navajata dr. Kristijan Cafuta in dr. Selena Prapotnik v članku, v katerem sta v tokratni številki revije predstavila teoretični uvod, na katerega se navezujejo in ga nadgradijo štirje primeri iz prakse. Ti primeri iz prakse, v katerih avtorji **preiskujejo učenje učencev**, so dopolnjeni z učnimi scenariji, ki so bili razviti v mednarodnih projektih MERIA in TIME. Primeri so sicer namenjeni srednješolcem, a so načini dela pa tudi vsebine prenosljive in uporabne tudi za osnovnošolce.

Podobno lahko zadnji članek (v tej številki revije) o preverjanju znanja s tvorjenjem daljšega pisnega besedila učitelji nadgradijo in uporabijo na katerikoli stopnji izobraževanja in pri poljubni vsebini.

Seveda pa ne smemo pozabiti omeniti uvodnih člankov o zunanjih preverjanjih znanja, pri čemer se prvi ukvarja z nacionalnim preverjanjem znanja, drugi pa z mednarodnimi raziskavami.

Verjamemo in srčno upamo, da boste vsi bralci našli nekaj uporabnega zase ter za branje revije Matematika v šoli navdušili še koga.

mag. Sonja Rajh, *odgovorna urednica*

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXIX, številka 1, 2023

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Bumblebee, jezikovno svetovanje, Polonca Luznik, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
Tisk: Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Murska Sobota (za revijo Matematika v šoli),
Slomškova ulica 33, 9000 Murska Sobota, e-naslov: revija.matematika@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana,
faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Izzivi pri vrednotenju preizkusov nacionalnega preverjanja znanja matematike

Challenges in Assessing the National Assessment of Knowledge Tests in Mathematics

David Janet, Državni izpitni center
Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Raziskava izpostavlja različna vprašanja pri vrednotenju preizkusov nacionalnega preverjanja znanja (NPZ) matematike. Preverili smo veljavnost in učinkovitost preizkusov za standardizacijo in kontrolnih preizkusov pri ločevanju med natančnimi in manj natančnimi ocenjevalci. Prav tako smo se osredotočili na lastnosti nalog oziroma postavk, ki se povezujejo z natančnostjo pri vrednotenju preizkusov. Rezultati kažejo, da oba kontrolna mehanizma (standardizacija in vrednotenje kontrolnih preizkusov) razmeroma učinkovito ločujeta natančne ocenjevalce od manj natančnih. Za naloge, ki jih ocenjevalci vrednotijo natančneje, velja, da so povečini zaprtega tipa. Več težav pri vrednotenju ocenjevalcem povzročajo naloge aritmetike in algebre, ki spadajo v rdeče in modro območje ter v območje nad modrim. Tudi naloge, ki vsebujejo dodatna moderirana navodila, ocenjevalci vrednotijo slabše. Ovrednotili smo pomen raziskave in izpostavili nekatere smernice pri oblikovanju postopka vrednotenja preizkusov NPZ v prihodnje.

Ključne besede: nacionalno preverjanje znanja, matematika, vrednotenje, preizkusi, veljavnost kontrolnih mehanizmov vrednotenja

Abstract

The following study addresses various issues in assessing the National Assessment of Knowledge (NAK) tests in Mathematics. We examined the validity and efficiency of standardisation and control tests in discriminating between accurate and less accurate assessors. We also focused on the properties of test items associated with assessment accuracy. The results show that both control mechanisms (standardisation and control tests assessment) are relatively effective in discriminating between accurate and less accurate assessors. Closed items are typically more accurately assessed, whereas arithmetic and algebra items, which fall in the red and blue zones and above the blue zone, are more challenging. Items with additional moderated instructions also tend to be more problematic. The article discusses the significance of the study and issues some guidelines for the future design of the assessment process of the NAK tests.

Keywords: National Assessment of Knowledge, mathematics, assessment, tests, validity of control assessment mechanisms

1 Uvod

Nacionalno preverjanje znanja (NPZ) matematike je znatnega pomena za ugotavljanje ravni matematičnega znanja slovenskih učencev v osnovnih šolah. Gre namreč za zunanje preverjanje znanja, ki nudi pomembne informacije o znanju na sistemski ravni. Še pomembnejše pa je za učence, ker jim omogoča primerjavo z vrstniki tudi na nacionalnem nivoju. Tako je nujno, da so preizkusi NPZ objektivni, zanesljivi in veljavni pokazatelji znanja, pomembno pa je tudi, da je postopek vrednotenja objektiven in za vse učence enak. Čeprav je vrednotenje preizkusov pri predmetu matematika samo po sebi razmeroma objektivno (zaradi prevladujočega števila zaprtih nalog in enoznačnih rešitev), praksa kaže, da ocenjevalci pri vrednotenju niso zmerom poenoteni. Složnost ocenjevalcev pri vrednotenju preizkusov NPZ dosegamo z različnimi kontrolnimi mehanizmi. Ocenjevalci morajo za te namene ovrednotiti preizkuse za vajo in standardizacijo ter kontrolne preizkuse (Ric, 2022a).

Hellrung in Hartig (2013) sta v raziskavi, v katero sta vključila pregled člankov od leta 1991 do 2011, ugotavljala, kako učitelji razumejo in uporabijo povratne informacije, ki jih prejmejo od zunanjih ocenjevanj in kako to vpliva na učne dosežke učencev. Ugotovila sta, da imajo učitelji veliko težav z razumevanjem in uporabo povratnih informacij pri razvijanju in načrtovanju nadaljnjega poučevanja. Tudi Panhoon in Wongwanich (2014) ugotavljata, da učitelji niso uporabili ugotovitev iz analiz ocenjevanja za izboljšanje uspešnosti svojih učencev. Sporočata, da bo poučevanje učencev uspešnejše, če bodo učitelji prejeli učinkovite povratne informacije o ugotovitvah analiz preizkusov znanj in če bodo te ugotovitve prenesli v svoje poučevanje, kar se bo posledično odražalo na dosežkih učencev.

Dokazi iz obsežne kvalitativne študije (Smith, 1991) o vlogi zunanjih preverjanj in ocenjevanj znanja v osnovnih šolah so privedli do domnev o učinkih takih preizkusov znanja na učitelje. Učitelji so v razgovorih povedali, da doživljajo negativna čustva zaradi objave rezultatov zunanjih ocenjevanj in se odločijo, da bodo storili vse, kar je potrebno, da se izognejo nizkim rezultatom. Hellrung in Hartig (2013) omenjata, da so raziskave, ki se osredotočajo na razumevanje in uporabo povratnih informacij z zunanjih preverjanj znanj z namenom izboljšanja dosežkov učencev še kako potrebne.

Vpliv nacionalnega preverjanja znanja matematike na slovenske učitelje matematike v osnovni šoli ni raziskan, kljub temu da Državni izpitni center v Letnih poročilih o izvedbi NPZ v posameznem šolskem letu pojasni namen in cilj kontrolnega vrednotenja ter način analize kakovosti vrednotenja. V anketnih vprašalnikih, ki jih izpolnjujejo ravnatelji ob izvedbi NPZ, se vprašanje nanaša tudi na to, ali so ravnatelji z učitelji opravili analizo kakovosti vrednotenja. Ugotavljamo pa, da podrobnejša raziskava vpliva analize kakovosti vrednotenja na učitelje in njihovo poučevanje (matematike) v Sloveniji še ni bila opravljena.

Zgornjo trditev, da vpliv nacionalnega preverjanja znanja oz. uporaba povratnih informacij na poučevanje učiteljev matematike v slovenskem šolskem prostoru ni raziskana, potrjuje pregled strokovnih in znanstvenih člankov. Z iskanjem in pregledom literature smo ugotovili, da članki opisujejo rezultate raziskovanja vpliva psiholoških značilnosti mladostnika in izobrazbe staršev na učno uspešnost (Marjanovič Umek idr., 2007), druga raziskava pa preučuje kognitivne in družbenoekonomske dejavnike šolskega uspeha v Sloveniji (Klanjšek idr., 2007), stališča staršev do Nacionalnih preverjanj znanj (Škalič in Ivanuš-Grmek, 2017), dejavnike učne uspešnosti ob zaključku šolanja (Marjanovič Umek idr., 2006). O prepričanjih učiteljev o notranjih dejavnikih učne uspešnosti sta Smrtnik Vitulić in Lesar (2014) ugotovili, da so učitelji kot najpomembnejši dejavnik označili sprejemljivost in čustveno stabilnost, Javornik Krečič (2005) opisuje, kako se z leti šolanja spreminjajo značilnosti ocenjevanja znanja in zahteve učitelja pri ocenjevanju.

Še najbolj uporabo povratnih informacij pri poučevanju učiteljev izpostavi raziskava, ki preučuje, ali lahko različni načini spodbujanja samoevalvacije na šoli vplivajo na spreminjanje prepričanj učiteljev o samoevalvaciji, pa tudi na njihovo vedenje v razredu ter na dosežke učencev. Rezultati so pokazali, da so prepričanja precej stabilna, saj je za spremembo potrebno veliko časa. V raziskavi niso uspeli dokazati vpliva spodbujanja procesa samoevalvacije na spreminjanje prepričanj, kar je zelo verjetno posledica omejitev raziskave. Sprememba prepričanj je osnova za spreminjanje vedenja in dosežkov, vendar pa se to zgodi v daljšem časovnem okviru (Hauptman, 2012, stran 19).

1.1 Zagotavljanje kakovosti pri vrednotenju preizkusov NPZ

Vrednotenje preizkusov NPZ poteka elektronsko, s pomočjo programa RM Assessor[3] (RM Assessor, 2019). Ocenjevalcem pred vrednotenjem nalog v programu svetujemo, da pred začetkom elektronskega vrednotenja sami rešijo preizkus ter tako dobijo vpogled v naloge, načine reševanja in problematičnost samih nalog ter da se seznanijo z moderiranimi navodili za vrednotenje. Vsak ocenjevalec mora pred pričetkom rednega vrednotenja ovrednotiti en preizkus za vajo. Namen te je seznanitev ocenjevalcev s preizkusom ter nalogami, predvsem pa z navodili za vrednotenje. Ko zaključijo z vrednotenjem vaje, lahko preverijo, kako natančno so ovrednotili preizkus. Vsaka naloga se namreč preverja z referenčnimi točkami, ki jih nalogam predhodno dodeli predmetna komisija in glavni ocenjevalec predmeta. Ko ocenjevalci zaključijo s pregledom, lahko preidejo na vrednotenje dveh preizkusov za standardizacijo. Namen teh je dodatna umeritev ocenjevalca z navodili za vrednotenje in (posledično) tudi z ostalimi ocenjevalci. Tudi naloge preizkusov za standardizacijo se primerjajo z vnaprej dodeljenimi referenčnimi točkami. Če se dodeljene točke ocenjevalcev bistveno ne razlikujejo od referenčnih točk, program ocenjevalca avtomatsko potrdi za vrednotenje ostalih preizkusov. Če pa ocenjevalec pri vrednotenju preveč odstopa, mora počakati, da njegova preizkusa pregleda pomočnik glavnega ocenjevalca. Ta mu poda povratno informacijo o njegovem vrednotenju in ga nato potrdi za nadaljnje vrednotenje. Naloga pomočnikov glavnega ocenjevalca je, da podrobneje spremljajo ocenjevalce, ki imajo med vrednotenjem več težav, in jim pomagajo z napotki in usmeritvami. Ocenjevalec lahko zatem nadaljuje z vrednotenjem dejanskih preizkusov. Med njimi so naključno razporejeni – ponavadi trije – kontrolni preizkusi. Ti skrbijo za kakovost, tudi ko ocenjevalci vrednotijo dejanske preizkuse NPZ. Če namreč pri posameznem kontrolnem preizkusu preveč odstopajo, se njihovo vrednotenje začasno ustavi. Pred nadaljevanjem morajo pregledati odstopanja pri posameznih nalogah in sprejeti povratno informacijo (RM Assessor, 2019).

1.2 Specifike preverjanja matematike na NPZ

Vrednotenje preizkusov matematike je v primerjavi s preostalimi predmeti NPZ dokaj specifično. V pretežni meri namreč prevladujejo naloge oziroma postavke kratkih zaprtih odgovorov. Med letoma 2018 in 2022 so v preizkusih NPZ matematike v 9. razredu glavnino (79,5 %) predstavljale postavke kratkih zaprtih odgovorov, sledijo postavke kratkih polodprtih odgovorov (20 %). Ostalih tipov postavk je bilo manj kot odstotek. Podobna je situacija pri predmetu matematika v 6. razredu, kjer je nalog s kratkimi zaprtimi odgovori sicer malenkost manj (73 %), sledijo naloge s kratkimi polodprtimi odgovori (21,5 %), ostalih nalog – predvsem izbirnih tipov – pa je nekoliko več kot v 9. razredu (5,5 %). Prevlada nalog zaprtega tipa je načeloma dobrodošla, vsaj kar se tiče vrednotenja preizkusov. Te naloge so objektivnejše, kar pomeni, da je pri njihovem vrednotenju manj dilem in nedoslednosti. To v praksi pomeni tudi večjo poenotenost med ocenjevalci, posledično pa tudi večjo zanesljivost in objektivnost vrednotenja.

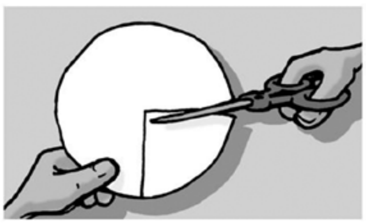
Reši neenačbo, če je $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

$$7x - 2(x + 2) - 4x \leq 0$$

$\mathfrak{R} = \{$____________________$\}$

Slika 1: Primer naloge tipa kratkih zaprtih odgovorov (Ric, 2021d).

Jerneja je iz papirnatega modela kroga s polmerom 4 cm izrezala četrtino in dobila dva krožna izseka.



a) Izračunaj obseg manjšega krožnega izseka. Rezultat zapiši na dve decimalki natančno.

Reševanje:

Slika 2: Primer naloge tipa kratkih polodprtih odgovorov (Ric, 2021d).

1.3 Opisi dosežkov na nacionalnem preverjanju znanja in druge karakteristike preizkusa iz matematike

Dosežki na preverjanju NPZ (matematike) so ovrednoteni tako kvantitativno (s točkami in odstotki) kot kvalitativno (z umestitvijo v izbrana območja dosežkov). Slednje pripravijo člani predmetnih komisij in sodelavci Rica (Ric, 2022a). Pri tem dosežke vseh učencev razvrstijo od najnižjega do najvišjega in jih umestijo v štiri območja dosežkov: zeleno, rumeno, rdeče in modro.

- Zeleno območje označuje učence, katerih skupni dosežki določajo mejo spodnje četrtine dosežkov (glede na preostale dosežke). V tem območju je 10 % učencev; njihovi dosežki so višji od spodnjih 20 % in nižji od 70 % preostalih dosežkov.
- Rumeno območje označuje učence, katerih skupni dosežki določajo mejo med polovicama dosežkov. V tem območju je 10 % učencev; njihovi dosežki so višji od spodnjih 45 % in hkrati nižji od 45 % preostalih dosežkov.
- Rdeče območje označuje učence, katerih skupni dosežki določajo mejo zgornje četrtine dosežkov. V tem območju je 10 % učencev; njihovi dosežki so višji od spodnjih 70 % in nižji od 20 % preostalih dosežkov.
- Modro območje označuje učence, katerih skupni dosežki so v zgornji desetini dosežkov. V tem območju je 10 % učencev z najvišjimi dosežki; njihovi dosežki so višji od 90 % dosežkov.
- Nalog, ki so v območju nad modrim, v 65 % primerov ne rešijo niti učenci z najvišjimi skupnimi dosežki. (Ric, 2022a, str. 57)

Za vsako od navedenih območij predmetna komisija določi tudi naloge, ki so jih učenci reševali uspešno – uspešnost reševanja pomeni, da je dano nalogo pravilno rešilo vsaj 65 % učencev z dosežki v danem območju (tako določajo uspešnost tudi v mednarodnih raziskavah znanja) (Ric, 2022a, str. 56). Posledično lahko naloge razvrstimo tudi kvalitativno. V praksi to npr. pomeni, da naloge v modrem območju uspešno rešujejo najboljši učenci. Podrobnejše pojasnilo območij dosežkov najdemo v Letnem poročilu o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja (npr. Ric, 2022a).

Posamezna naloga v nacionalnem preizkusu znanja matematike je ovrednotena z največ šestimi točkami. Naloga je razdeljena na več postavk, vsaka postavka pa je ovrednotena z eno točko. V preizkusu znanja so posamezne vsebine zastopane v različnih odstotkih. V 6. razredu je 55 % preizkusa iz aritmetike in algebre, 25 % iz geometrije in merjenja in 20 % iz drugih vsebin (Ric, 2022b). V 9. razredu je aritmetike in algebre 50 %, geometrije in merjenja 35 % in drugih vsebin 15 % (Ric, 2022c).

1.4 Cilji raziskave

Z našo raziskavo smo želeli poiskati odgovore na nekatere dileme in odprta vprašanja, ki se pojavljajo pri vrednotenju NPZ. Prvi cilj raziskave zajema podajo generalne ocene kakovosti vrednotenja pri predmetu matematika. Z raziskavo smo nameravali potrditi veljavnost kontrolnih mehanizmov standardizacije in vrednotenja kontrolnih preizkusov pri ločevanju bolj in manj natančnih ocenjevalcev preizkusov NPZ matematike. Naslednji cilj zajema prepoznavo nalog, ki jih ocenjevalci vrednotijo manj natančno. Prav tako smo želeli identificirati skupne lastnosti teh nalog (npr. tip odgovorov). Odgovore na zastavljena vprašanja smo poiskali s pomočjo ponovnega ovrednotenja preizkusov izbranih ocenjevalcev, kar nam je omogočilo izračun natančnosti vrednotenja le-teh ter primerjavo s standardizacijo in vrednotenjem kontrolnih preizkusov.

1.5 Raziskovalna vprašanja

V skladu s cilji raziskave smo želeli odgovoriti na več raziskovalnih vprašanj. Eno bolj generalnih se dotika splošne kakovosti vrednotenja preizkusov. Kako natančno v povprečju preizkuse ovrednoti posamezen ocenjevalec? Naslednja dilema se povezuje z vrednotenjem preizkusov za standardizacijo in kontrolnih preizkusov. Vprašanje, ki se pojavlja, je veljavnost omenjenih mehanizmov za ločevanje med natančnimi in manj natančnimi ocenjevalci. Se ocenjevalci, ki naredijo več napak pri vrednotenju preizkusov standardizacije oz. kontrolnih preizkusov, slabše odrežejo tudi pri vrednotenju preostalih preizkusov? Ali torej s kontrolnimi mehanizmi zares detektiramo ocenjevalce, ki so pri vrednotenju NPZ manj natančni? Je pri tem učinkovitejši postopek standardizacije ali vrednotenja kontrolnih preizkusov? Zanimajo nas tudi specifike nalog, ki ocenjevalcem pri vrednotenju povzročajo več preglavic. So to predvsem naloge polodprtega tipa, katerih vrednotenje je načeloma nekoliko subjektivnejše? Gre morebiti za zahtevnejše naloge? Lahko pri nalogah, ki jih ocenjevalci ovrednotijo manj natančno, zapazimo katere druge značilnosti?

2 Metodologija

2.1 Raziskovalni pristop in postopek

V raziskavi smo uporabili prečni pristop zbiranja podatkov in kvantitativne analize njihove obdelave. Sprva smo izračunali povprečna odstopanja vrednotenj ocenjevalcev od referenčnih vrednotenj pri standardizaciji in vrednotenju kontrolnih preizkusov. To je bilo izhodišče za razvrstitev ocenjevalcev v skupine glede na njihovo natančnost. Pri obeh kontrolnih mehanizmih smo ocenjevalce razdelili v pet skupin. V nadaljnje analize smo zajeli ocenjevalce iz skupin najnižjih, srednjih in najvišjih odstopanj. Ocenjevalce smo torej razdelili v 3 skupine standardizacije in 3 skupine kontrolnih preizkusov. Po načrtu 3 x 3 smo oblikovali 9 kombinacij skupin. V vsaki kombinaciji skupin smo izbrali 9 do 10 naključnih ocenjevalcev. Za vsakega od izbranih ocenjevalcev pa smo določili 9 naključnih ovrednotenih preizkusov NPZ iz leta 2021. Te so ponovno ovrednotili člani Predmetne komisije za matematiko (postopek je bil sicer del obsežnejšega projekta – vključujočega tudi druge predmete NPZ in njih komisije – podrobneje opisanega v študiji Janet in Cankar (2023)). Točkam ponovno ovrednotenih nalog pravimo referenčne. Na podlagi teh smo lahko izračunali odstopanja med vrednotenji ocenjevalcev in referenčnimi vrednotenji. Za oblikovane skupine ocenjevalcev smo izračunali dva indeksa odstopanj: povprečno kumulativno odstopanje ocenjevalcev in povprečno skupno odstopanje ocenjevalcev. Prvo zajema povprečni seštevek vseh absolutnih odstopanj po nalogah, povprečno skupno odstopanje pa zajema zgolj povprečna absolutna odstopanja na koncu preizkusov. Dva indeksa odstopanj smo uporabili za namene temeljitejše detekcije morebitnih razlik med skupinami.

2.2 Sodelujoči v raziskavi

Pri ponovnem vrednotenju preizkusov NPZ matematike v letu 2021 v 9. razredu je sodelovalo 7 ocenjevalcev, skupaj pa so ponovno ovrednotili 729 preizkusov. Pri ponovnem vrednotenju preizkusov NPZ v 6. razredu za leto 2021 pa je sodelovalo 6 ocenjevalcev, ki so skupaj ovrednotili 810 preizkusov. Ocenjevalci so bili člani predmetne komisije za matematiko.

2.3 Obdelava podatkov

Statistične analize smo izvedli s programom R-studio (verzija 1.3.1093). Sprva smo izračunali opisne statistike odstopanj posameznih skupin. Statistično značilnost razlik v odstopanjih med skupinami standardizacije oziroma kontrolnih preizkusov smo preverili s pomočjo enosmerne ANOVE. Razlike med posameznimi pari skupin pa smo preverili s Tukeyevimi post hoc testi. Za vsako nalogo smo izračunali delež, v katerem je bila ta pravilno ovrednotena. Prav tako smo izračunali povprečne deleže natančnosti vrednotenja nalog za posamezne tipe.

3 Rezultati

3.1 Razlike med kombinacijami skupin standardizacije in kontrolnih preizkusov

Sprva si oglejmo razlike v indeksih odstopanj med kombinacijami skupin standardizacije in kontrolnih preizkusov. Preglednica 1 prikazuje povprečna kumulativna in skupna odstopanja ocenjevalcev v 9. razredu. Pri tem se prva števka oznake skupine nanaša na skupino standardizacije, druga pa na skupino kontrolnih preizkusov. Skupina 1 zajema ocenjevalce z najnižjimi odstopanji, skupina 2 ocenjevalce z zmernimi odstopanji, skupina 3 pa ocenjevalce z najvišjimi odstopanji pri obeh kontrolnih mehanizmih. V preglednici pa so seveda prikazana odstopanja skupin pri vrednotenju dejanskih preizkusov NPZ (tistih, ki smo jih zajeli v vzorec). Iz preglednice gre razbrati trend, da ocenjevalci v skupinah, ki so bolj odstopale pri vrednotenju preizkusov za standardizacijo in kontrolnih preizkusov, bolj odstopajo tudi pri vrednotenju dejanskih preizkusov. Rezultati enosmerne ANOVE sicer kažejo, da so razlike med skupinami statistično značilne zgolj v povprečnih kumulativnih odstopanjih ($F(8, 72) = 2{,}45$, $p = 0{,}021$), ne pa v povprečnih skupnih odstopanjih ($F(8, 72) = 1{,}27$, $p = 0{,}272$).

Preglednica 1: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj kombinacij skupin standardizacije in kontrolnih preizkusov (9. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1.1	1,22	0,85
1.2	1,37	0,95
1.3	1,53	0,86
2.1	1,53	1,01
2.2	1,69	1,00
2.3	1,83	1,16
3.1	1,60	0,96
3.2	2,04	1,20
3.3	2,04	1,17

Za preverbo razlik med posameznimi pari skupin smo izvedli Tukeyeve post-hoc teste. Ti kažejo, da značilne razlike beležimo zgolj v povprečnih kumulativnih odstopanjih med skupinama 1.1 in 3.2 ($p = 0{,}046$) ter 1.1 in 3.3 ($p = 0{,}046$). Ostale razlike niso statistično značilne.

Postopek smo ponovili pri preverbi razlik v odstopanjih kombinacij skupin standardizacije in kontrolnih preizkusov v 6. razredu (preglednica 2). Spet višja odstopanja najdemo pri kombinacijah skupin, katerih ocenjevalci so pri vrednotenju preizkusov obeh kontrolnih mehanizmov bolj odstopali. Značilne razlike med skupinami smo zabeležili zgolj v povprečnih kumulativnih odstopanjih ($F(8, 81) = 3{,}614$, $p = 0{,}001$), ne pa v povprečnih skupnih odstopanjih ($F(8, 81) = 1{,}873$, $p = 0{,}076$) – slednjo razliko lahko sicer opredelimo kot mejno statistično značilno. Tukeyevi post hoc testi razkrivajo značilne razlike v povprečnih kumulativnih odstopanjih med skupinama 2.1 in 1.3 ($p = 0{,}004$). Kot mejno značilne lahko morebiti opredelimo še razlike med pari skupin 1.1 in 1.3 ($p = 0{,}055$), 1.2 in 1.3 ($p = 0{,}055$), 2.1 in 2.3 ($p = 0{,}080$), 2.1 in 3.2 ($p = 0{,}074$) ter 2.1 in 3.3 ($p = 0{,}051$). Statistično značilno razliko beležimo tudi v povprečnih skupnih odstopanjih skupin 2.1 in 3.3 ($p = 0{,}043$).

Preglednica 2: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj kombinacij skupin standardizacije in kontrolnih preizkusov (6. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1.1	1,57	1,14
1.2	1,57	1,01
1.3	2,80	1,24
2.1	1,23	0,81
2.2	2,34	1,30
2.3	2,41	1,39
3.1	2,18	1,18
3.2	2,42	1,24
3.3	2,48	1,48

3.2 Razlike med skupinami standardizacije

V nadaljevanju smo združili skupine standardizacije in kontrolnih preizkusov ter po enakem postopku preverili značilnost razlik v povprečnih kumulativnih oziroma povprečnih skupnih odstopanjih. V preglednici 3 so prikazane statistike odstopanj pri standardizaciji za ocenjevalce matematike v 9. razredu. Najvišja odstopanja beležimo v skupini 3 (pri ocenjevalcih, ki so pri standardizaciji najbolj odstopali), sledi skupina 2, najnižja odstopanja pa beležimo v skupini 1 (pri ocenjevalcih, ki so pri standardizaciji odstopali najmanj). To velja za povprečna kumulativna in skupna odstopanja. Preverili smo, ali so razlike med skupinami statistično značilne. To smo ugotovili za povprečna kumulativna odstopanja ($F(2, 78) = 7{,}514$, $p = 0{,}003$), razlike v povprečnih skupnih odstopanjih pa mejijo na statistično značilne ($F(2, 78) = 3{,}098$, $p = 0{,}051$).

Izvedli smo še Tukeyeve post hoc teste. Ti kažejo, da značilne razlike v povprečnih kumulativnih odstopanjih najdemo med 1. in 3. skupino ($p = 0{,}002$), razlika med 1. in 2. skupino pa meji na statistično značilno ($p = 0{,}095$). Tudi za razliko med 1. in 3. skupino v povprečnih skupnih odstopanjih lahko trdimo, da meji na statistično značilno ($p = 0{,}051$).

Preglednica 3: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj skupin standardizacije (9. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1	1,37	0,89
2	1,68	1,06
3	1,89	1,11

Preglednica 4 prikazuje statistike odstopanj pri standardizaciji za ocenjevalce matematike v 6. razredu. Spet beležimo zgoraj opisani trend: najvišja odstopanja najdemo v skupini 3, sledi skupina 2, najnižja odstopanja pa so v skupini 1. Z enosmerno ANOVO smo preverili statistično značilnost razlik med skupinami, pri čemer značilnih razlik v povprečnih kumulativnih odstopanjih nismo ugotovili ($F(2, 87) = 1{,}481$, $p = 0{,}233$), podobno velja za povprečna skupna odstopanja ($F(2, 87) = 1{,}002$, $p = 0{,}368$).

Preglednica 4: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj skupin standardizacije (6. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1	1,98	1,13
2	2,00	1,17
3	2,36	1,30

3.3 Razlike med skupinami kontrolnih preizkusov

Enak postopek smo ponovili pri skupinah kontrolnih preizkusov. Preglednica 5 tako prikazuje odstopanja skupin kontrolnih preizkusov za ocenjevalce matematike v 9. razredu. Iz preglednice lahko razberemo, da so odstopanja najvišja v skupini 3 (pri ocenjevalcih, ki so pri vrednotenju kontrolnih preizkusov najbolj odstopali), sledi skupina 2, medtem ko so odstopanja najnižja v skupini 1 (pri ocenjevalcih, ki so pri vrednotenju kontrolnih preizkusov odstopali najmanj). Rezultati enosmerna ANOVE razkrivajo, da so razlike v povprečnih kumulativnih odstopanjih mejno statistično značilne ($F(2, 78) = 2{,}724$, $p = 0{,}072$), razlike v povprečnih skupnih odstopanjih pa ne dosegajo meje statistične značilnosti ($F(2, 78) = 0{,}983$, $p = 0{,}379$).

Tukeyeve post hoc teste smo izvedli zgolj za preverbo razlik v povprečnih kumulativnih odstopanjih. Med 1. in 3. skupino smo zabeležili mejno značilno razliko ($p = 0{,}067$), razlike med ostalimi skupinami pa ne dosegajo statistične značilnosti.

Preglednica 5: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj skupin kontrolnih preizkusov (9. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1	1,45	0,94
2	1,70	1,05
3	1,80	1,07

Postopek smo ponovili še pri skupinah kontrolnih preizkusov ocenjevalcev matematike v 6. razredu. Tudi pri teh zapažamo trend, da najvišja odstopanja beležimo v skupini 3, sledi skupina 2, najnižja odstopanja pa beležimo v skupini 1. Rezultati enosmerne ANOVE indicirajo, da so razlike med skupinami v povprečnih kumulativnih odstopanjih statistično značilne

($F(2, 87) = 7{,}394$, $p = 0{,}001$). Podobno lahko zatrdimo za povprečna skupna odstopanja ($F(2, 87) = 3{,}725$, $p = 0{,}028$).

Izvedli smo še serijo Tukeyevih post hoc testov. Rezultati teh kažejo, da značilne razlike v povprečnih kumulativnih odstopanjih beležimo le med skupinama 1 in 3 ($p < 0{,}001$). Tudi razlike v povprečnih skupnih odstopanjih so statistično značilne le med 1. in 3. skupino ($p = 0{,}021$).

Preglednica 6: Indeksi povprečnih kumulativnih in skupnih odstopanj skupin kontrolnih preizkusov (6. razred).

Skupina	Povprečno kumulativno odstopanje	Povprečno skupno odstopanje
1	1,66	1,04
2	2,11	1,19
3	2,56	1,37

3.4 Analiza po postavkah

Izvedli smo tudi analizo po postavkah. Zanimalo nas je, katere naloge oz. postavke v 6. in 9. razredu so ocenjevalci ovrednotili najbolj skladno z referenčnim vrednotenjem in pri katerih so najbolj odstopali. Za vsako postavko smo izračunali seštevek odstopanj oz. razlik glede na referenčno vrednotenje (maksimalni možen seštevek odstopanj pri vrednotenju NPZ matematike v 9. razredu je tako 729, v 6. razredu pa 810). Števila odstopanj pri posameznih postavkah smo pretvorili v odstotek odstopanj.

Oblikovali smo kriterij za kategorizacijo natančnosti vrednotenja postavk. Med zelo skladne smo uvrstili postavke, pri katerih je odstotek odstopanj nižji od 0,50 %. Med skladne postavke smo uvrstili tiste, pri katerih je odstopanje med 0,50 % in 3,00 %. Med srednje skladne postavke smo uvrstili postavke z odstotki odstopanj med 3,01 % in 7,00 %. Med neskladne postavke smo uvrstili postavke z odstopanji med 7,01 % in 9,99 %, med zelo neskladne postavke pa tiste z odstopanji nad 10 %.

Preglednica 7: Število postavk glede na odstopanje od referenčnega vrednotenja na preizkusih NPZ matematike v 6. in 9. razredu.

	Št. postavk 6. razred	Št. postavk 9. razred
Zelo skladno vrednotenje	8	5
Skladno vrednotenje	20	28
Srednje skladno vrednotenje	11	11
Neskladno vrednotenje	4	4
Zelo neskladno vrednotenje	7	2

3.4.1 Vrednotenje nalog v 6. razredu

Iz preglednice 8 razberemo, da so razlike v skladnosti vrednotenj posameznih postavk v 6. razredu velike in so v razponu od 0,12 % do 19,88 %.

V letnem poročilu o izvedbi nacionalnega preverjanja znanja v šolskem letu 2020/2021 smo iz specifikacijske tabele razbrali nekatere podatke (področje, taksonomsko stopnjo, indeks težavnosti in območje), ki smo jih predstavili v preglednici 8. Natančnejši pregled petih postavk v 6. razredu, ki so vrednotene zelo

Preglednica 8: Najbolj skladno in neskladno ovrednotene postavke (NPZ matematika, 6. razred).

	Postavka	Odstotek odstopanj	Področje	Taksonomska stopnja	Območje	Indeks težavnosti (IT)
Zelo skladno vrednotenje	5.a	0,12	aritmetika in algebra	I	zeleno	0,93
	1.d	0,37	aritmetika in algebra	III	modro	0,31
	9.c	0,37	druge vsebine	IV	modro	0,26
	4.b.2	0,49	aritmetika in algebra	II	zeleno	0,94
	9.a.1	0,49	aritmetika in algebra	II	zeleno	0,87
Zelo neskladno vrednotenje	6.a.2	10,00	druge vsebine	II	nad modrim	0,15
	7.b.1	10,37	druge vsebine	III	rdeče	0,49
	7.c.1	10,49	aritmetika in algebra	III	modro	0,28
	8.c	10,99	druge vsebine	IV	nad modrim	0,16
	8.a.2	11,11	druge vsebine	III	rdeče	0,48
	5.b.1	13,83	aritmetika in algebra	I	rumeno	0,69
	9.a.2	19,88	aritmetika in algebra	II	zeleno	0,63

skladno z referenčnim vrednotenjem, nam pove, da postavke pokrivajo vse taksonomske stopnje, prevladujejo pa postavke (tri postavke) I. in II. taksonomske stopnje (poznavanje in razumevanje pojmov in dejstev ter izvajanje rutinskih postopkov). Glede na področja učnega načrta ugotavljamo, da je večina postavk (4) s področja aritmetike in algebre, ena pa iz drugih vsebin, pri čemer področja v preizkusih niso zastopana v enakih odstotkih. Postavke so iz dveh območij, največ (3) iz zelenega in dve iz modrega območja. Povprečni dosežek postavk (indeks težavnosti) pa je od 0,26 do 0,94.

V 6. razredu so bile najbolje ovrednotene postavke 5.a, 1.d in 9.c. Zahtevale so odgovor, ki je bil zapisan v moderiranih navodilih za vrednotenje (Slika 3 in Slika 4). Ocenjevalci so pri vrednotenju preverili, ali je učenec zapisal dani odgovor ali ne, drugih možnosti ni bilo.

1. d) Dana so števila:

0,9 0,10 0,011 0,12

Zapiši jih po velikosti od najmanjšega do največjega.

________ < ________ < ________ < ________

1.d	1	◆ 0,011 < 0,10 < 0,12 < 0,9

Slika 3: Naloga 1.d in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 6. razred, 2021.

5. a) Kolikšen del lika je osenčen? Obkroži ustrezni ulomek.

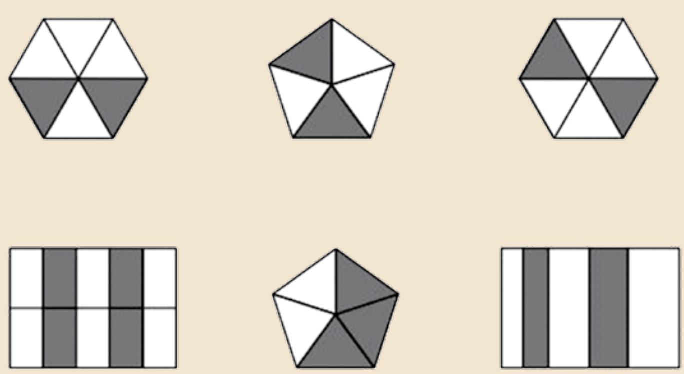
$\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{6}{10}$

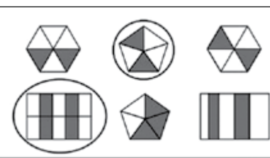
5.a	1	◆ obkrožen samo ulomek $\frac{5}{9}$

Slika 4: Naloga 5.a in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 6. razred, 2021.

Podroben pregled sedmih postavk, kjer je vrednotenje najbolj odstopalo, nam pove, da postavke uvrščamo v vse štiri taksonomske stopnje, največ (3) pa jih je s III. taksonomske stopnje (uporaba kompleksnih postopkov). Večina postavk (4) je s področja druge vsebine, ostale (3) so s področja števil. Postavke so iz vseh območij, sta pa dve iz območja nad modrim, ena modro

5. b) Obkroži vsak lik, katerega $\frac{2}{5}$ sta osenčeni.



5.b				
	5.b.1	1	◆ obkrožen eden izmed pravilnih odgovorov in noben napačen	Učenec dobi le točko 5.b.1, če obkroži oba pravilna odgovora in še enega napačnega. Točk ne dobi: – če obkroži vsaj dva napačna odgovora, – če sta obkrožena en pravilni in en napačen odgovor.
	5.b.2	1	◆ obkrožen še drugi pravilni odgovor in noben napačen	

Slika 5: Naloga 5.b in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 6. razred, 2021.

in dve rdeče, po ena iz rumenega in zelenega. Povprečni dosežek (IT) je od 0,15 do 0,69.

Največje odstopanje pri vrednotenju je bilo opaženo pri postavkah 9.a.2 in 5.b.1. Po moderiranih navodilih so morali ocenjevalci točko 5.b.1 dodeliti, če je učenec obkrožil enega izmed pravilnih odgovorov in nobenega napačnega, hkrati pa je ocenjevalec moral upoštevati še dodatna navodila (Slika 5). Ocenjevalci morda točke niso dodelili, če je bil obkrožen le lik v drugi vrstici ali pa so spregledali dodatna navodila.

Točko pri postavki 9.a.2 so ocenjevalci dodelili le, če je bil upoštevan vrstni red računskih operacij (Slika 6). Lahko so spregledali, da je učenec nakazal deljenje kot stranski račun ali pa so

9\. a) Izračuna vrednosti številskih izrazov.

0,16 : 0,2 + 2 =

9.a.2	1	• upoštevan vrstni red računskih operacij (iz postopka je razvidno, da je učenec najprej delil 0,16 z 0,2)	
9.a.3	1	• 2,8	V izrazu morajo veljati vse enakosti.

Slika 6: Naloga 9.a in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 6. razred, 2021.

menili, da točko dobi le, če je tudi rezultat deljenja pravilen. Točko učenec dobi, če nakaže, da ima deljenje prednost, količnik pa je lahko napačen.

3.4.2 Vrednotenje nalog v 9. razredu

Iz preglednice 9 razberemo, da so razlike v skladnosti vrednotenj posameznih postavk v 9. razredu velike, od 0,14 % do 17,56 %.

Natančnejši pregled petih postavk v 9. razredu, ki so vrednotene zelo skladno z referenčnim vrednotenjem, nam pove, da postavke pokrivajo vse taksonomske stopnje, prevladujejo pa postavke (2) IV. taksonomske stopnje (reševanje in raziskovanje problemov). Glede na področja učnega načrta ugotavljamo, da sta dve postavki s področja aritmetike in algebre, dve iz drugih vsebin, ena iz geometrije, pri čemer področja v preizkusih niso zastopana v enakih odstotkih. Zelo skladno vrednotene postavke so iz treh območij, največ (3) iz modrega območja, ena iz rdečega in ena iz območja nad modrim. Povprečni dosežek postavk (indeks težavnosti) pa je od 0,06 do 0,72.

2\. Eva je stara pet let in živi skupaj z očetom in babico. Oče je star 26 let, babica pa 57 let.

2\. d) Čez koliko let bo vsota njihovih starosti enaka 100 let?

Odgovor: ______________________________

2.d	1	• Čez štiri leta bo vsota njihovih starosti enaka 100.

Slika 7: Naloga 2.d in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 9. razred, 2021.

V 9. razredu so bile najbolje ovrednotene postavke 2.d, 5.b in 8.a.1. Zahtevale so odgovor, ki je bil zapisan v moderiranih navodilih za vrednotenje (Slika 7 in Slika 8). Ocenjevalci so pri vrednotenju preverili, ali je učenec zapisal tak odgovor ali ne.

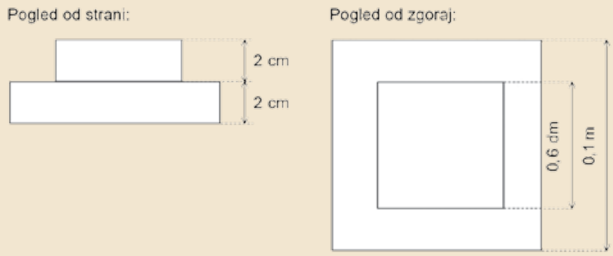
Podroben pregled dveh postavk v 9. razredu, kjer je vrednotenje najbolj odstopalo, nam pove, da postavki uvrščamo na I. in IV. taksonomsko stopnjo. Večina postavk (4) je s področja druge vsebine, ostale (3) so s področja števil. Postavki sta iz rdečega in modrega območja. Povprečni dosežek (IT) je 0,31 in 0,51.

Največje odstopanje pri vrednotenju je bilo opaženo pri postavkah 4.a.1 in 7.c. Po moderiranih navodilih so morali ocenjevalci točko 4.a.1 dodeliti, če je učenec vstavil vrednosti spremenljivk v dani oz. ekvivalentni izraz, pri čemer so morali upoštevati tudi dodatna navodila, ki so narekovala, da učenec dobi točko tudi,

Preglednica 9: Najbolj skladno in neskladno ovrednotene postavke (NPZ matematika, 9. razred).

	Postavka	Odstotek odstopanj	Področje	Taksonomska stopnja	Območje	(IT) indeks težavnosti
Zelo skladno vrednotenje	2.d	0,14	Druge vsebine	IV	Modro	0,43
	5.b	0,14	Aritmetika in algebra	III	Modro	0,24
	8.a.1	0,14	Geometrija in merjenje	I	Nad modrim	0,06
	4.c.1	0,41	Aritmetika in algebra	II	Rumeno	0,72
	9.e	0,41	Druge vsebine	IV	modro	0,26
Zelo neskladno vrednotenje	4.a.1	15,50	Aritmetika in algebra	I	rdeče	0,51
	7.c	17,56	Druge vsebine	IV	modro	0,31

5. Marjan je iz lesa izdelal dve enako visoki pravilni štiristrani prizmi, ki ju je postavil eno na drugo. Narisal je, kako se postavitev vidi od strani in kako od zgoraj, ter zapisal podatke.



5. b) Koliko odstotkov zgornje ploskve večje prizme ne pokrije spodnja ploskev manjše prizme?

Spodnja ploskev manjše prizme ne pokrije ________ % zgornje ploskve večje prizme.

5.b	1	• 64 (%)

Slika 8: Naloga 5.b in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 9. razred, 2021.

4. a) Izračunaj vrednost izraza $x + 2 - (5x + 4y) \cdot xy$, če sta vrednosti spremenljivk $x = 0$ in $y = -10$.

Reševanje:

4.a	4.a.1	1	• vstavljene vrednosti spremenljivk x in y v dani oziroma ekvivalentni izraz	Učenec dobi točko 4.a.1, če se iz njegovega zapisa vidi, da sta vrednosti za x in y pravilno vstavljeni, npr.: $0+2-(5\cdot 0+4\cdot(-10))\cdot 0\cdot(-10)$ oz. $0+2-(0-40)\cdot 0$

Slika 9: Naloga 4.a in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 9. razred, 2021.

če se iz učenčevega zapisa vidi, da so vrednosti spremenljivk pravilno vstavljene (Slika 9). Ocenjevalci so lahko pri vrednotenju spregledali dodatno navodilo.

V postavki 7.c ocenjevalec ovrednoti pravilno oz. smiselno utemeljitev (Slika 10). Vseh utemeljitev v moderiranih navodilih ni zapisanih, kar je predstavljalo dodatno težavo pri vrednotenju, saj se je moral ocenjevalec odločiti, ali je utemeljitev matematično sprejemljiva ali ne. Hkrati je moral biti ocenjevalec pozoren na dodatna navodila. Različne možnosti ustreznih in neustreznih utemeljitev so predstavili Bone idr. (2021). Pri tej nalogi utemeljevanja ugotavljamo, da so jo učenci slabše reševali, hkrati pa tudi učitelji slabše vrednotili. Večjo skrb in pozornost je treba nameniti postopkom utemeljevanja, z ustreznimi didaktičnimi pristopi in strategijami (Doz, 2023; Bone idr., 2021).

7. Na kmetiji so nabrali 0,75 tone jabolk.

7. c) Ali bi lahko z vsemi nabranimi jabolki napolnili zaboje, da bi bilo v vsakem po 18 kg jabolk? Utemelji.

Utemeljitev:

7.c	1	• Smiselna utemeljitev. Npr.: – ne, saj 750 ni deljivo z 18, – ne, utemeljeno z računom $750 : 18 = 41{,}\overline{6}$ in zapisom, da količnik ni naravno število oz., da se deljenje ne izide.	Oziroma glede na 7.a.1. Učenec točke 7.c ne dobi, če je v odgovoru zapisano število jabolk (npr.: ostane 12 jabolk).

Slika 10: Naloga 7.c in moderirana navodila za vrednotenje, NPZ 9. razred, 2021.

Zaključki

V raziskavi ugotavljamo razmeroma dobro generalno kakovost vrednotenja preizkusov matematike. Povprečna odstopanja različnih skupin ocenjevalcev NPZ matematike v 6. in 9. razredu so namreč razmeroma nizka. Eno temeljnih vprašanj naše raziskave se je dotikalo veljavnosti kontrolnih mehanizmov standardizacije in vrednotenja kontrolnih preizkusov pri vrednotenju NPZ matematike. Rezultati kažejo, da sta mehanizma uporabna pri ločevanju natančnih in manj natančnih ocenjevalcev. Rezultati odstopanj kombinacij skupin standardizacije in kontrolnega vrednotenja kažejo trend, da ocenjevalci, ki pri obeh kontrolnih mehanizmih bolj odstopajo, bolj odstopajo tudi pri vrednotenju dejanskih preizkusov NPZ matematike. Mehanizma sta torej koristna in veljavna za detektiranje manj natančnih ocenjevalcev.

Zanimiv je trend, da četudi smo razlike med kombinacijami skupin zabeležili pri obeh indeksih odstopanj, so statistično značilne predvsem razlike v povprečnih kumulativnih odstopanjih, ne pa v povprečnih skupnih odstopanjih. Razlog gre morebiti iskati v dejstvu, da so naloge matematike predvsem objektivnega tipa, zato se razlike nemara izkažejo v bolj natančni, podrobni meri odstopanj (kumulativnih odstopanjih), ne pa v bolj celostni meri (skupnih odstopanjih). Postavke matematike so pogostoma tudi soodvisne – vrednotijo se namreč ločeno glede na postopek, izračun, odgovor ipd. Tudi to se lahko odraža v zabeleženih kumulativnih odstopanjih.

Rezultati analiz, ločeni glede na standardizacijo in vrednotenje kontrolnih preizkusov, ne dajo jasnega odgovora, kateri mehanizem je učinkovitejši pri detekciji boljših oziroma slabših ocenjevalcev. Pri vrednotenju NPZ matematike v 9. razredu se namreč za koristnejše izkazujejo preizkusi za standardizacijo, pri vrednotenju v 6. razredu pa kontrolni preizkusi. Pri obeh mehanizmih se sicer izkazuje jasen trend, da ocenjevalci, ki bolj odstopajo pri vrednotenju standardizacijskih oz. kontrolnih preizkusov, bolj odstopajo tudi pri vrednotenju dejanskih preizkusov. Rezultati torej implicirajo, da sta oba mehanizma veljavna in uporabna ter ju velja obdržati v postopku vrednotenja preizkusov NPZ tudi v prihodnje. Mehanizma imata tudi nekoliko različno funkcijo, standardizacija skrbi predvsem za umeritev ocenjevalcev z navodili za vrednotenje, kontrolni preizkusi pa so namenjeni doseganju zadovoljive zanesljivosti med samim vrednotenjem.

Naloge oz. postavke, ki so vrednotene skladno z referenčnim vrednotenjem in naloge, ki zelo odstopajo od referenčnega vrednotenja, so različnih taksonomskih stopenj, prevladujejo naloge iz aritmetike in algebre ter drugih vsebin, po večini pa spadajo v rdeče in modro območje ter v območje nad modrim. Indeks težavnosti teh nalog je raznolik. Nismo zaznali bistvenih odstopanj pri enih ali drugih nalogah. Naloge, ki so bolje vrednotene, so naloge zaprtega tipa, kjer ocenjevalci upoštevajo le odgovor oz. rešitev, ki je napisana tudi v moderiranih navodilih. Pri nalogah, kjer je treba upoštevati še dodatna navodila, vrednotenje bolj odstopa, a to še ne pomeni, da takih nalog v naslednjih nacionalnih preizkusih znanja matematike ne bi bilo več smiselno dajati. Pozornost je treba usmeriti v sestavo kakovostnih nalog in zapis navodil za vrednotenje. Ozaveščanje ocenjevalcev o doslednem upoštevanju moderiranih navodil za vrednotenje je ključno pri izboljševanju vrednotenja.

Analiza vrednotenj po nalogah oz. postavkah nam nakazuje, da je v 6. razredu več nalog, kjer je zaznati odstopanja, višja od 10 %. Razlog gre morda iskati v tem, da preizkuse za 6. razred vrednotijo tudi učitelji in učiteljice razrednega pouka. Za namen izboljšanja vrednotenja Predmetna komisija za matematiko pri NPZ izvede izobraževanja, kjer se ocenjevalci seznanijo z načinom, pomenom in postopki vrednotenja … Iz rezultatov te raziskave lahko sklepamo, da je izobraževanje ocenjevalcev potrebno, saj bo pripomoglo k izboljšanju vrednotenja.

Pričujoča raziskava ponuja obilo relevantnih in uporabnih ugotovitev. V pretežni meri smo namreč potrdili veljavnost kontrolnih mehanizmov pri vrednotenju preizkusov NPZ matematike. Opravili smo analizo nalog/postavk in izpostavili značilnosti teh, ki so bolj oz. manj problematične za vrednotenje. Ugotovitve prav tako ponujajo aplikativna vodila za nadaljnje oblikovanje postopka vrednotenja preizkusov NPZ matematike. Analiza po nalogah daje uporabne usmeritve za oblikovanje nalog, ki so manj težavne pri samem vrednotenju. Naloge, ki so se izkazale težje za vrednotenje (npr. naloge utemeljevanja), naj učitelji uvajajo v proces poučevanja (od preverjanja do ocenjevanja). Učenci bodo pridobili znanja in veščine, kako take naloge reševati, učitelji pa, kako podati učencu povratno informacijo in jih ovrednotiti.

Raziskava ima tudi nekaj omejitev. Je prečnega raziskovalnega pristopa in zajema zgolj podatke enega leta. Vzorec vključuje zgolj del ocenjevalcev NPZ matematike in le del njihovih ovrednotenih preizkusov. Raziskava tudi ni bila kvalitativna. Vse našteto omejuje reprezentativnost študije. Raziskavo bi bilo smiselno ponoviti, tako bi lahko namreč opazovali trende pri vrednotenju. Prihodnje študije bi lahko natančneje – z rabo eksperimentalne metode – preučile učinkovitost kontrolnih mehanizmov (npr. v kolikšni meri se natančnost vrednotenja zaradi njih izboljša). Podobno naj prihodnje študije z drugimi raziskovalnimi pristopi naslovijo tudi dognanja, ki se tičejo karakteristik nalog in navodil za vrednotenje, ki se povezujejo z natančnostjo ocenjevalcev pri njihovem vrednotenju.

Viri in literatura

Bone, J., Cotič, M. in Felda, D. (2021). Utemeljevanje pri pouku matematike. *Pedagoška Obzorja*, *36*(1), 33–52.

Doz, D. (2023). Mathematical reasoning: what are the issues? V A. Žakelj, M. Cotič, Đ. Kadijević in A. Lipovec (Ur.), *Selected topics in the didactics of mathematics* (str. 107–125). Založba Univerze na Primorskem.

Hauptman, A. (2012). Spreminjanje prepričanj učiteljev o samoevalvaciji šole ter vpliv na vedenje učiteljev in dosežke učencev. *Psihološka obzorja*, *21*(2), 19–28.

Hellrung, K. in Hartig, J. (2013). Understanding and using feedback – A review of empirical studies concerning feedback from external evaluations to teachers. *Educational Research Review*, *9*, 174–190.

Janet, D. in Cankar, G. (2023). *Zagotavljanje kakovosti pri vrednotenju preizkusov nacionalnega preverjanja znanja* [Rokopis oddan za objavo]. Državni izpitni center.

Javornik Krečič, M. (2005). Ocenjevanje znanja z vidika izsledkov empirične raziskave: kako se z leti šolanja spreminjajo značilnosti ocenjevanja znanja in zahteve učitelja pri ocenjevanju. *Vzgoja in izobraževanje*, *36*(4/5), 73–81.

Klanjšek, R., Flere, S. in Lavrič, M. (2007). Kognitivni in družbenoekonomski dejavniki šolskega uspeha v Sloveniji. *Družboslovne razprave*, *23*(55), 49–69.

Marjanovič Umek, L., Sočan, G. in Grgić, K. (2006). Šolska ocena: koliko jo lahko pojasnimo z individualnimi značilnostmi mladostnika in koliko z dejavniki družinskega okolja. *Psihološka obzorja*, *4*(15), 25–52.

Ljubica Marjanovič, U., Sočan, G. in Bajc, K. (2007). Vpliv psiholoških dejavnikov in izobrazbe staršev na učno uspešnost mladostnikov. *Psihološka obzorja, 16*(3), 27–48.

Panhoon, S. in Wongwanich, S. (2014). An analysis of teacher feedback for improving teaching quality in primary schools. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *116*, 4124–4130.

Ric (2021a). *Matematika. Navodila za vrednotenje 6. razred*. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-6%20-razredu/matematika/

Ric (2021b). *Matematika. Navodila za vrednotenje 9. razred*. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-9%20-razredu/matematika/

Ric (2021c). *Matematika. Preizkus znanja 6. razred*. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-6%20-razredu/matematika/

Ric (2021d). *Matematika. Preizkus znanja 9. razred*. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-9%20-razredu/matematika/

Ric (2021e). *Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2020/2021. Ljubljana: Državni izpitni center.* https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/porocila--analize--raziskave/

Ric (2022a). *Nacionalno preverjanje znanja. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2021/2022. Ljubljana: Državni izpitni center.* https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/porocila--analize--raziskave/

Ric (2022b). Struktura in opis preizkusa znanja za NPZ v 6. razredu. *Ljubljana: Državni izpitni center. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-6%20-razredu/matematika/*

Ric (2022c). Struktura in opis preizkusa znanja za NPZ v 9. razredu. *Ljubljana: Državni izpitni center. https://www.ric.si/nacionalno-preverjanje-znanja/predmeti-npz/predmeti-v-9%20-razredu/matematika/*

RM Assessor (2019). *Kratek vodnik po programu za e-ocenjevanje pri NPZ*. RM Education Ltd.

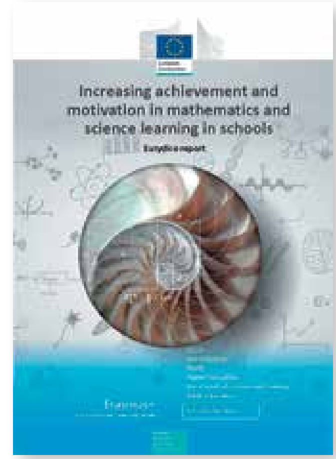
Smith, M. L. (1991). Put to the test: The effects of external testing on teachers. *Educational researcher*, *20*(5), 8–11.

Škalič, M. in Grmek, M. I. (2017). Stališča staršev do nacionalnega preverjanja znanja ob koncu drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja. *Journal of Elementary Education*, *10*(1), 57–72.

Vitulić, H. S. in Lesar, I. (2014). Prepričanja učencev, staršev in učiteljev o notranjih dejavnikih učne uspešnosti. *Journal of Elementary Education*, *7*(1), 19–32.

Učni dosežki pri matematiki in motivacija za učenje

Achievement in Mathematics and Motivation in Learning



mag. Karmen Svetlik
Pedagoški inštitut, Eurydice Slovenija

Izvleček

V članku predstavljamo ključne ugotovitve o učnih dosežkih pri matematiki, učencih z nizkimi učnimi dosežki, učni pomoči, spremljanju učnih dosežkov in številu ur pouka iz študije *Izboljševanje učnih dosežkov in motivacije za učenje matematike in naravoslovja v šoli (Increasing achievement and motivation in mathematics and science learning in schools).*

Ključne besede: učni dosežki, matematika, učenci z nizkimi dosežki, učna pomoč, motivacija

Abstract

In the article, we present key findings on learning achievements in mathematics, on students with low learning achievements, teaching aids, monitoring of learning achievements and the number of lessons from the study Increasing achievement and motivation in mathematics and science learning in schools.

Keywords: learning achievements, mathematics, students with low learning achievements, motivation

Uvod

Omrežje Eurydice je junija 2022 objavilo mednarodno poročilo Izboljševanje učnih dosežkov in motivacije za učenje matematike in naravoslovja v šoli (Increasing achievement and motivation in mathematics and science learning in schools). Publikacija je zasnovana na podlagi rezultatov dveh mednarodnih raziskav o dosežkih učencev (TIMSS in PISA) ter podatkov o nacionalnih politikah in zakonodaji, povezanih z evropskimi sistemi izobraževanja. V ospredju publikacije so učenci z nizkimi dosežki. Ugotovitve kažejo, da na matematično pismenosti vpliva kombinacija različnih dejavnikov, učna pomoč učencem med poukom, sistematično spremljanje dosežkov učencev, število ur poučevanja in vsebine oziroma cilji učnih načrtov, ki spodbujajo razmišljanje in se navezujejo na življenje učencev.

Omrežje Eurydice

Eurydice je evropsko informacijsko omrežje za izmenjavo podatkov o izobraževanju. Leta 1980 ga je ustanovila Evropska komisija. Od leta 2014 deluje v okviru programa Erasmus+. Sestavlja ga 40 nacionalnih enot v 37 državah s sedežem v Bruslju. Nacionalna enota Eurydice Slovenija je na Ministrstvu za vzgojo in izobraževanje, Uradu za izobraževanje, Sektorju za kakovost in analize. Poslanstvo Eurydice je (1) zagotavljati zanesljive in relevantne podatke s področja izobraževanja, (2) analizirati različne vidike izobraževalnih sistemov, (3) prispevati k evropskemu razumevanju izobraževanja in (4) podpreti na dokazih temelječe politično odločanje na nacionalni in evropski ravni. Omrežje Eurydice pripravlja (a) spletno enciklopedijo z nacionalnimi sistemi izobraževanja (National education Systems), (b) zbirke različnih indikatorjev, statistik in grafičnih upodobitev strukture sistema in (c) primerjalne študije. Poleg naštetega Eurydice Slovenija pripravlja še številna druga gradiva (npr. Publikacija Vzgoja in izobraževanje v Republiki Sloveniji 2021/22, zgibanka Osnovnošolsko izobraževanje v Sloveniji) in dogodke (npr. Konferenca VIP).

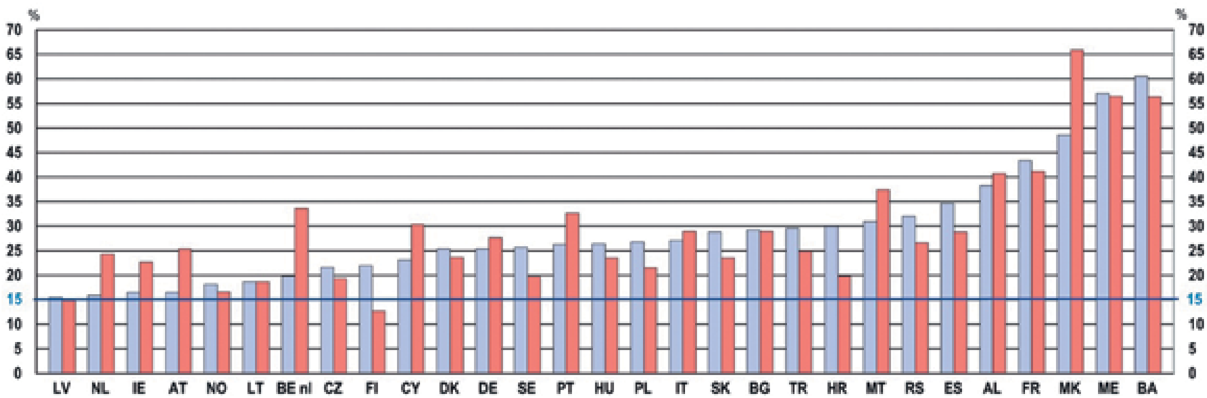
Glavne ugotovitve poročila za matematiko

Poročilo Increasing achievement and motivation in mathematics and science learning in schools (European Commission, 2022) analizira rezultate mednarodnih raziskav TIMSS 2019 (Raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja) in PISA 2018 (Program mednarodne primerjave dosežkov učencev) ter značilnosti evropskih sistemov (nacionalne politike, zakonodaja) in v ospredje postavlja učence z nizkimi dosežki[1] (cilj Evropske komisije 2030, delež 15-letnikov z nizkimi dosežki pri branju, matematiki in naravoslovju pod 15 %).

> Večje kot je število učencev z nizkimi učnimi dosežki v primarnem izobraževanju[2], toliko večje je njihovo število v sekundarnem izobraževanju[3].

V sistemih izobraževanja, v katerih več učencev dosega osnovno raven matematične pismenosti, ima tudi večina podobne, primerljivo visoke učne dosežke oziroma manjšo razliko med učenci z visokimi in tistimi z nizkimi učnimi dosežki. Slovenija v raziskavi TIMSS 2019 ni sodelovala, zato v poročilu ni podatkov za slovenske učence v 4. razredu in posledično podatkov za učence z nizkimi dosežki (Slika 1). Po zadnjih podatkih raziskave TIMSS 2015 je bilo v 4. razredu v Sloveniji 25 % učencev z nizkimi dosežki pri matematiki.

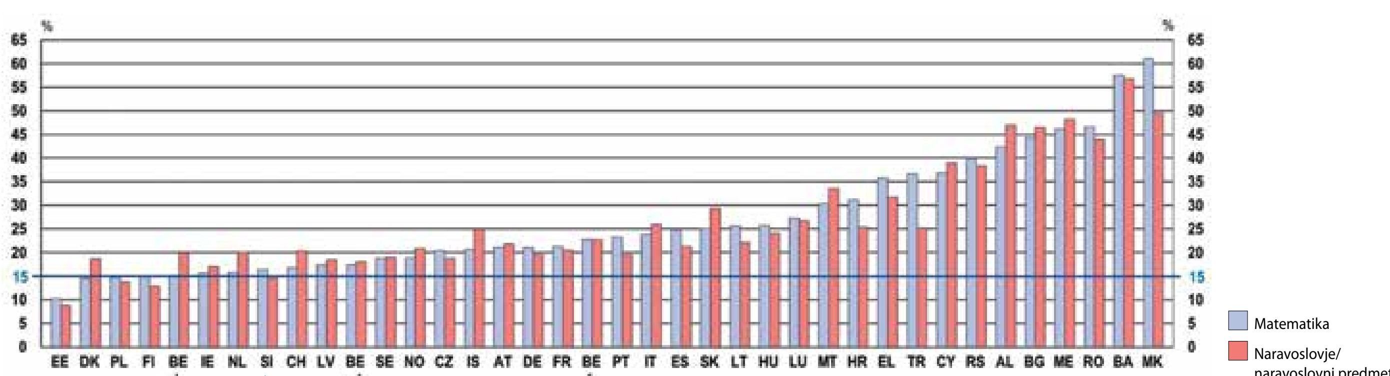
Po podatkih PISA 2018, v kateri sodelujejo 15-letniki, se je delež učencev z nizkimi dosežki pri matematiki (16,4 %) že približal cilju Evropske komisije 2030 (Slika 2).



Oznaka države

EU	Evropska unija				EGP in države kandidatke
BE	Belgija	CY	Ciper	AL	Albanija
BE fr	Belgija – francoska skupnost	LV	Latvija	BA	Bosna in Hercegovina
BE de	Belgija – nemško govoreča skupnost	LT	Litva	CH	Švica
BE nl	Belgija – flamska skupnost	LU	Luksemburg	IS	Islandija
BG	Bolgarija	HU	Madžarska	LI	Lihtenštajn
CZ	Češka	MT	Malta	ME	Črna gora
DK	Danska	NL	Nizozemska	MK	Severna Makedonija
DE	Nemčija	AT	Avstrija	NO	Norveška
EE	Estonija	PL	Poljska	RS	Srbija
IE	Irska	PT	Portugalska	TR	Turčija
EL	Grčija	RO	Romunija		
ES	Španija	SI	Slovenija		
FR	Francija	SK	Slovaška		
HR	Hrvaška	FI	Finska		
IT	Italija	SE	Švedska		

Slika 1: Delež učencev z nizkimi dosežki pri matematiki (in naravoslovju/naravoslovnih predmetih), 4. razred, TIMSS 2019 (Vir: European Commission, 2022, sl. 1.1, str. 23).



Slika 2: Delež 15-letnih učencev z nizkimi dosežki pri matematiki in (naravoslovju/naravoslovnih predmetih), PISA 2018 (Vir: European Commission, 2022, sl. 1.2, str. 25).

1 Učenci z nizkimi dosežki so definirani glede na mednarodni raziskavi (1) TIMSS (učenci, ki ne dosegajo mejnika srednjega znanja in izkazujejo nekaj osnovnega matematičnega znanja, European Commission, 2022, str.23) in (2) PISA (učenci, ki ne dosegajo 2. ravni znanja in lahko odgovarjajo le na tista matematična vprašanja, ki vključujejo znane kontekste, kjer so prisotne vse pomembne informacije in so vprašanja jasno definirana, European Commission, 2022, str. 24).

2 Primarno izobraževanje (ISCED 1) v Sloveniji: 1.–6. razred osnovne šole.

3 (Nižje) sekundarno izobraževanje (ISCED 2) v Sloveniji: 7.–9. razred osnovne šole.

V skupini z nizkimi dosežki je sorazmerno veliko učencev s slabim socialno-ekonomskim ozadjem v vseh evropskih sistemih izobraževanja. Po podatkih PISA 2018 je v Sloveniji razlika med skupino učencev z ugodnejšim in skupino z manj ugodnim socialno-ekonomskim ozadjem statistično pomembna, 19,7 odstotnih točk pri matematiki (European Commission, 2022, sl. 1.6, str. 32). V večini držav med učenci z nizkimi dosežki pri primerjavi učnih dosežkov vpliv spola ni izrazit. Tudi Slovenija pri 15-letnikih ne beleži statistično pomembnih razlik med spoloma pri dosežkih iz matematike (Svetlik, 2023, sl. 1, str. 5).

V sistemih izobraževanja, v katerih izvajajo učno pomoč med rednim poukom (in ne samo po rednem pouku), je pogosto manjši odstotek učencev z nizkimi učnimi dosežki pri matematiki.

Le v majhnem deležu sistemov izobraževanja so vzpostavili poseben sistem pomoči in podpore učencem pri učenju matematike. V Sloveniji sistem učencem z učnimi težavami (tistimi, ki težko dosegajo standarde znanja) omogoča prilagoditev metod in oblik dela pri pouku ter jim omogoča vključitev v dopolnilni pouk in druge oblike individualne ali skupinske pomoči (Zakon o osnovni šoli, 12.a člen).

Z vključevanjem učiteljev s kompetencami za dodatno strokovno pomoč učencem z nizkimi učnimi dosežki je lahko izvajanje pomoči učinkovitejše.

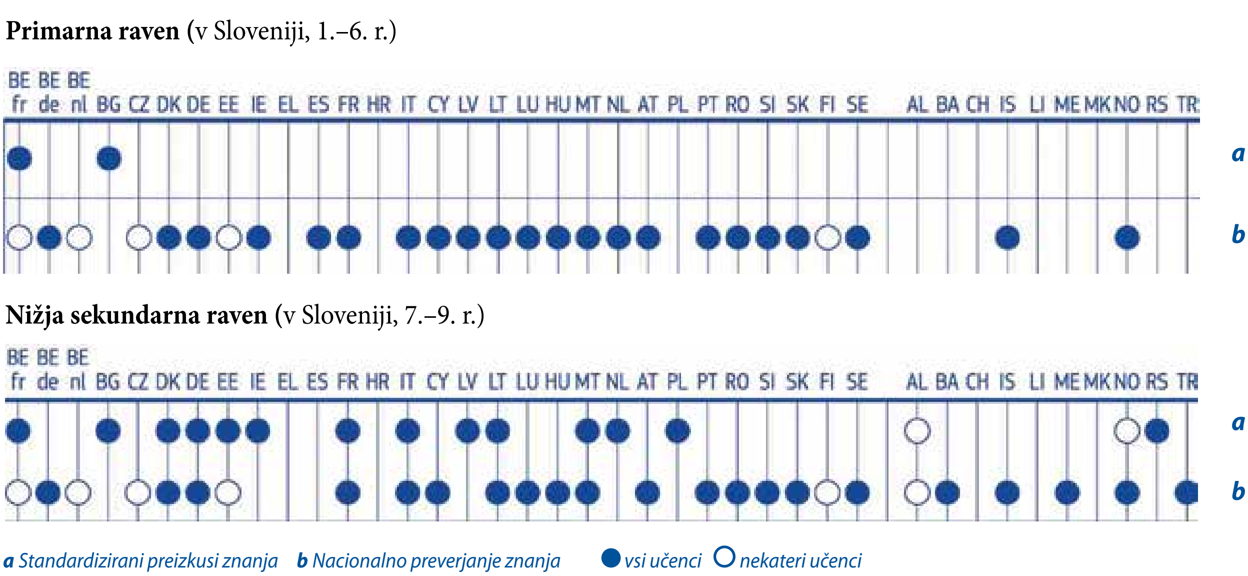
Trenutno samo v tretjini sistemov izobraževanja zaposlujejo učitelje za dodatno strokovno pomoč, ki so v podporo pri zagotavljanju učne pomoči učencem z nizkimi učnimi dosežki. Učna pomoč je najpogosteje dolžnost in odgovornost učiteljev v razredu. Učitelji zagotavljajo dodatno strokovno pomoč pri učenju matematike pogosteje kot pri učenju naravoslovnih predmetov.

V državah z nacionalnimi preizkusi znanja matematike je običajno manj učencev, ki ne dosegajo osnovne ravni matematične pismenosti.

Nacionalni preizkus znanja lahko da standardizirano referenčno raven in s tem odpravi nepravilnosti zaradi morebitnega pristranskega ocenjevanja posameznega učitelja. V sistemih izobraževanj z organiziranimi certificiranimi preizkusi znanja in/ali nacionalnimi preverjanji znanja iz matematike na primarni ravni je odstotek učencev z nizkimi učnimi dosežki manjši. Večina izobraževalnih sistemov izvaja nacionalne preizkuse znanja iz matematike, tudi pri nas (Slika 3).

Več časa, dodeljenega za učenje matematike v nižjem sekundarnem izobraževanju, skupaj z ukrepi pomoči učencem z učnimi težavami med rednim poukom, lahko pomeni manjše število učencev z nizkimi učnimi dosežki.

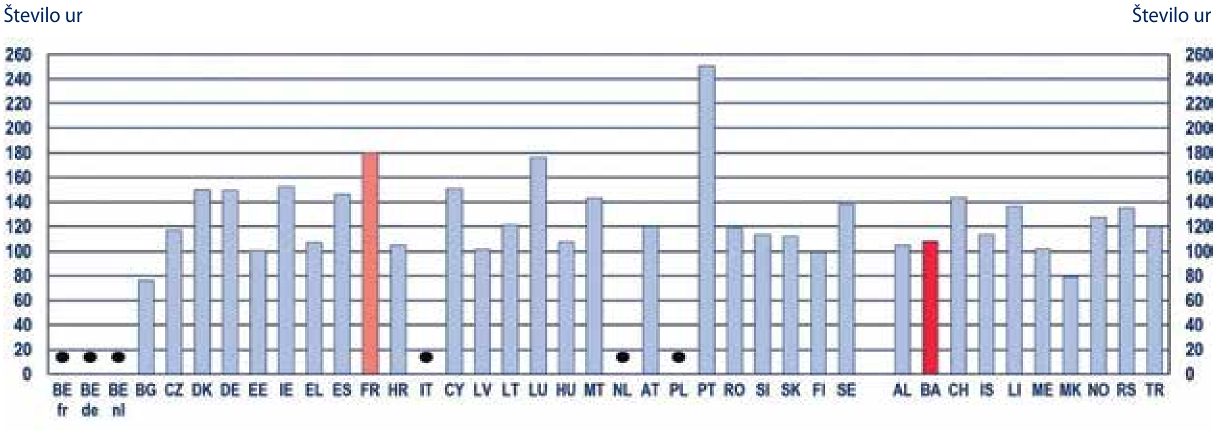
V večini sistemov izobraževanja je čas pouka matematike daljši na primarni kot na nižji sekundarni ravni, tudi pri nas (Sliki 4 in 5). V Sloveniji od 1.–6. razreda (primarna raven, ISCED 1) pouku matematike letno namenimo 114[4] ur po 60 minut (16,7 % vseh ur v predmetniku) in od 7.–9. razreda (nižja sekundarna raven, ISCED 2) 102[5] uri po 60 minut (13,3 % vseh ur v predmetniku) (European Commission, 2021, str. 23).



Slika 3: Standardizirani preizkusi znanja in/ali nacionalna preverjanja znanja iz matematike, primarna in nižja sekundarna raven, 2020/2021 (Vir: European Commission, 2022, sl. 4.6, str. 71).

4 Število »naših« ur po 45 min preračunano na ure po 60 min. Torej, od 1. do 6. razreda: 140 + 140 + 175 + 175 + 140 + 140 = 910; 910·45 : 60 = 683; 683 : 6 = 114.

5 Število »naših« ur po 45 min preračunano na ure po 60 min. Torej, od 7. do 9. razreda: 140 + 140 + 128 = 408; 408 : 45 · 60 = 306; 306 : 3 = 102.



Število ur za matematiko

Število ur za matematiko, ure vključujejo tudi število ur drugih predmetov za en ali več razredov

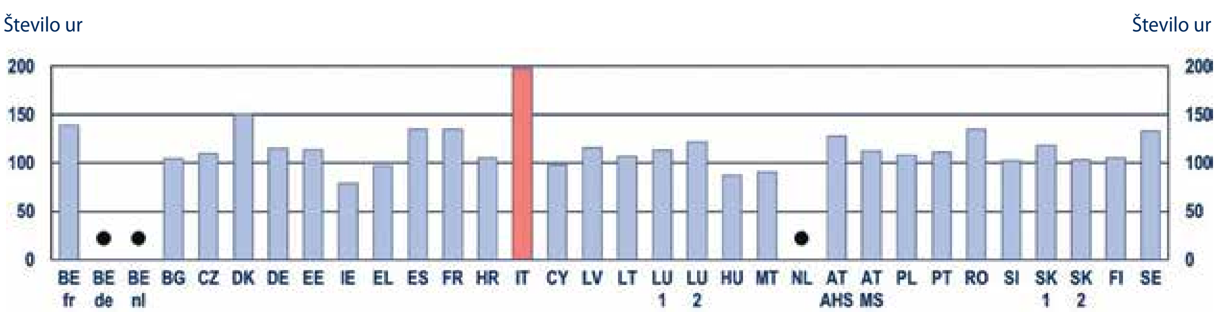
Število ur za matematiko, vključenih v število ur drugega (ih) predmeta (ov) za en ali več razredov

Horizontalna prilagodljivost

BE fr	BE de	BE nl	BG	CZ	DK	DE	EE	IE	EL	ES	FR	HR	IT	CY	LV	LT	LU	HU	MT
●	●	●	76	117	150	150	101	153	107	146	180	105	●	151	102	122	176	107	143
NL	**AT**	**PL**	**PT**	**RO**	**SI**	**SK**	**FI**	**SE**		**AL**	**BA**	**CH**	**IS**	**LI**	**ME**	**MK**	**NO**	**RS**	**TR**
●	120	●	251	119	114	112	100	138		105	108	143	113	137	102	80	127	135	120

Opomba: Prikazano število ur je skupno število ur poučevanja deljeno s številom let trajanja primarnega izobraževanja (v Sloveniji, 1.–6. r.).

Slika 4: Obseg pouka matematike na leto po sistemih izobraževanja, primarna raven (v Sloveniji, 1.–6. r.), 2020/2021 (Vir: European Commission, 2022, sl. 3.5, str. 56)



Število ur za matematiko

Število ur za matematiko, ure vključujejo tudi število ur drugih predmetov za en ali več razredov

Število ur za matematiko, vključenih v število ur drugega (ih) predmeta (ov) za en ali več razredov

Horizontalna prilagodljivost

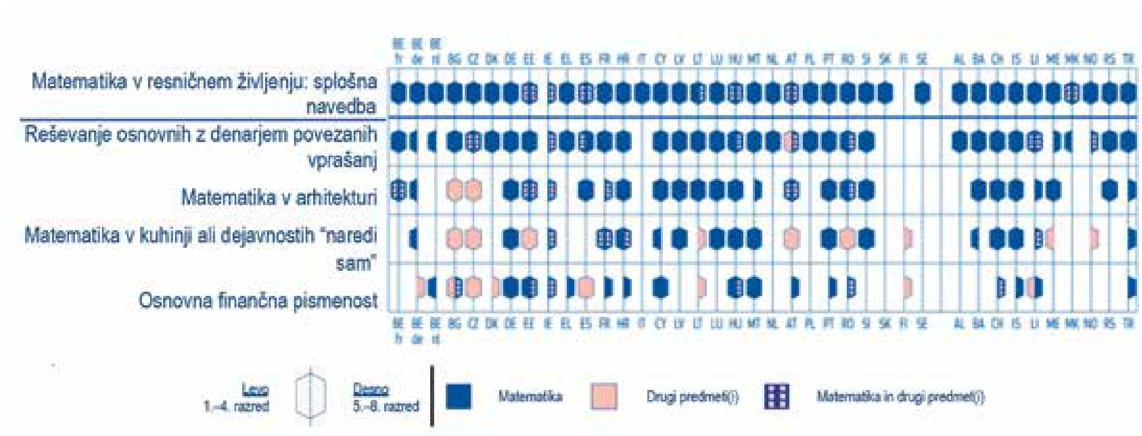
BE fr	BE de	BE nl	BG	CZ	DK	DE	EE	IE	EL	ES	FR	HR	IT	CY	LV	LT	LU 1	LU 2	HU	MT	NL
139	●	●	104	110	150	115	114	79	97	135	135	105	198	98	116	106	113	122	87	90	●
AT AHS	**AT MS**	**PL**	**PT**	**RO**	**SI**	**SK 1**	**SK 2**	**FI**	**SE**	**AL**	**BA**	**CH**	**IS**	**LI Gym**	**LI Obs**	**LI Reals**	**ME**	**MK**	**NO**	**RS**	**TR**
128	113	108	111	135	102	118	103	105	133	105	107	148	113	130	137	137	100	68	104	107	120

Opomba: Prikazano število ur je skupno število ur poučevanja deljeno s številom let trajanja nižjega sekundarnega izobraževanja (v Sloveniji, 7.–9. r.).

Slika 5: Obseg pouka matematike na leto po sistemih izobraževanja, nižja sekundarna raven (v Sloveniji, 7.–9. r.), 2020/2021 (Vir: European Commission, 2022, sl. 3.6, str. 57).

Izboljševanje motivacije za učenje matematike

Uporabnost matematike vzbuja pri učencih zanimanje za učenje matematike. V vseh učnih načrtih programov primarnega in sekundarnega izobraževanja evropskih držav so vključeni primeri uporabe matematike iz resničnega življenja učencev v različnih kontekstih. Tudi Učni načrt za matematiko v Sloveniji spodbuja povezovanje matematike z vsakdanjim življenjem učencev. Vendar pa v njem manjkajo vsebine, povezane s finančno pismenostjo (Slika 6).



Slika 6: Izbrani primeri uporabe matematičnih konceptov iz vsakdanjega življenja, obravnavanih po programu, 2020/2021 (Vir: Svetlik, 2023, sl. 3, str. 9).

> Učiteljev matematike primanjkuje, priložnosti za stalni profesionalni razvoj na teh področjih ni dovolj.

Učitelji, ki poučujejo matematiko na primarni (v Sloveniji, 1.–6. razred) in nižji sekundarni (v Sloveniji, 7.–9. razred) ravni imajo različno izobrazbo, lahko so razredni ali predmetni učitelji (European Commission, 2022, str.66). Kdo in kateri razred poučuje matematiko v posameznih sistemih izobraževanja, je prikazan na sliki 7. V skoraj vseh sistemih poučujejo matematiko na primarni ravni razredni učitelji (običajno štiri do šest let). Na nižji sekundarni praviloma poučujejo predmetni učitelji. Tudi v Sloveniji na primarni ravni od prvega do petega razreda matematiko poučujejo učitelji razrednega pouka. Zadnje leto primarnega izobraževanja (6. razred) pa lahko glede na Zakon o osnovni šoli (38. člen) predmet poučujejo razredni ali predmetni učitelji. Od 7. razreda naprej matematiko poučujejo samo predmetni učitelji.

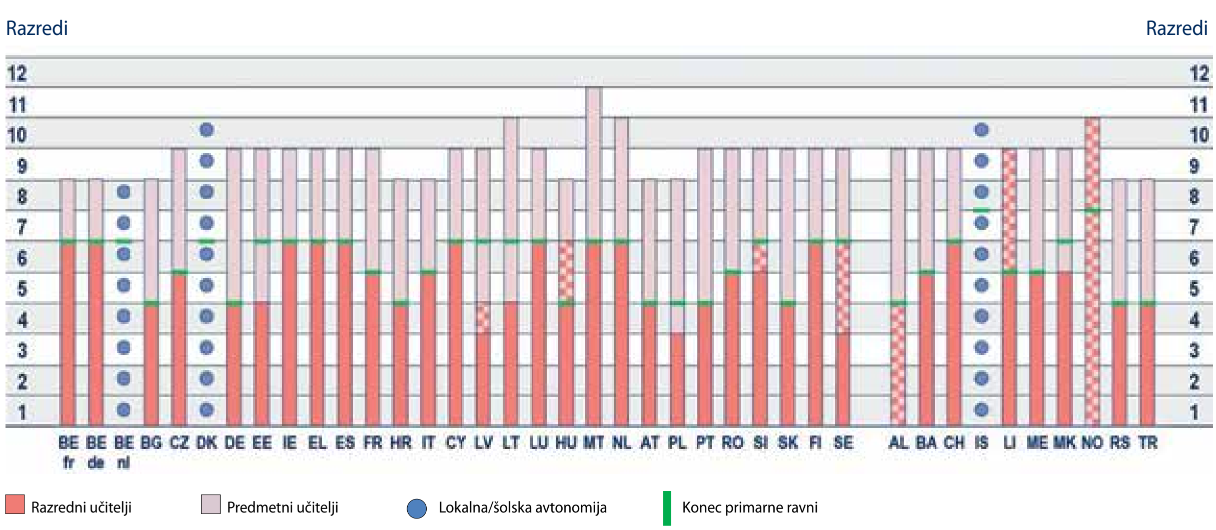
Iz 28 sistemov izobraževanja od 39, nacionalne enote Eurydice poročajo o primanjkljaju učiteljev matematike (in/ali naravoslovja/naravoslovnih predmetov), tudi pri nas (Slika 8). Na pomanjkanje učiteljev se je Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje že odzvalo s štipendijami za pedagoške študijske programe na področju matematike, fizike, kemije in računalništva.

Podatki raziskave TIMSS 2019 so pokazali tudi, da učitelji matematike izražajo potrebo po izpopolnjevanju za poučevanje predmeta (European Commission, 2022, str. 68).

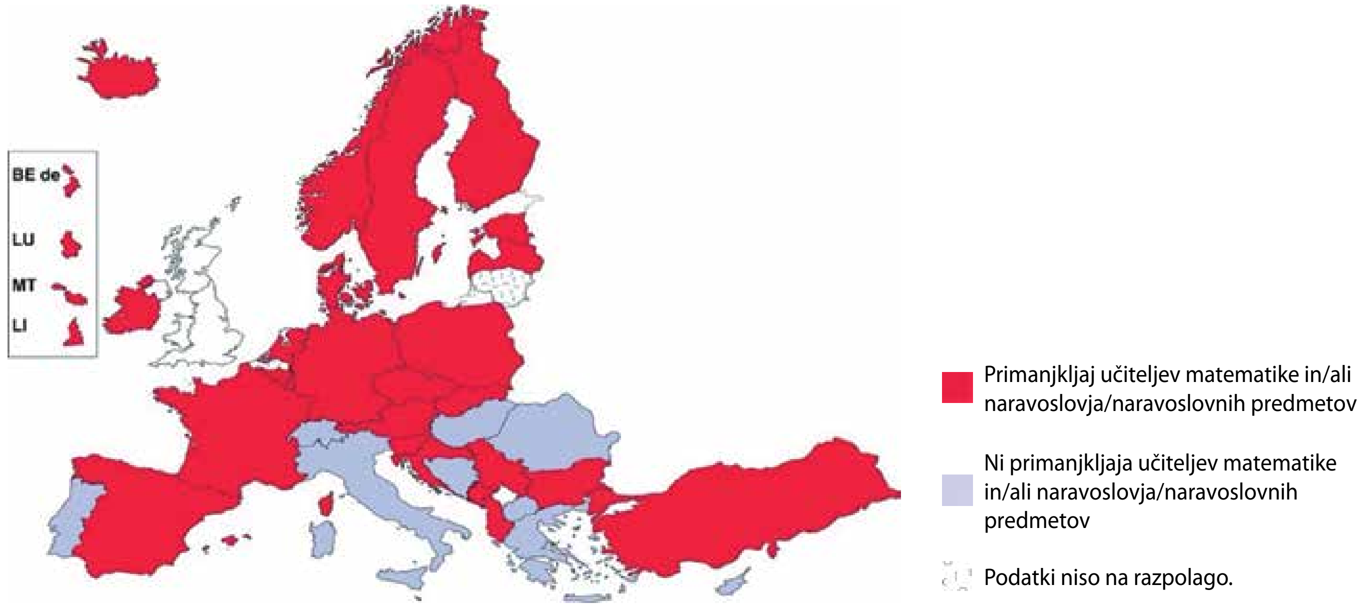
> Odstotek učencev z nizkimi učnimi dosežki je mogoče učinkoviteje zmanjšati s kombinacijo političnih ukrepov kot s posameznimi akcijami.

Da več učencev doseže osnovno raven matematične pismenosti, lahko prispevajo določeni politični ukrepi in predvsem kombinacija dopolnjevalnih dejavnikov. Rezultati analize v poročilu so pokazali na pomembno razmerje med naslednjimi vidiki politik in številom učencev z nizkimi dosežki:

- učna pomoč med rednim poukom, ki jo organizirajo ali izvajajo učitelji za dodatno strokovno pomoč ves čas primarnega in sekundarnega izobraževanja;



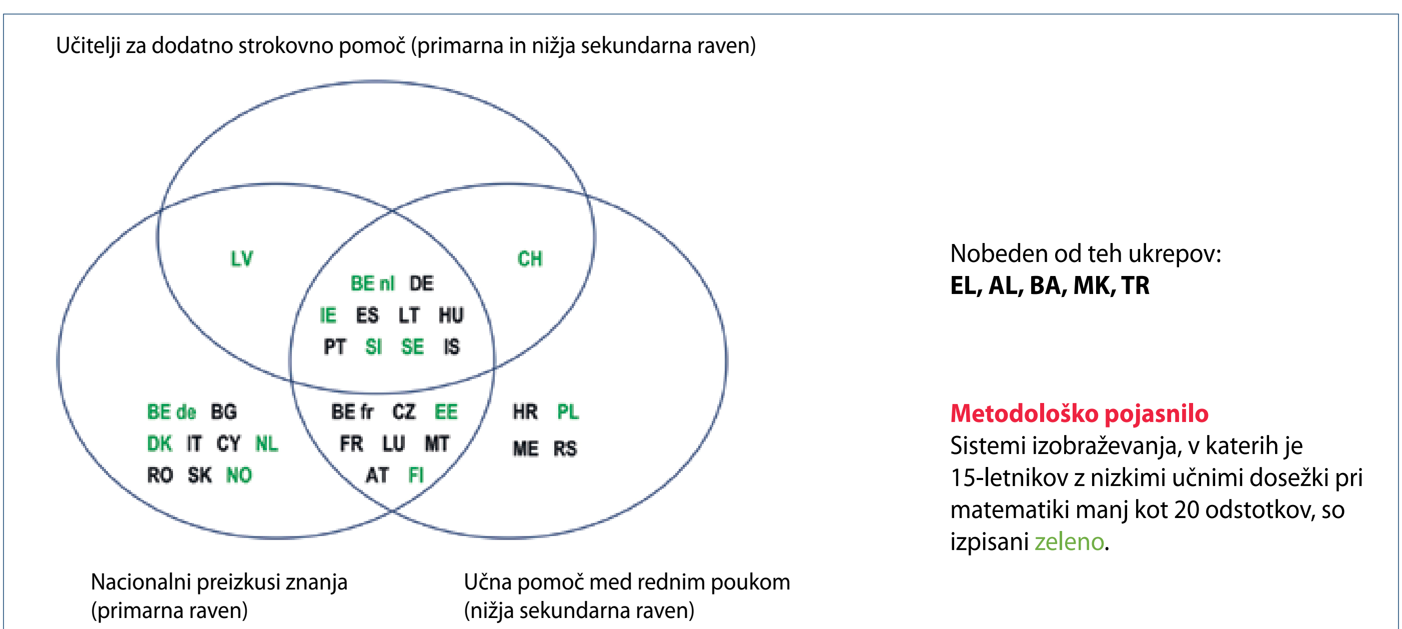
Slika 7: Učitelji matematike in naravoslovja/naravoslovnih predmetov, primarna in nižja sekundarna raven, 2020/2021 (Vir: European Commission, 2022, sl. 4.3, str. 66).



Slika 8: Primanjkljaj učiteljev matematike in naravoslovja/naravoslovnih predmetov, 2020/2021 (Vir: European Commission, 2022, sl. 4.4, str. 67).

- daljši skupni čas pouka matematike, predvsem v nižjem sekundarnem izobraževanju;
- sistematično spremljanje dosežkov učencev (npr. nacionalni preizkusi znanja že v primarnem izobraževanju);
- vsebine oz. cilji učnih načrtov, ki spodbujajo razmišljanje in se navezujejo na življenje učencev.

Ena izmed možnih kombinacij podpore učencem z nizkimi učnimi dosežki je prikazana na sliki 9. Prikazana je kombinacija treh izbranih ukrepov v povezavi z matematičnimi dosežki 15-letnikov na raziskavi PISA 2018. Pokaže se, da v vseh sistemih izobraževanja z manj kot 20 odstotkov učencev, ki ne dosegajo osnovne ravni matematične pismenosti, izvajajo najmanj enega, pogosto dva od treh ukrepov: (1) nacionalni preizkusi znanja v primarnem izobraževanju, (2) učna pomoč med rednim poukom v nižjem sekundarnem izobraževanju in (3) vključevanje učiteljev za dodatno strokovno pomoč učencem z nizkimi učnimi dosežki v primarnem in/ali nižjem sekundarnem izobraževanju (Slika 9). V nekaterih drugih državah (Grčija, Albanija, Bosna in Hercegovina, Severna Makedonija in Turčija), v katerih ne izvajajo nobenega od teh treh ukrepov, več kot 35 odstotkov 15-letnikov ne dosega osnovne ravni matematične pismenosti. V slovenskem sistemu izobraževanja obstajajo oziroma se izvajajo vsi trije ukrepi za zmanjševanje deleža učencev z nizkimi učnimi dosežki. Doslej se je izvajanje ukrepov pokazalo kot pozitivno.



Slika 9: Kombinacije političnih ukrepov in odstotkov učencev z nizkimi dosežki pri matematiki, 2020/2021 (Vir: Svetlik, 2023, sl. 7, str.13).

Zaključek

Poročilo prikazuje pregled politik na področju poučevanja matematike in kako si v različnih evropskih sistemih izobraževanja prizadevajo, da bi okrepili motivacijo učencev, izboljšali dosežke in pomagali tistim, ki ne dosegajo osnovne ravni matematične pismenosti. Ugotovitve poročila lahko prispevajo tudi k razmisleku o izboljšavah v izobraževanju. Povzetek glavnih ugotovitev poročila s podatki o slovenskem sistemu izobraževanja (Svetlik, 2023) je preveden tudi v slovenščino. Dostopen je na spletni strani Eurydice Slovenija, kjer je tudi celotno poročilo v angleškem jeziku. Vabljeni k branju!

Viri

European Commission/EACEA/Eurydice (2021). *Recommended Annual Instruction Time in Full-time Compulsory Education in Europe — 2021/21*. Eurydice — Facts and Figures. Luxembourg: Publications Office of the European Union. Dostopno na: *https://www.eurydice.si/publikacije/Recommended-Annual-Instruction-Time-in-Full-time-Compulsory-Education-in-Europe-2020-21-EN.pdf*

European Commission/EACEA/Eurydice (2022). *Increasing achievement and motivation in mathematics and science learning in schools*. Eurydice report. Luxembourg: Publications Office of the European Union. Dostopno na: *https://eurydice.eacea.ec.europa.eu/sites/default/files/2022-06/Increasing_achievement_and_motivation_in_mathematics_and_science_learning_in_schools.pdf*

Eurydice Slovenija. Dostopno na: *https://www.eurydice.si*

Svetlik, K. (ur). (2023). *Izboljševanje učnih dosežkov in motivacije za učenje matematike in naravoslovja v šoli.* Ugotovitve poročila Eurydice z nacionalnimi poudarki. Dostopno na: *https://www.eurydice.si/publikacije/Izboljsevanje-ucnih-dosezkov-in-motivacije-za-ucenje-matematike-in-naravoslovja-v-soli-SI-UG.pdf*

Zakon o osnovni šoli. Dostopno na: *http://www.pisrs.si/Pis.web/pregledPredpisa?id=ZAKO448#*

Preiskovanje v matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence

Inquiry in Mathematics for All – Lessons for Teachers and Students

dr. Kristijan Cafuta in dr. Selena Praprotnik
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Izvleček

V članku povzamemo bistvene značilnosti treh aktualnih raziskovalnih teorij iz preučevanja pedagoških praks učiteljev matematike. To so Teorija didaktičnih situacij (TDS), Učenje matematike v realnem kontekstu (RME) in Lesson Study (LS). Predstavljene teorije obravnavamo s teoretičnega vidika, pri čemer smo vse tri preizkusili tudi v praksi v okviru dveh mednarodnih projektov – MERIA in TIME. Splošen opis vsebin v tem članku je namenjen seznanjanju učiteljev z metodologijo in izrazoslovjem, povezanim s teorijami TDS, RME in LS. Po uvodnem delu v drugem razdelku članka opišemo glavne značilnosti teorije TDS, v tretjem razdelku pa se osredotočimo na teorijo RME. Četrti razdelek je namenjen predstavitvi teorije LS.

Ključne besede: učenje matematike s preiskovanjem, Teorija didaktičnih situacij (TDS), Učenje matematike v realnem kontekstu (RME), Lesson Study (LS), projekt MERIA, projekt TIME

Abstract

This article summarises the essential features of three contemporary research theories derived from studying mathematics teachers‘ pedagogical practices, namely, the Theory of Didactical Situations (TDS), Realistic Mathematics Education (RME) and Lesson Study (LS). These theories, discussed here from a theoretical perspective, have been tested in practice in the context of two international projects – MERIA and TIME. The article aims to familiarise teachers with the methodology and terminology associated with the TDS, RME and LS. In what follows, we examine the main elements of the TDS (section two) and RME (sections three) and provide an overview of LS (section four).

Keywords: Inquiry Based Mathematics Learning, Theory of Didactic Situations (TDS), Real-Mathematics Education (RME), Lesson Study (LS), project MERIA, project TIME.

1 Uvod

Matematika med mnogimi učenci velja za nezanimiv predmet. Učenci imajo vtis, da se je pri matematiki treba naučiti nekaj postopkov na pamet, potem pa jih uporabljajo v nezanimivih, dolgočasnih in neuporabnih nalogah. Pri klasičnem učenju in reševanju nalog iz učbenikov in zbirk nalog učenci ne vidijo smisla in vsebino hitro pozabijo. Še huje, naučenega ne znajo uporabiti v praksi, to je pri vsakdanjih problemih.

Kot učitelji vemo, da je matematika lahko zanimiva in zelo uporabna. Včasih nas kak problem zaposli in ga navdušeno rešujemo tudi več dni. Večina nas tudi pozna občutek zadovoljstva, ki sledi uspešni (raz)rešitvi dane naloge. Zato se vedno bolj trudimo, da bi pri pouku reševali naloge, ki bi jih učenci prepoznali kot pomembne, zanimive in uporabne. Trudimo se, da bi učence naloge pritegnile, da bi bili visoko motivirani pri reševanju in da bi jih zanimalo, kakšne poti vodijo do rešitve. Radi bi, da tudi učenci spoznajo navdušenje, ki ga lahko prinese reševanje matematičnega problema, tudi če ne obrodi rešitve v času, ki ga imamo na voljo pri pouku, oziroma tudi takrat, ko smo ugotovili le to, da določen pristop ne deluje. Učencem so še posebej zanimivi problemi, s katerimi se srečujejo v vsakdanjem življenju. Govorimo o problemih, ki imajo več različnih rešitev oziroma pri katerih do pravilnih rešitev vodi več različnih poti. Kako lahko z drugačnim razmislekom pridemo do enakih rešitev? Zakaj lahko več rešitev ustreza enemu problemu? Ti vprašanji sta zanimivi tudi učencem, ki jim sicer bolj ustrezajo družboslovne vsebine. Zato lahko morda drugačen način izvajanja učnih ur matematike pritegne tudi tiste, ki so vedno menili, da »oni pa niso za matematiko«.

Način poučevanja matematike s preiskovanjem lahko za začetek učitelj izbere za ure, pri katerih od učencev pričakuje nižjo motivacijo za delo. V praksi se je namreč izkazalo, da so take aktivnosti izredno motivacijske. Predlagamo, da v teh primerih preizkusite scenarije, ki smo jih pripravili v sklopu projektov MERIA (https://meria-project.eu/) in TIME (https://time-project.eu/). Projekta sta potekala v sodelovanju s strokovnjaki, raziskovalci in učitelji matematike iz Slovenije, Hrvaške, Nizozemske in Danske. Prepričani smo, da boste nad izvedbo učnih ur po pripravljenih scenarijih prijetno presenečeni, tako vi – učitelji, kot vaši varovanci – učenci. Naše izkušnje so zelo pozitivne. Nekateri učenci so naloge po takšni učni uri reševali še v času malice! Zato učitelji pristop radi ohranijo in ponovno izvedejo podobne ure z novo vsebino. Tudi učenci sprašujejo, kdaj bodo spet imeli »zabavno« matematiko.

Razvoj gradiv za poučevanje matematike s preiskovanjem, ki smo jih pripravili pri projektih MERIA in TIME, temelji na dveh uveljavljenih raziskovalnih programih: na teoriji didaktičnih situacij (Theory of Didactical Situation – TDS), ki jo je razvil Guy Brousseau (Brousseau, 1997), in pristopu učenja matematike v realnem kontekstu (Realistic Mathematics Education – RME), ki ga je razvil Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991). Obe teoriji spodbujata avtonomno preiskovanje učencev, ki morajo aktivno delovati brez (pretiranega) posredovanja in usmerjanja učitelja. S svojim obstoječim matematičnim znanjem učenci raziskujejo in preiskujejo zastavljeni problem in skozi proces preiskovanja svoje znanje poglobijo in razširijo. Seveda ne bodo vsi učenci prišli do enakih zaključkov, niti ne bodo ubrali enakih strategij. Zagotovo pa bodo v procesu precej pridobili. Pridobljeno znanje ali vsaj notranji občutek o naravi danega problema, ki so ga dosegli z lastnim trudom skozi dejavnost, ostane z učenci precej dalj časa kot vsebina, ki jo preberejo iz učbenika.

Glavni cilj projekta MERIA je bil spodbujati poučevanje s preiskovanjem in podpirati učitelje pri njegovem izvajanju z zagotavljanjem učnih scenarijev, praktičnih zamisli in dejavnosti strokovnega izpopolnjevanja. Nekateri tuji avtorji ugotavljajo, da je najbolj obetaven način za zagotavljanje kontinuiranega strokovnega usposabljanja pristop, ki ga imenujemo Lesson Study (LS). Ta se že več kot stoletje uporablja kot oblika strokovnega usposabljanja učiteljev na Japonskem. Cilj projekta TIME kot nadaljevalnega projekta je bil raziskati, v kolikšni meri lahko majhne skupine učiteljev, ki jih navdihuje ravno LS, ustvarijo gradiva, kakršna smo pripravili v projektu MERIA. Na tem mestu podajamo kratke opise teorij TDS, RME in LS, povzete po materialih, nastalih v okviru omenjenih projektov.

2 Teorija didaktičnih situacij in faze učne ure

Učne ure, ki temeljijo na teoriji TDS, potekajo v več fazah. Faze si sledijo v določenem zaporedju, da dosežemo najboljši možni učinek – boljše razumevanje in visoko motivacijo učencev. Večina problemov je takih, da jih je smiselno reševati v skupinah. Takoj na začetku ure učence razdelimo in posedemo na način, da bodo lahko čim bolje sodelovali. Ker se je v preteklem časovnem obdobju uporabljala različna slovenska terminologija za poimenovanje faz TDS, bomo v nadaljevanju omenili kar vse.

Devolucija oz. Predstavitev problema oz. Prenos

Prva faza je **predstavitev problema**. V tej fazi učitelj predstavi nalogo, ki jo morajo učenci rešiti z obstoječim znanjem in s svojim lastnim preiskovalnim razmišljanjem. Učitelj se mora prepričati, da vsi učenci razumejo cilj naloge.

Akcija oz. Delovanje oz. Reševanje oz. Preiskovanje

Slika 1: Faza reševanja med izvedbo učne ure po principu TDS.
Vir: Arhiv XV. gimnazije Zagreb.

V drugi fazi **učenci preiskujejo** problem, razmišljajo o dani nalogi, rišejo skice, računajo ter iščejo načine, ki bi jim lahko bili v pomoč pri razumevanju ali pri iskanju rešitev. Včasih sami ugotovijo, da določen način ne deluje, včasih ne. V tej fazi se lahko dogaja marsikaj. Primer preiskovanja je prikazan na sliki (Slika 1). **Bistveno je, da učitelj v trajanju te faze ne posega** v delo učencev. To pomeni, da učitelj ne posreduje, ne komentira ali ocenjuje pristopa, ki so ga ubrali učenci, tudi če opazi, da na takšen način ne bodo našli rešitev. Učenci bodo dobili izkušnjo tudi z neuspešnimi pristopi. Izkaže se, da je neposeganje v delo učencev velik izziv za učitelje, zato je na to treba posebej opozoriti. Neposeganje pa ne pomeni, da učitelj pasivno čaka. Učitelj opazuje, kakšne pristope so ubrali učenci. Zabeleži si manj običajne zamisli. Posluša, če so kakšno dobro zamisel zavrgli in zakaj. Opazuje, zakaj so izbrali določen pristop, za katerega učitelj ve, da ne bo deloval. Mogoče opazi tudi nerazumevanje. Vse to uporabi v nadaljevanju. Pri vsaki učni uri določimo predviden čas trajanja te faze. Ko čas poteče, nastopi tretja faza.

Formulacija oz. Zapis ugotovitev

Tretja faza je faza **zapisa ugotovitev (formulacije)**. Vsaka skupina učencev mora iz vseh svojih raziskav, poskusov, skic, računov in še česa sestaviti smiselno celoto. Opisati bodo morali, kako so razmišljali, kaj so preizkusili, ali je delovalo, ali so prišli do želenega rezultata, in, če jim uspe, kakšna je njihova rešitev problema in zakaj. Zakaj so prepričani, da je njihova rešitev pravilna? Svojo dejavnost iz druge faze morajo strniti in sestaviti povzetek (za njih) bistvenih rezultatov. Tudi v tej fazi učitelj običajno ne sodeluje aktivno.

Validacija oz. Verifikacija oz. Poročanje oz. Potrditev

V četrti fazi skupine **poročajo** in medvrstniško »verificirajo« svoje ugotovitve. Poročajo lahko samo nekatere skupine, odvi-

Slika 2: Poročanje lahko organiziramo na različne načine. Nekonvencionalne pristope učenci zelo dobro sprejmejo. Vir: Arhiv XV. gimnazije Zagreb.

sno od števila učencev, časa in različnih strategij, ki so jih učenci ubrali pri reševanju. Vrstni red predstavitev določi učitelj. Idealna situacija bi bila, da bi neuspešne pristope razrešili učenci med seboj. Kakšna druga skupina je mogoče razmišljala podobno in ugotovila, zakaj nekaj ne deluje. Tako bodo učenci sami razložili svojim sošolcem, kakšen razmislek jih je pripeljal do rezultata. Učitelj mora pazljivo izbrati vrstni red poročanja, in sicer od manj uspešnih do bolj uspešnih strategij. Ne glede na to, koliko je določena skupina uspela doseči v danem času, četudi so morebiti popolnoma zgrešili smer, mora učitelj reagirati spodbudno, ali vsaj nevtralno, da učenci ne izgubijo motivacije. Poročanje lahko učitelj naredi tudi na kakšen bolj inovativen način, kot je primer s slike (Slika 2).

V delu učne ure lahko večkrat pride do faze verifikacije, ko svoje teorije učenci povzamejo in testirajo, ali so pravilne. To lahko naredijo samostojno. Če je naloga dobro zastavljena, lahko sami ugotovijo, ali je predlagana rešitev pravilna ali ne, ko jo preverjajo v danem kontekstu. Včasih verifikacijo izvedejo že v fazi reševanja, da določen pristop zavržejo. Včasih ugotovijo, da je rešitev dobra, ko izvedejo formulacijo. Praviloma pa se verifikacija zgodi pri poročanju, s pomočjo sovrstnikov.

Institucionalizacija oz. Oblikovanje ustaljenega zapisa

Ko se poročanje zaključi, učitelj **povzame** skupne ugotovitve, ki so jih učenci našli. Povzetku lahko še kaj doda, da razširi vsebino, ki ustreza danemu problemu, tudi če ga učenci v nobeni skupini niso rešili v celoti. Bistveno je, da učitelj vsebino iz učbenika poveže z dejavnostjo učencev. Na takšen način znanje postane kolektivno in njim lastno – učenci se spomnijo svojih preiskovanj in razumevanja problema. Ko učitelj znanje poveže z dejavnostjo, učno vsebino zapiše tudi formalno, tako kot je sicer zapisana v učbeniku. Tej fazi rečemo *Institucionalizacija* oziroma v opisni obliki »oblikovanje ustaljenega zapisa«.

Sledi **pogovor** med učiteljem in učenci, da se prepričajo, da formalni zapis učenci razumejo in ga vidijo kot nadgradnjo svojega lastnega preiskovanja.

Učne ure lahko priredimo, tako da ponavljamo določene faze. V določenih primerih lahko večkrat ponovimo devolucijo in akcijo, še posebej, če opazimo, da nobena od skupin nima zamisli, kako bi se lotila reševanja prvotnega problema. To lahko uredimo z novo devolucijo, torej s spodbudo v obliki namiga ali postavitvijo vprašanja, ki je povezano z začetno nalogo in ni tako obširno.

Na kratko bomo opisali še nekaj pogosto uporabljenih izrazov.

Institucionalno znanje (včasih imenovano *javno* ali *uradno* znanje) je znanje, ki je predstavljeno v učbenikih, na spletnih straneh, v strokovnih raziskovalnih revijah in drugih objavljenih virih.

Osebno znanje je znanje, ki ga učenci (in drugi) izgrajujejo med interakcijo z matematičnim problemom.

Cilj učne ure po principu TDS je, da učenci razvijejo osebno znanje, učitelj pa ob koncu njihovo izkušnjo poveže z institucionalnim znanjem, ki ga običajno podaja.

Adidaktične situacije so tiste, v katerih se učenci lotijo problema in raziskujejo okolje, nalogo ali dan problem brez posredovanja s strani učitelja. V takšnih situacijah učenci razvijajo svoje osebno znanje tako, da ga prilagajo reševanemu problemu, preko dodatnih preiskovalnih dejavnosti ali s preizkušanjem idej oziroma preko formulacije argumentov, ko poskušajo prepričati vrstnike.

Najdaljša adidaktična faza je običajno faza reševanja (akcije).

Didaktične situacije so tiste, v katerih učitelj stopa v interakcijo z učenci. V teh situacijah učitelj ureja in vodi adidaktične situacije in poskrbi, da se znanje iz adidaktičnega dela deli, potrdi in prepozna kot »pravilno« ali »nepravilno«.

Didaktične in adidaktične situacije se med sabo izmenjujejo, tako da se lahko postopoma gradi institucionalno znanje.

3 Učenje matematike v realnem kontekstu

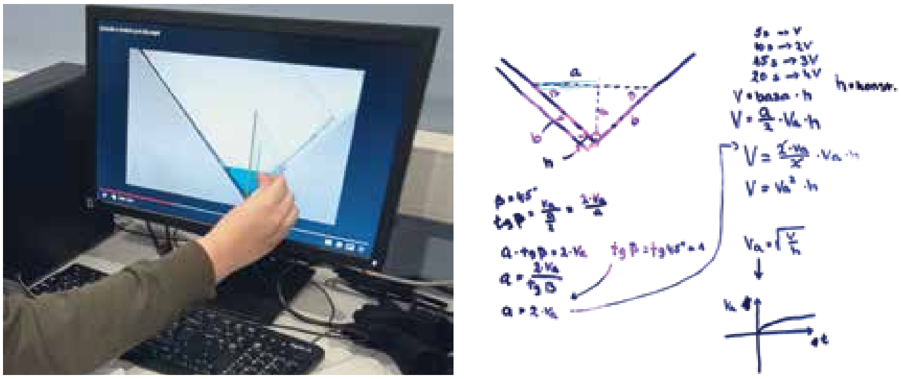
Druga teorija je teorija učenja matematike v realnem kontekstu (RME). Ta teorija nas spomni, da je matematika človekova dejavnost in da se z njo srečujemo na vsakem koraku.

3.1 Kontekst pri učenju matematike

Smiselna matematika izhaja iz bogatih kontekstov, ne iz klasičnih učbenikov, v katerih so problemi zoženi na en sam račun ali kratek razmislek, ki mu je odvzeta večina vsebine. Bogat kontekst pomeni, da matematičnega znanja ne razvijamo iz matematičnih struktur, ampak predvsem iz tega, kar je za nas realno in kar smo sami izkusili. Novo znanje pridobimo iz tega, kar že poznamo in kar ima za nas že določen smisel. Kontekst, v katerem se naloga ali problem dogaja, je lahko (in večinoma je) nematematičen, a kljub temu takšen, da lahko znotraj dogajanja najdemo mnogo matematičnih opisov oziroma struktur.

Bogat kontekst je tisti, ki se povezuje z »zdravo kmečko pametjo«. Če lahko najdemo veliko matematičnih opisov znanih pojavov znotraj danega konteksta, je takšen kontekst bogat.

To, da je kontekst bogat, lahko opredelimo tudi s tem, da je uporabnost pridobljenega znanja zelo široka. Znanje, ki ga pridobimo v danem kontekstu, lahko uporabimo v mnogih situacijah. Znanje je torej splošno uporabno in ne samo v dani situaciji.



Slika 3: Matematizacija – preiskovanje in (bolj ali manj natančen) zapis problema v matematičnem jeziku.
Vir: Arhiv XV. gimnazije Zagreb.

Tretji vidik bogatega konteksta v nalogi je ta, da omogoča različne pristope, različne načine reševanja in celo različne rešitve, ki ustrezajo situaciji.

Glavni del učenja matematike v realnem kontekstu imenujemo *matematizacija*. Ta vključuje aksiomatiziranje, formaliziranje, shematiziranje, algoritmiranje, modeliranje itd. Matematizacija pomeni, da bolj ali manj matematično natančno opišemo dogajanje, ki ga opažamo (opazujemo). To lahko naredimo tako, da zapišemo formalno definicijo ali da določimo postopek, s katerim vedno pridemo do rešitve podobnega problema. Primer različnih načinov matematizacije je prikazan na sliki (Slika 3).

Znotraj matematiziranja ločimo dve usmeritvi: horizontalno in vertikalno. Pri učencih se moramo truditi, da uporabljajo obe smeri. V grobem: horizontalna matematizacija pomeni, da znamo povezovati matematično znanje z realnimi situacijami, v katerih ga uporabljamo. Gre za sposobnost opisa problema v matematičnem jeziku. Vertikalna matematizacija je formaliziranje in oblikovanje povezav znotraj matematike, kar vodi k boljšemu razumevanju. Je posploševanje matematičnih opisov konkretnih problemov.

3.2 Učne ure v jeziku učenja matematike v realnem kontekstu

Poraja se vprašanje, kako lahko teorijo RME uporabimo pri izvedbi učne ure. Seveda učitelji ure prilagodijo svojemu načinu dela, učencem in njihovim sposobnostim, predvsem pa njihovim in svojim interesom. Kontekst naj bo znan in zanimiv. Bistveni del učenja matematike v realnem kontekstu, kot pove že ime teorije, je *kontekst*. Zato je prva naloga učitelja, da predstavi znan in zanimiv kontekst z relativno odprtim problemom. Problem (in kontekst) lahko predlagajo tudi učenci, če je to mogoče. Kontekst lahko ostane enak za različne matematične probleme, lahko se k njemu vračamo. V istem kontekstu lahko preizkušamo različne načine reševanja in razmišljamo, kateri (če sploh kateri) je boljši in zakaj.

Šele ko je kontekst jasen in ko vsi učenci vedo, v kakšnem okolju se dogaja neka situacija, se začne matematizacija. Ta bo najprej horizontalna, ko učenci neformalno opišejo dogajanje in postopoma uvedejo matematični jezik, ki ga bodo uporabili za opis problema, npr. umestijo koordinatni sistem, izberejo oznake, določijo neznanke itd.

Ko izberejo formalni opis, se začne vertikalna matematizacija: učenci razvijajo izbran matematični model, posplošujejo ugotovitev in model naredijo bolj abstrakten.

Ko ugotovitve čim bolj posplošijo, o naučenem skupaj premislimo. Bolj aktivno se vključi tudi učitelj. Skupaj razmislimo o celotnem procesu in poskusimo poiskati drugačne probleme, ki bi jih lahko rešili z novim znanjem. Učenci delijo svoja spoznanja, učitelj usmerja in poudari glavne točke.

4 Lesson Study kot oblika učiteljevega profesionalnega razvoja

Lesson Study (LS) je pristop, ki temelji na sodelovanju med učitelji pri »problemu poučevanja«, tako pri načrtovanju in izvedbi poučevanja, kakor tudi pri evalvaciji učnih ur. Eno izmed osnovnih načel LS je namreč, da se učitelji najbolje učijo in izboljšujejo svojo prakso z opazovanjem poučevanja drugih učiteljev. Učitelji si pri LS prizadevajo izboljšati kakovost poučevanja. To storijo tako, da ga preučujejo na način, kjer natančno analizirajo, kaj »deluje« in kaj »ne deluje« – seveda vse v smislu izboljšanja kakovosti učenja učencev. Čeprav se morda zdi, da je poudarek na učitelju, je končni cilj povečanje zanimanja in motivacije učencev ter izboljšanje kakovosti njihovega učenja.

4.1 Zgodovinsko ozadje profesionalnega razvoja učiteljev Lesson Study

Na Japonskem se LS že več kot stoletje redno uporablja in je hkrati primarna metoda profesionalnega razvoja učiteljev. Metoda je zrasla iz preobrazbe japonskega izobraževalnega sistema, ki se je preusmeril od individualnega poučevanja, prilagojenega sposobnostim učenca, k poučevanju v skupinah. Učitelji iz Zahodnih držav, ki so bili povabljeni na Japonsko, so uvedli koncept poučevanja v celotnem razredu, kar je bilo sicer v tistem času tudi izven Japonske še vedno redko. To je privedlo do pisanja novih učbenikov in pojava »odprtih lekcij« (angl. open lesson), tj. učnih ur, ki so izvedene pred širšo javnostjo, na primer za učitelje drugih šol. Odprte lekcije so japonski učitelji ohranili in jih uporabljajo za razpravo in prilagajanje svoje učne prakse. Ob podpori vlade so japonski učitelji nato po vsej državi sprejeli kulturo izvajanja opazovanja aktivnosti učencev med učno uro in naknadne evalvacijske razprave (refleksije).

Matematika v šoli, št. 1., letnik 29, 2023

Slika 4: Izvedba učne ure na način LS na Japonskem. Učitelji spremljajo način učenja in razmišljanje učencev.
Vir: Tom McDougal, https://www.apmreports.org/episode/2015/08/26/a--different-approach-to-teacher-learning-lesson-study

Japonski učitelji so v procesu izvajanja LS postopoma spreminjali svoj pristop k poučevanju in začeli predlagati nove metode, osredotočene na reševanje problemov. Tako so se odmaknili od tradicionalnega pristopa predavanj, ki jih vodi učitelj, in se osredotočili na pouk, kjer so učenci postavljali vprašanja in aktivno sodelovali pri reševanju problemov. Danes je na Japonskem problemsko učenje uveljavljeno kot vodilni način poučevanja. Zanj je značilen »odprt pristop« – spodbujanje uporabe različnih načinov reševanja problemov, postavljanje problemov z več odgovori in izvajanje dejavnosti spreminjanja in razvijanja problemov s strani učencev. Primer opazovane učne ure na Japonskem je na sliki (Slika 4).

Sprva je bila metoda LS uporabljena v vrtcih in osnovnih šolah, vendar se je sčasoma razširila tudi na srednje šole in univerze. Danes je LS na Japonskem zelo razširjena metoda in jo uporablja večina šol. Japonska vlada jo podpira in spodbuja kot pomemben del izobraževalnega sistema in izobraževanja učiteljev.

Okrog leta 1994 je ameriški profesor matematike James W. Stigler obiskal Japonsko in začel raziskovati njihov izobraževalni sistem. Med svojim obiskom je odkril, da je LS pomemben del japonskega poučevanja matematike, kjer učitelji skupaj izmenjujejo ideje in izboljšujejo svoje poučevanje. Po vrnitvi v ZDA je Stigler začel spodbujati uporabo LS v ameriškem izobraževanju. Pozornost učiteljev zunaj Japonske je LS prvič pritegnila predvsem z objavo njegove knjige The Teaching Gap (Stigler in Hiebert, 1999), kakor tudi z videoštudijo TIMMS, ki je prikazala, kako deluje japonsko poučevanje matematike v razredu. Videoposnetki so razkrili, da dobre učne rezultate lahko dosežemo ne nujno z uporabo posebnih učnih metod, temveč tako, da najdemo načine za vključevanje učencev v reševanje matematičnih problemov. Neodvisno od tega so tudi nekateri pedagogi (Lewis in Tsuchida, 1998) opazili pomen japonskega pouka in na to opozorili mednarodno skupnost. Od takrat naprej se z LS ukvarjajo številni učitelji matematike, raziskovalci in izobraževalci učiteljev po vsem svetu.

4.2 Zakaj uporabljati Lesson Study?

Mnogi učitelji matematike poročajo, da se kljub udeležbi tečajev strokovnega izpopolnjevanja, kjer lahko preizkusijo nova učna gradiva, vsakodnevno poučevanje le malo spremeni. To je bilo opaženo tudi pri projektu PRIMAS, kjer je García (2013) predlagal, da bi lahko strukture, navdihnjene s koncepti LS, bolj dolgoročno podprle načrtovanje pouka na podlagi preiskovanja, kar bi lahko postal trajnejši pristop za učitelje.

Tudi zelo dobro vodeni seminarji, ki učitelje navdušijo za nove ideje in ponujajo dobro zasnovane učne ure, morda ne bodo bistveno vplivali na način poučevanja učiteljev (zlasti ne na kratki rok). Pri projektu Mist v ZDA so na primer preučevali, kako bi lahko izboljšali kakovost poučevanja v velikih skupinah (Cobb idr., 2018). Ugotovili so, da je prav LS najbolj obetaven način za zagotavljanje kontinuiranega strokovnega razvoja, ko gre za razvoj pedagoške prakse.

Iz literature vidimo, da obstaja (presenetljiva) podobnost med LS kot dejavnostjo za učitelje in izkušnjami pri poučevanju, ki temelji na preiskovanju in je namenjeno učencem. Ta podobnost temelji na načelu, da se ljudje učijo s preučevanjem problema in preizkušanjem hipotetičnih rešitev.

Nekaj konkretnih razlogov, zakaj uporabljati LS, bi lahko bilo:

- **Izboljšanje kakovosti poučevanja in učenja:** LS pomaga učiteljem izboljšati poučevanje in učne pristope s poudarkom na učnih potrebah učencev.
- **Strokovno izpopolnjevanje učiteljev in spodbujanje sodelovanja:** LS spodbuja strokoven razvoj učiteljev preko sodelovanja, opazovanja in refleksije. Sodelovanje med učitelji (na eni šoli) omogoča izmenjavo idej in izkušenj, kar (lahko) privede do razvoja kulture skupnega poučevanja in učenja.
- **Individualizacija poučevanja:** LS spodbuja učitelje, da razvijajo tudi prilagojene načrte poučevanja in pristope, ki so prilagojeni posameznim potrebam učencev.
- **Povečanje zanimanja in motivacije učencev:** LS omogoča učiteljem, da razvijejo bolj zanimive in interaktivne pristope poučevanja, kar (lahko) privede do povečanja zanimanja in motivacije učencev za učenje.
- **Povečanje zaupanja v učitelje:** Ko se kakovost poučevanja in učenja s pomočjo LS izboljša, se (lahko) poveča zaupanje staršev in skupnosti v učitelje kot strokovnjake, ki so sposobni zagotavljati kakovostno izobraževanje. Vendar pa so koristi LS odvisne tudi od širšega okolja, v katerem se izvaja. Če družba ne spoštuje vloge učiteljev ali če imajo učitelji slabo plačilo in pomanjkljivo podporo, bo težko doseči povečanje zaupanja v učitelje. Zato je pomembno, da se vrednoti in podpira vlogo učiteljev kot ključnih akterjev izobraževanja.

4.3 Osnovna načela Lesson Study

LS je skupno delo učiteljskega tima na problemu poučevanja. Ekipa učiteljev želi izboljšati poučevanje na tak način, da nanj pogledajo kot na predmet preučevanja. Vsak član učiteljske ekipe v učenje vnese svojo perspektivo. Lahko so vključeni tudi zunanji strokovnjaki ali učitelji kake druge šole. LS proces je sestavljen iz štirih glavnih faz:

- prepoznavanje in proučevanje učnega problema,
- načrtovanje pouka,
- poučevanje in opazovanje pouka v živo in
- sistematična skupna refleksija, ki temelji na proučevanju podatkov opazovanja glede na cilje učne ure.

Mnogi avtorji menijo, da je proces cikličen, pri čemer se ista učna ura popravlja in ponovno izvaja. Proces smo prikazali v preprostem diagramu (Slika 5), kjer številke v diagramu ustrezajo naslednjim dejavnostim (ki dopuščajo možnost, da se del procesa ponovi več kot enkrat):

1. Prepoznavanje in preučevanje problema poučevanja (faza **ANALIZA**),
2. Načrtovanje učne ure (faza **NAČRTOVANJE**),
3. Izvedba učne ure (faza **OPAZOVANJE**),
4. Vrednotenje učne ure in pregled rezultatov (faza **REFLEKSIJA**),
5. Ponovni razmislek o učni uri (faza **NAČRTOVANJE**),
6. Izvajanje pouka na podlagi ponovnega premisleka (faza **OPAZOVANJE**),
7. Vrednotenje in pregled (faza **REFLEKSIJA**),
8. Izmenjava rezultatov (faza **POROČILO**).

V nadaljevanju podamo podrobnejše opise teh faz.

ANALIZA – *opredelitev učnega problema in učnih ciljev*

V fazi analize učitelji sodelujejo pri preučevanju učnih gradiv, npr. delovnih zvezkov in priročnikov za učitelje, literature o znanju predmeta, literature o težavah učencev pri pouku in drugo gradivo, povezano z učno vsebino, ki jo bodo poučevali pri učni uri. Učitelji se opirajo tudi na predhodne izkušnje tako iz lastne prakse kakor tudi prakse drugih.

Pri ugotavljanju učnega problema je delo učiteljske ekipe praviloma več kot le strinjanje o tem, katero temo je težko predstaviti ali jo učenci težko razumejo. Poiščejo »vodilno temo« (angl. research theme), ki vodi proces LS in lahko pomeni eno ali več izvedb procesa, prikazanega na sliki (Slika 5). Vodilna tema je lahko na primer izboljšanje matematične argumentacije in sklepanja učencev. Naslednji korak je izbira matematičnega konteksta. Ko je ta določen, ekipa učiteljev oblikuje učne cilje posamezne učne ure. Izbira ciljnega znanja učne ure so lahko konkretni manjši deli vsebinskega znanja (recimo kakšna formula) ali, širše zastavljeno, splošnejši dosežki (recimo kompetence učencev ali možne različne uporabe problema). Pomembno je, da se pred nadaljnjim načrtovanjem dejanskega poučevanja ukvarjamo z eksplicitnim učnim ciljem, da bi ga lahko dosegli. Vsekakor mora biti jasno določeno, kakšno novo znanje naj bi učenci usvojili, ko po učni uri zapustijo razred. Proces LS je shematično predstavljen na sliki (Slika 6).

NAČRTOVANJE *in izdelava načrta učne ure*

Načrtovanje učne ure je lahko dolgotrajen proces, ki se konča s pripravo osnutka načrta učne ure. Je skupno prizadevanje celotnega učiteljskega tima, da bo učna ura pomagala učiteljem in učencem pri učenju. Preprost dogovor, kot je uporaba besede »mi« namesto »ti« in »jaz« lahko novim udeležencem LS pomaga premagati začetno nelagodje ob odpiranju učilnic večjemu številu opazovalcev in deljenju priprav učne ure s kolegi. Člani tima so v tem skupaj.

V načrtu učne ure učitelji določijo in zapišejo ciljno znanje in kompetence, spretnosti ali druge pomembne koncepte, ki so opisani kot širši cilji, časovnico, zahtevano gradivo ipd. Problem, s katerim naj bi se učenci ukvarjali, je treba v procesu načrtovanja (pre)oblikovati tako, da ustreza ciljnemu znanju in ima ustrezen učni potencial. V ta namen predvidimo in zapišemo strategije, za katere predvidevamo, da bi jih učenci lahko uporabili.

OPAZOVANJE *učne ure*

Pri opazovanju učne ure je običajno prisoten tim učiteljev, ki se je ukvarjal z učno uro. Lahko povabijo tudi druge opazovalce (učitelje drugih šol, vodstvo šole ipd.), ki prav tako opazujejo in beležijo dejavnosti učencev. Namen opazovanja je raziskati učenje učencev oziroma, natančneje, v kolikšni meri so cilji učne ure doseženi. Seveda je lahko zanimivo tudi opazovati prakso kolegov, vključno z njihovo interakcijo z učenci, toda pri LS se osredotočamo na opazovanje učenja učencev glede na opredeljene cilje učne ure. Opazovalci ne posegajo v poučevanje in ne komunicirajo z učenci. Med adidaktičnimi fazami (torej kadar učenci večinoma rešujejo problem) se lahko opazovalci nemoteno gibljejo med mizami učencev, opazujejo njihovo delo in slišijo njihove razprave. Med izvedbo ure opazovalci delajo zapiske za kasnejšo razpravo, zbirajo podatke o tem, kako se učenci odzivajo na problem, ugotavljajo, kako učitelj vodi njihovo delo, in delajo druge zapiske, ki so pomembni za spremljanje realizacije ciljev učne ure.

REFLEKSIJA *izvedene učne ure in revizija načrta učne ure*

Če je le mogoče, refleksijo opravimo takoj po izvedeni učni uri, po možnosti v isti učilnici, v kateri je potekala učna ura (kjer je še vedno vidna popisana tabla, gradiva učencev ipd.). Razpravlja se o konkretnih opažanjih, ki se nanašajo zlasti na učni problem in

Slika 5: Glavne faze učne ure, prilagoditev diagrama Stiglerja in Hieberta.

Slika 6: Izbira učnega problema in opredelitev ciljev učne ure je en od bistvenih korakov LS.

cilje učne ure. Po refleksiji tim učiteljev, ki je pripravil učno uro, razmisli o tem, kaj so se naučili in kako bi to lahko uporabili pri nadaljnjem poučevanju. Lahko se odločijo za popravek učne ure in ponovne izvedbe v drugem razredu (s strani drugega ali istega učitelja). Ta cikel, ki je prikazan na sliki (Slika 5), se načeloma lahko celo večkrat ponovi.

POROČILO

LS cikel se lahko konča s pisanjem poročila o izvedbi, ki ga nato ekipa učiteljev deli z drugimi učitelji ali celo objavi v kakšni strokovni reviji oziroma predstavi na konferenci. Izmenjava izkušenj je eden ključnih vidikov LS. Poročilo ima lahko preprosto obliko, vendar mora vsebovati najpomembnejše informacije, ki drugim učiteljem omogočajo, da se učijo iz opisanega primera in učno uro uporabijo kot vir navdiha. Poročila na splošno lahko vsebujejo prejšnje izkušnje in motivacijo za temo, jasno navedbo ciljev učne ure, problem, ki je bil zastavljen učencem, opažanja članov tima učiteljev, zaključke refleksije ipd. V projektu TIME smo se dogovorili, da je poročilo sestavljeno iz (očitnih) štirih delov: Prepoznavanje problema in učnih ciljev, Načrtovanje in izdelava načrta učne ure, Opazovanje učne ure, Refleksija in sklepne opombe.

V okviru projekta TIME je nastalo 19 zanimivih poročil na podlagi LS ciklov, pri čemer jih ima večina tudi pripadajoče načrte učnih ur, ki smo jih poimenovali scenariji.

Zaključek

V članku so opisane bistvene značilnosti treh aktualnih teorij s področja poučevanja matematike – TDS, RME in LS. Cilj vseh treh je podoben, in sicer, da učitelji spremenimo svoj pristop z načina *ex katedra*, pri katerem učitelj govori, učenci pa v tišini poslušajo, na način vključevanja, sodelovanja, preiskovanja in raziskovanja. Dotaknili smo se le osnov, saj lahko radoveden bralec najde bolj natančne opise in razdelane teorije v virih, ki so navedeni na koncu tega sestavka. Namen prispevka je bil, da bralce s teorijo seznanimo do te mere, da bodo lahko s pridom uporabljali izkušnje učiteljev, ki so na pot poučevanja matematike s preiskovanjem (po teorijah TDS, RME in LS) že stopili. Želimo si, da bi bil članek uporaben kot začetek uvajanja novih učiteljev, ki bodo zbrali pogum in voljo, da se podajo po stopinjah svojih predhodnikov. Po branju tega članka si lahko ogledajo pripravljene učne ure s projektov MERIA ali TIME ali objavljeno poročilo enega izmed ciklov Lesson Study in pri tem ne bi smeli imeti težav z razumevanjem terminov. Prepričani smo, da učiteljem, ki bodo preizkusili predlagan pristop poučevanja, ne bo žal in da se bodo z veseljem znova vračali po nove zamisli za izvedbo učnih ur. Z velikim zadovoljstvom bomo pričakali nove ideje, ki bodo plod lastnega profesionalnega razvoja učiteljev, saj bo to pomenilo velik pozitiven napredek za poučevanje matematike v Sloveniji.

Viri

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Jackson, K. Henrick, E., Smith, T. M., in the Mist team. (2018). *Systems for Instructional Improvement – Creating coherence from the classroom to the District Office*. Harvard: Harvard Education Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

García, F. J. (ur.) (2013). *Primas – Guide for professional development providers*. https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/FINAL_WP4_Guide_PD_providers_licence_150708.pdf

Lewis, C. in Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river. *American educator, 22*(4), 12–17 in 50–52.

Stigler, J. in Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY, USA: Free Press.

Projekt MERIA https://meria-project.eu/

Projekt MIST https://peabody.vanderbilt.edu/departments/tl/teaching_and_learning_research/mist/

Projekt Primas https://primas-project.eu/

Projekt TIME https://time-project.eu/

TIMMS https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html

Preiskovanje širjenja govoric

Inquiry of Spreading Rumours

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V članku je predstavljen primer učnega scenarija, ki je nastal v mednarodnem projektu MERIA (Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable). Projekt je potekal na Hrvaškem, Danskem, Nizozemskem in v Sloveniji. Primer temelji na učenju matematike s preiskovanjem in je bil izveden v srednjih šolah. Obravnava situacijo iz vsakdanjega življenja (preiskovanje širjenja govoric) in vključuje iskanje ustreznega matematičnega modela za opis navedene situacije. Predstavljene so strategije reševanja, ki so jih uporabili dijaki v različnih izvedbah, in izkušnje njihovih učiteljev.

Ključne besede: matematika, eksponentna funkcija, modeliranje, preiskovanje

Abstract

The article introduces a learning scenario developed as part of the international project MERIA (Mathematics Education - Relevant, Interesting and Applicable). Croatia, Denmark, the Netherlands, and Slovenia participated in the initiative. The scenario, which follows the inquiry-based mathematics learning method in secondary schools, is concerned with an everyday situation (i.e., inquiry the spread of rumours) and necessitates building an appropriate mathematical model to represent it. The article presents varied students' problem-solving strategies as well as their teachers' experiences.

Keywords: mathematics, exponential function, modelling, inquiry.

1 Uvod

V projektu MERIA (Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable) je bil osrednji in krovni cilj vzpodbujati pozitiven odnos do matematike in dijakom prikazati matematiko kot uporabno in zanimivo. Primeri učnih scenarijev, ki so jih pripravljali člani mednarodnega projektnega tima iz Hrvaške, Danske, Nizozemske in v Slovenije, so temeljili na matematičnem preiskovanju situacij iz vsakdanjega življenja, modeliranju in matematičnem mišljenju. Pri nastanku scenarijev sta bila v ospredju dva teoretična podstata: Učenje matematike s preiskovanjem (IBML) in Teorija didaktičnih situacij (TDS). Več o obeh podstatih je možno izvedeti v *Priročniku MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem* in v članku *Preiskovanje v matematiki za vse – učne ure za učitelje in učence* v tej številki revije *Matematika v šoli*.

V tem članku predstavljamo primer učnega scenarija, ki se dotika transcendentnih funkcij, te pa so za nekatere dijake velikokrat ena od zahtevnejših vsebin. Scenarij obravnava eksponentno in logaritemsko funkcijo ter ponudi eno od možnosti za uvod v obravnavno logaritemske funkcije preko eksponentne funkcije na realnem primeru.

V domači literaturi najdemo zanimive primere, ki funkciji obravnavajo v realnem kontekstu in skušajo prispevati k bolj poglobljenem znanju in razumevanju narave obeh funkcij in njunega medsebojnega odnosa (Beroš, Ćulav Markičević, Lobor, Martinić, 2022; Horvat, 2022; Jesenek Grašič, 2016; Kretič Mamič, 2020; Dezider et al., 2014). Vzrok za slabše razumevanje obeh funkcij bi lahko iskali tudi v tem, da se narava eksponentne in logaritemske funkcije ne pokriva z običajnim linearnim razmišljanjem in dojemanjem časa, ki se zdi linearno. V nadaljnjem preizkušanju scenarija v projektu TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) je npr. »v zadnjem delu učne ure učitelj poudaril, da razmišljamo linearno, toda naša čutila zaznavajo na logaritemski skali«. Narava oz. obnašanje eksponentne funkcije se razlikuje od linearne v tem, da opisuje širjenje pojavov, ki v začetku delujejo zelo »krotko« (vrednost odvisne spremenljivke počasi narašča), potem pa »zdivjajo« (v kratkem času vrednost odvisne spremenljivke zelo hitro naraste), kar je v nasprotju z konstantnim prirastkom linearne funkcije. Na primer za povečevanje količine znanja v svetu ne zadošča linearna odvisnost, ampak naraščanje opisuje eksponenta odvisnost.

Osnovna ideja scenarija je, da dijaki s samostojno aktivnostjo preiskujejo realen primer in pridejo do ugotovitve, da za njegovo rešitev potrebujejo novo funkcijo (logaritemsko funkcijo). Bralec lahko pogleda tudi primer v Jessen, Doorman, Bos (2017), kjer je na strani 49 predstavljen primer naloge, ki bi morala dijakom omogočiti, da sami občutijo potrebo po vpeljavi nove funkcije (logaritemske funkcije).

2 Opis problema

Problem v opisanem scenariju se nanaša na situacijo iz realnega sveta in je izbran tako, da je relevanten za dijake oz. so se z njim najverjetneje že srečali v svojem vsakdanjiku. Problem je odprt in ne predvideva vnaprej poti reševanja in (ene) pravilne rešitve – matematičnega modela[1]. Obravnava kontekst širjenja govoric (novic, čenč), kjer dijaki s preiskovalnim načinom učenja oblikujejo matematični model za opis tega procesa.

Problem

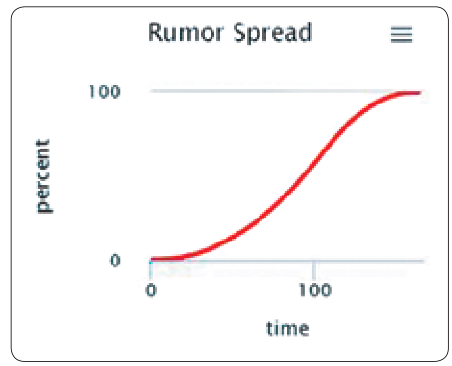
Na kakšen način in kako hitro se širijo govorice?
Pomagaj raziskovalcu/novinarju pri oblikovanju modela za širjenje govoric.

Obravnavani problem je torej vezan na modele, ki podajajo matematično razlago za širjenje govoric, čenč, novic ipd. Modeli so lahko zelo različni in so odvisni od izbire pogojev oz. načina, kako se govorica prenaša. Enega od načinov lahko najdemo v prispevku Pustavrh, Hvastja, 2010, kjer se model opre na logistično funkcijo. Logistična funkcija ni predpisana vsebina v učnem načrtu za matematiko v gimnazijah ali v katalogih znanja za matematiko v srednjem strokovnem izobraževanju. Po Dezider idr., 2014 »logistično krivuljo uporabimo za opis pojavov, pri katerih eksponentna rast na neki točki preneha. Vrednosti se od te točke dalje večajo počasneje in nikoli ne presežejo predpisane zgornje meje«.

Če bi želeli preizkusiti kakšen model širjenja govoric s pomočjo digitalne tehnologije, lahko npr. uporabite NetLogo, kjer pod naslovom *Rumor Mill* najdemo na prostorski bližini zasnovan model širjenja govoric (Wilensky, 1997). V tem primeru se govorica širi tako, da oseba, ki govorico pozna, to pove enemu od svojih sosedov. Sosedje so opredeljeni kot štirje bližnji ali osem bližnjih sosedov. V vsakem koraku oseba, ki pozna govorico, to pove poljubno izbranemu sosedu. V grafični simulaciji sledimo osebam, ki poznajo govorico (kot rdeče točke). Program beleži njihovo število in število ponovitev prenosa govorice. Na sliki 1 je primer za naslednje izbrane začetne podatke: izvor govorice je ena oseba, bližnji sosedje pa so štirje (Wilensky, 1999). Zajeto je stanje po 20 in 83 ponovitvah ter končno stanje, ko govorico poznajo vsi v izbranem »svetu«.

Ker gre za simulacijo, število vseh ponovitev ni vedno enako.

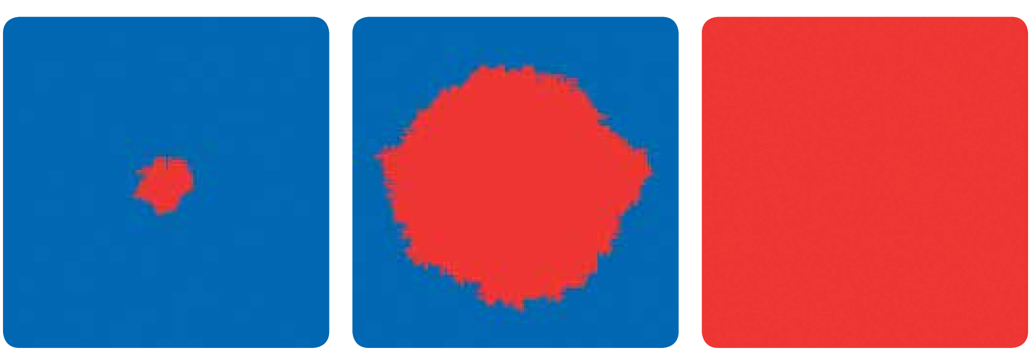
Na sliki 2 je za ta primer še graf funkcije časovne odvisnosti deleža oseb (glede na število vseh oseb v izbranem »svetu«), ki poznajo govorico, kar se izrisuje vzporedno s potekom simulacije v programu NetLogo.



Slika 2: Graf funkcije časovne odvisnosti deleža oseb, ki poznajo govorico.

Kateri modeli širjenja govoric pridejo v poštev za šolsko situacijo in šolsko obravnavo? Pri tem upoštevamo, da je treba dijakom omogočiti, da model zares preizkusijo in prepoznajo oz. ustvarjajo matematiko, ki je v ozadju. V scenariju se osredotočamo na modeliranje z eksponentno funkcijo in primer uporabimo kot uvod v logaritemsko funkcijo.

Primer je opisan v obliki učnega scenarija, ki je zasnovan na fazah TDS. V predlogi za scenarij so faze jasno opredeljene, za vsako fazo pa predvidene *Dejavnosti in navodila za učitelja* in *Dejavnosti in odzivi dijakov* ter časovni okvir za izvedbo vsake faze. Problem, s katerim so se dijaki ukvarjali, je v času nastajanja doživel nekaj sprememb, zato v nadaljevanju prispevka navajamo dve varianti.



Slika 1: Model širjenja govoric v progamu NetLogo po 20, 83 in 164 ponovitvah.

1 Matematični model je posebna vrsta matematične predstavitve obravnavanega nematematičnega objekta oz. pojava z matematičnim jezikom (npr. premo sorazmerje uporabimo kot model pri nakupovanju, geometrijska krogla kot model pri obravnavi žoge). Matematičnega modela ne razumemo kot ponazoritev matematičnih pojmov z drugimi pojmi (npr. daljico ponazorimo s tanko palico). Matematični model je lahko npr. funkcijski predpis, graf, enačba, sistem enačb, diagram, preglednica, geometrijski objekt, stožnice, slika, besedni opis … (Matematična pismenost, 2022)

3 MERIA scenarij »Širjenje govoric«

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Skozi modeliranje prepoznati logaritemsko funkcijo kot inverzno k eksponentni funkciji (na osnovi preglednice in/ali grafa).
Splošni cilji[2]	Uvod v logaritemsko funkcijo in reševanje realnih situacij.
Potrebno matematično predznanje	Definicija eksponentne funkcije, graf eksponentne funkcije, reševanje problemov z življenjskimi situacijami z eksponentno funkcijo.
Letnik/starost[3]	2. letnik srednje šole, dijaki, stari 15 do 16 let
Trajanje	60 minut
Potrebni material	papir, svinčnik, digitalna tehnologija
Problem: Na kakšen način in kako hitro se širijo govorice?	

Faze	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija/Prenos (didaktična faza) 3 min	Učitelj zastavi dijakom vprašanje: Ali ste kdaj razmišljali, na kakšen način se širijo govorice in kako hitro? Učitelj lahko ponudi možnosti, kot so linearno, kvadratno in eksponentno.	Dijaki sodelujejo v pogovoru.
Akcija/Reševanje (adidaktična faza) 10 min	Učitelj hodi po razredu in beleži različne ideje dijakov.	Dijaki preiskujejo v manjših skupinah (3–4), razpravljajo in na različne načine predstavljajo model širjenja govoric. Uporabijo lahko drevesni prikaz, preglednico, graf, nekateri pa bodo uporabili digitalno tehnologijo.
Formulacija/Zapis ugotovitev (didaktična in adidaktična faza) 3 min	Učitelj identificira različne rešitve, ki so jih našli dijaki. Glede na različne rešitve skupin določi vrstni red predstavitev, npr. najprej skupine, ki so najmanj ugotovile … npr. metoda snežene kepe.	Dijaki pripravijo predstavitev o strategiji, ki so jo uporabili.
Validacija /Potrditev (didaktična in adidaktična faza) 10 min	Učitelj pozove dijake z različnimi strategijami, da predstavijo svoje delo.	Dijaki spremljajo predstavitve in razpravljajo o njih ter zastavljajo razjasnjevalna vprašanja.
Institucionalizacija / Oblikovanje ustaljenega zapisa (didaktična faza) 2 min	Učitelj se skupaj z dijaki odloči, katerega od prestavljenih modelov bodo raziskali bolj podrobno. Odločijo se za eksponentni model.	Dijaki poslušajo in si delajo zapiske.
Devolucija/Prenos (didaktična faza) 2 min	Učitelj zastavi problem v bolj izčiščeni inačici: Razišči naslednji model širjenja govoric: dijak na šoli pove govorico drugemu dijaku na šoli, ki govorice še ne pozna. Nato vsak od njiju govorico pove novemu dijaku in tako naprej. Vsak dijak, ki govorico pozna, jo pove drugemu dijaku, ki govorice še ne pozna. Recimo, da sporočanje govorice traja 1 minuto. Kako dolgo bi trajalo, da bi se govorica razširila po celotni šoli? (Učitelj pove podatek o številu dijakov N na šoli.)	

2 V projektu MERIA je bila za vse sodelujoče države dogovorjena uporaba skupne predloge za zapis scenarija v angleškem jeziku. Pri prevodu »broader goals« v slovenščino smo se odločili za *Splošni cilji*, kar se v tem primeru nanaša na cilje, ki presegajo zgolj izvedbo konkretne učne ure oz. učnih ur. Nakazujejo znanje in veščine v širšem smislu, ki jih dijaki razvijajo v daljšem časovnem obdobju.

3 Med sodelujočimi državami starost dijakov v istem letniku ni enaka, zato so avtorji scenarijev za boljše razumevanje navajali letnik oz. starost.

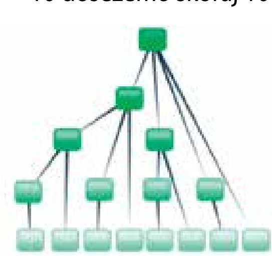
Faze	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Akcija v kombinaciji s formulacijo (didaktična faza) 15 min	Učitelj hodi po razredu in beleži različne ideje dijakov.	Dijaki preiskujejo v manjših skupinah, razpravljajo in na različne načine predstavljajo model širjenja govoric. Uporabijo lahko drevesni prikaz, preglednico, graf, nekateri pa bodo uporabili digitalno tehnologijo. Pridejo do problema, kako rešiti eksponentno enačbo $N = a^b$, b minut po tem, ko prvi dijak začne širiti govorice. Uporabijo lahko žepno računalo in/ali računalnik, da čim bolj natančno ugotovijo b. Ugotovijo, da morajo rešiti enačbo: $N = a^b \Rightarrow b = ?$, kar vodi v razmislek, da je treba najti inverzno funkcijo k eksponentni funkciji.
Validacija/Potrditev (didaktična in adidaktična faza) 10 min	Učitelj pozove dijake z različnimi strategijami, da predstavijo svoje delo. Posebej se osredotoči na tiste strategije, ki ustrezajo karakteristikam logaritma.	Dijaki se vključujejo v razpravo.
Institucionalizacija/ Oblikovanje ustaljenega zapisa (didaktična faza) 5 min	Učitelj naredi povzetek in na koncu predstavi pojem *logaritma*. Učitelj dijake opozori na omejitve in posledice modela (npr.: obstajajo tudi drugi modeli širjenja govoric; v realnosti nekaterim osebam/učencem lažje/hitreje poveš govorico v danem času kot drugemu.	Dijaki poslušajo in si delajo zapiske.

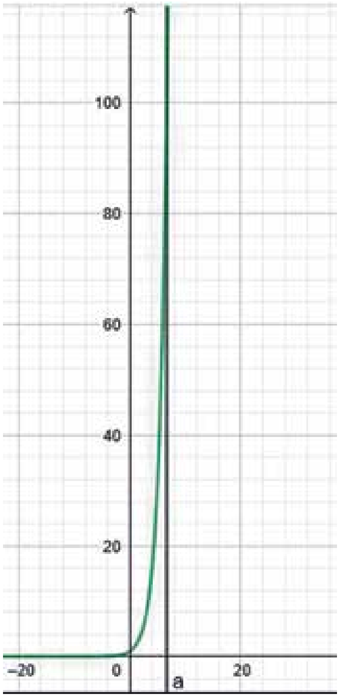
<table>
<tr>
<td>Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja</td>
<td>
Strategije za primer $a = 2$.

- Oblikovanje preglednice:

<table>
<tr><th>Po b minutah</th><th>Število dijakov, ki po b minutah na novo izve govorico</th><th>Skupno število dijakov, ki po b minutah pozna govorico</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>$1 = 2^0$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$2 = 2^1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>$4 = 2^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>$8 = 2^3$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>$16 = 2^4$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>16</td><td>$32 = 2^5$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>32</td><td>$64 = 2^6$</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td>2^{b-1}</td><td>2^b</td></tr>
</table>

- Uporaba žepnega računala za izračun vrednosti za določen (npr.: $N = 100$: Dijak izračuna nekaj vrednosti za 2^b: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$. Torej velja $6 < b < 7$. Naslednji korak je izračun vrednosti za $2^{6,1}$, $2^{6,2}$, $2^{6,3}$ … z računalom. Torej je $6,6 < b < 6,7$ itd.
- Utemeljitev s faktorjem rasti (npr.: če za $b = 10$ dosežemo skoraj 1000 učencev, dosežemo za $b = 11$ 2000 učencev).
- Uporaba drevesnega prikaza:

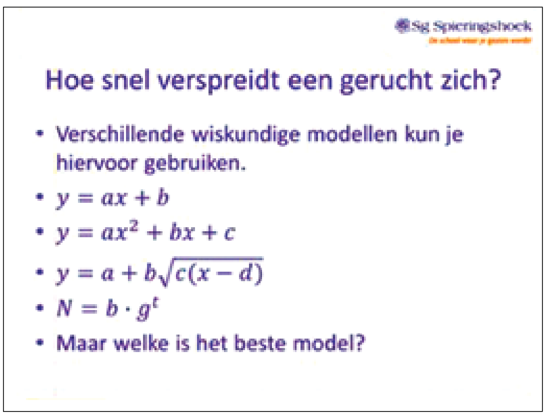

</td>
</tr>
</table>

	• Risanje grafa $f(x) = 2^x$:  Dijak nariše graf $f(x) = 2^x$ in prebere vrednosti za x za $f(x) = N$ • Risanje grafa $f(x) = 2^x$ in risanje grafa inverzne funkcije z zrcaljenjem preko simetrale lihih kvadrantov:  Dijak prebere vrednost za $x = N$ v prezrcaljenem grafu.
Nadaljnje preiskovanje	Dijaki poiščejo še druge situacije iz vsakdanjega življenja, kjer nastopata eksponentna in logaritemska funkcija.

4 Dodatne usmeritve za izvedbo v razredu

Dolžina posamezne faze se lahko prilagodi glede na dinamiko dela dijakov, splošne značilnosti razreda in stopnje poznavanje dela s preiskovanjem. Vendar se odsvetuje, da bi se posamezne faze preveč podaljševale. Za delo dijakov lahko izberemo tudi drugačno obliko: nekateri dijaki lahko delajo v paru ali manjših skupinah, morda pa kateri od dijakov raje rešuje problem sam.

Prvo devolucijo lahko učitelj podpre s konkretnimi funkcijami, ki predstavljajo možne modele za širjenje govoric. Na sliki 3 je primer prosojnice, ki jo je uporabil učitelj pri izvedbi na Nizozemskem. Na njej je navedeno vprašanje *Kako hitro se širijo govorice?* in zapis »za to se lahko uporabljajo različni matematični modeli«, sledijo pa ponujeni različni matematični modeli (linearen, kvadraten, korenski, eksponenten). Dijaki odgovorijo na vprašanje, kateri je »najprimernejši« model.



Slika 3: Prosojnica, ki jo je uporabil učitelj na Nizozemskem.

Pri izvedbi v Sloveniji na Ekonomski šoli v Novem mestu so dijaki model širjenja govoric tudi konkretno zaigrali (igra vlog na sliki 4). Dijaki, ki še niso poznali govorice, so bili zbrani skupaj, ločeno od tistih, ki govorico že poznajo. Z igro vlog so dijaki pridobili izkušnjo, pri kateri so govorico širili od ust do ust. Ugotovili so, da v majhni skupini govorica hitro doseže vse. Povedali so še, da navadno svoje govorice širijo s pomočjo pametnih telefonov (npr. SMS, družbena omrežja).

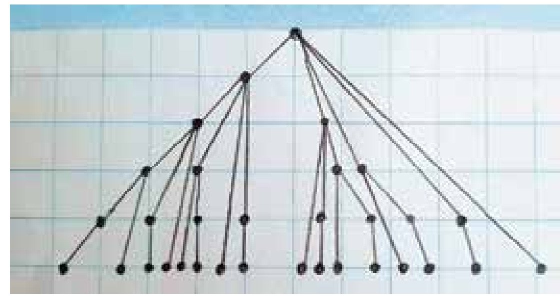
Slika 4: Igra vlog pri širjenju govoric pri izvedbi v Sloveniji (avtorica fotografije: Katarina Udovč).

5 Opažanja po izvedbi scenarija v praksi

Primer scenarija je bil v sklopu projekta MERIA v tej inačici preizkušen na srednjih šolah na Hrvaškem, Nizozemskem in v Sloveniji. V nadaljevanju navajamo opažanja o uporabljenih strategijah dijakov iz prakse, o katerih so poročali sodelujoči učitelji:

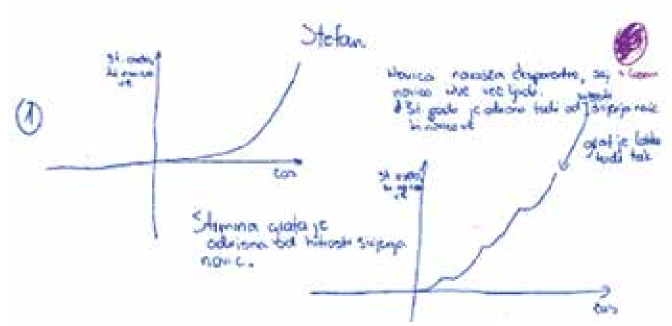
5.1 Modeli širjenja govoric, ki so jih zabeležili dijaki

1. Risanje drevesnega prikaza (Slika 5)



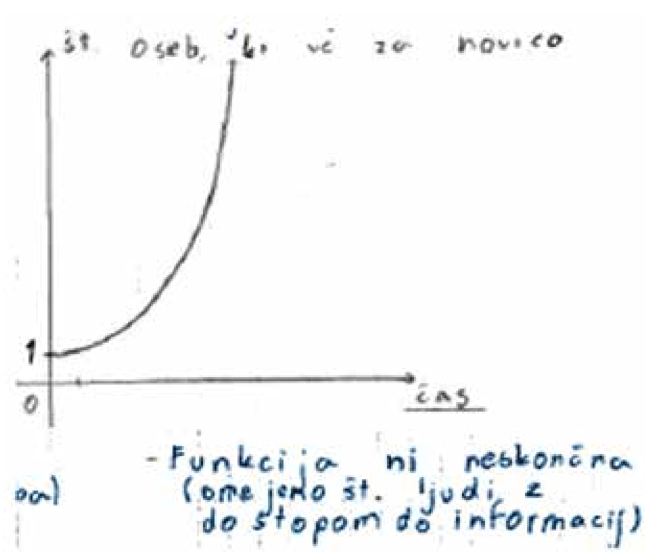
Slika 5: Prikaz modela širjenja govoric z drevesnim prikazom.

2. Risanje grafa funkcije (Slika 6, Slika 7)



Slika 6: Izdelek dijaka – risanje grafa.

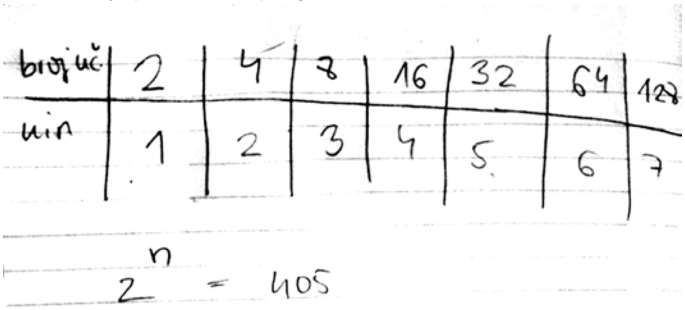
Na prvem grafu je dijak za x os izbral spremenljivko čas in število oseb, ki pozna govorico, za os y. V komentarju je zapisal, da »novica narašča eksponentno, saj s časom novico izve več ljudi«. Komentiral je tudi, da je »strmina grafa odvisna od hitrosti širjenja novice«. Na drugem grafu sta spremenljivki na x in y osi enaki, kot v prvem grafu, dijak pa je komentiral, da je »graf lahko tudi tak«.



Slika 7: Izdelek dijaka – risanje grafa.

Dijak je zapisal, da »funkcija ni neskončna, saj »je število ljudi z dostopom do informacije omejeno«.

3. Beleženje podatkov v preglednici (Slika 8)



Slika 8: Izdelek dijaka – preglednica.

Dijak je podatke beležil v preglednici, v kateri je v prvi vrstici zapisal število učencev, v drugi pa *minute.*

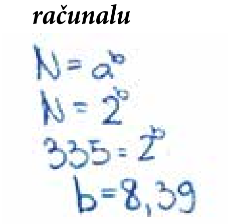
4. Zapis zaporedja

Dijak je število oseb, ki poznajo govorico, zapisal v obliki zaporedja. Zapisal je, da če *najprej (govorico) ve* ena oseba, lahko zapiše zaporedje, 1, 1, 2, 4, 8, 16.

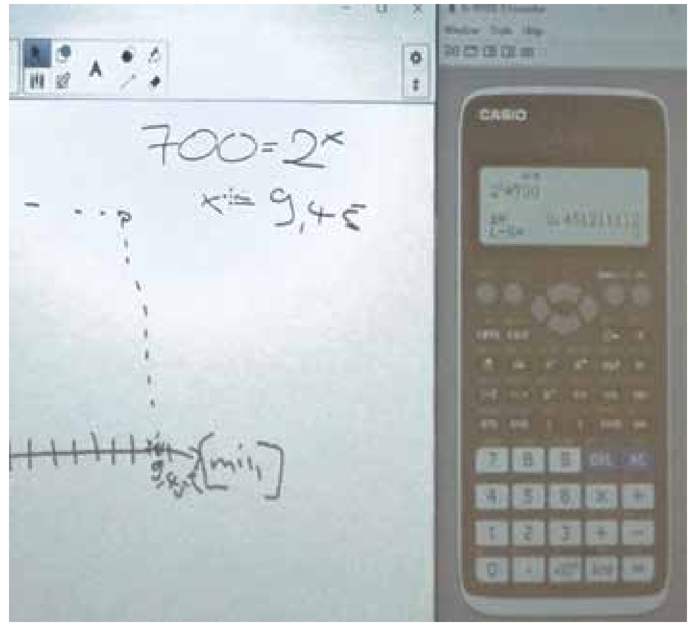
Ob zaključku navajanja strategij in modelov, ki so jih učitelji zabeležili pri izvedba scenarija v praksi, dodajamo še komentar učitelja z Nizozemske: pri nekaterih dijakih se je pojavila zmeda pri tem, koliko oseb govorico izve na novo (ob *b*-ti ponovitvi) in koliko oseb govorico pozna (skupno število).

5.2 Računanje časa, ki je potreben, da govorica doseže vse dijake na šoli

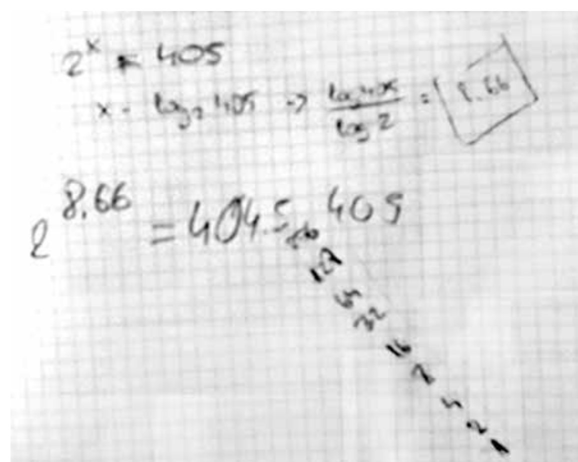
1. ***Reševanje enačbe za 335 dijakov s poskušanjem na žepnem računalu***



2. ***Reševanje enačbe za 700 dijakov na emulatorju*** (Slika 9)
3. ***Reševanje enačbe za 405 dijakov z uporabo pravila za prehod na novo osnovo*** (Slika 10)
4. ***Reševanje enačbe za 335 dijakov s premim sorazmerjem (napačno)***

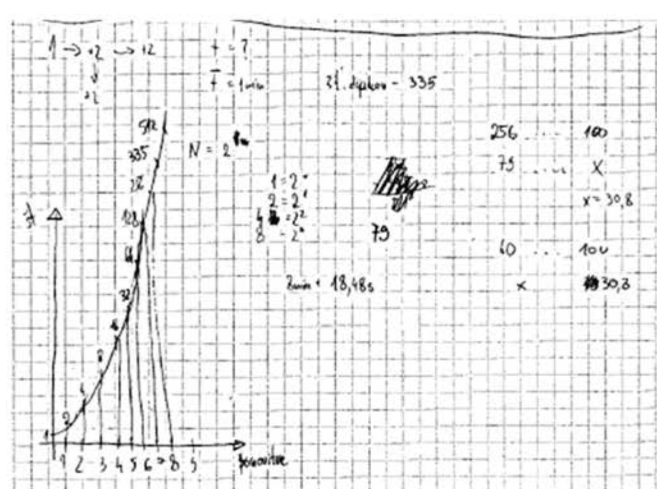


Slika 9: Reševanje enačbe s pomočjo emulatorja na i-tabli (Avtorica fotografije: Sonja Rajh, posneto na Gimnaziji Franca Miklošiča Ljutomer).



Slika 10: Izdelek dijaka – reševanje z uporabo pravila.

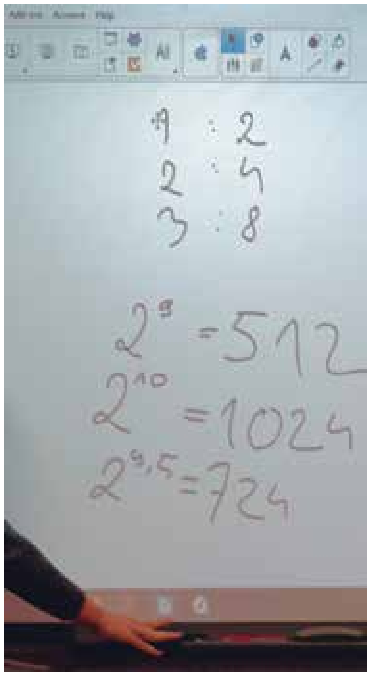
5. ***Reševanje enačbe z risanjem grafa in odčitavanjem vrednosti spremenljivke x pri vrednosti funkcije, enaki 335*** (Slika 11)



Slika 11: Izdelek dijaka – reševanje z grafom.

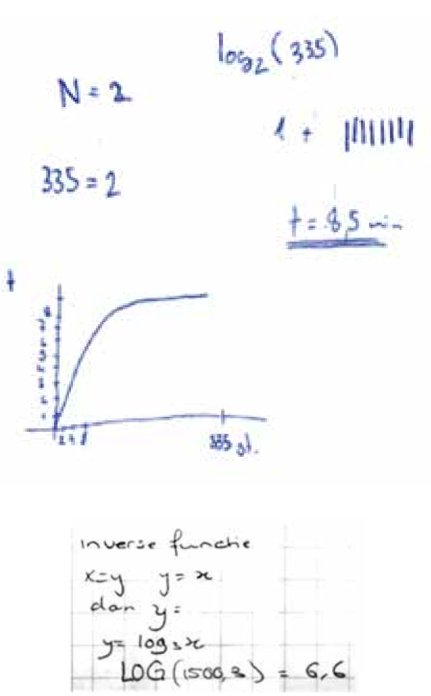
6. ***Dijaki so predlagali, da narišejo graf z Geogebro. (Graf je narisal učitelj, dijaki pa so predlagali izbiro enote na x osi in premico y = 335).***

7. ***Nekaj dijakov je uporabilo bisekcijo in ocenilo čas z žepnim računalom vrednost na dve decimalki* (Slika 12).**



Slika 12: Prvi korak postopka bisekcije na i-tabli (Avtorica fotografije: Sonja Rajh, posneto na Gimnaziji Franca Miklošiča Ljutomer).

8. ***Dijak, ki je poznal računanje inverzne funkcije na žepnem računalu, je ugotovil, da je inverzna funkcija logaritemska* (Slika 13).**



Slika 13: Izdelka dijakov – računanje z žepnim računalom.

9. ***Dijak beleži število oseb, ki poznajo govorico, in zapiše oceno, da je rešitev 9 minut (za primer, ko je na šoli 441 dijakov).* (Slika 14)**

Slika 14: Izdelek dijaka – beleženje podatkov.

6 Variacija problema na osnovi didaktičnih spremenljivk

Problem, ki je bil preizkušan v praksi, je bil v drugi devoluciji konkretiziran na način, kot je navedeno v inačici 1.

Inačica 1

Razišči naslednji model širjenja govoric: dijak na šoli pove govorico drugemu dijaku na šoli. Nato vsak od njiju govorico pove novemu dijaku in tako naprej. Vsak dijak, ki govorico pozna, jo pove drugemu dijaku, ki govorice še ne pozna. Recimo, da sporočanje govorice traja 1 minuto. Kako dolgo bi trajalo, da bi se govorica razširila po celotni šoli? (Učitelj pove podatek o številu dijakov na šoli.)

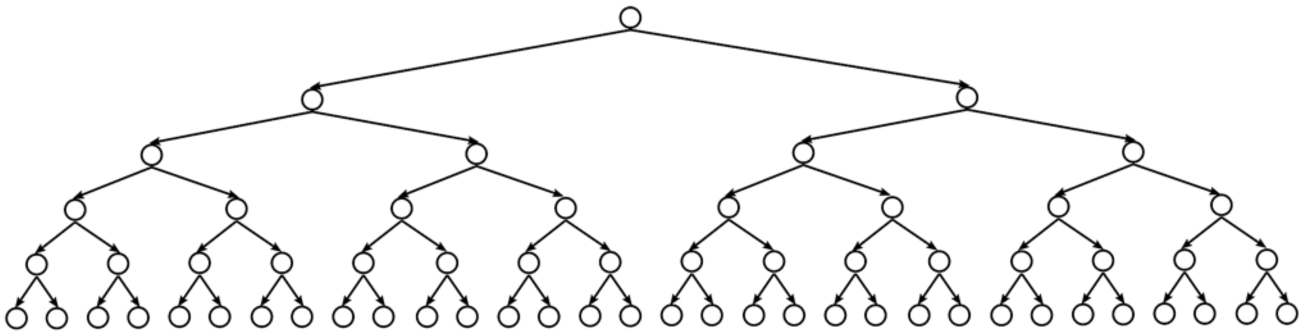
Problem je možno zastaviti še na kašen drug način. Navajamo še primer inačice 2.

Inačica 2

Dijak na šoli pove govorico dvema dijakoma, ki govorice še ne poznata. Vsak od teh dveh dijakov pove govorico dvema dijakoma, ki govorice še ne poznata in tako naprej. Recimo, da dijaku vzame eno minuto, da govorico pove drugemu dijaku. Čez koliko časa se bo govorica razširila po celi šoli?

V tej inačici je pozornost usmerjena na število dijakov, ki prvič (na novo) slišijo govorico v b-ti ponovitvi, zato je treba skrbno razmisliti, kolikšno je (skupno) število dijakov, ki poznajo govorico. Na primer: po petih ponovitvah govorico pozna 63 oseb ($1 + 2 + 4 + 8 +16 + 32 = 63$). Grafično je širjenje govorice prikazano na sliki 15 v obliki drevesnega prikaza.

Taka formulacija problema je lahko uporabljena tudi kot uvod v vrste. Če je vprašanje *Koliko dijakov pozna govorico po b ponovitvah*?, dobimo vsoto $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^b$.



Slika 15: Drevesni prikaz širjenja govorice po inačici 2 (izdelano z aplikacijo Mural).

Zaključek

V scenariju Širjenje govoric je predstavljena ena od možnosti za uvod v logaritem na osnovi realnega primera. Dijaki naj bi skozi reševanje problema širjenja govoric in izračunavanja potrebnega časa za razširitev govorice na vse dijake na šoli ugotovili, da za rešitev enačbe $2^x = N$ še nimajo ustreznega matematičnega znanja. Potrebujejo novo funkcijo, ki bo inverzna eksponenti funkciji. Po preizkušanju scenarija v razredu so učitelji v naslednji šolski uri prešli na definicijo logaritma in nadaljevali z obravnavo logaritemske funkcije.

Po izvedbi so učitelji poročali, da so nekateri dijaki imeli težave pri tem, kako začeti z reševanjem problema in da v nekaterih razredih niso vajeni delati s preiskovalnim načinom. Ob koncu so dijaki poročali tudi to, da so se veliko naučili in da je bila ura zanimiva. Eden od dijakov je dejal: »Dejansko razumem. Ne morem verjet.«

Dodaten trud in čas, ki ga je treba vložiti v pripravo in izvedbo takih učnih ur, je nagrajen s tem, da lahko pri dijakih dosežemo globljo stopnjo uvida in razumevanja, kot je razvidno iz zapisane izjave. Seveda se pri nadaljnji obravnavi pričakovano še pojavijo vzeli v znanju, vendar nas odzivi dijakov opogumljajo, da s takim pristopom nadaljujemo.

Viri in literatura

Beroš, D., Ćulav Markičević, M., Lobor, Z., Martinić, I. (2022). Logaritemska skala. *Matematika v šoli, 28*(1), str. 40–46. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Horvat, N. (2022). Prikaz in računanje prevožene poti kolesarja z uporabo eksponentne funkcije. V *Razvijamo matematično pismenost Opredelitev matematične pismenosti s primeri dejavnosti*, Sirnik, M., Vršič, V. (ur.). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Dezider, I., Janežič, T., Pustavrh, S., Zmazek, V., Mohorčič, A., Špolad, A., Jeler, A., Pečovnik Mencinger, A., Jericijo, O. (2014). VEGA 2, i-učbenik za matematiko v 2. letniku gimnazije, str. 621. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Jesenek Grašič, A. (2016). Matematično modeliranje pri pouku fizike. 3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike. V *Zbornik razširjenih povzetkov KUPM 2016*. Zavod RS za šolstvo. Ljubljana. https://www.zrss.si/kupm2016/wp-content/uploads/matematicno-modeliranje-pri-pouku-fizike.pdf

Jessen, B., Doorman, M., Bos, R. (2017). Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem. Strokovna redakcija slovenskega prevoda Suban, M., Rajh, S., Sirnik, M. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Kretič Mamič, A. (2020). Eksponentna funkcija. *Matematika v šoli, 26*(1), str. 32–40. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Kmetič, S., Sirnik, M. (ur.) (2010). *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Novičnik 6, projekt TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) https://www.zrss.si/wp-content/uploads/2021/09/2021-09-01-Novicnik-6.pdf

Pustavrh, S., Hvastja, D. (2010). Modeliranje z logistično funkcijo. V *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi*, str. 152., Kmetič, S., Sirnik, M. (ur.). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Sirnik, M., Vršič, V., Magajna, Z., idr. (2022). *Matematična pismenost. Opredelitev in gradniki.* Zavod Republike Slovenije za šolstvo. Ljubljana, https://www.zrss.si/pdf/Matematicna_pismenost_gradniki.pdf

Suban, M. (2017). Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem. *Vzgoja in izobraževanje, XLVIII*(4). Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Suban, M. (2020). Preiskovalne naloge pri matematiki. V *Ugotavljanje matematičnega znanja*, Suban, M. idr. (ur.). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Wilensky, U. (1997). NetLogo Rumor Mill model. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/RumorMill. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL

Wilensky, U. (1999). NetLogo. http://www.netlogoweb.org/launch#http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/models/Sample%20 Models/Social%20Science/Rumor%20Mill.nlogo. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL

Uvod v lastnosti funkcij: Marelična marmelada

Introduction to Properties of Functions: Apricot Jam

Irena Rauter Repija in mag. Mateja Škrlec
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Izvleček

V članku predstavljamo avtentičen primer dejavnosti za uvod v lastnosti funkcij, ki je nastal v okviru projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) z namenom strokovnega izpopolnjevanja učiteljev za oblikovanje učnih ur v podporo poučevanju matematike s preiskovanjem. Opisana je pot od ideje, ki temelji na realni življenjski situaciji, do oblikovanja končnega scenarija za izvedbo učne ure.

Ključne besede: matematika, lastnosti funkcij, analiza podatkov, preiskovanje

Abstract

This paper describes an activity for introducing the properties of functions created in the framework of the TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) project for the purpose of teacher professional development in designing IBMT (Inquiry-Based Mathematics Teaching) lessons. We explain the path from getting an idea based on a real-life situation to creating the final teaching scenario.

Keywords: mathematics, properties of functions, data analysis, inquiry.

Uvod

V srednji šoli posvečamo precej ur izgrajevanju in razumevanju pojma funkcije. Čeprav se trudimo funkcijo predstaviti dijakom na različne načine (s preglednico, grafom, funkcijskim predpisom itd.), opažamo, da ima precej dijakov težave z razumevanjem osnovnih pojmov. Zamenjujejo ničlo in začetno vrednost. Namesto zapisa intervala, na katerem funkcija narašča, dijak zapiše interval, ki poteka od najmanjše do največje vrednosti funkcije. Prav tako imajo nekateri dijaki težave pri zapisovanju intervala, na katerem funkcija zavzame pozitivne ali negativne vrednosti. Da bi dijaki bolje razumeli osnovne pojme funkcije, smo se članice projektnega tima Natalija Horvat, Irena Rauter Repija, Mateja Škrlec in Štefka Štrakl odločile, da jim te vsebine približamo s situacijo iz vsakdanjega življenja, ki smo jo poimenovale Marelična marmelada. Spomladi 2020 je bila v Sloveniji pozeba sadnega drevja. V tej življenjski situaciji smo našle idejo, kako učencem približati in osmisliti lastnosti funkcij.

Opis poteka dejavnosti

Na začetku dijaki dobijo zapisan problem.

Jaka je med poletnimi počitnicami leta 2020 odšel na obisk k svoji babici, ki živi na vasi blizu Murske Sobote.

Jaka: » Babica, kako sem lačen. Ali lahko dobim kos kruha s tvojo dobro domačo marelično marmelado?«

Babica: »Žal mi je. Letos marmelade nisem mogla narediti. Spomladansko vreme je krivo za to.«

Ima babica glede vremena prav?

V prvem delu dijaki v skupinah po 3–4 iščejo možne razloge za opisani problem. V skupinah diskutirajo, iščejo odgovore na spletu, zapišejo ugotovitve (glejte primer na Sliki 1) ter poročajo ostalim skupinam. Med zbranimi možnimi vzroki učitelj izpostavi pozebo in učence usmeri v analizo temperature zraka meseca marca in aprila, ko je čas za cvetenje marelic.

V drugem delu dijaki v skupinah 3–4 primerjajo in analizirajo podatke o temperaturi zraka ter jih povežejo z grafom funkcije v pravokotnem koordinatnem sistemu. Zapišejo ugotovitve in rešitev problema ter poročajo ostalim skupinam. Na koncu učitelj naredi povzetek in s pomočjo narisanega grafa temperature osmisli lastnosti funkcije: začetna vrednost, ničla, predznak, naraščanje, padanje …

Dejavnost smo v sklopu projekta TIME izvedle šestkrat v razredu z dijaki in enkrat na seminarju z učitelji. Po vsaki izvedbi smo se še isti dan sestale in naredile evalvacijo izvedene ure. Na podlagi evalvacije smo spreminjale scenarij in ga dopolnjevale.

Slika 1: Zapisi možnih razlogov ene od skupin dijakov v aplikaciji Jamboard.

Delo v projektnem šolskem timu je potekalo po korakih Lesson Study kot prikazuje slika 2.

Pri nekaterih izvedbah so bili poleg članic tima z naše šole prisotni še člani iz drugih timov projekta TIME: učiteljici z Gimnazije Jesenice, svetovalke za matematiko Zavoda RS za šolstvo in partnerji projekta s Fakultete za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Refleksija po opazovanju pouka je potekala po predpisanem protokolu Lesson Study, ki je opisan v predhodnem članku te revije: Preiskovanje v matematiki za vse - učne ure za učitelje in učence.

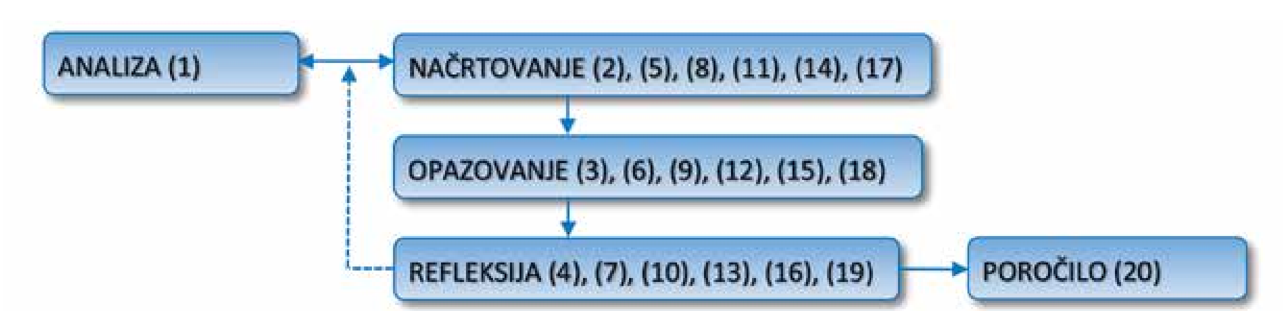
V nadaljevanju so opisane tri variante scenarijev, ki smo jih poimenovale **A, B** in **C**.

Izvedba dejavnosti po scenariju A

Prva izvedba je bila naravnana raziskovalno, izvedena je bila v sklopu interdisciplinarnega tematskega sklopa (ITS)[1]. Dejavnost je trajala 4 šolske ure. Dijaki so:

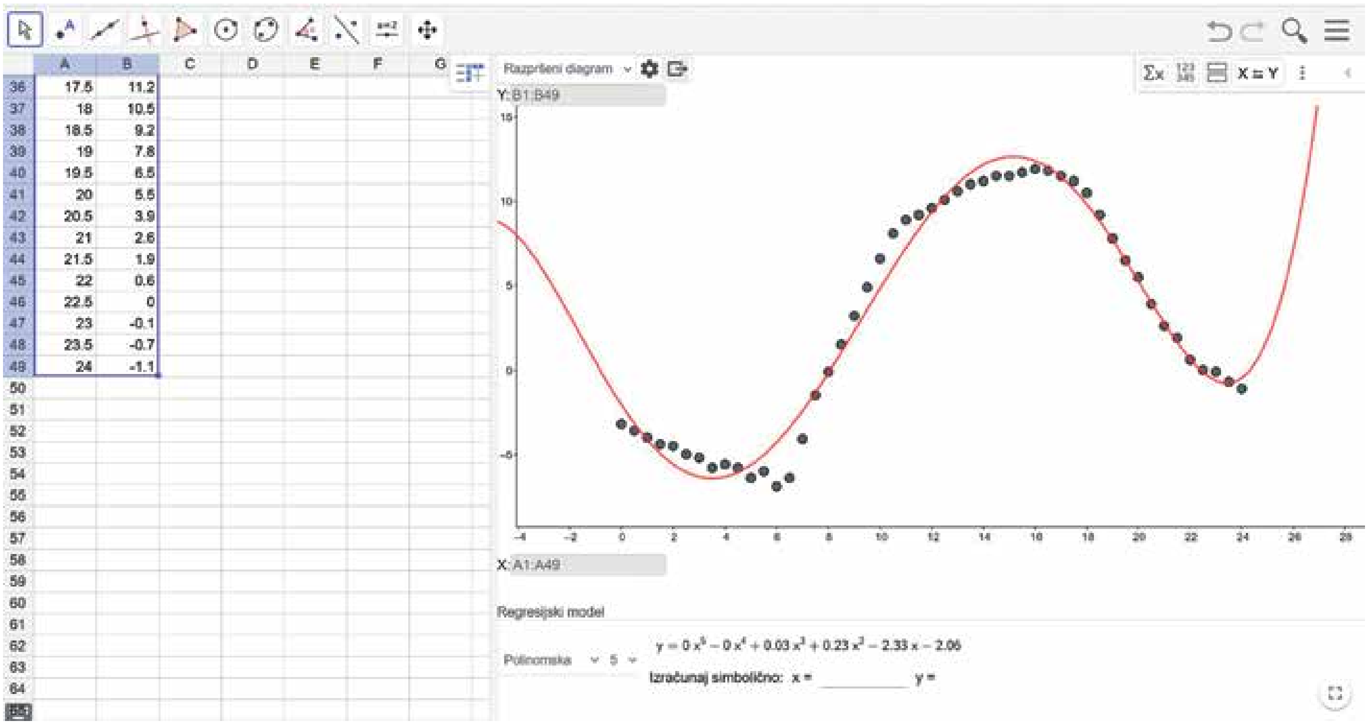
- diskutirali in na spletu poiskali možne razloge, s pomočjo katerih bi lahko odgovorili na zastavljeno vprašanje,
- na spletu sami poiskali podatke o temperaturi zraka (Arhiv podatkov temperatur lahko najdemo na spletni strani ARSO: https://tinyurl.com/23g3ys6t),
- podatke o temperaturi zraka izvozili in obdelali v programu za delo s preglednicami,
- v programu Geogebra podatke modelirali s polinomsko funkcijo (glejte sliko 3),
- v programu Geogebra analizirali graf funkcije,
- napisali poročilo o delu.

Pri prvi izvedbi se je izkazalo, da dijaki porabijo preveč časa za iskanje podatkov na spletu in njihovo obdelavo. Za ta del smo porabili dve šolski uri. Še dve šolski uri sta bili potrebni za modeliranje s polinomsko funkcijo, analizo grafa in učiteljev povzetek. Nato so dijaki doma napisali še poročilo o delu. Takšen scenarij je zelo primeren za uporabo pri pouku ITS-raziskovanje, kjer analiziramo in urejamo različne podatke, za uporabo pri pouku



Slika 2: Shema prikazuje cikličen proces nadgrajevanja scenarija in njegove ponovne izvedbe.

1 Interdisciplinarni tematski sklop (ITS) je vsebinsko zaokrožena celota, s katero se uresničujejo in poglabljajo medsebojno povezani cilji različnih disciplin oziroma predmetov (najmanj treh). Zato se načrt ITS oblikuje na podlagi učnih načrtov izbirnih predmetov oziroma na podlagi posebnih (izbirnih) znanj iz učnih načrtov obveznih predmetov, lahko pa tudi kroskurikularnih tem (knjižnično-informacijsko znanje, okoljska vzgoja) ali izbirnih znanj drugih oblik vzgojno-izobraževalnega dela (aktivno državljanstvo), ki so potrjeni za programe splošne gimnazije, in sicer v obsegu 105 ur letno v 2. in/ali 3. letniku. (Vir: ITS – priročnik za načrtovanje in izvedbo interdisciplinarnega tematskega sklopa, 2020).



Slika 3: Graf prilagoditvene funkcije vrednosti temperatur v odvisnosti od časa za en dan (narisan v programu Geogebra).

matematike pa smo se strinjale, da ga je treba skrajšati in preurediti.

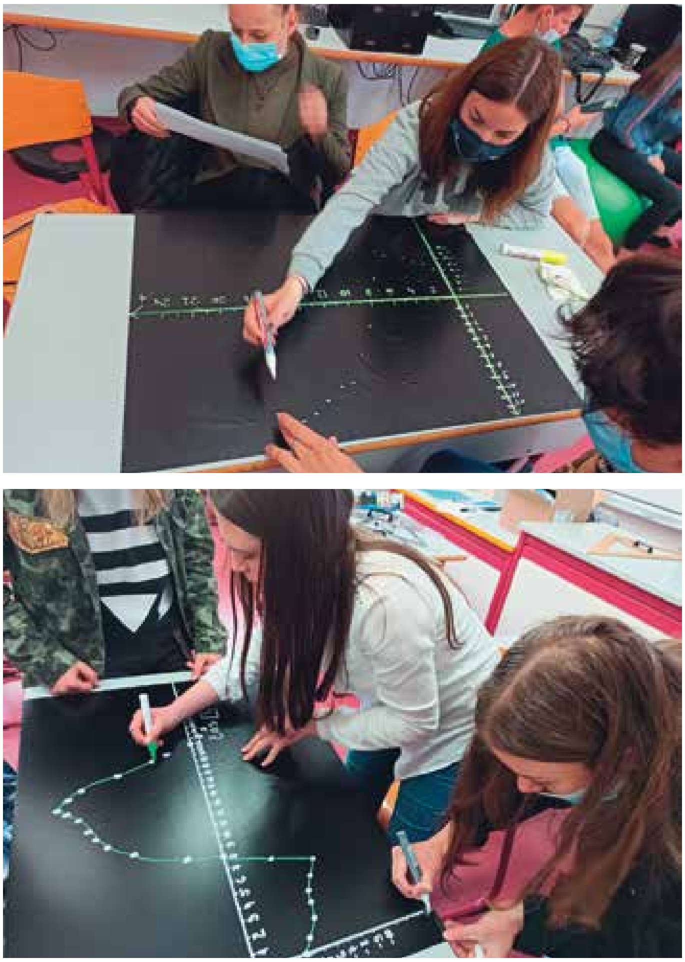
Izvedba dejavnosti po scenariju B

Preostale izvedbe so po skrajšanem scenariju trajale dve šolski uri. Namesto da bi dijaki sami iskali podatke na spletni strani ARSO, so jih dobili kot prilogo k delovnemu listu. Scenarij smo med izvedbami spreminjale in dopolnjevale. Dijaki so dobili k delovnemu listu štiri priloge. Prva priloga je bila preglednica povprečnih dnevnih temperatur za marec in april. Druga priloga je bila preglednica minimalnih temperatur za marec in april. Tretja priloga je bila preglednica temperatur, merjenih trikrat dnevno za marec in april. Četrta priloga je bila neoznačen graf. Dijaki so morali ugotoviti, kateri izmed preglednic pripada neoznačeni graf iz četrte priloge in nato s pomočjo vseh štirih prilog poiskati odgovor na zastavljeno vprašanje. Končna verzija tega scenarija je bil naš končni izdelek v okviru projekta TIME in je v angleškem jeziku dostopna v priročniku TIME[2], v poglavju Apricot jam.

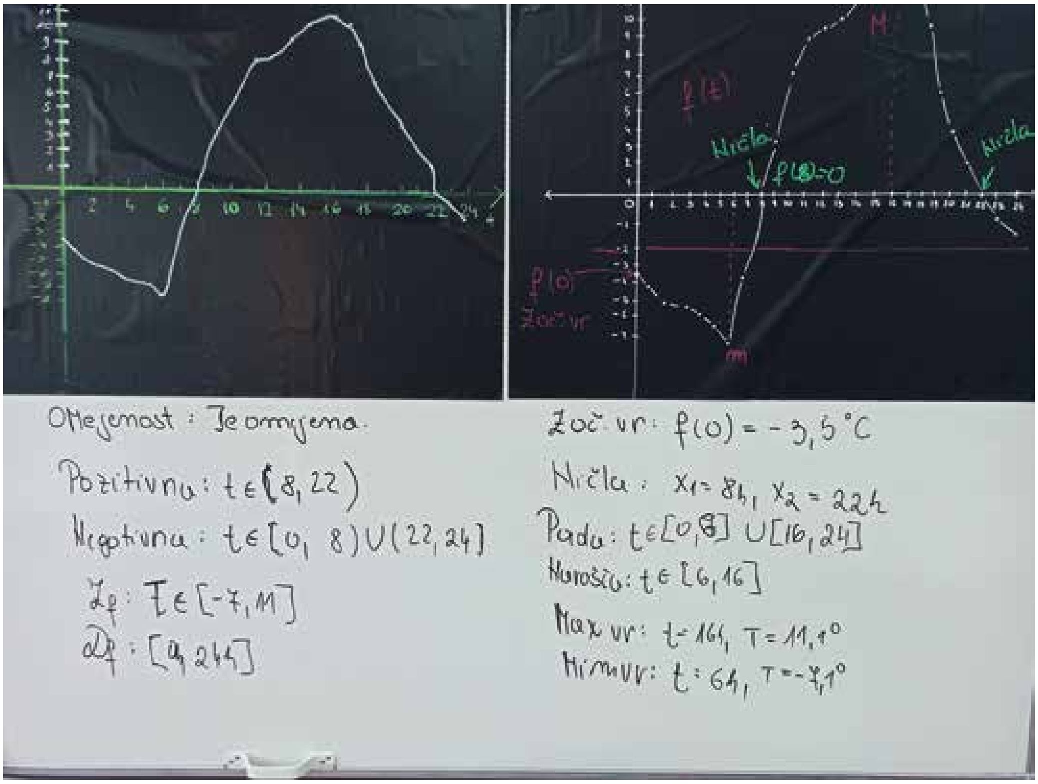
Izvedba dejavnosti po scenariju C

Scenarij C je priloga tega članka. Dejavnost je bila izvedena z dijaki v razredu in tudi z učitelji na seminarju *Učitelj matematike preiskuje lastno poučevalno prakso*, ki je potekal 6. 5. 2022 v Ljubljani.

Dijaki dobijo najprej dve prilogi. Prva priloga je preglednica povprečnih temperatur za marec in april. Druga priloga je preglednica najnižjih temperatur za marec in april. Ko dijaki na podlagi



Slika 4: Risanje grafa prilagoditvene funkcije v koordinatni sistem za konkreten dan.



Slika 4: Graf vrednosti temperature v odvisnosti od časa za 2. 4. 2022, z zapisanimi lastnostmi funkcije.

podatkov iz teh dveh preglednic predvidijo možne dneve za pozebo, dobi vsaka skupina preglednico spreminjanja temperature za en konkreten datum (preglednice 3-9). Temperatura za ta dan je merjena vsake pol ure. Dobljene podatke mora skupina ponazoriti v koordinatnem sistemu in skicirati graf odvisnosti temperature od časa. Različne skupine analizirajo različne datume.

Na grafu odvisnosti temperature od časa za en posamezni dan dijaki na avtentičnem primeru ozaveščajo, kaj je to začetna vrednost, kaj je to definicijsko območje, zaloga vrednosti, ničle … S primerjavo različnih grafov dijaki spoznajo različne situacije, npr. tudi primere, ko funkcija nima ničel.

Zaključek

Marelična marmelada je bil naš prvi scenarij, ki smo ga naredile v okviru projekta TIME. Na začetku smo problem zastavile preširoko, a smo ga po več implementacijah in sestankih zaključile v obliki, s katero smo zadovoljne. Članice tima naše šole smo opravile kar nekaj hospitacij in pogovorov ter se tako učile podajati in sprejemati konstruktivno kritiko. Izboljšala se je tudi organizacija. Zaradi več opazovanj in srečanj smo se bile prisiljene naučiti hitrega iskanja rešitev, porazdelitve dela in prilagajanja mnenju večine. Projektno sodelovanje z drugimi državami in projektne usmeritve so nam dale dragocene kompetence, kako iz začetne ideje s skupnimi močmi naših kolegov zgraditi kakovostno pripravljeno šolsko uro. Ker gre za prispevek h kakovosti znanja dijakov, smo vesele, da nam je kljub velikemu delu in trudu uspelo sodelovati v projektu in preoblikovati scenarij v obliko, s katero smo zadovoljne in za katero menimo, da pripomore k višji kakovosti znanja dijakov naše šole.

Viri in literatura

Bašić, M., Cafuta, K. (2023). *Time² Scenarios, Innovative scenarios for inquiry-based mathematics*, Project TIME, dostopno (6. 5. 2023) na povezavi https://time-project.eu/sites/default/files/inline-files/TIME%20Scenarios.pdf oziroma https://tinyurl.com/2fykp3e4

Spletna stran *Agencija Republike Slovenije za okolje:* dostopno (6. 5. 2023) na povezavi https://meteo.arso.gov.si/met/sl/app/webmet/#webmet=vUHcs9WYkN3LtVGdl92LhBHcvcXZi1WZ09Cc1p2cvAncvd2LyVWYs12L3VWY0hWZy9SaulGdugXbsx3cs9mdl5WahxHf;

Kregar, S., Rojc, J., Rutar Ilc, Z., Sambolić Beganović, A., Slivar, B. (2020). *ITS – priročnik za načrtovanje in izvedbo interdisciplinarnega tematskega sklopa.* Zavod RS za šolstvo, dostopno (25. 4. 2023) na povezavi https://www.zrss.si/pdf/ITS_prirocnik.pdf

TIME Scenarij – Marelična marmelada

Scenarij za izvedbo C

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Dijak spozna osnovne pojme o lastnostih funkcij (naraščanje/padanje, predznak, ničla, začetna vrednost, ekstremna vrednost …), jih razume, uporablja in poveže s situacijami iz vsakdanjega življenja.
Splošni cilji	• uvod v lastnosti funkcij in reševanje realnih problemov • komunikacija • razvoj preiskovalnih veščin • analiziranje podatkov • povezovanje matematike z vsakdanjim življenjem
Potrebno matematično predznanje	• linearna funkcija in njene lastnosti • modeliranje z linearno funkcijo • uporaba programov za obdelavo podatkov in risanje grafov
Letnik, starost dijakov	drugi letnik srednje šole, 16 let
Trajanje	90 minut
Potrebni material	• preglednice s temperaturami zraka • plakati ali piši-briši folija, pisala in ravnilo za risanje grafa funkcije • telefon ali tablica za iskanje podatkov na spletu in pisanje v skupni dokument Jamboard

Problem
Jaka je med poletnimi počitnicami leta 2020 odšel na obisk k svoji babici, ki živi na vasi blizu Murske Sobote.
Jaka: »Babica, kako sem lačen. Ali lahko dobim kos kruha s tvojo dobro domačo marelično marmelado?«
Babica: »Žal mi je. Letos marmelade nisem mogla narediti. Spomladansko vreme je krivo za to.«
Ima babica glede vremena prav?

Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija/ Predstavitev problema (didaktična faza) 5 minut	Učitelj predstavi problem in povabi dijake, naj zapišejo (v skupni dokument), kaj bi lahko bil razlog, da babica zaradi vremena ni mogla narediti marmelade (2020).	Dijaki poslušajo in poskušajo razumeti problem.
Akcija/Delovanje (adidaktična faza) 10 minut	Učitelj opazuje delo dijakov, ko iščejo informacije, razpravljajo in pišejo sklepe ter zapišejo svoje odgovore v skupni dokument. Posebej je pozoren na zapise, kjer vzrok za nastalo situacijo pripisujejo temperaturi zraka.	Dijaki razmišljajo o možnih razlogih in po potrebi na spletu poiščejo ustrezne informacije. Svoje mnenje zapišejo v skupni dokument (npr. Jamboard).
Formulacija/Zapis ugotovitev (didaktična faza) 5 minut	Učitelj povabi dijake, da preberejo in komentirajo zapise v skupnem dokumentu. Dijake usmeri v možnost analize temperature zraka.	Dijaki delijo svoje ugotovitve in sklepe ter sodelujejo v razpravi. Pričakovati je, da bo veliko različnih mnenj in da bo le nekaj dijakov uporabljalo matematične utemeljitve.
Devolucija/ Predstavitev problema (didaktična faza) 10 minut	Učitelj dijakom predstavi preglednico s povprečno in najnižjo dnevno temperaturo zraka marca in aprila. Dijake povabi, da si ogledajo podatke v obeh preglednicah.	Dijaki analizirajo in primerjajo podatke o temperaturah v obeh preglednicah.
Formulacija/Zapis ugotovitev (didaktična faza) 5 minut	Učitelj dijake povabi, da predstavijo svoje ugotovitve.	Dijaki delijo svoje ugotovitve in sklepe ter sodelujejo v razpravi. Pričakovati je, da bodo dijaki ugotovili, da je bila marca temperatura zraka v nekaterih dneh precej višja kot aprila in da najnižja povprečna temperatura posameznega dne ni nujno najnižja dejanska temperatura tega dne.

Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija/ Predstavitev problema (didaktična faza) 5 minut	Učitelj dijake razdeli v skupine (3–4). Vsaka skupina dobi preglednico z najnižjimi temperaturami zraka za določen dan ter potrebne pripomočke za risanje grafa, ki ustreza podatkom preglednice.	Dijaki vzamejo ustrezne pripomočke ter naredijo načrt za delo.
Akcija/Delovanje (adidaktična faza) 25 minut	Učitelj opazuje delo dijakov. Zapisuje strategije posameznih skupin, razmišlja o vrstnem redu predstavitve in pripravlja vse potrebno za pripravo faze formulacije.	Dijaki na plakat/folijo rišejo krivuljo, ki ustreza podatkom preglednice.
Formulacija/Zapis ugotovitev (didaktična faza) 10 minut	Učitelj povabi nekaj dijakov, da predstavijo ugotovitve svoje skupine. Cilj je slišati in predstaviti čim več različnih možnosti, ki se nanašajo na lastnosti funkcij.	Dijak, ki ga učitelj povabi, komentira ugotovitve svoje skupine. Pričakovati je, da bodo dijaki omenjali nekaj od naslednjega: • vrednost temperature na začetku in koncu opazovanja, • kdaj je temperatura imela vrednost nič, • kdaj in koliko časa je bila temperatura zraka negativna, • kdaj in koliko časa je bila temperatura zraka pozitivna, • kolikšna je najnižja/najvišja temperatura zraka v izbranem dnevu, • kdaj in koliko časa je temperatura naraščala, • kdaj in koliko časa je temperatura padala, • kdaj in koliko časa je temperatura imela vrednost pod -2°C, ko lahko pozebe cvet sadnega drevja, ki se začne odpirati, • utemeljitev, podatki iz katere preglednice se ujemajo z grafom prilagoditvene funkcije, • utemeljitev, ali je lahko prišlo do pozebe s primerjavo temperatur različnih datumov.
Validacija/ Potrditev (didaktična faza) 10 minut	Učitelj vodi in usmerja razpravo, ki vodi do analize lastnosti funkcij. Pri tem pazi, da dijaki pravilno uporabljajo matematični jezik.	Dijaki razpravljajo o predstavitvah drugih skupin. Po učiteljevih namigih dijaki poskušajo najti skupni zaključek.
Institucionalizacija/ Oblikovanje ustaljenega zapisa (didaktična faza) 5 minut	Učitelj naredi povzetek. Glede na graf razloži pojme: • ničla, • začetna vrednost, • največja, najmanjša vrednost funkcije, • interval, na katerem je funkcija pozitivna/ negativna, • interval naraščanja/padanja, • definicijsko območje in zaloga vrednosti.	Dijaki poslušajo in dopolnijo svoje zapiske.

Opomnik in dodatni napotki za izvedbo

1. Dijaki podatke za pozebo lahko sami iščejo na spletu ali pa jih učitelj po potrebi usmeri na ustrezno spletno stran, kot npr. https://zelenisvet.com/pozeba-sadnega-drevja-sadovnjak/

2. Pri analizi preglednic s povprečnimi in najnižjimi dnevnimi temperaturami zraka za marec in april bodimo pozorni na visoke dnevne temperature zraka marca, ki so vzpodbudile cvetenje sadnega drevja in izredno nizke temperature aprila, ki bi lahko povzročile pozebo.

3. Ko učitelj razdeli dijake v skupine, lahko vse skupine dobijo enako preglednico za analizo, lahko pa se odloči, da vsaka skupina analizira in nariše ustrezen graf za drug dan. Pri tem je zanimivo, če izberemo nekaj zaporednih dni, ki lepo prikazuje zveznost funkcije (temperature) čez več dni in še kakšen dan, ko temperatura ne pade pod 0 °C. Pri tem lahko učitelj poudari, da obstajajo tudi funkcije, ki nimajo ničel. V prilogi je za ta namen pripravljenih več tabel.

4. V povzetku lahko učitelj ugotovitve matematično oblikuje na naslednji način:
   - ničla funkcije odvisnosti temperature od časa je podatek o času v dnevu, ko je izmerjena temperatura znašala 0 °C,
   - začetna vrednost je vrednost prilagoditvene funkcije v trenutku, ko začnemo z merjenjem temperature, in predstavlja ordinato presečišča grafa z ordinatno osjo,
   - največja vrednost je najvišja temperatura v preglednici ali najvišja vrednost na grafu funkcije, minimalna vrednost funkcije je najnižja temperatura v preglednici ali najmanjša vrednost na grafu funkcije,
   - interval, na katerem je funkcija pozitivna/negativna, je časovni interval, na katerem je temperatura pozitivna/negativna,
   - interval naraščanja/padanja je časovni interval, ko temperatura narašča/pada,
   - definicijsko območje funkcije je časovni interval, v katerem so bile zabeležene temperature,
   - zaloga vrednosti funkcije je interval od najnižje do najvišje temperature.

DELOVNI LIST

MARELIČNA MARMELADA

PROBLEM

Jaka je med poletnimi počitnicami leta 2020 odšel na obisk k svoji babici, ki živi na vasi blizu Murske Sobote.
Jaka: »Babica, kako sem lačen. Ali lahko dobim kos kruha s tvojo dobro domačo marelično marmelado?«
Babica: »Žal mi je. Letos marmelade nisem mogla narediti. Spomladansko vreme je krivo za to.«

Ima babica glede vremena prav?

PREGLEDNICA 1
Povprečna dnevna temperatura zraka, 1. 3. 2020–30. 4. 2020, Murska Sobota-Rakičan, podatki glavnih meteoroloških postaj

Datum	Povprečna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum	Povprečna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum	Povprečna temperatura zraka na 2 m T [°C]
2020-03-01	9.9	2020-03-22	2.0	2020-04-12	16.3
2020-03-02	10.3	2020-03-23	1.3	2020-04-13	16.1
2020-03-03	8.9	2020-03-24	2.6	2020-04-14	4.2
2020-03-04	6.4	2020-03-25	0.4	2020-04-15	6.6
2020-03-05	6.2	2020-03-26	3.3	2020-04-16	13.5
2020-03-06	5.8	2020-03-27	8.3	2020-04-17	17.6
2020-03-07	7.5	2020-03-28	8.8	2020-04-18	18.1
2020-03-08	3.5	2020-03-29	10.6	2020-04-19	14.4
2020-03-09	6.6	2020-03-30	4.1	2020-04-20	9.8
2020-03-10	9.7	2020-03-31	2.0	2020-04-21	9.5
2020-03-11	13.6	2020-04-01	1.6	2020-04-22	10.3
2020-03-12	12.7	2020-04-02	3.7	2020-04-23	10.5
2020-03-13	6.8	2020-04-03	9.9	2020-04-24	14.6
2020-03-14	6.7	2020-04-04	9.3	2020-04-25	15.0
2020-03-15	2.1	2020-04-05	8.5	2020-04-26	12.8
2020-03-16	4.7	2020-04-06	8.7	2020-04-27	14.4
2020-03-17	10.6	2020-04-07	7.9	2020-04-28	16.7
2020-03-18	10.1	2020-04-08	8.9	2020-04-29	14.4
2020-03-19	10.1	2020-04-09	11.4	2020-04-30	16.4
2020-03-20	10.9	2020-04-10	14.3		
2020-03-21	7.4	2020-04-11	14.6		

Vir: ARSO

Matematika v šoli, št. 1., letnik 29, 2023

PREGLEDNICA 2
Minimalna temperatura zraka, 1. 3. 2020–30. 4. 2020, Murska Sobota-Rakičan, podatki glavnih meteoroloških postaj

Datum	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]
2020-03-01	8.5	2020-03-22	–0.1	2020-04-12	3.1
2020-03-02	7.2	2020-03-23	–2.8	2020-04-13	3.8
2020-03-03	5.2	2020-03-24	–1.6	2020-04-14	1.0
2020-03-04	4.3	2020-03-25	–0.8	2020-04-15	–3.1
2020-03-05	–2.7	2020-03-26	0.3	2020-04-16	–1.1
2020-03-06	5.0	2020-03-27	3.2	2020-04-17	4.7
2020-03-07	3.5	2020-03-28	2.5	2020-04-18	6.9
2020-03-08	1.1	2020-03-29	4.1	2020-04-19	10.6
2020-03-09	–2.4	2020-03-30	3.4	2020-04-20	7.3
2020-03-10	4.9	2020-03-31	–5.2	2020-04-21	3.5
2020-03-11	4.9	2020-04-01	–3.5	2020-04-22	1.4
2020-03-12	2.1	2020-04-02	–7.1	2020-04-23	1.6
2020-03-13	4.8	2020-04-03	–3.9	2020-04-24	0.8
2020-03-14	2.5	2020-04-04	3.1	2020-04-25	4.8
2020-03-15	–1.0	2020-04-05	0.1	2020-04-26	5.0
2020-03-16	–5.5	2020-04-06	–0.3	2020-04-27	7.1
2020-03-17	–1.4	2020-04-07	–2.1	2020-04-28	9.5
2020-03-18	4.1	2020-04-08	–2.8	2020-04-29	10.6
2020-03-19	1.5	2020-04-09	–1.1	2020-04-30	11.1
2020-03-20	1.1	2020-04-10	4.7		
2020-03-21	4.2	2020-04-11	4.8		

Vir: ARSO

PREGLEDNICA 3
Minimalna temperatura zraka, 1. 3. 2020, Murska Sobota-Rakičan, podatki samodejnih meteoroloških postaj

Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]
2020-03-01 0:00	9.8	2020-03-01 8:30	10.4	2020-03-01 17:00	12.3
2020-03-01 0:30	9.6	2020-03-01 9:00	10.4	2020-03-01 17:30	11.9
2020-03-01 1:00	9.9	2020-03-01 9:30	10.5	2020-03-01 18:00	11.5
2020-03-01 1:30	10	2020-03-01 10:00	10.9	2020-03-01 18:30	11.2
2020-03-01 2:00	9.9	2020-03-01 10:30	10.9	2020-03-01 19:00	10.7
2020-03-01 2:30	10	2020-03-01 11:00	11	2020-03-01 19:30	9.8
2020-03-01 3:00	10.2	2020-03-01 11:30	10.8	2020-03-01 20:00	8.9
2020-03-01 3:30	10.4	2020-03-01 12:00	11.1	2020-03-01 20:30	8.6
2020-03-01 4:00	10.5	2020-03-01 12:30	11.9	2020-03-01 21:00	8.5
2020-03-01 4:30	10.5	2020-03-01 13:00	11.8	2020-03-01 21:30	8.4
2020-03-01 5:00	10.4	2020-03-01 13:30	11.8	2020-03-01 22:00	8.1
2020-03-01 5:30	10.3	2020-03-01 14:00	12.4	2020-03-01 22:30	8.1
2020-03-01 6:00	10.3	2020-03-01 14:30	12.6	2020-03-01 23:00	7.9
2020-03-01 6:30	9.9	2020-03-01 15:00	12.7	2020-03-01 23:30	7.9
2020-03-01 7:00	9.6	2020-03-01 15:30	12.9	2020-03-01 24:00	7.8
2020-03-01 7:30	9.7	2020-03-01 16:00	13.1		
2020-03-01 8:00	9.9	2020-03-01 16:30	12.7		

Vir: ARSO

PREGLEDNICA 4
Minimalna temperatura zraka, 11. 3. 2021, Murska Sobota-Rakičan, podatki samodejnih meteoroloških postaj

Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]
2020-03-11 0:00	5.6	2020-03-11 8:30	9	2020-03-11 17:00	20.4
2020-03-11 0:30	5.9	2020-03-11 9:00	10.3	2020-03-11 17:30	19.7
2020-03-11 1:00	5.9	2020-03-11 9:30	11.3	2020-03-11 18:00	18.2
2020-03-11 1:30	6.4	2020-03-11 10:00	12.6	2020-03-11 18:30	15.5
2020-03-11 2:00	6.5	2020-03-11 10:30	13	2020-03-11 19:00	14.4
2020-03-11 2:30	6.4	2020-03-11 11:00	14.3	2020-03-11 19:30	15.3
2020-03-11 3:00	6.4	2020-03-11 11:30	15.1	2020-03-11 20:00	14.8
2020-03-11 3:30	6.5	2020-03-11 12:00	16.4	2020-03-11 20:30	14.2
2020-03-11 4:00	6.7	2020-03-11 12:30	17.6	2020-03-11 21:00	13.5
2020-03-11 4:30	5	2020-03-11 13:00	18.3	2020-03-11 21:30	12.7
2020-03-11 5:00	5.2	2020-03-11 13:30	18.6	2020-03-11 22:00	9.9
2020-03-11 5:30	6.1	2020-03-11 14:00	19.6	2020-03-11 22:30	9.2
2020-03-11 6:00	4.9	2020-03-11 14:30	20.4	2020-03-11 23:00	8.1
2020-03-11 6:30	5.7	2020-03-11 15:00	20.3	2020-03-11 23:30	7.7
2020-03-11 7:00	6	2020-03-11 15:30	20.1	2020-03-11 24:00	7.4
2020-03-11 7:30	7.1	2020-03-11 16:00	20.3		
2020-03-11 8:00	8.1	2020-03-11 16:30	21.2		

Vir: ARSO

PREGLEDNICA 5
Minimalna temperatura zraka, 31. 3. 2020, Murska Sobota-Rakičan, podatki samodejnih meteoroloških postaj

Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]	Datum/ura	Minimalna temperatura zraka na 2 m T [°C]
2020-03-31 0:00	1.8	2020-03-31 8:30	2.7	2020-03-31 17:00	6.5
2020-03-31 0:30	1.2	2020-03-31 9:00	3	2020-03-31 17:30	6.3
2020-03-31 1:00	0.8	2020-03-31 9:30	3.8	2020-03-31 18:00	5
2020-03-31 1:30	0	2020-03-31 10:00	4.3	2020-03-31 18:30	4
2020-03-31 2:00	−0.2	2020-03-31 10:30	4.9	2020-03-31 18:40	4
2020-03-31 2:30	−1.4	2020-03-31 11:00	5.1	2020-03-31 18:50	3.7
2020-03-31 3:00	−2.7	2020-03-31 11:30	6	2020-03-31 19:00	3.5
2020-03-31 3:30	−2.9	2020-03-31 12:00	6	2020-03-31 19:30	2.7
2020-03-31 4:00	−3.1	2020-03-31 12:30	6.7	2020-03-31 20:00	1.8
2020-03-31 4:30	−3.5	2020-03-31 13:00	6.5	2020-03-31 20:30	1.5
2020-03-31 5:00	−5.2	2020-03-31 13:30	6.7	2020-03-31 21:00	1.2
2020-03-31 5:30	−4	2020-03-31 14:00	6.2	2020-03-31 21:30	1.4
2020-03-31 6:00	−4.6	2020-03-31 14:30	6.8	2020-03-31 22:00	0.7
2020-03-31 6:30	−3.4	2020-03-31 15:00	6.8	2020-03-31 22:30	0.4
2020-03-31 7:00	−1.5	2020-03-31 15:30	6.5	2020-03-31 23:00	0.5
2020-03-31 7:30	0.6	2020-03-31 16:00	7.1	2020-03-31 23:30	0.7
2020-03-31 8:00	1.8	2020-03-31 16:30	6.3	2020-03-31 24:00	0.6

Vir: ARSO

Preglednice 6-9 so objavljene na spletni strani: https://www.zrss.si/strokovne-revije/matematika-v-soli/.

Uredimo podstrešno sobico

Let's Get the Attic Room Organised

Natalija Horvat in Štefka Štrakl
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Izvleček

V članku je predstavljeno spremljanje pouka matematike z namenom opazovanja dela dijakov in njihovega načina učenja. Učna ura je zastavljena s pomočjo učnega scenarija, s skrbno načrtovanimi vprašanji, ki dijake usmerjajo v preiskovanje. V scenariju, ki je priloga tega članka, so dejavnosti učitelja zapisane ločeno od dejavnosti dijakov. Spremljanje pouka po metodi Lesson Study se osredotoča na delo dijakov, na njihov način razmišljanja in razloge za preiskovanje v izbrano smer, pogovor s sošolci, oblikovanje sklepov, zapisovanje in predstavljanje rezultatov. Izpostavljamo pomen analize ure in evalvacije dejavnosti neposredno po izvedeni spremljavi. Zaključki evalvacije predstavljajo izhodišča za korekcije učnega scenarija in njegovo ponovno preizkušanje v drugem oddelku istega razreda.

Ključne besede: matematika, preiskovanje, učni scenarij, spremljanje, evalvacija

Abstract

This article explains the monitoring of mathematics instruction to observe students' work and learning styles. Teachers set up the lesson using a learning scenario (appended to this paper) with well-crafted questions to steer student investigations. The activities of the teacher are listed separately from those of the students. The Lesson Study approach focuses on students' work, student reasoning and rationale for investigating in the chosen direction, classroom discussions, drawing conclusions, and recording and presenting the outcomes. We stress the importance of analysing and evaluating activities as soon as possible after the study lesson. The evaluation conclusions are the starting points for corrections of the learning scenario and its re-testing with a different student group at the same grade level.

Keywords: mathematics, inquiry, learning scenario, monitoring, evaluation.

1 Uvod

V praksi ugotavljamo, da dijaki faktografske podatke, kamor spadajo tudi formule, hitro pozabijo. S pomočjo povezovanja z resničnim problemom, vizualizacijo rešitev in pogleda problema z geometrijske perspektive, se formula lažje prikliče iz spomina. Sodobne pedagoške raziskave dokazujejo trajnejše pomnjenje podatkov, ki so jih dijaki pridobili z aktivnim učenjem. Pomnjenje je še trajnejše, če se dijaki aktivno učijo na primerih iz prakse, vsakdanjega življenja ali takšnih, ki so jim blizu (Noviani idr., 2017).

Dijaki pri zaporedjih v 4. letniku računajo vsoto prvih n naravnih števil, vsoto prvih n sodih števil in vsoto prvih n lihih števil. Že prva tri leta srednje šole se ti problemi obravnavajo pri nalogah z vzorci, rešujejo jih tudi dijaki, ki se udeležijo matematičnih tekmovanj.

Ob situaciji iz vsakdanjega življenja pri urejanju mansarde se ponuja lepa priložnost, kako te formule prenesti v prakso. Ker strop v prostorih s poševninami ni vodoraven, smo pri urejanju omejeni in tako prisiljeni v preiskovanje različnih možnosti za razporeditev elementov na steno, naj gre za pohištvo ali slike. Če želimo uporabiti standardne elemente, ki so običajno pravokotne oblike, se soočimo z uporabo matematike. Problem pri razporejanju pohištva ali uokvirjenih fotografij je mogoče rešiti z različnimi pristopi in ponuja različne možnosti preiskovanja. V nadaljevanju je predstavljena ena od možnosti za uporabo učne situacije urejanja podstrešja.

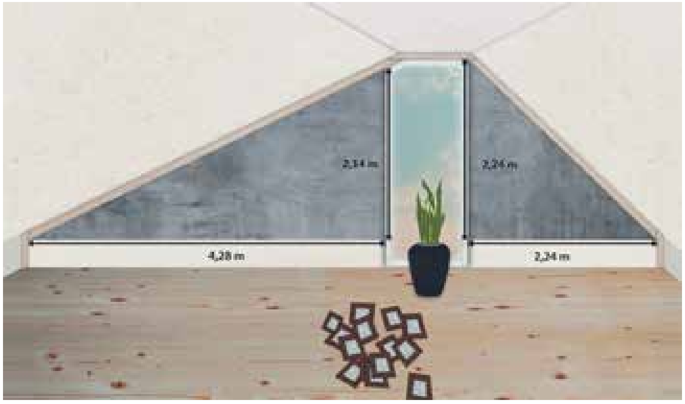
2 Podstrešna sobica pri pouku matematike

2.1 Preiskovanje dijakov

Učitelj dijakom predstavi učno situacijo:

Janko in Metka urejata podstrešno sobico. Na siva dela stene, ki sta trikotne oblike kot prikazuje slika 1, bosta obesila uokvirjene fotografije dimenzije 20 cm × 20 cm, tako da se okvirji fotografij ne bodo prekrivali.

Učitelj spodbudi dijake k razmišljanju tako, da jih povabi h kratkemu razmisleku, kako bi sami obešali fotografije in kaj vse bi



Slika 1: Stena podstrešne sobice.

ob tem lahko preiskali. Dijaki se na povabilo odzovejo različno. Njihov odziv je odvisen od podobnih izkušenj v vsakdanjem življenju, njihove domišljije in zanimanja. Pričakujemo lahko vprašanja:

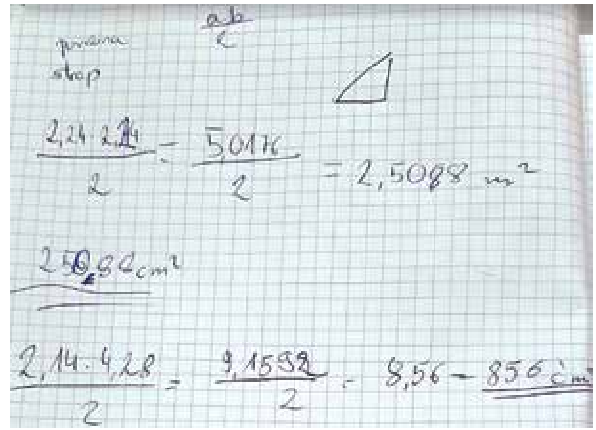
- Koliko fotografij lahko obesimo na posamezno steno?
- Koliko fotografij več lahko obesimo na večjo steno v primerjavi z manjšo steno?
- Kolikšen del stene bo ostal prazen?
- Kolikšna je površina s fotografijami prekritega dela stene?
- Kolikšna je površina dela stene, ki je ostal neprekrit?
- Kolikšna je dolžina hipotenuze trikotnika?
- Kolikšni so koti v trikotniku? Za kakšen kot je nagnjena streha?
- V kakšnem vzorcu bi fotografije obesili na steno?

in še veliko več različnih vprašanj.

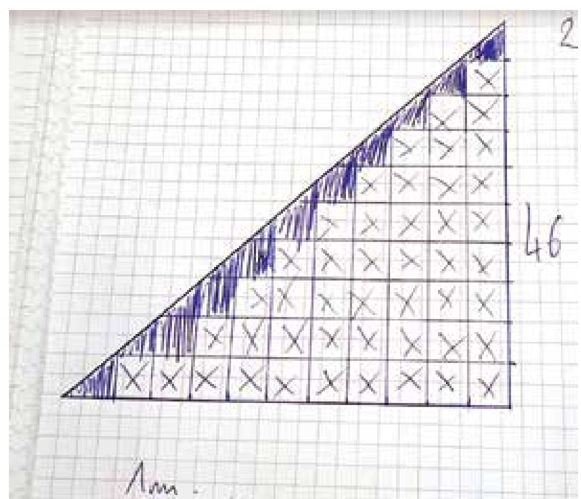
Pomembno je poudariti, da v tem koraku ni pravilnih ali napačnih odgovorov. Spodbuda k aktivni vlogi dijaka v tem koraku vpliva tudi na njegovo dejavnost v nadaljevanju dejavnosti.

Glede na cilje, ki smo si jih zastavili v okviru dejavnosti, usmerimo dijake v preiskovanje pokritja stene z največjim možnim številom uokvirjenih fotografij brez prekrivanja okvirjev. Ostale ideje lahko vključimo v aktivno učenje pri obravnavi druge učne snovi. Tako lahko učno situacijo uporabimo za usvajanje drugih novih znanj ali preverjanje že usvojenih, dijakom pa tako razširimo pogled na uporabnost različnih matematičnih metod, pojmov, postopkov v eni sami situaciji iz vsakdanjega življenja.

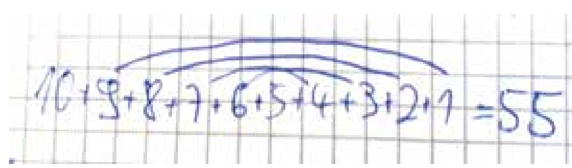
Dijaki skupaj z učiteljem oblikujejo dokončno preiskovalno vprašanje: *Razišči pokritje stene z največjim možnim številom uokvirjenih fotografij dimenzije 20 cm x 20 cm brez prekrivanja okvirjev*. Učitelj ob tem dijake opozori, da uokvirjenih fotografij ne moremo rezati. Dijaki nadaljujejo delo v parih ali v skupinah. Ob tem ima učitelj najtežjo nalogo – delo dijakov zgolj opazuje in jih na noben način ne vodi ali kako drugače usmerja. Pomembno je, da je pozoren na različne načine razmišljanja, izvirne pristope in morebitne debate, ki se razvijejo med dijaki med iskanjem odgovora na preiskovalno vprašanje. Po vnaprej določenem času učitelj dijake povabi, da predstavijo rezultate in načine reševanja drugim v razredu. Poudarek je predvsem na pojasnjevanju postopka, ki jih je pripeljal do rešitve, ne pa na rešitvi sami[1]. Dijaki so se dela lotili na različne načine. Nekateri so iskali ustrezno število uokvirjenih fotografij z računanjem ploščin (Slika 2), drugi so steno narisali na mrežo in preštevali kvadratke (Slika 3), ostali so določili število fotografij, ki jih lahko obesijo v posamezno vrsto in nato s pomočjo opazovanja vsote določili končni odgovor (Slika 4 in Slika 5).



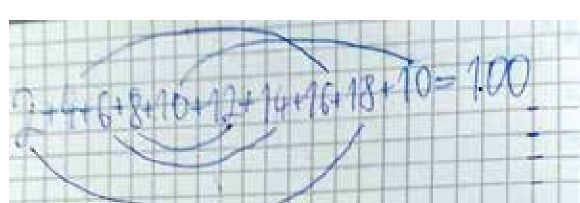
Slika 2: Računanje ploščin.



Slika 3: Preštevanje kvadratkov.



Slika 4: Določitev števila fotografij v posamezni vrsti in iskanje vsote za desno steno.

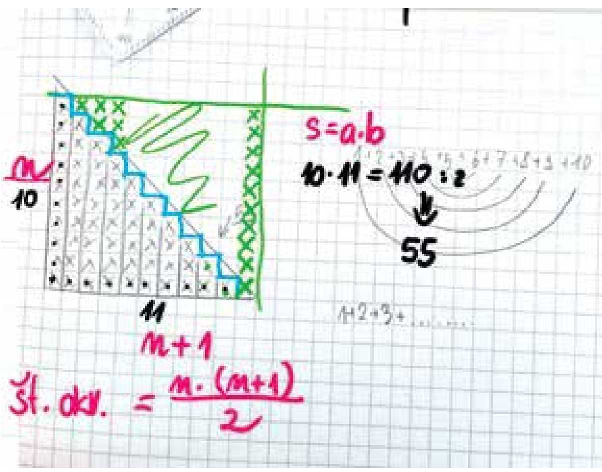


Slika 5: Določitev števila fotografij na levi steni.

1 Zato so na slikah objavljeni različni postopki reševanja, čeprav so v njih računske in druge napake.

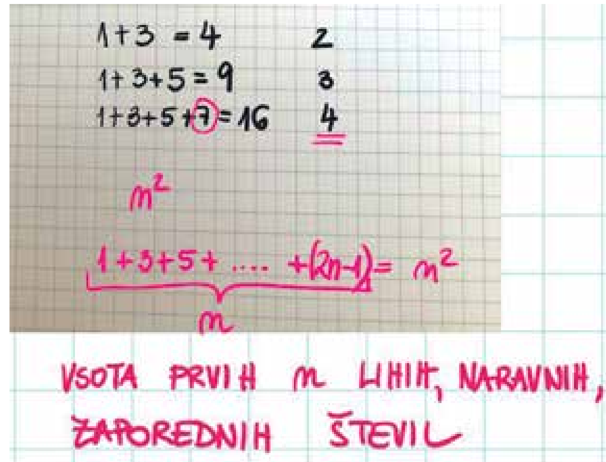
V naslednjem koraku učitelj dijake vpraša, kako bi določili največje možno število uokvirjenih fotografij, potrebnih za prekritje stene, brez prekrivanja okvirjev, če bi bile fotografije in okvirji manjših dimenzij. Povabi jih k zapisu splošne rešitve. Dijaki v istih parih ali skupinah nadaljujejo s preiskovanjem in iščejo splošno rešitev, učitelj pa jih ponovno zgolj opazuje. Po vnaprej določenem času učitelj dijake povabi k predstavitvi postopkov in rešitev.

Posamezni pari oz. skupine dijakov so uspele oblikovati splošno utemeljitev formul. Utemeljevanja so se lotili podobno kot so med reševanjem naloge iskali konkretno rešitev. Nekatere skupine so to naredile preko ploščin (Slika 6), druge so opazovale številske vzorce in oblikovale splošno rešitev (Slika 7).



Slika 6: Utemeljevanje formule s ploščinami.

Ob koncu dejavnosti učitelj povzame delo dijakov in njihovih ugotovitev. Poudari utemeljitve in poimenuje formule. S tem je izvedba učne ure s preiskovanjem zaključena.



Slika 7: Iskanje vzorcev in posploševanje.

2.2 Učitelji preiskujejo lastno poučevalno prakso

Za učitelja izvajalca učne ure in učitelje opazovalce takoj po izvedbi sledi analiza dejavnosti in evalvacija dela. Prvi svoja občutja in videnja predstavi učitelj izvajalec, nato še opazovalci. Pri tem je zelo pomembno, da je analiza usmerjena v aktivnost dijakov ter na njihov način učenja. Premisliti je treba, ali je učitelj s svojimi vprašanji oviral oz. usmerjal delo dijakov. Izpostaviti je treba ključne korake v učenju in razmisliti, kaj je privedlo do uvida pri dijakih. Treba je podati tako uspešne kot tudi manj uspešne korake. Predvsem za slednje je treba poiskati primernejše usmeritve in predlagati izboljšave. Smiselno je učno situacijo z upoštevanimi predlogi za izboljšavo izvesti ponovno, seveda z drugimi dijaki, lahko tudi z drugim učiteljem, in krog spremljave ponovno zavrteti.

3 Zaključek

Učitelji s takim spremljanjem svojega dela in dela kolegov širijo in nadgrajujejo lastno poučevalno prakso. Predvsem pa se učijo zaupati v sposobnosti svojih dijakov, ki jih spoznavajo v luči preiskovalcev, ne zgolj sprejemnikov znanja.

Dijaki so pri preiskovanju zelo dejavni in podajajo različne ideje, tako za preiskovalna vprašanja kot tudi za postopke reševanja. Učitelj dijake usmerja k reševanju preiskovalnega vprašanja. Pri preiskovanju problema dijaki uporabljajo različne strategije: risanje, računanje naklonskega kota, računanje ploščine stene in ploščine kvadratov. Smiselno je, da učitelj dijake opozori, da so pri risanju skic pozorni na ustrezno merilo, le tako v vsaki vrstici narišejo ustrezno število kvadratkov. Težave se pojavljajo tudi pri zapisu splošne formule za vsoto n naravnih števil in vsoto n lihih naravnih števil, temu naj učitelj pri izvedbi učne situacije nameni dovolj časa, da dijaki samostojno oblikujejo ustrezen zapis.

Vira

Noviani, J., idr. (2017). The Effect of Realistic Mathematic Education (RME) in Improving Primary School Students's Spatial Ability in Subtopic Two Dimension Shape. *Journal of Education and Practice, 8*(34), 112–126.

Projekt TIME https://time-project.eu/

TIME scenarij – Uredimo podstrešno sobico

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Preiskovanje pravil za vsoto prvih *n* naravnih števil in za vsoto prvih *n* lihih naravnih števil.
Splošni cilji	Razvoj preiskovalnih veščin. Preiskovanje vzorcev. Odkrivanje povezav med geometrijo, števili in algebro. Razvoj matematičnega mišljenja. Uporaba matematičnega jezika in simbolov. Predstavitev in interpretacija rezultatov preiskovanja.
Potrebno matematično predznanje	Lastnosti seštevanja naravnih števil.
Razred/letnik/starost	1. letnik srednje šole, dijaki, stari 15 let
Trajanje	90 minut
Potrebni material	Pisalo, papir, delovni list.
Problem	Janko in Metka urejata podstrešno sobico. Na siva dela stene, ki sta trikotne oblike kot prikazuje slika, bosta obesila uokvirjene fotografije dimenzije 20 cm × 20 cm tako, da se okvirji fotografij ne bodo prekrivali. *Raziščite pokritje stene z največjim možnim številom uokvirjenih fotografij dimenzije 20 cm × 20 cm brez prekrivanja okvirjev.* 

Faze	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija (didaktična faza) 20 minut	Učitelj predstavi učno situacijo (steno in fotografije) in preveri, ali dijaki razumejo problem. Dijake povabi k razmisleku, naj zapišejo, kaj lahko opazujejo in preiskujejo pri dani situaciji. Učitelj povzame ideje dijakov. Usmeri jih, naj raziščejo možne razporeditve fotografij na steni tako, da pokrijejo čim več stene. Pri tem jih opozori, da uokvirjenih fotografij ni mogoče rezati. Učitelj dijake usmeri, naj poiščejo potrebno število fotografij za prekritje trikotne stene. Dijake navaja na delo v parih ali po skupinah.	Pričakovana vprašanja dijakov: Koliko fotografij lahko obesimo na posamezno steno? Koliko fotografij več lahko obesimo na večjo steno v primerjavi z manjšo steno? Kolikšen del stene bo ostal prazen? Kolikšna je površina s fotografijami prekritega dela stene? Kolikšna je površina dela stene, ki je ostal neprekrit? Kolikšna je dolžina hipotenuze trikotnika? Kolikšni so koti v trikotniku? Za kolikšen kot je nagnjena streha? V kakšnem vzorcu bi fotografije obesili na steno? Dijaki z učiteljem oblikujejo dokončno preiskovalno vprašanje: *Raziščite pokritje stene z največjim možnim številom uokvirjenih fotografij dimenzije 20 cm × 20 cm brez prekrivanja okvirjev.*
Akcija in formulacija (adidaktična faza) 20 minut	Učitelj opazuje delo dijakov.	Dijaki preiskujejo in zapisujejo postopke reševanja.
Validacija 15 minut (adidaktična faza)	Učitelj povabi dijake, da predstavijo svoje ugotovitve. Na koncu predstavitev oblikuje povzetek.	Dijaki predstavijo ugotovitve, rešitve in postopek reševanja.
Devolucija 5 minut (didaktična faza)	Učitelj usmeri dijake z vprašanjem, kako bi lahko določili največje možno število fotografij, če bi bile fotografije kvadratne oblike, vendar manjše dimenzije. Dijake povabi, da poiščejo in zapišejo splošno rešitev.	Dijaki skupaj z učiteljem oblikujejo preiskovalno vprašanje: *Preiščite pokritje stene z največjim možnim številom uokvirjenih fotografij kvadratne oblike manjših dimenzij brez prekrivanja.* Dijaki preiskujejo, povezujejo in iščejo splošno rešitev.
Akcija in formulacija (adidaktična faza) 20 minut	Učitelj opazuje delo dijakov.	Dijaki preiskujejo in zapisujejo ugotovitve.
Verifikacija in institucionalizacija 10 minut (didaktična in adidaktična faza)	Učitelj povabi dijake, da predstavijo svoje ugotovitve. Ob zaključku predstavitve oblikuje povzetek.	Dijaki predstavijo ugotovitve, rešitve in postopek reševanja.

Od primerov do modelov

Modelling Real World Situations

Daniela Beroš, Milena Ćulav Markičević, Zlatko Lobor in Ivana Martinić
V. gimnazija Zagreb
Prevedla: Lidija Pulko, Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V članku je predstavljen primer učnega scenarija, ki je nastal v mednarodnem projektu TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education). Primer iz geometrije v prostoru, ki je bil izveden v srednji šoli na Hrvaškem, so učitelji spremljali po metodi Lesson Study. Dijaki so na podlagi primera iz neposredne okolice opredelili definicijo matematičnega pojma ter na podlagi definicije, ki so jo sestavili njihovi sošolci, izdelali model geometrijskega pojma. Na ta način so ponotranjili pomembnost natančne rabe matematičnega jezika.

Ključne besede: projekt TIME, Lesson Study, geometrija v prostoru, definicija, model

Abstract

This paper outlines a teaching scenario created as part of the international project TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education). An example from solid geometry was carried out at a secondary school in Croatia and monitored by teachers employing the Lesson Study method. Students defined a mathematical concept using a situation from their immediate environment and then produced a model of the geometric concept based on the definition constructed by their classmates. In this sense, they internalised the significance of the precise usage of mathematical language.

Keywords: TIME project, Lesson Study, solid geometry, definition, model.

Uvod

V mednarodnem projektu TIME[1] (Teachers' Inquiry in Mathematics Education) smo se seznanili z metodo profesionalnega razvoja, poznano kot *Lesson Study*. Cikel *Lesson Study* vključuje prepoznavanje in proučevanje učnega problema, načrtovanje učne ure, izvedbo in kolegialno spremljanje učne ure ter konstruktivno zaključno refleksijo. Vse faze smo načrtovali in izvedli timsko, pri čemer smo imeli ves čas v mislih zastavljene cilje.

Najprej smo poiskali zahtevne in za dijake težko razumljive vsebine, ki bi jih želeli obravnavati na nov način. Odločili smo se za vsebini *Logaritemska skala*[2] (o kateri smo v tej reviji že pisali) in *Geometrija v prostoru.* Za drugo izvedbo *Lesson Study* smo izbrali vsebino *Razdalja in kot v prostoru* iz sklopa Geometrija v prostoru, namenjeno drugemu letniku srednje šole.

Motivacija in cilji

Vsebino smo izbrali zaradi pogostih težav dijakov z definiranjem osnovnih pojmov v prostoru, z vizualizacijo geometrijskih problemov v prostoru in uporabo definicij za reševanje geometrijskih problemov. Z načinom obravnave teh sklopov v učbenikih nismo bili zadovoljni, zato smo se odločili dijakom omogočiti, da definicije oblikujejo sami, namesto da samo reproducirajo že obstoječe formalne definicije.

Želeli smo, da dijaki ob zaključku sklopa *definirajo osnovne pojme prostorske geometrije* kot sta razdalja in kot. Zadali smo si splošne cilje: *razumevanje zapisanih definicij*, *izdelava ustreznega manipulativnega modela na osnovi zapisane definicije* in *reševanje geometrijskih matematičnih problemov z življenjskimi situacijami*.

Želeli smo dinamično delavnico, polno raznolikih dejavnosti, v zaključku katere dijaki iz ponujenih materialov izdelajo geometrijski model. Zanimalo nas je, v kolikšni meri bodo oblikovane definicije dijakov podobne formalnim definicijam v učbenikih, ali bodo pravilne, kako natančno jih bodo dijaki zapisali in ali bodo na osnovi definicije, ki jo je oblikovala skupina pred njimi, izdelali ustrezni geometrijski model. Želeli smo ugotoviti, ali bo delavnica pripomogla k pravilnemu razumevanju in uporabi definicij pri nadaljnjem reševanju problemov iz prostorske geometrije.

1 Več na spletni stran projekta TIME: https://time-project.eu/.
2 Članek: Beroš, D., Ćulav Markičević, M., Lobor, Z., Martinić, I. (2022). Logaritemska skala, revija Matematika v šoli 28(1), 40–46.

Potek delavnice

Delavnica je potekala, kot smo načrtovali in zapisali v scenariju. Izvajanju delavnice smo namenili 80 minut. Dijake oddelka smo razdelili v skupine. Skupina prejme delovni list z navodili za samostojno delo, s pomočjo katerega na podlagi primerov iz svojega neposrednega okolja oblikujejo definicijo enega izmed pojmov: *Razdalja med točko in ravnino, Kot med premico in ravnino*, *Kot med ravninama*. Primeri so izbrani tako, da ponazarjajo geometrijske pojme v realnih situacijah iz neposredne okolice. Po dve skupini sta delali na istem pojmu.

Po dvakratni ciklični menjavi delovnih listov se vsi dijaki seznanijo s tremi geometrijskimi pojmi, za prvega oblikujejo in zapišejo definicijo, za drugega prejeto definicijo po potrebi nadgradijo in za tretji geometrijski pojem na osnovi prebrane definicije, ki jo je oblikovala skupina dijakov pred njimi, izdelajo manipulativni model. Sledi predstavitev oblikovanih definicij in izdelanih modelov. (Slika 2).

Učitelj vodi pogovor o primerjavi oblikovanih definicij s formalno. Ponujamo nekaj izhodiščnih vprašanj:

- *Ali definiciji ustrezno opisujeta pojem?*
- *Bi lahko bila definicija jasnejša?*
- *Ali model ustreza definiciji?*
- *So kakšne pomanjkljivosti?*
- *Smo se spomnili vseh posebnih primerov?*

Postopek ponovimo za vsak pojem. Dijaki naj v razpravi sodelujejo enakovredno, saj je vsak član vsake skupine razmišljal o vseh pojmih in njihovih definicijah.

Spremljava pouka

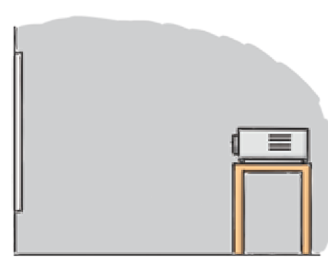
Opazovalci so spremljali potek dejavnosti. Ugotovili so, da so dijaki po prejemu učnega lista z navodili pričeli raziskovati problem. Premikali so stole, odpirali in zapirali okna in učbenike, opazovali lečo projektorja … Izbrani primeri so bili za dijake primerno izhodišče za oblikovanje definicij. Dijake je bilo treba opomniti, naj na liste ne zapisujejo delnih ugotovitev, temveč končno oblikovano definicijo geometrijskega pojma oziroma medsebojnega odnosa geometrijskih elementov. Definicije, ki so jih zapisale nekatere skupine so, kljub tej usmeritvi, vsebovale opise konkretnih primerov. Na splošno so bile konkretne situacije za dijake koristne in so jih spodbudile k oblikovanju lastne definicije.

Nekateri dijaki so zastavljali zanimiva vprašanja:

Kolikšna je razdalja med lečo projektorja in projekcijskim platnom?

Kako bi izmerili to razdaljo?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo razdalje med točko in ravnino.



Slika 1: Primer delovnega lista – Razdalja med točko in ravnino.

Slika 2: Učitelj vodi pogovor o primerjavi oblikovanih definicij s formalno – Kot med premico in ravnino.

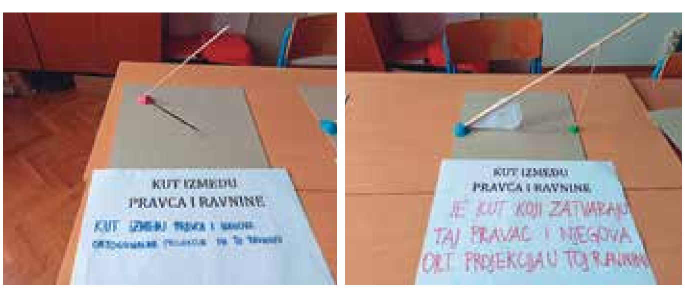
Skupini, ki sta morali oblikovati definicijo razdalje med točko in ravnino, sta delo opravili hitreje, skupini, ki sta se ukvarjali s kotom med dvema ravninama, pa sta imeli najtežjo nalogo in sta zanjo potrebovali nekoliko več časa. Tega problema smo se zavedali že pred izvedbo delavnice, vendar smo vedeli, da se bo skupni časovni obseg dela skupin izenačil.

V fazi dopolnjevanja definicij so člani nekaterih skupin naleteli na težave z razumevanjem zapisa in tako izkusili pomen natančnega izražanja pri matematiki ter spoznali, kolikšno razliko v razumevanju zapisanega besedila lahko povzroči že ena sama beseda.

Najbolj zanimiv in zabaven del ure je bila nedvomno izdelava modela. Dijaki so bili presenečeni in veseli ponujenega materiala ter možnosti ustvarjanja, česar v srednji šoli niso vajeni. Lahko so izkazali ustvarjalnost in ob tem sodelovali s člani svoje skupine.

Na slikah 3, 4 in 5 so prikazani nekateri izdelki dijakov.

Slika 3: Primeri izdelkov dijakov: Razdalja med točko in ravnino.



Slika 4: Primeri izdelkov dijakov: Kot med premico in ravnino.

Slika 5: Primeri izdelkov dijakov: Kot med ravninama.

Za učitelja je najzahtevnejša faza validacije (poročanja, potrjevanja), v kateri je treba natančno prebrati definicije dijakov in se pogovoriti o njihovi pravilnosti, popolnosti in natančnosti. Presoditi mora, ali geometrijski model ustreza prejeti definiciji, ali pa je skupina izdelala model po »občutku«, oziroma ga je morda oblikovala le na osnovi predhodnega znanja.

Navajamo nekaj »nerodno« oblikovanih definicij, učitelj naj podobne zapise izkoristi za učenje in nadgradnjo znanja ter odpravo napačnih predstav.

Razdalja med točko in ravnino:
»Razdalja med točko in ravnino je dolžina dolžine, pravokotne na tisto ravnino, kjer je ena točka te dolžine na ravnini, druga pa je tista, katere oddaljenost od ravnine opazujemo.«

Kot med premico in ravnino:
»Če gre premica skozi ravnino, bo z njo tvorila 4 kote z neke opazovalne točke, ki jih je neskončno veliko. Med temi koti sta nasprotna sovršna, sosednja sta suplementarna. Če je premica vzporedna z ravnino, kota ni. Če premica leži na ravnini, meri kot 180°.«

Kot med ravninama:
»Kot med ravninama je kot, ki ga oklepata pravokotni projekciji premice dveh ravnin na tretjo navpično ravnino.«

Po vsaki izvedeni delavnici smo zbrali povratne informacije dijakov.

Nekatere navajamo:

- »Učno vsebino sem se naučil na zanimiv način in sem jo bolje razumel.«
- »Presenetila me je enostavnost definicij.«
- »Presenetilo me je, da smo kot skupina oblikovali precej natančno definicijo.«
- »Bil sem presenečen, kako smo bili učinkoviti in kako logične in enostavne so te definicije.«
- »Bil sem presenečen, kako je bilo zabavno.«
- »Naučil sem se bolje sodelovati v skupini.«
- »Presenetil me je uspeh naše skupine v danih okoliščinah.«
- »Presenetilo me je, kako zahtevno je bilo razumeti definicijo druge skupine.«

Z odzivi dijakov smo bili zelo zadovoljni, strinjali smo se, da smo dosegli zastavljene cilje. Ostal je le še korak, v katerem bomo presodili, ali so bile izvedene delavnice pomagale dijakom pri razumevanju in uporabi definicij pri nadaljnjem reševanju problemov.

Razprava in zaključki

Vsebino *Geometrija v prostoru* smo v projektnem timu prepoznali kot zahtevno in za dijake težko razumljivo, zato smo jo želeli obravnavati na nov način. Skozi pogovor in izmenjavo izkušenj smo ugotovili, da je najbolj zahtevna stvar prav uvedba definicij.

V prvi različici smo želeli obravnavati pet pojmov in njihovih definicij:

- *pravokotnost premice in ravnine,*
- *pravokotnost ravnin,*
- *razdalja med točko in ravnino,*
- *kot med premico in ravnino* ter
- *kot med ravninama*.

Število definicij smo zmanjšali na tri, saj smo predvidevali, da časovni obseg dveh šolskih ur ne bo zadostoval za vseh pet. Pričakovali smo, da dijaki posameznih elementov ne bodo znali povezati v celotno sliko. Želeli smo oblikovati izhodiščne motivacijske probleme, v katerih bi dijaki izmerili ali izračunali razdalje in velikosti kotov. Izbrali smo primere za oblikovanje definicij in njihovo vizualizacijo, saj je to pomembno za naše nadaljnje delo. Zaradi enostavnosti smo izbrali primere v okolju učilnice, čeprav bi se lahko pogovarjali tudi o poševnem stolpu v Pisi ali zastavi na pročelju stavbe. Izkazalo se je, da so bili dijaki za delo motivirani prav zaradi enostavnosti izbranih primerov in predmetov, ki so bili že v učilnici, da so jih lahko dijaki takoj uporabili.

Menimo, da je delavnica zelo uspešna – večina skupin je uspela pravilno definirati pojme, četudi kdaj premalo natančno. Nekateri zapisi so bili pomanjkljivi, velikokrat brez opažanj in/ali zaključkov. Ustvarili smo izvrstno priložnost, da učitelj opozori na pomembnost natančne definicije in lepoto enostavnosti v matematiki, kar so dijaki prepoznali in omenili tudi v podanih povratnih informacijah.

Zanimivo je bilo opazovati, kako so vse skupine resnično uživale pri izdelavi modelov in bile resnično presenečene, ko so ugotovile, da je večina njihovih definicij pravilnih. Vseh šest skupin je imelo težave in izzive pri razumevanju definicij drugih, saj so bili dijaki postavljeni v vlogo recenzentov. Ugotovili so, da je treba uporabljati natančen matematični jezik, kar je bilo zanje zelo poučno. Na koncu so imeli zahtevno nalogo izdelati model na podlagi definicije nekoga drugega – spet nekaj, česar običajno ne počnejo, a prispeva k boljšemu razumevanju.

Opazili smo, da so skupine posamezne faze zaključile različno hitro, saj je bilo nekatere pojme zahtevnejše definirati ali zanje izdelati geometrijski model. Skupine, ki so posamezno fazo zaključile hitreje, so čas porabile za izboljšanje zapisa definicije ali nadgradnjo geometrijskih modelov.

V naslednjih učnih urah bomo opazovali, kako je izvedena delavnica pripomogla k uspešnosti reševanja nalog, pri katerih je pomembno razumevanje teh definicij. Pričakujemo, da bo razmišljanje in sklepanje dijakov ob reševanju nadaljnjih geometrijskih problemov učinkovitejše in bo dobro izhodišče za nadaljnje usvajanje učnih vsebin. Opisano delavnico bomo izvajali tudi z naslednjimi generacijami dijakov.

Kljub zaključku projekta bomo člani tima nadaljevali z *Lesson Study.* Vsako šolsko leto bomo načrtovali, prilagodili, izvedli in analizirali eno učno vsebino. Odločili smo se, da bomo nagradili sodelovanje, načrtovanje in raziskovanje naše pedagoške prakse ter tako dosegli bistvo tega projekta – opolnomočiti učitelje za skupno strokovno rast.

TIME scenarij – Razdalja in kot

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Dijaki definirajo geometrijske pojme: razdalja med točko in ravnino; kot med premico in ravnino; kot med dvema ravninama.
Splošni cilji	• razumevanje zapisanih definicij, • izdelava ustreznega manipulativnega modela na osnovi zapisane definicije, • reševanje geometrijskih matematičnih problemov z življenjskimi situacijami
Potrebno matematično predznanje	• v prostorski geometriji ločijo pojme: točka, premica in ravnina, • prepoznajo in opišejo različne medsebojne lege točk, premic in ravnin v prostoru
Letnik, starost dijakov	2. letnik, dijaki stari 15–16 let
Trajanje	80–90 minut
Potreben material	• delovni listi za vsakega dijaka, • opis posameznega problema na plakatu formata A3, • različni materiali za izdelavo modelov: karton, kroglice iz stiropora, plastelin, različno dolge palice, lepilo, vrvice, škarje … • prazni listi, flomastri in druga pisala, magneti za tablo.
Problem: *1a* Kolikšna je razdalja med lečo projektorja in projekcijskim platnom? Kako bi izmerili to razdaljo? **Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo razdalje med točko in ravnino.**	

1b
Kolikšna je razdalja med žarnico in tlemi?
Kako bi izmerili to razdaljo?
Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo razdalje med točko in ravnino.

2a
Kolikšen kot oklepa noga stola z ravnino tal?
Kako bi izmerili ta kot?
Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med premico in ravnino.

2b
Kolikšen kot oklepa pisalo z listom, po katerem pišete?
Kako bi izmerili ta kot?
Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med premico in ravnino.

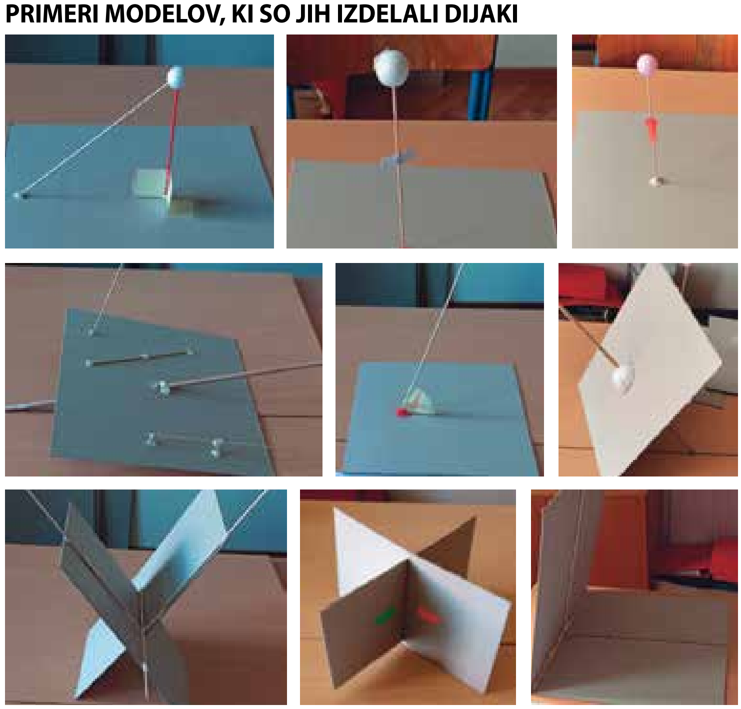
3a
Odprite zvezek (prenosni računalnik) tako, da boste ponazorili kot 150°.
Kako bi izmerili ta kot?
Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med ravninama.

3b
Odprite okno in z okenskim krilom ponazorite kot 70°.
Kako bi izmerili ta kot?
Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med ravninama.

Faze	**Dejavnosti in navodila učitelja**	**Dejavnosti in odzivi dijakov**
Devolucija/Predstavitev problema (didaktična faza) 5 minut	Dijake razdeli v šest skupin (1a, 2a, 3a, 1b, 2b, 3b). Vsaka skupina prejme delovni list, s pomočjo katerega lahko sami opredelijo definicijo matematičnega pojma na podlagi primera iz neposredne okolice. Po dve skupini hkrati (1a in 1b, 2a in 2b ter 3a in 3b) na osnovi različnih primerov oblikujeta definicijo istega pojma.	Dijaki sledijo navodilom učitelja in oblikujejo skupine. Preberejo navodila na delovnem listu in vprašajo učitelja, če potrebujejo dodatna pojasnila.
Akcija/Delovanje (adidaktična faza) 15 minut	Učitelj opazuje delo skupin in reagira, če se osredotočijo na merjenje in računanje, namesto da bi definirali pojem.	Dijaki razpravljajo o problemu in poskušajo oblikovati ustrezno definicijo.
Devolucija/Predstavitev problema (didaktična faza) 2 minuti	Skupinam naroči, naj izmenjajo liste z zapisanimi definicijami: skupine 1a, 1b in 1c morajo ciklično izmenjati svoje zapise tako, da vsaka skupina dobi nov pojem (npr. da dajo list skupini na levi in ga prejmejo od skupine na desni). Podobno izmenjajo liste skupine 2a, 2b in 2c. Dijakom poda navodilo, naj preberejo nalogo z novim geometrijskim problemom in preverijo definicijo, ki so jo oblikovali dijaki v skupini pred njimi. Dijaki naj premislijo in se dogovorijo, kako je definicijo treba prilagoditi, in jo poskušati narediti »boljšo«. Novo in izboljšano definicijo morajo napisati na nov list.	Dijaki poslušajo in upoštevajo učiteljeva navodila. Ciklično zamenjajo liste z zapisanimi definicijami na način: 
Akcija/Delovanje (adidaktična faza) 15 minut	Učitelj opazuje delo skupin in dijake usmerja, da se osredotočijo na zapis definicij in ne le na primere iz neposredne okolice, ki so jim bili v pomoč pri razmišljanju.	Dijaki preberejo prejeto definicijo in po razpravi naredijo potrebne popravke. Novo, izboljšano definicijo napišejo na nov list.

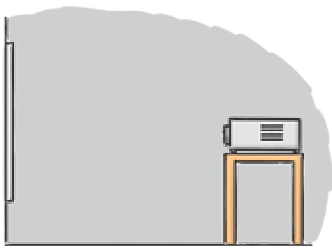
Faze	**Dejavnosti in navodila učitelja**	**Dejavnosti in odzivi dijakov**
Devolucija/Predstavitev problema (didaktična faza) 2 minuti	Skupinam naroči, naj ponovno izmenjajo liste. Tako se vsaka skupina seznani z vsemi tremi matematičnimi pojmi. Skupinam razloži, da je njihova končna naloga izdelava manipulativnega modela s pomočjo priloženih materialov. Model izdelajo izključno na podlagi »izboljšane« definicije matematičnega pojma, ki so jo prejeli od prejšnje skupine.	Dijaki poslušajo in upoštevajo učiteljeva navodila. Ponovno ciklično zamenjajo liste z zapisanimi definicijami na način: 
Akcija/Delovanje (adidaktična faza) 20 minut	Učitelj opazuje skupinsko delo.	Dijaki preberejo prejeto definicijo in izdelajo manipulativni model.
Formulacija/Zapis ugotovitev (adidaktična faza) 6 minut	Ko predstavnika skupin 1a in 2a končata s predstavitvijo, učitelj pritrdi na tablo še formalno definicijo.	Predstavnika skupin 1a in 2a predstavita definicijo in model. Zapis definicije pritrdita na tablo.
Validacija/Poročanje (didaktična in adidaktična faza) 3 minute	Vodi razpravo o predstavljenih definicijah na tabli: Ali definicije dijakov opisujejo dani matematični pojem? Ali je model skladen z definicijo? Ali obstajajo pomanjkljivosti? Ali pogrešamo kakšne posebne primere? Ali lahko definicije naredimo bolj jasne?	Primerjajo formalne definicije s svojimi in sodelujejo v razpravi, v katero se lahko vsi dijaki enakovredno vključijo, saj se je vsak dijak v treh dejavnostih seznanil z vsemi tremi matematičnimi pojmi.
Formulacijo (2 x 6 min) in validacijo (2 x 3 min) ponovimo za vsak matematični pojem (tudi za skupini 1b in 2b ter 1c in 2c).		
Institucionalizacija/ Oblikovanje ustaljenega zapisa (didaktična faza) 3 minute	Učitelj dijakom podaja povratno informacijo. Poudari pomen ustrezne rabe matematičnega jezika in natančnih definicij. Izpostavi lepoto preprostosti. *Priporočilo: Učitelj pridobi povratne informacije dijakov tako, da postavi dve preprosti vprašanji:* • *Kaj si se naučil?* • *Kaj te je presenetilo?*	Končno različico definicij dijaki zapišejo v zvezke.

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	V prvi akcijski fazi lahko dijaki: • opazujejo predmet iz vsakdanjega življenja v neposredni okolici, ki je bil opisan na delovnem listu, ga pogledajo z različnih zornih kotov in na podlagi opazovanja naredijo nekaj zaključkov, • narišejo skice, • razpravljajo o opredelitvi matematičnega pojma in o tem, kako zapisati definicijo, • rešijo tudi nalogo, podano kot primer, če jim to pomaga pri oblikovanju definicije. V drugi akcijski fazi lahko dijaki: • opazujejo predmet iz vsakdanjega življenja v neposredni okolici, ki je bil opisan na delovnem listu in katerega definicijo so prejeli od prejšnje skupine, ga pogledajo z različnih zornih kotov in na podlagi opazovanja naredijo nekaj zaključkov, • pogledajo skice, ki jih je naredila predhodna skupina, in jih nadgradijo, če presodijo, da je to potrebno, • razpravljajo o definiciji, ki so jo prejeli (ali jo razumejo, ali definira dani matematični pojem, ali jo je treba izboljšati v smislu jasnosti, rabe ustreznega matematičnega jezika ali poenostavitve), • razpravljajo o tem, kako izboljšati definicijo. V tretji akcijski fazi lahko dijaki: • preberejo definicijo, ki so jo dobili od druge skupine, in jo poskušajo razumeti, • pogledajo material, ki jim je na voljo,

	• razpravljajo o tem, kako z uporabo ponujenega materiala izdelati model matematičnega pojma na podlagi dane definicije, • izdelajo manipulativne modele. **PRIMERI DEFINICIJ, KI SO JIH OBLIKOVALI DIJAKI** **Razdalja med točko in ravnino** • »je oddaljenost točke od njene pravokotne projekcije na ravnino«, • »je dolžina daljice od točke do njene pravokotne projekcije na ravnino«, • »je dolžina daljice, pravokotne na to ravnino, kjer je eno krajišče te daljice na ravnini, drugo pa je točka, katere oddaljenost od ravnine opazujemo«, • »je dolžina najkrajše daljice, ki povezuje to točko in to ravnino«. **Kot med premico in ravnino** • »je kot med premico in njeno pravokotno projekcijo na to ravnino«, • »je kot, ki ga premica zapira s premico, ki je njena pravokotna projekcija na dano ravnino«. **Kot med ravninama** • »je kot med dvema premicama, ki ležita na teh ravninah in sta pravokotni na premico, v kateri se ti ravnini sekata«, • »je kot med dvema žarkoma, ki ležita na različnih ravninah, sta pravokotna na presečišče ravnin in njuno izhodišče je na tej premici«, • »je kot med premico, ki leži na ravnini, pravokotni na presečišče obeh ravnin, in premico, ki je njena pravokotna projekcija na drugo ravnino«, • »je kot, ki ga oklepata pravokotni projekciji premic, ki ležita na obeh ravninah na tretji pravokotni ravnini«. **PRIMERI MODELOV, KI SO JIH IZDELALI DIJAKI**  Vir fotografij: Arhiv V. Gimnazije Zagreb
Nadaljnje preiskovanje	Koncepti, ki smo jih preučevali v tem scenariju, bodo uporabljeni pri reševanju nadaljnjih problemov v prostorski geometriji, kjer naj bi dijaki uporabljali razdalje in kote v geometrijskih telesih, zlasti piramidah. Običajno imajo dijaki veliko težav pri vizualizaciji in risanju skic, predvsem kota med osnovno in stransko ploskvijo piramide ali med osnovnim in stranskim robom, zato pričakujemo, da jim bo delavnica pomagala pri določanju in računanju kotov in razdalj. To znanje bomo uporabili pri priklicu definicij in lastnosti geometrijskih teles.

1a

Razdalja med točko in ravnino

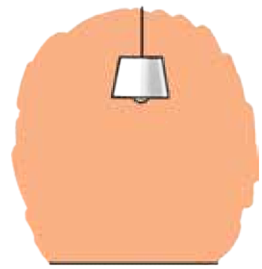


Kolikšna je razdalja med lečo projektorja in projekcijskim platnom?
Kako bi izmerili to razdaljo?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo razdalje med točko in ravnino.

1b

Razdalja med točko in ravnino



Kolikšna je razdalja med žarnico in tlemi?
Kako bi izmeril to razdaljo?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo razdalje med točko in ravnino.

2a

Kot med premico in ravnino

Kolikšen kot oklepa noga stola z ravnino tal?
Kako bi izmerili ta kot?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med premico in ravnino.

2b

Kot med premico in ravnino

Kolikšen kot oklepa pisalo z listom, po katerem pišete?
Kako bi izmerili ta kot?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med premico in ravnino.

3a

Kot med ravninama

Odprite zvezek tako, da boste ponazorili kot 150°.
Kako bi izmerili ta kot?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med ravninama.

3b

Kot med ravninama

Odprite okno in z okenskim krilom ponazorite kot 70°.
Kako bi izmerili ta kot?

Na podlagi tega primera poskusite zapisati definicijo kota med ravninama.

Preverjanje znanja sklopa trikotniki s tvorjenjem daljšega pisnega besedila

Assessing Knowledge of Triangles Through Mathematical Writing

Renata Pučko Ivanuša
Osnovna šola Ormož

Izvleček

V članku je predstavljen pomen tvorjenja pisnega besedila pri matematiki. Opisane so prednosti, ki jih prinaša vključevanje tvorjenja pisnega besedila pri pouku matematike za učenca, in prednosti, ki so jih pri tem deležni učitelji. Natančneje je predstavljen primer iz razreda, kjer so učenci tvorili daljše pisno besedilo z namenom preverjanja znanja sklopa trikotniki v 7. razredu. Ob analizi pisnega besedila učencev so izpostavljeni elementi formativnega spremljanja: samovrednotenje, učiteljeva povratna informacija in vrstniško vrednotenje.

Ključne besede: matematika, trikotnik, daljše pisno besedilo, samovrednotenje, vrstniško vrednotenje, povratna informacija

Abstract

This paper discusses the importance of composing written texts in mathematics. It discusses the advantages of bringing writing into math classrooms for students as well as teachers. In detail, we describe how Year 7 students produced a longer written text in order to check their knowledge of triangles. The analysis of the written texts highlights the elements of formative assessment, i.e., self-assessment, teacher feedback and peer assessment.

Keywords: mathematics, triangle, longer written text, self-assessment, peer assessment, feedback.

Uvod

Pri predmetu matematika pogosto pridobivamo informacije od učencev z ustnim izražanjem ali reševanjem nalog, redkokdaj pa s pisnim v smislu tvorjenja pisnega besedila (z uporabo matematičnega jezika), bodisi je to razlaga definicije, opis postopkov, pojasnjevanje strategije pri reševanju matematičnega problema idr. Pisno izražanje je za večino učencev zahtevnejše, saj miselni proces od učenca zahteva dobro organizacijo, poglobitev v dano vsebino, razlago, analizo in sintezo zapisanega.

Tvorjenje daljšega pisnega besedila pri matematiki

V učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli lahko zasledimo, da matematična kompetenca vključuje tudi matematično pismenost in predstavitev v matematičnem jeziku. V osnovni šoli med drugim razvijamo razumevanje in uporabo matematičnega jezika (branje, pisanje in sporočanje matematičnih besedil, iskanje matematičnih virov in njihovo upravljanje), poznavanje, razumevanje, uporabo matematičnih pojmov in povezav med njimi ter izvajanje in uporabo postopkov. (Žakelj, 2011). Da bi temu zadostili, nam je na voljo več dejavnosti, ena od teh je, da učencem ponudimo izziv, da se tudi pri matematiki soočijo s tvorjenjem pisnega besedila. Ker je matematični jezik za marsikoga v osnovni šoli zahteven, se moramo tega lotiti postopoma. Tvorjenje pisnih besedil in izražanje na tak način je pri matematiki zapostavljeno, na prvo mesto uvrščamo ustno izražanje, ki po večini ni tako dovršeno kot pisno (Pugalee, 2001).

Tvorjenje pisnih besedil pri matematiki je sprva zahtevna dejavnost, ko pa to postane za učitelja in učence pogosta praksa, je vključevanje tvorjenja pisnih besedil skoraj neizogiben korak k bolj poglobljenemu razumevanju matematičnih vsebin. Pomembno je, da tako učenci kot učitelji spoznajo, da učenec s tvorjenjem daljšega pisnega besedila poglablja svoje znanje, učitelj pa ima možnost vpogleda v njegovo razmišljanje in hkrati dobi možnost refleksije o svojem pouku in izhodišča za razmislek o nadaljnjih dejavnostih, ki jih bo vključil v pouk. Ko učitelj in učenci v pisnih besedilih vidijo prednosti, je vključevanje takih dejavnosti bolj osmišljeno (Burns, 2004, Žakelj, 2011).

Samo tvorjenje pisnih besedil lahko v pouk matematike vnesemo po korakih, od krajših do daljših besedil, kakor tudi od preprostejših do zahtevnejših besedil. Vključevanja tvorjenja pisnega besedila se lotimo sistematično in osmišljeno, pri čemer upoštevamo predznanje in sposobnosti učencev. Tvorjenja pisnih besedil se lahko lotimo v različnih oblikah: zapis in razlaga osnovnih definicij, zapis slovarčka matematičnih izrazov, opis težave, ki jo je učenec imel v določeni učni uri, ali zapis, kaj je učenec dobro osvojil, pisanje dnevnika, opis postopka reševanja določenega matematičnega problema, matematična rešitev problema iz življenjske situacije idr. (Burns, 2004).

Z vključevanjem tvorjenja pisnega besedila ponudimo učencem možnost izkazati znanje na drugačen način in pridobivanja nove perspektive razumevanja matematike. Tvorjenje pisnega besedila lahko uporabimo v vseh fazah učnega procesa: lahko ga uporabimo za preverjanje (pred)znanja, poglabljanje znanja ali pridobivanja dokazov o napredku učenca.

Primer tvorjenja pisnega besedila z namenom preverjanja znanja sklopa trikotniki v 7. razredu

V 7. razredu smo se tvorjenja pisnega besedila lotili z namenom preverjanja znanja. Učenci so s pisnim besedilom, ki so ga tvorili sami, predstavili določeno matematično vsebino, v tem primeru vsebino sklopa trikotniki. Na tak način so učenci tega oddelka že izkazovali znanje, tako da jim delo ni bilo tuje.

1. Obravnava sklopa trikotniki

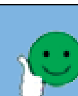
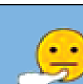
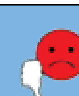
Del ciljev učnega sklopa trikotniki (opis, delitev, koti) so učenci usvojili večinoma s samostojnim preiskovanjem s koraki formativnega spremljanja (Suban, 2018). Učenci so znanje pridobivali z izkustvenim učenjem, reševanjem problemov, s pomočjo tehnologije in učbenika. Učenci so prav tako sproti oblikovali kriterije uspešnosti, ki so zapisani na sliki 1.

KRITERIJI USPEŠNOSTI

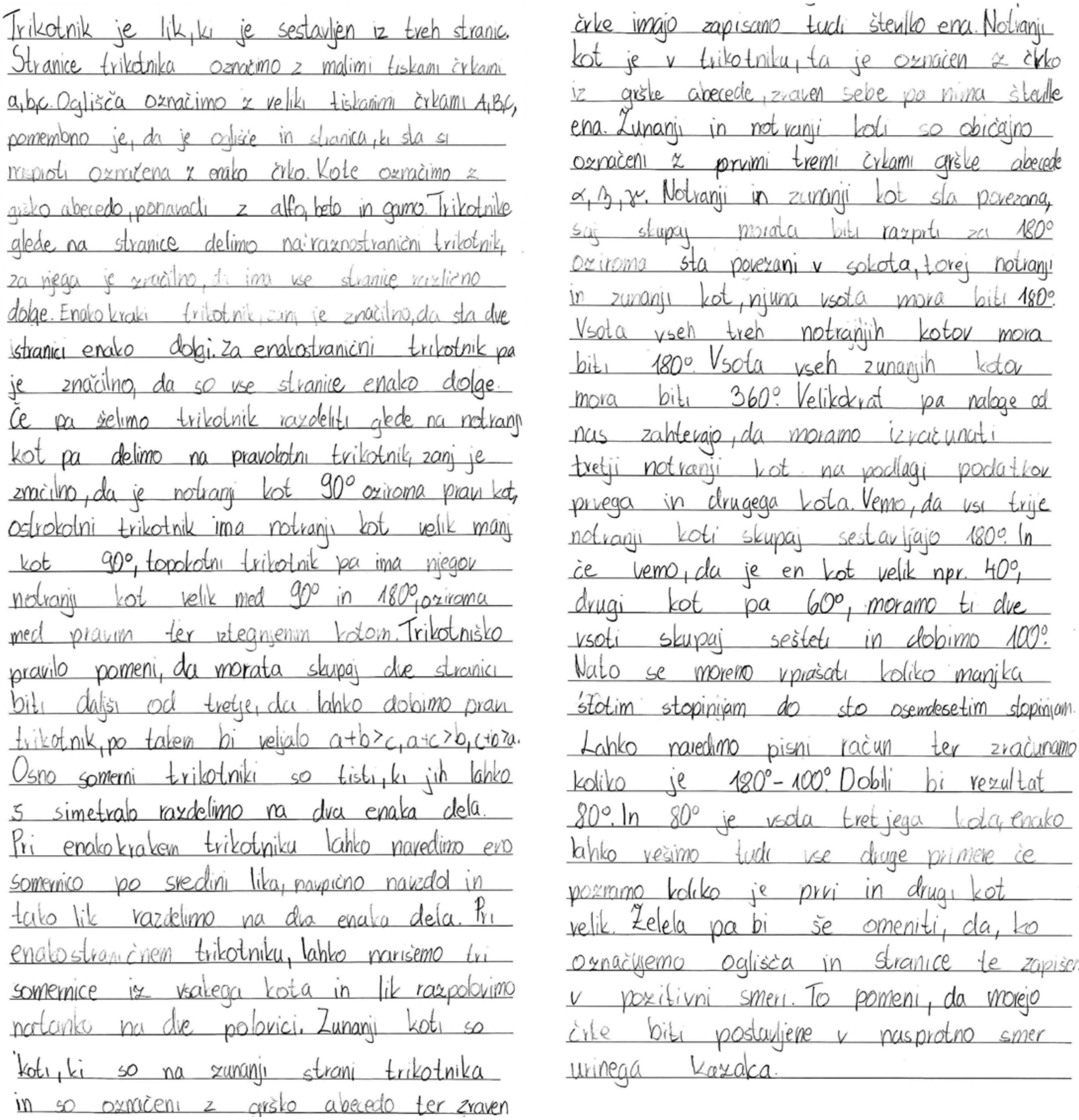
Opišem trikotnik in poimenujem oglišča, stranice in kote.
Delim trikotnike glede na velikosti notranjih kotov in glede na dolžine stranic.
Razumem, kakšen mora biti odnos med dolžinami stranic trikotnika (trikotniško pravilo).
Določim vse somernice enakokrakega trikotnika in enakostraničnega trikotnika.
Opišem lastnosti osno somernih trikotnikov.
Razlikujem med pojmoma notranji in zunanji koti trikotnika ter notranjim kotom trikotnika določim pripadajoče zunanje kote.
Poznam vsoto velikosti notranjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.
Poznam vsoto velikosti zunanjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.

Slika 1: Kriteriji uspešnosti.

SAMOVREDNOTENJE

Ime in priimek učenca/-ke:			
Opišem trikotnik in poimenujem oglišča, stranice in kote.			
Delim trikotnike glede na velikosti notranjih kotov in glede na dolžine stranic.			
Razumem, kakšen mora biti odnos med dolžinami stranic trikotnika (trikotniško pravilo).			
Določim vse somernice enakokrakega trikotnika in enakostraničnega trikotnika.			
Opišem lastnosti osno somernih trikotnikov.			
Razlikujem med pojmoma notranji in zunanji koti trikotnika ter notranjim kotom trikotnika določim pripadajoče zunanje kote.			
Poznam vsoto velikosti notranjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.			
Poznam vsoto velikosti zunanjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.			

Slika 2: Samovrednotenje.



Trikotnik je lik, ki je sestavljen iz treh stranic. Stranice trikotnika označimo z malimi tiskami črkami a, b, c. Oglišča označimo z veliki tiskanimi črkami A, B, C, pomembno je, da je oglišče in stranica, ki sta si nasproti označena z enako črko. Kote označimo z grško abecedo, ponavadi z alfa, beta in gama. Trikotnike glede na stranice delimo na raznostranični trikotnik, za njega je značilno, da ima vse stranice različno dolge. Enakokraki trikotnik, zanj je značilno, da sta dve stranici enako dolgi. Za enakostranični trikotnik pa je značilno, da so vse stranice enako dolge. Če pa želimo trikotnik razdeliti glede na notranji kot pa delimo na pravokotni trikotnik, zanj je značilno, da je notranji kot 90° oziroma prav kot, ostrokotni trikotnik ima notranji kot velik manj kot 90°, topokotni trikotnik pa ima njegov notranji kot velik med 90° in 180°, oziroma med pravim ter iztegnjenim kotom. Trikotniško pravilo pomeni, da morata skupaj dve stranici biti daljši od tretje, da lahko dobimo prav trikotnik, po takem bi veljalo $a+b>c, a+c>b, c+b>a$. Osno somerni trikotniki so tisti, ki jih lahko s simetralo razdelimo na dva enaka dela. Pri enakokrakem trikotniku lahko naredimo eno somernico po sredini lika, navpično navzdol in tako lik razdelimo na dva enaka dela. Pri enakostraničnem trikotniku, lahko narišemo tri somernice iz vsakega kota in lik razpolovimo natanko na dve polovici. Zunanji koti so koti, ki so na zunanji strani trikotnika in so označeni z grško abecedo ter zraven črke imajo zapisano tudi števiko ena. Notranji kot je v trikotniku, ta je označen z črko iz grške abecede, zraven sebe pa nima števike ena. Zunanji in notranji koti so običajno označeni z prvimi tremi črkami grške abecede α, β, γ. Notranji in zunanji kot sta povezana, saj skupaj morata biti razprti za 180° oziroma sta povezani v sokota, torej notranji in zunanji kot, njuna vsota mora biti 180°. Vsota vseh treh notranjih kotov mora biti 180°. Vsota vseh zunanjih kota mora biti 360°. Velikokrat pa naloge od nas zahtevajo, da moramo izračunati tretji notranji kot na podlagi podatkov prvega in drugega kota. Vemo, da vsi trije notranji koti skupaj sestavljajo 180°. In če vemo, da je en kot velik npr. 40°, drugi kot pa 60°, moramo ti dve vsoti skupaj sešteti in dobimo 100°. Nato se moremo vprašati koliko manjka stotim stopinjam do sto osemdesetim stopinjam. Lahko naredimo pisni račun ter zračunamo koliko je 180° − 100°. Dobili bi rezultat 80°. In 80° je vsota tretjega kota, enako lahko rešimo tudi vse druge primere če poznamo koliko je prvi in drugi kot velik. Želela pa bi še omeniti, da, ko označujemo oglisča in stranice te zapišem v pozitivni smeri. To pomeni, da morejo črke biti postavljene v nasprotno smer urinega kazalca.

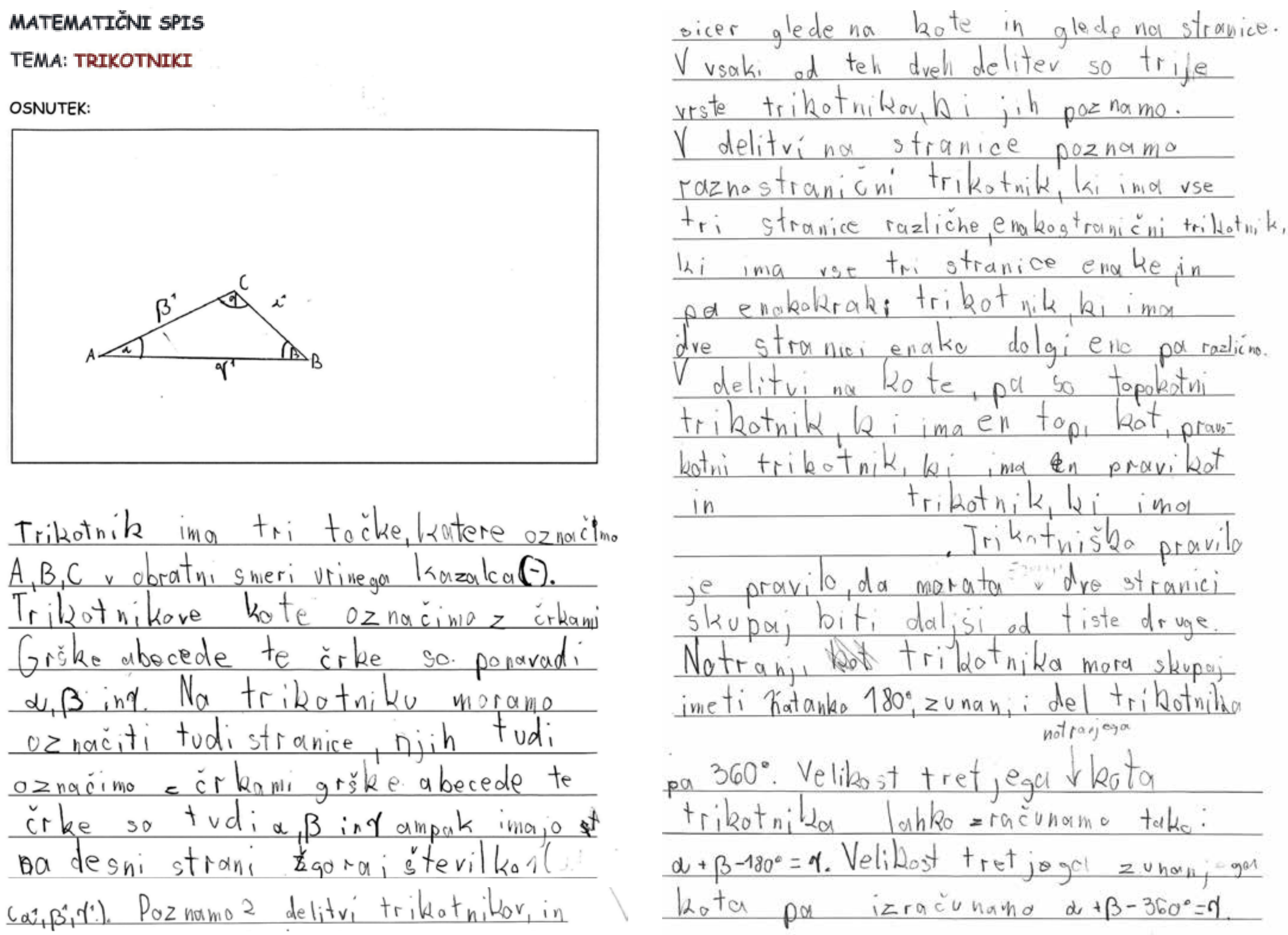
Slika 3: Besedilo učenca 1.

2. Priprava na tvorjenje pisnega besedila

Po obravnavi sklopa so učenci dobili nalogo, naj tvorijo matematično besedilo, v katerem naj zajamejo vse zastavljene kriterije uspešnosti. Pred pisanjem je pomembno, da učitelj in učenci dorečejo, kaj, razen matematičnih kriterijev, naj učenci upoštevajo pri tvorjenju besedila (Suban, 2020). Naši dodatni kriteriji so bili: besedilo naj bo zapisano čitljivo, povedi naj bodo tvorjene tako, da jih bo bralec razumel in upoštevati je treba slovnično pravilnost. Med obravnavo sklopa smo si na zadnjo stran zvezka izdelovali tudi slovarček matematičnih izrazov in njihove razlage, da so jih učenci lahko suvereno uporabili v pisnem besedilu.

3. Tvorjenje pisnega besedila in samovrednotenje

Za tvorjenje pisnega besedila so imeli učenci na voljo eno šolsko uro. Učenci so dobili list, na katerem so imeli tudi prostor za osnutek, da si kaj zapišejo, narišejo, skratka ga uporabijo tako, da jim bo v pomoč pri pisanju. Nekateri učenci so to možnost uporabili, drugi ne. Po tvorjenju pisnega besedila so se učenci



Slika 4: Besedilo učenca 2.

samovrednotili z že vnaprej pripravljeno tabelo (Slika 2), v kateri so bili zapisani kriteriji uspešnosti, ki so jih učenci zapisali med obravnavo sklopa.

Učenci so glede na sposobnosti zelo različni. Nekateri se besedno zelo težko izražajo, drugim ravno to odgovarja, nekateri ne marajo ciljno naravnanih vprašanj in se pri prostem besedilu, ob usmeritvah s kriteriji, bolje znajdejo. V tej fazi je pomembna vloga učitelja. Pomembna so vprašanja, ki podpirajo učenje. Kot dobro se je izkazalo, da učitelj k učencu, ki se pri pisanju v nekem trenutku ne znajde več, pristopi, ga povpraša o idejah, o znanju, ki ga ima o tej snovi. Učenec mu ustno odgovori, nato ga učitelj usmeri, da to še zapiše. Z majhnimi koraki in pravo usmeritvijo bo učenec pokazal svoje znanje. Na slikah 3 in 4 sta prikazana primera pisnega besedila dveh učencev.

Pisni besedili na sliki 3 in sliki 4 se precej razlikujeta. Prikazani sta zato, da dobimo vpogled v različne zapise, ki jih učenci ustvarijo. Besedilo učenca 1 na sliki 3 je zelo izčrpno, besedilo učenca 2 je vsebinsko krajše, tudi raba matematičnega jezika je skromnejša.

4. Povratna informacija učitelja

Učitelj po končanem pisanju učencem pisna besedila pregleda in jim do naslednje ure poda povratno informacijo na podoben način kot je potekalo samovrednotenje. Tako lahko učenci primerjajo samovrednotenje in povratno informacijo učitelja. Povratna informacija je učinkovitejša, če učitelj doda še besedni zapis, ki učencu pove, kaj je napisal dobro in ga vzpodbudi k nadaljnjemu učenju. Primer učiteljeve povratne informacije je prikazan na sliki 5.

5. Vrstniško vrednotenje

Učenci so v naslednji šolski uri razdeljeni v skupine po tri. Skupine so sestavljene premišljeno, glede na ugotovitve učitelja pri podajanju povratne informacije. V vsaki skupini so učenci, ki se med seboj razlikujejo glede na izkazano znanje. Vsaka skupina dobi v pregled tri besedila, katerih avtorji so njihovi sošolci. Ime avtorja je odstranjeno. Učenci morajo v skupini podati vrstniško povratno informacijo za vsa tri besedila.

6. Primerjava samovrednotenja, vrstniškega vrednotenja in učiteljeve povratne informacije

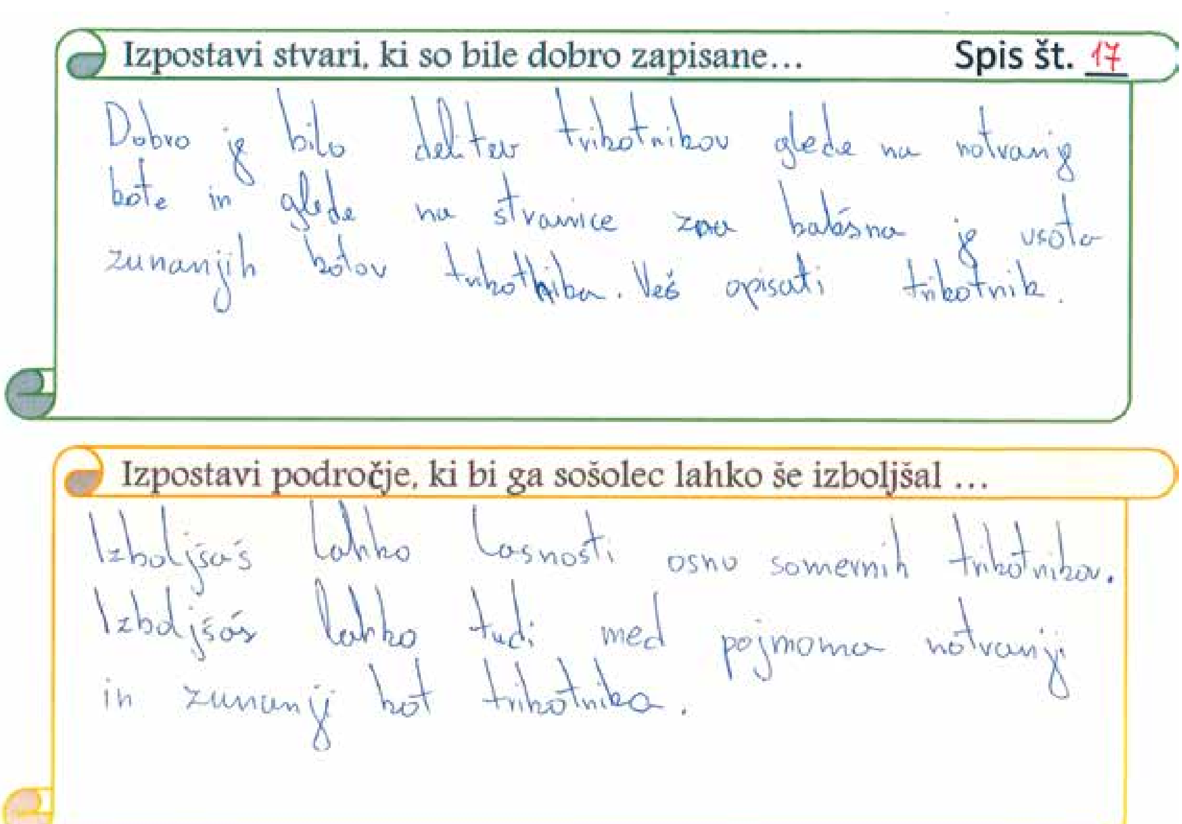
Po podani vrstniški povratni informaciji vsak učenec prejme svoje besedilo, samovrednotenje, povratno informacijo učitelja in vrstniško povratno informacijo. Učenec nato povratne informacije pregleda, se kritično oceni in izbere kriterije, pri katerih bo izboljšal svoje znanje.

POVRATNA INFORMACIJA UČITELJA

Ime in priimek učenca/-ke:			
Opišem trikotnik in poimenujem oglišča, stranice in kote.		X	
Delim trikotnike glede na velikosti notranjih kotov in glede na dolžine stranic.	X		
Razumem, kakšen mora biti odnos med dolžinami stranic trikotnika (trikotniško pravilo).	X		
Določim vse somernice enakokrakega trikotnika in enakostraničnega trikotnika.	X		
Opišem lastnosti osno somernih trikotnikov.		X	
Razlikujem med pojmoma notranji in zunanji koti trikotnika ter notranjim kotom trikotnika določim pripadajoče zunanje kote.	X		
Poznam vsoto velikosti notranjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.	X		
Poznam vsoto velikosti zunanjih kotov trikotnika in jo znam uporabiti.	X		

(*Ime učenca/-ke*), del, kjer opisuješ kote in vsoto njihovih velikosti, je ustrezno razložen. Podrobno si opisala tudi trikotnik, morda bi na začetku lahko dodala še, da je trikotnik omejen s tremi stranicami. Razmisli, ali zunanje kote res označimo z rimskimi črkami. ☺ Poskusi raziskati še vse lastnosti osno somernih likov.

Slika 5: Primer povratne informacije učitelja.



Slika 6: Primer vrstniške povratne informacije.

Vsak element je del mozaika, ki ga učenec uporabi za izboljšanje svojega znanja in to stori s popravo oz. izboljšavo svojega besedila. Tako povratna informacija dobi pomen, saj učenca na poti učenja pomakne naprej.

7. Evalvacija

Učenci so imeli možnost znanje sklopa trikotniki izkazati s tvorjenjem pisnega besedila. Po koncu dejavnosti so povedali, da jim sprotno samovrednotenje ustreza, saj ob tem ko razmišljajo, kje v tabeli bodo naredili kljukico, še bolj poglobijo, kaj o vsebini dejansko vedo.

Pri polovici učencev je prostor, namenjen osnutku, ostal prazen, pri drugi polovici opazimo, da so si za pomoč pri pisanju zapisali različne izračune, skice (Slika 4), miselne vzorce idr. Nekaterim učencem osnutek pomaga pri tvorjenju besedila, zato ga bomo tudi v prihodnje ohranili.

Vse dejavnosti, od tvorjenja pisnega besedila in samovrednotenja do vrstniškega vrednotenja, so izjemno pomembne, saj učenec z vsako dejavnostjo poglablja in širi svoje znanje na drugačen način od ustaljenega. Predvsem pomembno je vrstniško vrednotenje: ob branju in primerjanju besedil se učenci srečajo z idejami drugih, vidijo poglede in razlage sošolcev ter s tem poglobijo svoje razumevanje. Ko učenci prejmejo vrednotenje sošolcev, naj kritično presodijo njihovo pravilnost. Če presodijo, da je vrstniško vrednotenje neustrezno, prosijo za pomoč učitelja.

Zaključek

Tvorjenje daljših pisnih besedil pri pouku matematike ni le zapisovanje informacij, temveč je korak k razjasnitvi razmišljanja učenca, priložnost za poglabljanje učenčevega znanja in razmišljanja ter vir informacij za učitelja, kako se njegovi učenci učijo in kako razumejo naučeno. Ne glede na to, v kateri del učnega procesa vključimo tvorjenje pisnih besedil in s tem učence postavimo pred izziv, da morajo razmišljati, naredimo korak v smeri poglabljanja znanja in s tem premik na poti učenja.

Viri

Burns, M. (2004, oktober). Writing in math. *Educational Leadership*, stran 30–33.

Pugalee, D. (2001, maj). Writing, Mathematics, and Metacognition: Looking for Connections Through Students‘ Work in Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics, 101*(5), 236–245.

Suban, M., idr. (2018). *Formativno spremljanje pri matematiki*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Suban, M., idr. (2020). *Ugotavljanje matematičnega znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dosegljivo na povezavi: https://www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf

Žakelj, A., idr. (2011). *Matematika. Učni načrt.* Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

Mathematics in school

1 2023 Volume 29

CONTENTS

Sonja Rajh
Inquiry as an Approach where Students and Teachers Learn 1

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

David Janet in Jerneja Bone
Challenges in Evaluation of National Mathematics Assessment Tests 2

Karmen Svetlik
Achievement in mathematics and motivation in learning 13

Kristijan Cafuta, Selena Praprotnik
Inquiry in Mathematics for All – Lessons for Teachers and Students 20

FROM THE CLASSROOM

Mojca Suban
Inquiry of Spreading Rumours 27

Irena Rauter Repija in Mateja Škrlec
Introduction to Properties of Functions: Apricot Jam 37

Natalija Horvat in Štefka Štrakl
Let's Get the Attic Room Organised 46

Daniela Beroš, Milena Ćulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić
Modelling Real World Situations 51

Renata Pučko Ivanuša
Assessing Knowledge of Triangles Through Mathematical Writing 59

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

tiskani priročnik

V tiskanem priročniku so opisana različna orodja v podporo učenju in poučevanju matematike skupaj z naborom učnih ur, v katerih orodja zaživijo v vsej svoji funkcionalni vrednosti.
V ospredje je postavljen učenec in njegova vloga pri oblikovanju lastne učne poti.

152 strani, A4 format

cena: 11,90 €

Ugotavljanje matematičnega znanja

digitalni priročnik

V digitalni publikaciji predstavljamo nadaljnje izsledke in izkušnje na področju formativnega spremljanja pri matematiki s poudarkom na različnih oblikah izkazovanja in ugotavljanja matematičnega znanja.
Predstavljene so naslednje oblike ugotavljanja znanja, ki so hkrati dokazi o učenju:

- preiskovalne naloge,
- pisna besedila,
- govorni nastopi,
- vizualne predstavitve,
- didaktične igre,
- izdelki.

Publikacija je dosegljiva na:
www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:
- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (http://www.zrss.si)

ISSN 1318-010X
9 771318 010005