

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko



DISKRETNI SIGNALI IN SISTEMI

Založba
FE

SAŠO TOMAŽIČ
SAVO LEONARDIS

Sašo Tomažič, Savo Leonardis

Diskretni signali in sistemi

Ljubljana 2017

Katalogni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v
Ljubljani

COBISS.SI-ID=292593664

ISBN 978-961-243-344-4 (pdf)

URL: http://www.fe.uni-lj.si/o_fakulteti/zalozba_in_trgovina/prenos/Tomazic-Leonardis-DiskretniSignaliInSistemi.pdf

Založnik: Založba FE, Ljubljana

Izdajatelj: Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana

Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič

Recenzenta: prof. dr. Igor Medič

1. elektronska izdaja

Predgovor

V knjigi pred vami so predstavljene osnove obdelave signalov v diskretnem času kot tudi digitalne obdelave signalov. Predvsem je mišljena kot učbenik pri predmetu Digitalna obdelava signalov. Snov, ki jo pokriva, je bila delno predstavljena že v knjigi o digitalni obdelavi signalov ¹, ki je izšla pred šestimi leti kot prva knjiga o digitalni obdelavi signalov v slovenščini, vendar je ta snov v pričujoči knjigi močno dopolnjena in smiselno preurejena. Pri pisanju prvega dela je avtor namreč domneval, da bo imel bralec določeno predznanje iz analize zveznih signalov in linearnih vezij ter osnovne pojme o vzorčenih signalih. Predpostavljeno je bilo tudi dobro poznavanje Fourier in Laplace transforme.

Pri predavanjih se je kmalu izkazalo, da ima mnogo študentov težave z razumevanjem prehajanja med časovno zveznim in časovno diskretnim prostorom. Njihovo predznanje morebiti ni bilo zadostno ali pa ga niso znali smiselno povezati v celoto. Zato sva se avtorja najprej odločila, da v zelo zgoščeni obliki predstaviva omenjeno snov. Delo je izšlo pred štirimi leti ². Tudi v tej knjižici sva predpostavila določeno predznanje, predvsem poznavanje lastnosti analognih signalov in sistemov ter postopkov frekvenčne analize. Primerjava med časovno zveznim in časovno diskretnim prostorom v delu naj bi študentu na osnovi njegovega poznavanja analognih signalov in sistemov omogočila globlje razumevanje postopkov digitalne obdelave signalov in njihove uporabe pri obdelavi realnih signalov. S tem namenom je bila dodana tudi predstavitev problemov pri vzorčenju in rekonstrukciji signalov, to je pri pretvorbi zveznih signalov v diskretne in obratno.

Ker je prva knjiga skoraj pošla, sva se odločila za smiselno združitev obeh omenjenih del. Analiza analognih signalov in sistemov je v tem delu predstavljena v dodatku, dodano je poglavje o vzorčenju signalov in poglavje, ki opisuje izvedbene vidike sistemov za digitalno obdelavo signalov, ki bo bralcu približalo praktične probleme. Tudi snov poglavij, ki so bila v prvi knjigi, je nekoliko drugače razdeljena, tako da posamezna poglavja čim bolj zaokrožujejo določeno snov. Pri preurejanju snovi je bilo pomembno vodilo, da naj bi bilo v knjigi čim manj sklicevanja vnaprej, kar naj bi bralcu precej olajšalo tako samo branje kot tudi študij predstavljene snovi.

Avtorja

¹S. Leonardis: Digitalna obdelava signalov, Založba Fakultete za elektrotehniko, Ljubljana, 1996.

²S. Tomažič, S. Leonardis: Zvezni in diskretni signali - analiza in obdelava, Založba Fakultete za elektrotehniko, Ljubljana, 1998.

Kazalo

1	Diskretni signali	11
1.1	Definicija diskretnega signala	11
1.2	Vrste diskretnih signalov	11
1.3	Periodični diskretni signali	12
1.3.1	Značilne vrednosti	12
1.3.1.1	Srednja vrednost	12
1.3.1.2	Srednja moč	12
1.3.1.3	Varianca	13
1.3.2	Korelacija in korelacijska funkcija	13
1.3.3	Avtokorelacijska funkcija	14
1.3.4	Konvolucija	14
1.4	Diskretni Fourier transform – DFT	15
1.4.1	Amplitudni in fazni spekter	16
1.4.2	Močnostni spekter	16
1.4.3	Lastnosti DFT	17
1.4.3.1	Linearnost	17
1.4.3.2	Premik signala	17
1.4.3.3	Premik spektra	17
1.4.3.4	Modulacija	18
1.4.3.5	DFT konvolucije	18
1.4.3.6	DFT produkta	18
1.4.3.7	Konjugacija	19
1.4.3.8	DFT realnih signalov	19
1.4.3.9	DFT sodih in lihih funkcij	19
1.4.3.10	DFT avtokorelacijske funkcije	20
1.4.3.11	Parsevalov teorem	21
1.5	Aperiodični diskretni signali	21
1.5.1	Značilne vrednosti	21
1.5.1.1	Srednja vrednost	21
1.5.1.2	Energija	21
1.5.1.3	Srednja moč	22
1.5.1.4	Varianca	22
1.5.2	Avtokorelacijska funkcija	22
1.5.3	Konvolucija	22

1.6	Časovno diskretni Fourier transform – DTFT	23
1.6.1	Amplitudni in fazni spekter	23
1.6.2	Energijski in močnostni spekter	24
1.6.3	Lastnosti DTFT	24
1.6.3.1	Linearnost	24
1.6.3.2	Premik signala	24
1.6.3.3	Premik spektra	25
1.6.3.4	Modulacija	25
1.6.3.5	DTFT konvolucije	25
1.6.3.6	DTFT produkta	25
1.6.3.7	Konjugacija	26
1.6.3.8	DTFT realnih signalov	26
1.6.3.9	DTFT avtokorelacijske funkcije	26
2	Diskretni sistemi	29
2.1	Linearni diskretni sistemi	29
2.1.1	Linearnost in časovna nespremenljivost	29
2.1.2	Sistemska funkcija ali impulzni odziv	29
2.1.3	Sistemska funkcija kavzalnih sistemov	30
2.1.4	Prevajalna funkcija	31
2.1.5	Stabilnost sistema	32
2.2	Transform $\mathcal{Z}$	32
2.2.1	Definicija transformata $\mathcal{Z}$	33
2.2.2	Transform $\mathcal{Z}$ in DTFT	33
2.2.3	Konvergenčno področje transformata $\mathcal{Z}$	33
2.2.4	Lastnosti transformata $\mathcal{Z}$	35
2.2.4.1	Linearnost	35
2.2.4.2	Teorem o konvoluciji	35
2.2.4.3	Teorem o premiku signala	36
2.2.4.4	Kaskadna vezava sistemov	36
2.2.4.5	Vzporedna vezava sistemov	36
2.2.4.6	Vezava s povratnim sklopom	37
2.2.5	Zgledi transformov $\mathcal{Z}$	37
2.2.5.1	Enotin impulz	37
2.2.5.2	Zakasnjen enotin impulz	37
2.2.5.3	Enotina stopnica	38
2.2.5.4	Eksponentni niz	38
2.2.5.5	Kompleksni harmonični niz	38
2.2.5.6	Sinusni niz	38
2.2.5.7	Kosinusni niz	39
2.2.6	Prevajalna funkcija ustvarljivih sistemov	39
2.2.7	Inverzni transform $\mathcal{Z}$	42
2.2.7.1	Inverzni transform z integracijo	42

2.2.7.2	Računanje integrala z residuumi	43
2.2.7.3	Inverzni transform z deljenjem	43
2.2.7.4	Zgled izračuna inverznega transformata $\mathcal{Z}$	44
3	Vzorčenje in rekonstrukcija	45
3.1	Vzorčenje analognega signala	45
3.1.1	Vzorčenje z enotnimi impulzi	45
3.1.2	Spekter pri vzorčenju signalov	46
3.1.2.1	Spektra analognega in δ -vzorčenega signala	46
3.1.2.2	Spektra δ -vzorčenega in diskretnega signala	47
3.1.2.3	Prehod od zveznega do diskretnega signala	48
3.2	Rekonstrukcija zveznega signala	48
3.2.1	Kritično vzorčenje	49
3.2.2	Nadkritično vzorčenje	51
3.2.3	Podkritično vzorčenje	51
3.3	Spreminjanje vzorčne frekvence	52
3.3.1	Decimacija	53
3.3.2	Interpolacija	54
3.3.3	Decimacija in interpolacija za racionalen faktor	56
4	Diskretna sita	59
4.1	Diagram pretoka signala	60
4.1.1	Transpozicija diagrama pretoka signala	62
4.2	Strukture diskretnih sit	63
4.2.1	Direktna struktura	63
4.2.2	Direktna struktura I in II	64
4.2.3	Kaskadna vezava	65
4.2.4	Vzporedna vezava	66
4.2.5	Druge strukture	66
4.3	Načrtovanje prevajalne funkcije diskretnih sit	67
4.4	Načrtovanje sit s končnim odzivom - FIR	68
4.4.1	Sistemska in prevajalna funkcija sita FIR	68
4.4.2	Sita z linearnim faznim potekom	68
4.4.2.1	Koeficienti sita	68
4.4.2.2	Lega ničel	69
4.4.3	Načrtovanje z inverznim Fourier transformom	71
4.4.4	Oknjenje	73
4.4.4.1	Pravokotno okno	74
4.4.4.2	Kosinusna okna	75
4.4.4.3	Kaiserjeva okna	77
4.4.5	Sita z enakomerno valovitostjo	78
4.4.6	Načrtovanje sit FIR s frekvenčnim vzorčenjem	81
4.4.6.1	Enakomerno vzorčenje	81

4.4.7	Nekaj primerov sit FIR	83
4.4.7.1	Povprečevalno sito	83
4.4.7.2	Diskretni diferenciator	84
4.4.7.3	Hilbertov transform	86
4.5	Načrtovanje sit z neskončnim odzivom - IIR	86
4.5.1	Preprosto načrtovanje na osnovi polov in ničel	87
4.5.2	Impulzno invariantna transformacija	89
4.5.3	Bilinearna transformacija	93
4.5.3.1	Preslikava prevajalne funkcije	93
4.5.3.2	Sprememba frekvenčnega merila	94
4.5.3.3	Povzetek postopka načrtovanja	95
4.6	Problemi	98
5	Uporaba DFT pri analizi in obdelavi signalov	103
5.1	Hitri Fourier transform - FFT	104
5.1.1	Decimacija v času	104
5.1.2	Računska učinkovitost FFT	107
5.1.3	Decimacija po frekvenci	108
5.1.4	FFT realnih signalov	109
5.2	Analiza časovno omejenih signalov z DFT	111
5.3	Spektralna analiza časovno neomejenih signalov	111
5.4	Izvedba sita FIR s pomočjo DFT	116
5.4.1	Postopek <i>prekrij in seštej</i>	118
5.4.2	Postopek <i>prekrij in shrani</i>	119
5.5	Problemi	119
6	Generiranje diskretnih signalov	123
6.1	Generiranje harmoničnih signalov	123
6.1.1	Harmonični oscilator	123
6.1.2	Generiranje na osnovi tabeliranih vrednosti	124
6.2	Generiranje naključnih signalov	126
6.2.1	Signali z enakomerno amplitudno porazdelitvijo	127
6.2.2	Pseudonaključni binarni niz	128
6.2.3	Signali z Gaussovo porazdelitvijo	129
6.3	Generiranje naključnega signala v frekvenčnem prostoru	132
6.4	Problemi	132
7	Praktični vidiki izvedbe diskretnih sistemov	135
7.1	Analogno digitalna pretvorba signalov	135
7.1.1	Sito proti prekrivanju	135
7.1.2	Kvantizacija signala	137
7.1.2.1	Linearna kvantizacija	140
7.1.2.2	Logaritemska kvantizacija	143
7.1.2.3	Kvantizacija s prevzorčenjem	145

7.1.3	Pretvorniki $\Delta\Sigma$	146
7.1.3.1	Šum pri pretvorbi $\Delta\Sigma$	147
7.2	Digitalno analogna pretvorba signalov	150
7.2.1	Rekonstrukcija signala z impulzi končne širine	151
7.2.2	Rekonstrukcija s predhodno interpolacijo	152
7.2.3	D/A pretvorba harmoničnega signala	153
7.3	Obdelava signalov s končno natančnostjo	154
7.3.1	Kvantizacija koeficientov sit FIR	155
7.3.2	Zaokroževanje vmesnih rezultatov sit FIR	156
7.3.3	Kvantizacija koeficientov sit IIR	156
7.3.4	Zaokroževanje vmesnih rezultatov sit IIR	159
7.4	Digitalni signalni procesorji	159
7.5	Problemi	161
Dodatek		163
A Analogni signali		165
A.1	Definicija in matematični zapis analognega signala	165
A.2	Vrste analognih signalov	165
A.2.1	Energijski in močnostni signali	166
A.2.2	Periodični in aperiodični signali	166
A.2.3	Deterministični in naključni signali	166
A.3	Značilne vrednosti analognih signalov	167
A.4	Korelacijska funkcija	167
A.5	Avtokorelacijska funkcija	168
A.6	Spekter analognih signalov	169
A.6.1	Spekter periodičnih signalov	169
A.6.2	Spekter aperiodičnih energijskih signalov	171
A.6.3	Spekter naključnih signalov	172
B Analogni sistemi		173
B.1	Linearnost in časovna nespremenljivost	173
B.2	Sistemska funkcija	173
B.3	Prevajalna funkcija	174
B.4	Prevajalna funkcija v prostoru s	175
B.5	Prevajalna funkcija RLC vezij	175
C Karakteristike analognih prototipnih sit		177
C.1	Butterworthova sita	178
C.2	Čebiševjeva sita	178
C.3	Eliptična sita	179

D	Frekvenčne preslikave	181
D.1	Frekvenčne preslikave v prostoru s	181
D.1.1	Sprememba mejne frekvence nizkega sita	181
D.1.2	Preslikava nizkega v visoko sito	181
D.1.3	Preslikava nizkega v pasovno prepustno sito	181
D.1.4	Preslikava nizkega v pasovno zaporno sito	182
D.2	Frekvenčne preslikave v prostoru z	182
D.2.1	Sprememba mejne frekvence nizkega sita	182
D.2.2	Preslikava nizkega v visoko sito	183
D.2.3	Preslikava nizkega v pasovno prepustno sito	183
D.2.4	Preslikava nizkega v pasovno zaporno sito	183

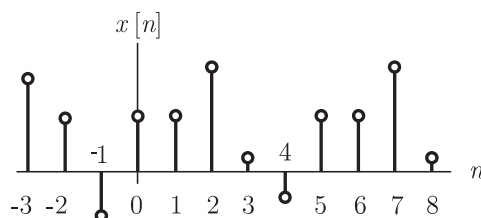
1 Diskretni signali

Diskretni signali so signali, katerih vrednost poznamo le v določenih časovnih trenutkih. Poleg diskretnosti po času poznamo tudi diskretnost po amplitudi. Za signale, ki so diskretni tudi po amplitudi, uporabljamo ime digitalni signali, zato lahko pri imenovanju signalov, ki so diskretni po času, izpustimo pridevnik časovno in jih skrajšano imenujemo kar diskretni signali. V tem poglavju podamo definicijo diskretnih signalov in predstavimo osnovna orodja za njihovo analizo.

Ker nastanejo diskretni signali večinoma z enakomernim vzorčenjem analognih signalov, je za razumevanje prvih nujno dobro poznavanje drugih. V dodatku A je podana kratka predstavitev analognih signalov in orodij za njihovo analizo, ki je namenjena osvežitvi že pridobljenega znanja in boljšemu razumevanju nadaljnje snovi.

1.1 Definicija diskretnega signala

Diskreten signal je urejen niz števil. Matematično lahko predstavimo diskreten signal kot niz števil $\{x_n\}$, signalni vektor $\mathbf{x} = [x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_m]$ ali funkcijo indeksa $x[n]$. Indeks n je celo število in predstavlja neodvisno spremenljivko. Grafični prikaz diskretnega signala je na sliki 1.1.



Slika 1.1 – Diskreten signal

Najpogosteje dobimo diskreten signal z enakomernim vzorčenjem analognega signala:

$$x[n] = x(nT) \quad (1.1)$$

Posamezna števila niza $x[n]$ so tedaj vzorci analognega signala $x(t)$ v trenutkih nT . Indeks n ima zato pomen časa in ga imenujemo časovni indeks. Takšno poimenovanje bomo uporabljali tudi v nadaljevanju.

1.2 Vrste diskretnih signalov

Diskretne signale razvrstimo enako kot analogne signale.

Periodičen signal mora izpolnjevati osnovno zahtevo periodičnosti:

$$x[n] = x[n + N] \quad (1.2)$$

kjer je N perioda signala.

Aperiodičen signal lahko dobimo z vzorčenjem analognega aperiodičnega signala. Izpolnjena pa mora biti zahteva, da gre njegova perioda N proti ∞ .

Naključen signal dobimo z vzorčenjem analognega naključnega signala. Neposredno lahko običajno generiramo le tako imenovane psevdonaključne signale, to je signale, ki se navidezno obnašajo kot naključni, v resnici pa so periodični z zelo veliko periodo.

1.3 Periodični diskretni signali

Za diskreten signal pravimo, da je periodičen, če izpolnjuje pogoj periodičnosti:

$$x[n] = x[n + N] \quad (1.3)$$

za vsako celo število n . Najmanjše naravno število N , ki zagotavlja veljavnost zgornjega pogoja, imenujemo perioda signala. Po preteku ene periode se začnejo vrednosti signala ponavljati. Periodičen signal zato v celoti poznamo, če ga poznamo znotraj ene periode.

Diskretni signal, ki ga dobimo z vzorčenjem analognega periodičnega signala, ni nujno periodičen. Periodičnost diskretnega signala dobimo le, če je razmerje med vzorčno frekvenco in frekvenco vzorčenega signala racionalno število.

Ker so periodični signali časovno neomejeni imajo neskončno energijo, pri končnih vrednostih vzorcev pa imajo končno povprečno moč. Zato periodične signale uvrščamo med močnostne signale.

1.3.1 Značilne vrednosti

Ker je periodičen signal popolnoma določen s signalom v eni periodi, lahko dobimo njegove značilne vrednosti na osnovi opazovanja signala znotraj ene periode.

1.3.1.1 Srednja vrednost

Srednjo ali povprečno vrednost periodičnega signala dobimo s povprečenjem vrednosti vzorcev znotraj ene periode signala:

$$\overline{x[n]} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (1.4)$$

Takšno povprečje imenujemo tudi časovno povprečje. Kadar govorimo o signalih električnega izvora, imenujemo srednjo vrednost tudi enosmerna komponenta signala.

1.3.1.2 Srednja moč

Trenutna moč signala je dana s kvadratom njegove amplitude $x^2[n]$. Srednjo moč periodičnega signala dobimo s časovnim povprečenjem trenutne moči signala:

$$\overline{x^2[n]} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad (1.5)$$

Srednjo moč signala imenujemo tudi srednja kvadratična vrednost signala.

1.3.1.3 Varianca

Varianca signala σ_x^2 je definirana kot srednja kvadratična vrednost odstopanja signala od njegove srednje vrednosti oziroma kot srednja moč izmenične komponente signala:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \overline{x[n]})^2 \quad (1.6)$$

Kvadratni koren variance:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (1.7)$$

imenujemo standardna deviacija.

1.3.2 Korelacija in korelacijska funkcija

Korelacija periodičnih signalov $x[n]$ in $y[n]$ z enako periodo N je definirana z izrazom:

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n] \quad (1.8)$$

Korelacija je merilo podobnosti dveh signalov. Večja ko je korelacija, bolj sta si signala podobna. Kadar ugotavljamo podobnost signalov, korelacijo običajno normiramo, to je delimo s korenom produkta njunih srednjih kvadratičnih vrednosti:

$$R_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{y^2}}} \quad (1.9)$$

Če bi oba signala zapisali v obliki vektorjev, bi korelacija predstavljala njun skalarni produkt. Kadar je skalarni produkt dveh vektorjev enak nič, pravimo, da sta vektorja ortogonalna (pravokotna). Analogno temu pravimo, da sta signala, ki imata korelacijo enako nič, ortogonalna.

Sama korelacija ni najboljše merilo za ugotavljanje podobnosti signalov. Dva signala sta si lahko med seboj zelo podobna, vendar sta časovno zamaknjena. Da bi lahko ugotavljali takšno podobnost, drugo funkcijo časovno zamaknemo za m vzorcev in nato naredimo korelacijo. Takšna korelacija je funkcija časovnega zamika m . Dobimo korelacijsko funkcijo:

$$R_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n+m] \quad (1.10)$$

Korelacijska funkcija je periodična funkcija s periodo enako periodi signalov. Zadošča torej, da določimo korelacijsko funkcijo za eno periodo signala. Če je korelacijska funkcija enaka nič pri vseh vrednostih indeksa m , razen za $m = 0$, pravimo, da sta signala nekorelirana. Nekorelirana signala sta ortogonalna pri vsakem časovnem zamiku, zato je pogoj nekoreliranosti signalov bistveno zahtevnejši kot pogoj ortogonalnosti.

Za izračun ene periode korelacijske funkcije po enačbi (1.10) potrebujemo tudi vzorce izven periode drugega signala, vendar so ti zaradi periodičnosti enaki ustreznim vzorcem znotraj osnovne periode. Enačbo (1.10) lahko zapišemo tudi na tak način, da nastopajo v njej zgolj vzorci signala znotraj ene periode:

$$R_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[(n+m) \bmod N] \quad (1.11)$$

kjer predstavlja mod N ostanek pri deljenju z N . Vzorci drugega signala se krožno ponavljajo, zato imenujemo tako korelacijsko funkcijo tudi krožna (ciklična) korelacijska funkcija.

1.3.3 Avtokorelacijska funkcija

Če v enačbi (1.11) nadomestimo drugi signal $y[n]$ s prvim signalom $x[n]$, ne primerjamo več dveh signalov med seboj, temveč primerjamo signal sam s seboj. Dobimo avtokorelacijsko funkcijo:

$$R_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[(n+m) \bmod N] \quad (1.12)$$

Avtokorelacijska funkcija je funkcija zamika m . Zaradi krožnega ponavljanja vzorcev imenujemo avtokorelacijsko funkcijo periodičnih signalov tudi krožna (ciklična) avtokorelacijska funkcija. Ker je avtokorelacijska funkcija zelo pomembna pri analizi signalov, si oglejmo nekaj njenih osnovnih lastnosti.

1. Avtokorelacijska funkcija je periodična funkcija s periodo enako periodi signala:

$$R_{xx}[m] = R_{xx}[m + N] \quad (1.13)$$

2. Avtokorelacijska funkcija je soda funkcija zamika m :

$$R_{xx}[m] = R_{xx}[-m] \quad (1.14)$$

3. Avtokorelacijska funkcija ima največjo vrednost pri zamiku $m = 0$

$$R_{xx}[0] \geq R_{xx}[m] \quad (1.15)$$

4. Vrednost avtokorelacijske funkcije pri zamiku $m = 0$ je enaka povprečni moči signala:

$$R_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] = \overline{x^2[n]} \quad (1.16)$$

Avtokorelacijska funkcija je merilo za to, kako hitro se signal spreminja. Če korelacijska funkcija zelo hitro upade že pri majhnem zamiku (ozka korelacijska funkcija), pomeni, da se signal tudi znotraj periode zelo hitro spreminja.

1.3.4 Konvolucija

Če v korelacijski funkciji (1.10) zamenjamo indeksa m in n in signal $y[m]$ obrnemo, preden ga časovno zamaknemo, dobimo konvolucijo:

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m] \quad (1.17)$$

Zaradi periodičnosti signalov lahko tudi konvolucijo zapišemo v krožni obliki:

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m) \bmod N] \quad (1.18)$$

in jo imenujemo krožna konvolucija. Osnovne lastnosti krožne konvolucije so:

1. Krožna konvolucija je funkcija časovnega indeksa n .

2. Krožna konvolucija je periodična s periodo enako periodi signalov.
3. Krožna konvolucija je komutativna operacija:

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n] \quad (1.19)$$

kar enostavno pokažemo z uvedbo novega indeksa $k = n - m$ v enačbi (1.17).

Konvolucija pri analizi signalov ni tako pomembna kot avtokorelacijska funkcija, zato pa je, kot bomo videli kasneje, izredno pomembna pri analizi in realizaciji diskretnih linearnih sistemov.

1.4 Diskretni Fourier transform – DFT

Podobno kot pri analognih signalih lahko tudi periodičen diskreten signal razvijemo v Fourierovo vrsto. Naj bo signal $x[n]$ periodičen, s periodo N . Signalu najprej določimo osnovno frekvenco:

$$F_0 = \frac{1}{N} \quad (1.20)$$

Ker je perioda N naravno število, lahko zavzame osnovna frekvenca F_0 le vrednosti med 0 in 1. Namesto osnovne frekvence F_0 uporabljamo običajno osnovno krožno frekvenco Ω_0 :

$$\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (1.21)$$

ki lahko zavzame le vrednosti med 0 in 2π . Signal lahko sedaj razvijemo v končno vrsto kompleksnih eksponentnih funkcij:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jnk\Omega_0} \quad (1.22)$$

Koeficienti $X[k]$ so v splošnem kompleksni in predstavljajo spekter signala. Spekter je diskreten. Izračunamo jih s pomočjo izraza:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jnk\Omega_0} \quad (1.23)$$

Zgornji izraz predstavlja diskretni Fourier transform (DFT). Funkcija $X[k]$ je periodična s periodo N , vendar so pri razvoju signala v vrsto uporabljeni le koeficienti osnovne periode.

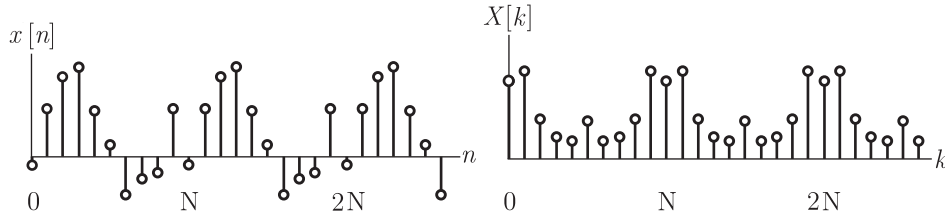
Če omejimo k na vrednosti med 0 in $N - 1$, preslika DFT N vrednosti v osnovni periodi signala v N spektralnih komponent v osnovni periodi spektra.

S pomočjo izraza (1.22) lahko preslikamo N spektralnih komponent nazaj v N vrednosti signala. Zato imenujemo to preslikavo inverzni diskretni Fourier transform (IDFT).

Signal $x[n]$ in njegov spekter $X[k]$ predstavljata Fourierev par:

$$\begin{aligned} X[k] &= \text{DFT}\{x[n]\} \\ x[n] &= \text{IDFT}\{X[k]\} \\ x[n] &\leftrightarrow X[k] \end{aligned} \quad (1.24)$$

Na sliki 1.2 je prikazan periodičen diskreten signal in njegov spekter. Spekter signala je periodičen in diskreten.



Slika 1.2 – Diskreten periodičen signal in njegov spekter

Z vpeljavo kompleksne konstante transformacije W_N :

$$W_N = e^{-j\Omega_0} = e^{-j2\pi/N} \quad (1.25)$$

lahko poenostavimo zapis DFT v enačbi (1.23):

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (1.26)$$

kakor tudi zapis IDFT v enačbi (1.22):

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad (1.27)$$

Faktorji W_N^{nk} , ki nastopajo v zgornjih izrazih so periodični in določajo ekvidistančne točke na enotski krožnici v kompleksni ravnini. Pogosto pri konstanti W_N opuščamo oznako N , ki označuje število komponent transformata.

1.4.1 Amplitudni in fazni spekter

Spektralne komponente $X[k]$ periodičnega signala $x[n]$ so v splošnem kompleksna števila, ki jih lahko zapišemo tudi v polarni obliki:

$$X[k] = A_x[k] e^{j\Phi_x[k]} \quad (1.28)$$

kjer je

$$A_x[k] = |X[k]| \quad (1.29)$$

amplitudni spekter in

$$\Phi_x[k] = \arg(X[k]) \quad (1.30)$$

fazni spekter signala.

1.4.2 Močnostni spekter

Močnostni spekter periodičnega diskretnega signala je definiran kot Fourier transform njegove avtokorelacijske funkcije:

$$S_x[k] = \text{DFT}\{[R_{xx}[m]]\} \quad (1.31)$$

1.4.3 Lastnosti DFT

Lastnosti DFT so zelo podobne lastnostim Fourier transformata analognih signalov. Poudariti je treba, da je DFT v osnovi določen za periodične signale, zato imajo zamiki in konvolucija krožen značaj. Kot bomo videli kasneje, lahko uporabljamo DFT tudi pri analizi aperiodičnih, časovno omejenih diskretnih signalov, vendar pri tem implicitno predpostavimo, da predstavlja signal, ki ga obravnavamo, le eno periodo periodičnega signala.

Zaradi podobnih izrazov za izračun DFT in IDFT (izraza se razlikujeta samo v predznaku eksponenta) imajo vse lastnosti tudi svoje dualne lastnosti. Nekaterim lastnostim bomo v nadaljevanju eksplicitno navedli tudi dualne lastnosti, drugim spet ne, kar pa ne pomeni, da dualne lastnosti tam ne obstajajo.

1.4.3.1 Linearnost

DFT linearne kombinacije signalov z enako periodo je enak linearni kombinaciji DFT-jev posameznih signalov:

$$\text{DFT} \left\{ \sum_i a_i x_i[n] \right\} = \sum_i a_i \text{DFT} \{ x_i[n] \} \quad (1.32)$$

1.4.3.2 Premik signala

Če periodičen signal premaknemo za n_0 vzorcev, se njegov amplitudni spekter ne spremeni, spremeni pa se njegov fazni spekter.

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X[k] \\ x[n - n_0] &\leftrightarrow X[k] W_N^{kn_0} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ker predstavljajo faktorji $W_N^{kn_0}$ točke na enotski krožnici v kompleksni ravnini:

$$|W_N^{kn_0}| = 1 \quad (1.34)$$

ne morejo spremeniti amplitudnega spektra, temveč vnašajo le fazni zasuk, ki je linearno odvisen od k . Premike za n_0 , ki so večji ali enaki periodi N lahko, zaradi periodičnosti signala obravnavamo po modulu N :

$$x[n - n_0] = x[(n - n_0) \bmod N] \quad (1.35)$$

1.4.3.3 Premik spektra

Lastnost premika spektra je dualna lastnosti premika signala:

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X[k] \\ W_N^{-k_0 n} x[n] &\leftrightarrow X[k - k_0] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pri premiku spektra za k_0 spektralnih komponent, se signal množi s kompleksnim harmoničnim signalom:

$$W_N^{-k_0 n} = e^{jk_0 \Omega_0 n} \quad (1.37)$$

kar lahko obravnavamo tudi kot modulacijo kompleksnega nosilca frekvence $k\Omega_0$ s signalom $x[n]$. Kompleksni nosilec lahko zaradi periodičnosti zapišemo tudi v obliki:

$$e^{jk_0\Omega_0 n} = (e^{jk_0\Omega_0})^n = (e^{j(k_0 \bmod N)\Omega_0})^n = e^{j(k_0 \bmod N)\Omega_0 n} \quad (1.38)$$

kar pomeni, da lahko frekvenco nosilca obravnavamo po modulu. Frekvenca nosilca s frekvenco nad frekvenco 2π ($N\Omega_0 = 2\pi$) se torej preslika v frekvenčno območje med 0 in 2π .

Zaradi periodičnosti spektra lahko tudi frekvenčni premik obravnavamo po modulu N :

$$X[k - k_0] = X[(k - k_0) \bmod N] \quad (1.39)$$

1.4.3.4 Modulacija

Pri modulaciji realnega nosilca $\cos[k_0\Omega_0 n]$ s signalom $x[n]$, se spekter signala premakne za k_0 spektralnih komponent v levo in desno od originalnega spektra, njegova amplituda pa se razpolovi:

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X[k] \\ x[n] \cos[k_0\Omega_0 n] &\leftrightarrow \frac{1}{2}(X[k - k_0] + X[k + k_0]) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Podobno kot prej lahko frekvenco nosilca in premik obravnavamo po modulu N .

1.4.3.5 DFT konvolucije

DFT konvolucije dveh periodičnih nizov je za multiplikacijsko konstanto enak produktu DFT-jev posameznih nizov.

Če je niz $x[n]$ posledica konvolucije dveh periodičnih nizov $x_1[n] * x_2[n]$ z isto periodo, je transform $X[k]$ enak produktu transformov obeh osnovnih nizov:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1[k] \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2[k] \\ x_1[n] * x_2[n] &\leftrightarrow NX_1[k]X_2[k] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Zaradi periodičnosti signala je konvolucija krožna, kot je to razloženo v razdelku 1.3.4.

1.4.3.6 DFT produkta

Lastnost množenja je dualna lastnosti konvolucije:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1[k] \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2[k] \\ x_1[n]x_2[n] &\leftrightarrow X_1[k] * X_2[k] \end{aligned} \quad (1.42)$$

Zaradi periodičnosti spektra tudi tukaj nastopa krožna konvolucija.

1.4.3.7 Konjugacija

Vhodni niz lahko v splošnem vsebuje vzorce kompleksnih vrednosti. Vzemimo osnovni niz $x[n]$ in mu priredimo niz $x[n]^*$, katerega vzorci imajo kompleksno konjugirane vrednosti. Velja:

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X[k] \\ x[n]^* &\leftrightarrow X^*[-k] \end{aligned} \quad (1.43)$$

1.4.3.8 DFT realnih signalov

Če je signal $x[n]$ realen, velja:

$$x[n] = x^*[n] \quad (1.44)$$

Naredimo DFT na obeh straneh zgornje enačbe in upoštevamo lastnost konjugacije (1.43). Dobimo:

$$X[k] = X^*[-k] \quad (1.45)$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\Re\{X[k]\} = \Re\{X[-k]\} \quad (1.46)$$

in

$$\Im\{X[k]\} = -\Im\{X[-k]\} \quad (1.47)$$

To pomeni, da je pri realnih signalih realna komponenta DFT soda funkcija k in imaginarna komponenta liha funkcija k .

Zaradi periodičnosti signala imamo enako (liho/sodo) simetrijo tudi okrog mnogokratnikov polovice periode $mN/2$. Tu moramo posebej opozoriti, da pri lihi vrednosti N , $N/2$ ni celo število, zato točka simetrije ni na vzorcu temveč na sredini med dvema vzorcema, kot je to razvidno na sliki 1.3.

Iz enačbe (1.45) pa neposredno sledi tudi, da je močnostni in s tem tudi amplitudni spekter realnega signala soda funkcija k :

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k] = X^*[-k]X[-k] = |X[-k]|^2 \quad (1.48)$$

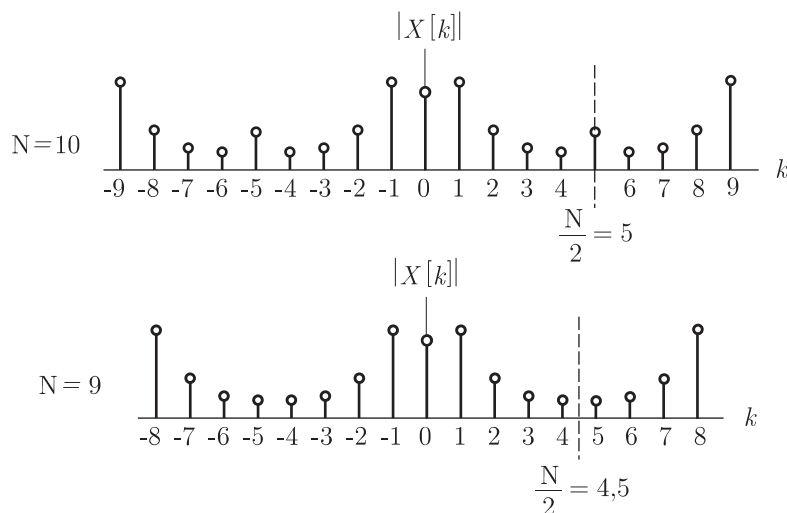
Iz enačb (1.46) in (1.47) pa se vidi, da je fazni spekter liha funkcija k :

$$\Phi_x[k] = \arg \frac{\Im\{X[k]\}}{\Re\{X[k]\}} = -\frac{\Im\{X[-k]\}}{\Re\{X[-k]\}} = -\Phi_x[-k] \quad (1.49)$$

1.4.3.9 DFT sodih in lihih funkcij

Lastnost je dualna lastnosti DFT realnih signalov in pove, da je DFT sodih funkcij realna funkcija:

$$\begin{aligned} x[n] &= x[-n] \\ X[k] &= \Re\{X[k]\} \end{aligned} \quad (1.50)$$



Slika 1.3 – Simetrija DFT realnih signalov

in DFT lihih funkcij imaginarna funkcija:

$$\begin{aligned} x[n] &= -x[-n] \\ X[k] &= j\Im\{X[k]\} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Vsak signal $x[n]$ lahko zapišemo kot vsoto lihega in sodega signala:

$$x[n] = x_s[n] + x_l[n] \quad (1.52)$$

kjer je

$$x_s[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \quad (1.53)$$

in

$$x_l[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (1.54)$$

Iz zgornjih enačb pa neposredno sledita relaciji:

$$\Re\{X[k]\} = \text{DFT}\{x_s[n]\} \quad (1.55)$$

in

$$\Im\{X[k]\} = -j\text{DFT}\{x_l[n]\} \quad (1.56)$$

1.4.3.10 DFT avtokorelacijske funkcije

Močnostni spekter signala $x[n]$ smo definirali kot DFT avtokorelacijske funkcije $R_{xx}[m]$. Pokazati je mogoče tudi, da je DFT avtokorelacijske funkcije enak kvadratu amplitudnega spektra:

$$\text{DFT}\{R_{xx}[m]\} = |X[k]|^2 \quad (1.57)$$

kar pomeni, da je močnostni spekter periodičnega signala enak kvadratu amplitudnega spektra:

$$S_x[k] = |X[k]|^2 \quad (1.58)$$

1.4.3.11 Parsevalov teorem

Parsevalov teorem poznamo pri transformaciji analognih periodičnih signalov. Govori o tem, da je povprečna moč signala enaka vsoti povprečnih moči posameznih spektralnih komponent. Do Parsevalovega teorema pri diskretnih signalih pridemo najenostavneje tako, da izraz (1.57) zapišemo z IDFT:

$$R_{xx}[m] = IDFT\{|X[k]|^2\} \quad (1.59)$$

oziroma:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+m] = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 W^{-kn} \quad (1.60)$$

in postavimo $m = 0$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (1.61)$$

Zgornji izraz predstavlja Parsevalov teorem za periodične diskretne signale. Vidimo, da je Parsevalov teorem le poseben primer lastnosti DFT avtokorelacijske funkcije.

1.5 Aperiodični diskretni signali

Aperiodičen diskreten signal lahko dobimo z vzorčenjem analognega aperiodičnega signala. Kadar razmerje med osnovno frekvenco signala in frekvenco vzorčenja ni racionalno število, dobimo tudi pri vzorčenju periodičnega analognega signala aperiodičen diskreten signal.

Časovno omejeni aperiodični signali s končno vrednostjo vzorcev imajo končno energijo, zato jih uvrščamo med energijske signale. Aperiodični signali so lahko tudi naključni. Ti imajo neskončno dolžino in zato tudi neskončno energijo. Če imajo naključni signali končne vrednosti vzorcev, potem imajo končno tudi povprečno moč in jih uvrščamo med močnostne signale. Naključne diskretne signale dobimo z vzorčenjem naključnih analognih signalov.

1.5.1 Značilne vrednosti

1.5.1.1 Srednja vrednost

Srednjo ali povprečno vrednost aperiodičnega signala dobimo s povprečenjem vrednosti vseh vzorcev

$$\overline{x[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \right) \quad (1.62)$$

Pri energijskih signalih je srednja vrednost vedno enaka 0.

1.5.1.2 Energija

Energija aperiodičnega signala je podana z izrazom:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] \quad (1.63)$$

Pri močnostnih signalih je energija neskončna.

1.5.1.3 Srednja moč

Srednja moč aperiodičnega signala je enaka limiti:

$$\overline{x^2[n]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \right) \quad (1.64)$$

Pri energijskih signalih je srednja moč enaka 0.

1.5.1.4 Varianca

Varianca ali povprečna izmenična moč aperiodičnega signala je dana z izrazom

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (x[n] - \overline{x[n]})^2 \right) \quad (1.65)$$

Pri energijskih signalih je ta enaka 0.

1.5.2 Avtokorelacijska funkcija

Avtokorelacijsko funkcijo definiramo za energijske signale drugače kot za močnostne signale.

Energijski signali. Pri energijskih signalih ima avtokorelacijska funkcija značaj energije:

$$r_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m] \quad (1.66)$$

Močnostni signali. Pri aperiodičnih močnostnih signalih je avtokorelacijska funkcija definirana enako kot pri periodičnih signalih, le da gre perioda signala čez vse meje:

$$R_{xx}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+m] \right) \quad (1.67)$$

Avtokorelacijska funkcija je soda funkcija zamika m . Največjo vrednost ima pri zamiku $m = 0$. Pri energijskih signalih je tedaj enaka energiji signala pri močnostnih pa povprečni moči signala.

1.5.3 Konvolucija

Konvolucija aperiodičnih signalov $x[n]$ in $y[n]$ je definirana kot:

$$x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m] \quad (1.68)$$

Konvolucija je funkcija časovnega indeksa n . Konvolucija je komutativna operacija:

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n] \quad (1.69)$$

Za razliko od krožne konvolucije, ki smo jo imeli pri periodičnih signalih, imenujemo konvolucijo aperiodičnih signalov tudi linearna konvolucija. Linearna konvolucija nastopa pri odzivu časovno diskretnih sistemov, kot bomo videli v naslednjem poglavju.

1.6 Časovno diskretni Fourier transform – DTFT

Spekter periodičnih signalov smo računali s pomočjo diskretnega Fourierovega transformata. Da bi izračunali spekter aperiodičnega signala, lahko aperiodičen diskreten signal predstavimo kot periodičen signal z neskončno periodo. Ko gre perioda signala N čez vse meje, gre njegova osnovna frekvenca Ω_0 proti nič, višje harmonske komponente pri frekvencah $k\Omega_0$ pa so tako neskončno blizu in tvorijo zvezno frekvenco Ω . Namesto posameznih spektralnih komponent $X[k]$ zato tu računamo gostoto spektra $X(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= \frac{\Omega}{2\pi} \rightarrow \frac{d\Omega}{2\pi} \\ N &\rightarrow \infty \\ \Omega_0 &\rightarrow d\Omega \\ k\Omega_0 &\rightarrow \Omega \\ NX[k] &\rightarrow X(\Omega) \\ \sum &\rightarrow \int \end{aligned} \quad (1.70)$$

Upoštevanje zgornjih relacij v izrazih za IDFT in DFT nas privede do:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ X(\Omega) &= \sum_n x[n] e^{-j\Omega n} \end{aligned} \quad (1.71)$$

Druga enačba predstavlja časovno diskretni Fourier transform (Discrete Time Fourier Transform - DTFT), prva enačba pa inverzni časovno diskretni Fourier transform (IDTFT - Inverse DTFT). Pri aperiodičnih diskretnih signalih smo tako dobili Fourierjev par:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \text{DTFT}\{x[n]\} \\ x[n] &= \text{IDTFT}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\leftrightarrow X(\Omega) \end{aligned} \quad (1.72)$$

1.6.1 Amplitudni in fazni spekter

Spekter $X(\Omega)$ aperiodičnega signala $x[n]$ je v splošnem kompleksna funkcija, ki jo lahko zapišemo tudi v polarni obliki:

$$X(\Omega) = A_x(\Omega) e^{j\Phi_x(\Omega)} \quad (1.73)$$

kjer je

$$A_x(\Omega) = |X(\Omega)| \quad (1.74)$$

amplitudni spekter in

$$\Phi_x(\Omega) = \arg(X(\Omega)) \quad (1.75)$$

fazni spekter signala.

1.6.2 Energijski in močnostni spekter

Pri energijskih signalih določimo energijski spekter kot DTFT avtokorelacijske funkcije energijskih signalov:

$$W_x(\Omega) = \text{DTFT}\{r_{xx}[m]\} \quad (1.76)$$

Pri močnostnih signalih imamo namesto energijskega spektra močnostni spekter, ki je definiran kot DTFT avtokorelacijske funkcije močnostnih signalov:

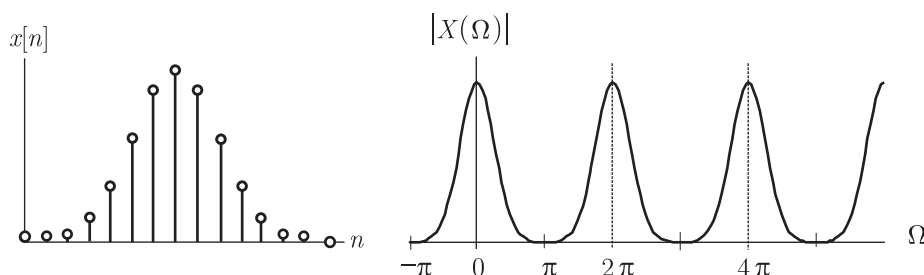
$$S_x(\Omega) = \text{DTFT}\{R_{xx}[m]\} \quad (1.77)$$

1.6.3 Lastnosti DTFT

DTFT je preslikava, ki preslika signal $x[n]$ iz prostora n v njegov spekter $X(\Omega)$ v prostoru Ω . Spekter je periodičen po frekvenci Ω s periodo enako 2π .

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi) \quad (1.78)$$

Na sliki 1.4 je prikazan diskreten aperiodičen signal v časovnem in frekvenčnem prostoru. Spekter signala je periodičen in zvezen.



Slika 1.4 – Diskreten aperiodičen signal v časovnem in frekvenčnem prostoru

Lastnosti DTFT so zelo podobne lastnostim DFT. Razlike izvirajo iz dejstva, da je pri DTFT signal aperiodičen, zato avtokorelacijska funkcija in konvolucija nimata krožnega značaja, spekter signala pa je zvezen.

1.6.3.1 Linearnost

DTFT linearne kombinacije signalov je enak linearni kombinaciji DTFT-jev posameznih signalov:

$$\text{DTFT} \left\{ \sum_i a_i x_i[n] \right\} = \sum_i a_i \text{DTFT}\{x_i[n]\} \quad (1.79)$$

1.6.3.2 Premik signala

Če periodičen signal premaknemo za n_0 vzorcev, se njegov amplitudni spekter ne spremeni, spremeni pa se njegov fazni spekter.

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(\Omega) \\ x[n - n_0] &\leftrightarrow X(\Omega)e^{-j\Omega n_0} \end{aligned} \quad (1.80)$$

1.6.3.3 Premik spektra

Lastnost premika spektra je dualna lastnosti premika signala:

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(\Omega) \\ e^{j\Omega_0 n} x[n] &\leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \quad (1.81)$$

Pri premiku spektra za Ω_0 , se signal množi s kompleksnim harmoničnim signalom. Zaradi periodičnosti spektra, lahko frekvenčni premik obravnavamo po modulu 2π :

$$X(\Omega - \Omega_0) = X(\Omega - (\Omega_0 \bmod 2\pi)) = X((\Omega - \Omega_0) \bmod 2\pi) \quad (1.82)$$

1.6.3.4 Modulacija

Pri modulaciji realnega nosilca $\cos[\Omega_0 n]$ s signalom $x[n]$, se spekter signala premakne za Ω_0 v levo in desno od originalnega spektra, njegova amplituda pa se razpolovi:

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(\Omega) \\ x[n] \cos[\Omega_0 n] &\leftrightarrow \frac{1}{2}(X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Zaradi periodičnosti spektra lahko frekvenco nosilca in frekvenčni premik obravnavamo po modulu 2π .

1.6.3.5 DTFT konvolucije

DTFT konvolucije dveh aperiodičnih nizov je enak produktu DTFT-jev posameznih nizov.

Če je niz $x[n]$ posledica konvolucije dveh aperiodičnih nizov $x_1[n] * x_2[n]$, je transform $X(\Omega)$ enak produktu transformov obeh osnovnih nizov:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1(\Omega) \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2(\Omega) \\ x_1[n] * x_2[n] &\leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega) \end{aligned} \quad (1.84)$$

Za razliko od DFT tu konvolucija ni krožna, ker imamo opravka z aperiodičnimi signali.

1.6.3.6 DTFT produkta

Lastnost množenja je dualna lastnosti konvolucije:

$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1(\Omega) \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2(\Omega) \\ x_1[n]x_2[n] &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) * X_2(\Omega) \end{aligned} \quad (1.85)$$

Zaradi periodičnosti spektra je konvolucija krožna po modulu 2π :

$$X_1(\Omega) * X_2(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_1(\Lambda)X_2((\Omega - \Lambda) \bmod 2\pi) d\Lambda \quad (1.86)$$

1.6.3.7 Konjugacija

Konjugacija v časovnem prostoru predstavlja konjugacijo in zrcaljenje preko ordinatne osi v frekvenčnem prostoru.

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(\Omega) \\ x[n]^* &\leftrightarrow X^*(-\Omega) \end{aligned} \quad (1.87)$$

1.6.3.8 DTFT realnih signalov

Za realen signal $x[n]$, velja:

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad (1.88)$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\Re\{X(\Omega)\} = \Re\{X(-\Omega)\} \quad (1.89)$$

in

$$\Im\{X(\Omega)\} = -\Im\{X(-\Omega)\} \quad (1.90)$$

To pomeni, da je pri realnih signalih realna komponenta DTFT soda funkcija Ω in imaginarna komponenta liha funkcija Ω .

Podobna simetrija velja tudi za amplitudni in fazni spekter:

$$A_x(\Omega) = A_x(-\Omega) \quad (1.91)$$

in

$$\Phi_x(\Omega) = -\Phi_x(-\Omega) \quad (1.92)$$

1.6.3.9 DTFT avtokorelacijske funkcije

Ker smo avtokorelacijsko funkcijo definirali različno za energijske in močnostne signale, moramo tudi njen DTFT obravnavati ločeno.

Energijski signali Energijski spekter signala smo definirali kot DTFT avtokorelacijske funkcije energijskih signalov:

$$W_x(\Omega) = \text{DTFT}\{r_{xx}[m]\} \quad (1.93)$$

Pokazati je mogoče, da je energijski spekter enak kvadratu amplitudnega spektra:

$$W_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 = A^2(\Omega) \quad (1.94)$$

Izraz (1.93) zapišemo z IDTFT:

$$r_{xx}[m] = \text{IDTFT}(W_x(\Omega)) \quad (1.95)$$

Izpišemo avtokorelacijsko funkcijo in IDTFT v zgornjem izrazu in postavimo $m = 0$. Dobimo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_x(\Omega) d\Omega \quad (1.96)$$

kar je Parsevalov teorem za aperiodične energijske diskretne signale.

Močnostni signali. Močnostni spekter smo definirali kot DTFT avtokorelacijske funkcije močnostnih signalov:

$$S_x(\Omega) = \text{DTFT}\{R_{xx}[m]\} \quad (1.97)$$

Za močnostni spekter velja tudi:

$$S_x(\Omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} W_N(\Omega) \right) \quad (1.98)$$

kjer smo z $W_N(\Omega)$ označili energijski spekter signala $x[n]$ na intervalu $-N \leq n \leq N$.

Avtokorelacijska funkcija je časovno diskretna in soda aperiodična funkcija, zato je močnostni spekter zvezen, periodičen in realen.

Kadar so števila niza $x[n]$ med seboj neodvisna (nekorelirana), je avtokorelacijska funkcija različna od nič le pri $m = 0$. Močnostni spekter $S_x(\Omega)$ je tedaj raven. Pri naključnih signalih je zato močnostni spekter merilo naključnosti signala.

Če sedaj izraz (1.97) zapišemo z IDTFT:

$$R_{xx}[m] = \text{IDTFT}(S_x(\Omega)) \quad (1.99)$$

in postavimo $m = 0$, dobimo:

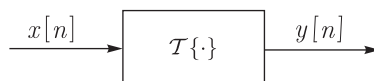
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n] \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_x(\Omega) d\Omega \quad (1.100)$$

kar je Parsevalov teorem za aperiodične močnostne diskretne signale.

2 Diskretni sistemi

Pri načrtovanju diskretnih sistemov, povezovanju analognih in diskretnih sistemov ali zamenjavi analognih sistemov z diskretnimi je zelo pomembno, da natančno poznamo tudi osnovne lastnosti analognih sistemov. Zelo pomembne so značilne podobnosti in razlike med njihovimi lastnostmi.

2.1 Linearni diskretni sistemi



Slika 2.1 – Časovno diskreten sistem z enim vhodom in enim izhodom

Vhodni in izhodni signal diskretnega sistema na sliki 2.1 sta diskretna signala $x[n]$ in $y[n]$. Izhodni signal lahko predstavimo kot transform vhodnega signala:

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} \quad (2.1)$$

Transformacija $\mathcal{T}\{\cdot\}$ je določena z lastnostmi časovno diskretnega sistema in v celoti opisuje sistem. Pri diskretnih sistemih se bomo omejili na linearne časovno nespremenljive (LČN) sisteme.

2.1.1 Linearnost in časovna nespremenljivost

Enako kot pri analognem LČN sistemu lahko tudi za diskreten LČN sistem določimo pogoja za linearnost in časovno nespremenljivost. Sistem je linearen, kadar da linearna kombinacija signalov na vhodu linearno kombinacijo transformov na izhodu sistema.

$$\mathcal{T}\left\{\sum_i [a_i x_i[n]]\right\} = \sum_i [a_i \mathcal{T}\{x_i[n]\}] \quad (2.2)$$

Sistem je časovno nespremenljiv, kadar povzroči časovni premik signala na vhodu sistema enak časovni premik na izhodu.

$$\mathcal{T}\{x[n]\} = y[n] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0] \quad (2.3)$$

2.1.2 Sistemska funkcija ali impulzni odziv

Lastnosti diskretnega LČN sistema lahko opišemo s sistemsko funkcijo $h[n]$, ki je definirana kot odziv sistema na enotin impulz:

$$h[n] = \mathcal{T}\{\delta[n]\} \quad (2.4)$$

kjer je $\delta[n]$ enotin impulz in je določen z:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Sistemska funkcija oziroma impulzni odziv popolnoma določa diskreten LČN sistem. Če poznamo sistemsko funkcijo $h[n]$, lahko vsakemu vhodnemu signalu $x[n]$ določimo ustrezen izhodni signal $y[n]$. Izhodni signal je enak konvoluciji vhodnega signala s sistemsko funkcijo:

$$y[n] = \sum_m x[n-m]h[m] = x[n] * h[n] \quad (2.6)$$

Da bi pokazali veljavnost zgornjega izraza upoštevajmo v izrazu:

$$y[n] = \mathcal{T}(x[n]) \quad (2.7)$$

dejstvo, da je konvolucija enotinega impulza in signala enaka samemu signalu:

$$\delta[n] * x[n] = \sum_m \delta[n-m]x[m] = x[n] \quad (2.8)$$

Dobimo:

$$y[n] = \mathcal{T}\left(\sum_m x[m]\delta[n-m]\right) \quad (2.9)$$

Člene v zgornjem izrazu seštevamo po indeksu m , v vsakem posameznem členu je torej $x[m]$ konstanten. Če upoštevamo, da je transformacija $\mathcal{T}$ linearna, lahko zapišemo:

$$y[n] = \sum_m x[m]\mathcal{T}(\delta[n-m]) \quad (2.10)$$

Po definiciji je transformacija enotinega impulza enaka sistemski funkciji, ker pa je po predpostavki sistem časovno neodvisen, je transformacija za m premaknjenega enotinega impulza enaka za m premaknjeni sistemski funkciji, torej velja:

$$y[n] = \sum_m h[n-m]x[m] = h[n] * x[n] \quad (2.11)$$

Ker je konvolucija komutativna operacija, je zgornji izraz enak izrazu (2.6) in veljavnost izraza (2.6) je s tem potrjena.

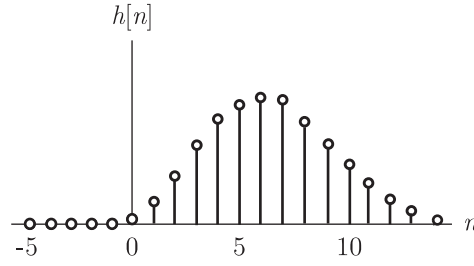
2.1.3 Sistemska funkcija kavzalnih sistemov

Pri ustvarljivih diskretnih sistemih, kjer predstavlja $x[n]$ vzorce signala in je n časovni indeks, posledica ne more prehitevati vzroka, zato se odziv na izhodu sistema ne more pojaviti preden je na vhodu sistema prisoten signal, ki to posledico povzroči. Take sisteme imenujemo tudi kavzalni sistemi.

Sistemska funkcija $h[n]$ je definirana kot odziv sistema na enotin impulz $\delta[n]$, ki nastopi v trenutku $n = 0$. V tem primeru je torej $h[n]$ posledica, ki ne more nastopiti pred vzrokom, torej pred časom $n = 0$ in zato zanjo velja:

$$h[n] = 0 \quad \forall \quad n < 0 \quad (2.12)$$

Primer sistemske funkcije kavzalnega sistema je prikazan na sliki 2.2.



Slika 2.2 – Sistemska funkcija kavzalnega sistema

2.1.4 Prevajalna funkcija

Pri načrtovanju sistemov je pogosto pomembnejši odziv v frekvenčnem prostoru oziroma njegova prevajalna funkcija. Prevajalna funkcija sistema $H(\Omega)$ je definirana kot DTFT sistemske funkcije $h[n]$:

$$H(\Omega) = DTFT(h[n]) = \sum_n h[n]e^{-j\Omega n} \quad (2.13)$$

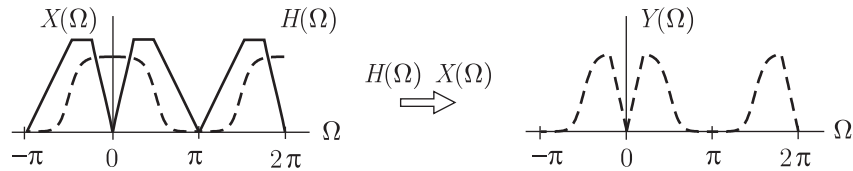
Konvolucija v časovnem prostoru se transformira v množenje v frekvenčnem prostoru. Iz tega sledi, da je DTFT izhodnega signala $Y(\Omega)$ enak produktu DTFT vhodnega signala $X(\Omega)$ in DTFT sistemske funkcije:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (2.14)$$

Množenje DTFT signala s prevajalno funkcijo predstavlja filtriranje. Iz lastnosti DTFT izhaja, da je prevajalna funkcija $H(\Omega)$ periodična po frekvenci Ω s periodo 2π :

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi) \quad (2.15)$$

Periodičnost filtriranja je nakazana na sliki 2.3.



Slika 2.3 – Periodičnost filtriranja

Prevajalno funkcija sistema $H(\Omega)$ bi lahko definirali tudi kot odziv LČN sistema na vzbujanje s kompleksnim harmoničnim signalom $x[n]$ s krožno frekvenco Ω :

$$x[n] = \hat{X}e^{j\Omega n} \quad (2.16)$$

kjer je $\hat{X}$ označena kompleksna amplituda (kazalec) harmoničnega signala. Odziv sistema je enak konvoluciji vhodnega signala in sistemske funkcije:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\hat{X}e^{j\Omega(n-m)} \\ &= \hat{X}e^{j\Omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\Omega m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{X}H(\Omega)e^{j\Omega n} \\
&= \hat{Y}e^{j\Omega n}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Gornji izraz kaže, da je izhodni signal kompleksen harmoničen signal iste frekvence kot vhodni signal, njegova amplituda pa je enaka:

$$\hat{Y} = H(\Omega)\hat{X} \tag{2.18}$$

Prevajalno funkcijo $H(\Omega)$ lahko torej določimo iz razmerja amplitud vhodnega in izhodnega signala pri vzbujanju s harmoničnim signalom krožne frekvence Ω :

$$H(\Omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} \tag{2.19}$$

2.1.5 Stabilnost sistema

Sistem je stabilen, če je pri končnem vzbujanju tudi odziv sistema končen:

$$|y[n]| < \infty \forall n \iff |x[n]| < \infty \forall n \tag{2.20}$$

Kadar je vzbujanje končno, lahko določimo pozitivno število M tako, da velja:

$$|x[n]| \leq M \tag{2.21}$$

Absolutno vrednost signala na izhodu sistema določimo na osnovi izraza (2.6):

$$|y[n]| = \left| \sum_m x[n-m]h[m] \right| \tag{2.22}$$

V gornjem izrazu upoštevamo trikotniško pravilo in dobimo neenačbo:

$$|y[n]| \leq \sum_m |x[n-m]| \cdot |h[m]| \tag{2.23}$$

Neenačaj se ohrani, če vse vrednosti $|x[n]|$ nadomestimo z M . Dobimo:

$$|y[n]| \leq M \sum_m |h[m]| \tag{2.24}$$

Odziv $|y[n]|$ v zgornji enačbi bo končen, kadar bo končna vsota na desni strani zgornjega izraza. Pogoji

$$\sum_m |h[m]| < \infty \tag{2.25}$$

je torej zadosten pogoj za stabilnost sistema. Če so meje v zgornji vsoti končne, je tudi vsota končna, kar pomeni, da je sistem s končno dolžino odziva na enotni impulz vedno stabilen.

2.2 Transform $\mathcal{Z}$

Podobno, kot smo pri analizi analognih sistemov namesto Fourier transforme sistemske funkcije $H(\omega)$ uporabili njen Laplaceov transform $H_L(s)$, lahko uporabimo pri diskretnih sistemih transform $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije, to je prevajalno funkcijo $H_Z(z)$.

2.2.1 Definicija transform $\mathcal{Z}$

Po definiciji je dvostranski transform $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije $h[n]$ enak:

$$H_z(z) = \mathcal{Z}(h[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (2.26)$$

kjer je z kompleksna spremenljivka. Za razliko od Laplaceovega transform je transform $\mathcal{Z}$ definiran tudi za nekavzalne funkcije $h[n]$, ker je n določen tako za pozitivne kot za negativne vrednosti. Pri kavzalnih sistemih lahko uporabimo desnostranski transform:

$$H_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (2.27)$$

2.2.2 Transform $\mathcal{Z}$ in DTFT

Transform $\mathcal{Z}$ je v bistvu Laurentova vrsta kompleksne spremenljivke z in lahko izpeljemo vse lastnosti iz teorije kompleksnih spremenljivk. Spremenljivka z ima lahko poljubno vrednost v kompleksni ravnini z , za katero vrsta konvergira. Zapišimo spremenljivko z v polarnem zapisu:

$$z = re^{j\Omega} \quad (2.28)$$

Transform $\mathcal{Z}$ je potem enak:

$$H_z(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]r^{-n}e^{-j\Omega n} \quad (2.29)$$

Na enotinem krogu v ravnini z pri $r = 1$ je transform $\mathcal{Z}$ ekvivalenten DTFT:

$$H_z(e^{j\Omega}) = H(\Omega) \quad (2.30)$$

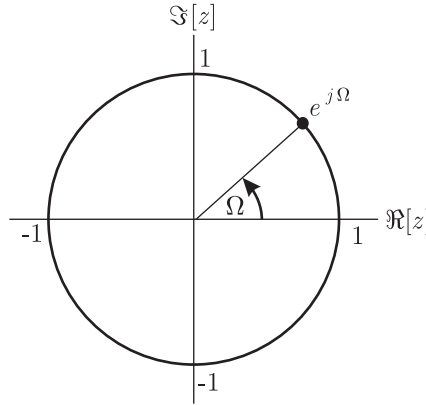
Enotska krožnica v ravnini z torej predstavlja frekvenčno krožnico, podobno kot predstavlja imaginarna os v ravnini s frekvenčno os. Frekvenca, ki jo predstavlja točka na enotski krožnici, je enaka kotu, ki ga oklepa daljica med izbrano točko in izhodiščem z realno osjo, kot je to prikazano na sliki 2.4.

Da bi prevajalno funkcijo, ki jo dobimo s transformom $\mathcal{Z}$ razlikovali od prevajalne funkcije, ki jo dobimo s pomočjo DTFT, smo prvo označili z indeksom $H_z(z)$. Ker je v večini primerov že iz argumenta funkcije razvidno, da gre za transform $\mathcal{Z}$, bomo v primerih, ko je to razvidno, v nadaljevanju eksplicitno oznako z indeksom z izpuščali in uporabili poenostavljen zapis $H(z)$.

2.2.3 Konvergenčno področje transform $\mathcal{Z}$

Vrsta (2.29) ni nujno konvergentna v vseh točkah ravnine z . Da bi lahko določili konvergenčno področje, to je področje v ravnini z , kjer je vrsta zagotovo konvergentna, poiščemo mejno absolutno vrednost vrste (2.29):

$$|H_z(re^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}r^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|r^{-n} \quad (2.31)$$

Slika 2.4 – Frekvenčna krožnica v ravnini z

Gornjo vrsto razdelimo v dve vrsti, ki ustrezata levostranskemu in desnostranskemu transformu $\mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| r^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |h[n]| \cdot r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \cdot r^{-n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |h[-n]| r^n + \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| r^{-n} \end{aligned} \quad (2.32)$$

V področju konvergence transformu $\mathcal{Z}$ morata biti obe vrsti konvergentni. Za funkcijo $h[n]$ lahko določimo tri pozitivne konstante M , R_1 in R_2 tako, da bo izpolnjeno:

$$\begin{aligned} |h[n]| &\leq M R_1^n & ; & \quad n \geq 0 \\ |h[n]| &\leq M R_2^n & ; & \quad n < 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Če v skladu z zgornjimi mejami nadomestimo $|h[n]|$ v izrazu (2.32) z večjimi vrednostmi, se neenačaj ohrani, zato velja:

$$|H_z(re^{j\Omega})| \leq M \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R_2} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right] \quad (2.34)$$

Obe vrsti v zgornjem izrazu sta geometrijski vrsti. Geometrijska vrsta je konvergentna, če je konstanta geometrijskega zaporedja manjša od 1. Prva vrsta, ki pripada levostranskemu transformu $\mathcal{Z}$, bo torej konvergentna, kadar velja:

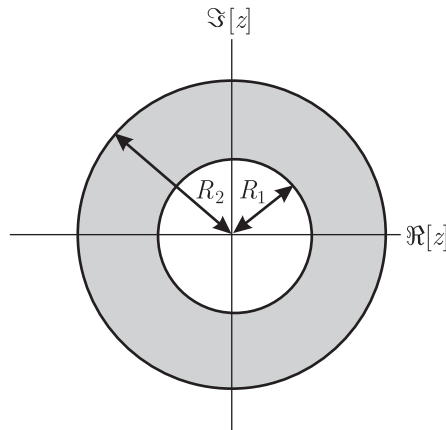
$$r < R_2 \quad (2.35)$$

to je v krogu s polmerom R_2 v ravnini z . Druga vrsta, ki pripada desnostranskemu transformu $\mathcal{Z}$, bo konvergentna, kadar velja:

$$r > R_1 \quad (2.36)$$

to je zunaj kroga s polmerom R_1 v ravnini z . Kadar je $R_2 > R_1$, dobimo v ravnini z konvergenčno področje v obroču, ki ga omejujeta R_1 in R_2 , kot je to prikazano na sliki 2.5.

Če želimo zagotoviti, da bo DTFT končen pri vseh frekvencah in s tem zagotoviti tudi stabilnost sistema, mora ležati frekvenčna krožnica znotraj konvergenčnega področja, kar pomeni, da mora biti $R_1 < 1$ in $R_2 > 1$.

Slika 2.5 – Konvergenčno področje transform $\mathcal{Z}$

Ker se bomo v nadaljevanju ukvarjali le s kavzalnimi sistemi, velja posebej poudariti, da je pri kavzalnih sistemih, le desnostranski transform $\mathcal{Z}$ različen od nič, zato je konvergenčno področje zunaj kroga z radijem R_1 . Pogoji $R_1 < 1$ je tedaj zadosten za stabilnost sistema.

Poleg transform $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije, lahko naredimo tudi transform $\mathcal{Z}$ signala. Ta pri analizi signalov nima večjega pomena, uporaben pa je pri proučevanju transformacije signala pri prehodu skozi LČN sistem. Ker signali v splošnem niso omejeni s pogojem kavzalnosti, imamo tu opraviti z obojestranskim transformom $\mathcal{Z}$.

2.2.4 Lastnosti transform $\mathcal{Z}$

2.2.4.1 Linearnost

Transform $\mathcal{Z}$ je linearen, kar pomeni, da je transform linearne kombinacije enak linearni kombinaciji transformov:

$$\mathcal{Z}\left(\sum_i a_i h_i[n]\right) = \sum_i a_i \mathcal{Z}(h_i[n]) \quad (2.37)$$

2.2.4.2 Teorem o konvoluciji

Transform konvolucije dveh nizov je enak produktu transformov obeh nizov.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ Y(z) &= X(z)H(z) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ker predstavlja prva vrstica v (2.38) odziv LČN s sistemsko funkcijo $h[n]$ na vhodni signal $x[n]$, predstavlja druga vrstica odziv sistema v prostoru z . Podobno kot v frekvenčnem prostoru, se tudi v prostoru z pri prehodu skozi sistem signal množi s prevajalno funkcijo sistema.

Veljavnost zgornje trditve lahko potrdimo z naslednjimi izvajanjem:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \right) z^{-n} \quad (2.39)$$

Zamenjamo vrstni red seštevanja in dobimo izraz, iz katerega zlahka razberemo produkt obeh transformov:

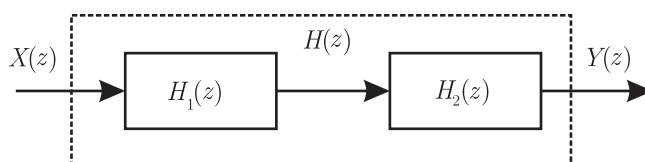
$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m]z^{-n+m} \right) = X(z)H(z) \quad (2.40)$$

2.2.4.3 Teorem o premiku signala

Premik signala za m vzorcev v desno se v prostor z transformira kot množenje z z^{-m} :

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n-m] \\ Y(z) &= z^{-m}X(z) \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2.4.4 Kaskadna vezava sistemov



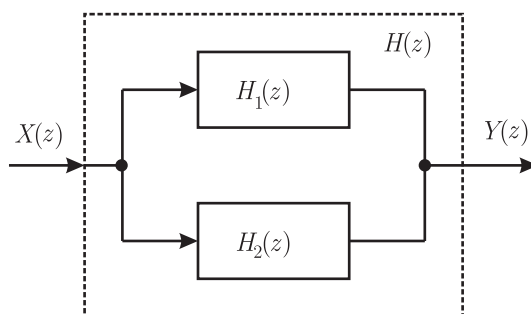
Slika 2.6 – Kaskadna vezava sistemov

Pri kaskadni vezavi sistemov, dobimo prevajalno funkcijo celotnega sistema z množenjem posameznih prevajalnih funkcij:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (2.42)$$

Lastnost je razvidna neposredno iz teorema o konvoluciji.

2.2.4.5 Vzporedna vezava sistemov

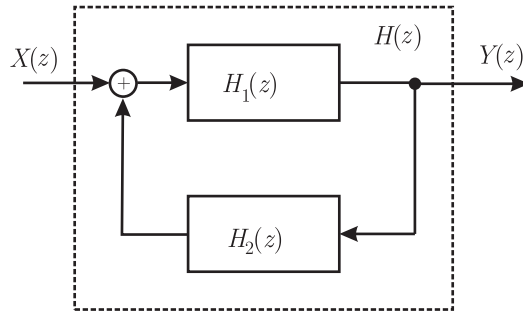


Slika 2.7 – Vzporedna vezava sistemov

Pri vzporedni vezavi sistemov, je prevajalna funkcija celotnega sistema enaka vsoti posameznih prevajalnih funkcij:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad (2.43)$$

kar sledi neposredno iz lastnosti o linearnosti.



Slika 2.8 – Vezava s povratnim sklopom

2.2.4.6 Vezava s povratnim sklopom

Prevajalno funkcijo sistema s povratnim sklopom na sliki 2.8 dobimo tako, da najprej izrazimo izhodni signal:

$$Y(z) = [X(z) + Y(z)H_2(z)]H_1(z) \quad (2.44)$$

in od tod:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (2.45)$$

2.2.5 Zgledi transformov $\mathcal{Z}$

V tem razdelku so predstavljeni transform $\mathcal{Z}$ nekaterih najznačilnejših kavzalnih nizov.

2.2.5.1 Enotin impulz

$$h[n] = \delta[n] \quad (2.46)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \quad (2.47)$$

Ker je niz končen, je konvergenčno področje celotna ravnina z .

2.2.5.2 Zakasnjjen enotin impulz

$$h[n] = \delta[n - m] \quad ; \quad m > 0 \quad (2.48)$$

Sistem s tako sistemsko funkcijo zakasni niz za m vzorcev. Transform $\mathcal{Z}$ je enak:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n - m]z^{-n} = z^{-m} \quad (2.49)$$

Če imamo zakasnitev za en vzorec ($m = 1$), dobimo tako imenovano zakasnilno celico ali D celico. Njena prevajalna funkcija je v skladu z zgornjim izrazom enaka:

$$H(z) = z^{-1} \quad (2.50)$$

Tudi tu je konvergenčno področje celotna ravnina z z izjemo izhodišča.

2.2.5.3 Enotina stopnica

Enotina stopnica $u[n]$ je definirana kot:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n \geq 0 \\ 0 & ; \quad n < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Vsak niz, ki ga množimo z enotino stopnico postane kavzalen. Sistem s sistemsko funkcijo:

$$h[n] = u[n] \quad (2.52)$$

ima prevajalno funkcijo enako:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2.53)$$

Zgornja vrsta je konvergentna za vse $|z| > 1$, to je zunaj enotskega kroga. Ker frekvenčna krožnica ni vključena, DTFT ne obstaja.

2.2.5.4 Eksponentni niz

Za kavzalen eksponentni niz:

$$h[n] = u[n]a^n \quad (2.54)$$

dobimo transform:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (2.55)$$

$H(z)$ konvergira, če je $|az^{-1}| < 1$ oziroma $|z| > |a|$, to je zunaj kroga s polmerom a . Da bi obstajal DTFT mora biti $a < 1$.

2.2.5.5 Kompleksni harmonični niz

Kompleksni harmonični niz z upadajočo amplitudo:

$$h[n] = u[n]a^n e^{j\Omega_0 n} \quad (2.56)$$

ima transform $\mathcal{Z}$ enak:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j\Omega_0 n} z^{-n} = \frac{1}{1 - ae^{j\Omega_0} z^{-1}} \quad (2.57)$$

$H(z)$ konvergira za $|z| > a$, torej zunaj kroga s polmerom a . Da bi obstajal DTFT mora biti $a < 1$, kar pomeni, da amplituda upada.

2.2.5.6 Sinusni niz

Namesto kompleksnega signala imamo lahko realni harmonični niz z upadajočo amplitudo:

$$h[n] = u[n]a^n \sin(\Omega_0 n) \quad (2.58)$$

Sinusno funkcijo izrazimo v kompleksni obliki:

$$u[n]a^n \sin(\Omega_0 n) = \frac{1}{2j} \left(u[n]a^n e^{j\Omega_0 n} - u[n]a^n e^{-j\Omega_0 n} \right) \quad (2.59)$$

V gornjem izrazu upoštevamo (2.57). Po preureditvi dobimo:

$$H(z) = \frac{a \sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\Omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (2.60)$$

Konvergenca zahteva, da je $|z| > a$, torej DTFT tudi tu obstaja le pri upadajoči amplitudi. Pri $a = 1$, dobimo kot odziv na enotin impulz nedušeno nihanje, kar predstavlja oscilator.

2.2.5.7 Kosinusni niz

Za kosinusni niz:

$$h[n] = u[n] a^n \cos(\Omega_0 n) \quad (2.61)$$

izračunamo transform na enak način kot za sinusni niz. Dobimo:

$$H(z) = \frac{1 - a z^{-1} \cos(\Omega_0)}{1 - 2a \cos(\Omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (2.62)$$

Tudi tu dobimo pri $a = 1$ nedušeno nihanje.

Za boljšo preglednost so transformi $\mathcal{Z}$ signalov, ki pogosto nastopajo pri obdelavi, podani v razpredelnici 2.1.

niz	transform	konvergenca
$\delta[n]$	1	poljubno
$\delta[n - m]$	z^{-m}	poljubno
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - a z^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u[n]$	$\frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z > a $
$\sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{a \sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\Omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - a \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\Omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Tabela 2.1 – Razpredelnica transformov $\mathcal{Z}$ pogostih signalov.

2.2.6 Prevajalna funkcija ustvarljivih sistemov

Ustvarljivi diskretni LČN sistemi so kavzalni in izvedeni s končnim številom elementov. Izhodni vzorec $y[n]$ je zato lahko le linearna kombinacija trenutnega vhodnega vzorca $x[n]$ in končnega števila preteklih vhodnih in izhodnih vzorcev: $x[n - i]$ in $y[n - i]$ pri $i > 0$:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n - i] - \sum_{i=1}^M a_i y[n - i] \quad (2.63)$$

Zgornjo enačbo je mogoče realizirati s pomočjo seštevalnikov, množilnikov in zakasnilnih celic. Na trenutni izhodni vzorec vpliva trenutni vhodni vzorec in N preteklih vhodnih vzorcev ter M preteklih izhodnih vzorcev.

Naredimo transform $\mathcal{Z}$ na obeh straneh gornjega izraza in upoštevamo linearnost transforma $\mathcal{Z}$. Dobimo:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=0}^N b_i \mathcal{Z}(x[n-i]) - \sum_{i=1}^M a_i \mathcal{Z}(y[n-i]) = \\ &= X(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{i=1}^M a_i z^{-i} \end{aligned} \quad (2.64)$$

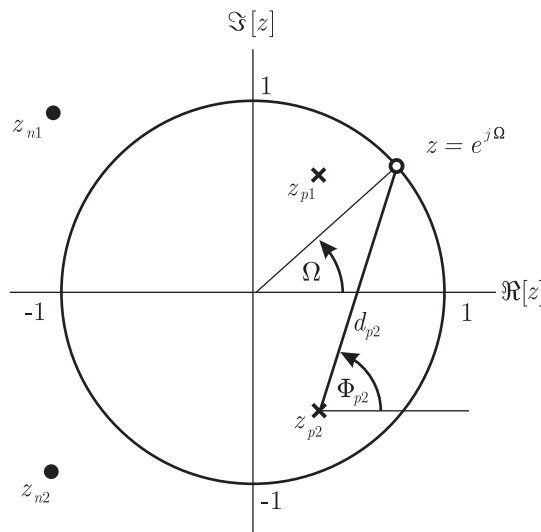
Z ureditvijo dobimo izraz:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad (2.65)$$

Vidimo, da je pri ustvarljivih diskretnih sistemih prevajalna funkcija $H(z)$ kompleksna racionalna funkcija, ki jo lahko zapišemo v obliki, iz katere so razvidne ničle in poli:

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_{ni} z^{-1})}{\prod_{i=1}^M (1 - z_{pi} z^{-1})} = b_0 z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^M (z - z_{pi})} \quad (2.66)$$

Lege ničel z_{ni} in polov z_{pi} prevajalne funkcije $H(z)$ so odločilne za lastnosti sistema. Vrišemo jih v ravnino z . V središču je frekvenčni krog, ki ima enak pomen kot frekvenčna os v ravnini s . Ničle prevajalne funkcije označujemo običajno s krogci, pole pa s križci. Na sliki 2.9 je narisano zgled razporeditve polov in ničel sistema s prevajalno funkcijo drugega reda.



Slika 2.9 – Lege polov in ničel prevajalne funkcije v z -prostoru

Za ustvarljive diskretne sisteme z realnimi koeficienti a_i in b_i velja:

- Število polov je vedno večje ali enako kot število ničel.
- Poli in ničle prevajalne funkcije $H(z)$ so realni ali pa nastopajo v konjugirano kompleksnih dvojicah.
- Amplitudna karakteristika $A(\Omega)$ je neposredno odvisna od lege polov in ničel.

$$A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| = |b_0| \frac{\prod_{i=1}^N |e^{j\Omega} - z_{ni}|}{\prod_{i=1}^M |e^{j\Omega} - z_{pi}|} = |b_0| \frac{\prod_{i=1}^N d_{ni}(\Omega)}{\prod_{i=1}^M d_{pi}(\Omega)} \quad (2.67)$$

Amplitudna karakteristika je do množilne konstante natančno enaka razmerju med produktom razdalj ničel in produktov razdalj polov do frekvenčnega kroga. Ker imajo ničle in poli pri $z = 0$ razdaljo enako 1, ne vplivajo na amplitudno karakteristiko.

- Tudi fazna karakteristika $\Phi(\Omega)$ je neposredno odvisna od lege polov in ničel.

$$\Phi(\Omega) = \arg[H(e^{j\Omega})] = (M - N)\Omega + \sum_{i=1}^N \Phi_{ni}(\Omega) - \sum_{i=1}^M \Phi_{pi}(\Omega) + k\pi \quad (2.68)$$

kjer je:

$$k = \begin{cases} 0 & ; \quad b_0 > 0 \\ 1 & ; \quad b_0 < 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Fazna karakteristika je enaka razliki vsote kotov vektorjev med ničlami in točko na frekvenčni krožnici ter vsote kotov vektorjev med poli in točko na frekvenčni krožnici. Poli in ničle pri $z = 0$ vnašajo fazni zasuk, ki je linearno odvisen od frekvence Ω .

- Konvergenčno področje transformata $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije $h[n]$ kavzalnega sistema je zunaj kroga s polmerom R , ki ga določa od izhodišča najbolj oddaljen pol prevajalne funkcije $H(z)$:

$$R = \max_i |z_{pi}| \quad (2.70)$$

- DTFT sistemske funkcije obstaja in sistem je stabilen, če leži frekvenčna krožnica v konvergenčnem področju transformata $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije, kar pomeni, da morajo ležati vsi poli prevajalne funkcije $H(z)$ v enotinem krogu:

$$|z_{pi}| < 1 \quad (2.71)$$

- Pri zrcaljenju poljubne ničle prevajalne funkcije $H(z)$ preko frekvenčne krožnice se amplitudni potek $A(\Omega)$ spremeni le za multiplikativno konstanto. V prevajalni funkciji $H_1(z)$ izpostavimo faktor, ki predstavlja ničlo:

$$H_1(z) = H_0(z)(1 - z_n z^{-1}) \quad (2.72)$$

in tvorimo prevajalno funkcijo z ničlo pri $z'_n = 1/z_n^*$:

$$H_2(z) = H_0(z)(1 - z'_n z^{-1}) = H_0(z)(1 - \frac{1}{z_n^* z}) \quad (2.73)$$

Amplitudni potek prevajalne funkcije s preslikano ničlo je enak:

$$\begin{aligned}
 A_2(\Omega) &= \left| H_0(e^{j\Omega}) \right| \cdot \left| 1 - \frac{1}{z_n^* e^{j\Omega}} \right| = \\
 &= \left| H_0(e^{j\Omega}) \right| \cdot \left| \frac{1}{z_n^* e^{j\Omega}} \right| \cdot \left| z_n^* e^{j\Omega} - 1 \right| = \\
 &= \frac{1}{|z_n|} \left| H_0(e^{j\Omega}) \right| \cdot \left| 1 - z_n e^{-j\Omega} \right| = \\
 &= \frac{1}{|z_n|} A_1(\Omega)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

- Lege ničel imajo odločilen vpliv na zakasnitev odziva in potek faze prevajalne funkcije. Ločimo tri primere:
 - vse ničle leže v enotinem krogu: vezje ima najmanjšo zakasnitev odziva in prevajalna funkcija ima minimalni fazni zasuk,
 - vse ničle leže zunaj enotinega kroga: vezje ima največjo zakasnitev odziva in prevajalna funkcija maksimalni fazni zasuk,
 - ničle leže v in zunaj enotinega kroga: vezje ima zakasnitev odziva med mejnima vrednostma in fazni zasuk je med minimalnim in maksimalnim zasukom.

2.2.7 Inverzni transform $\mathcal{Z}$

Zelo pogosto analiziramo ali načrtujemo sisteme z uporabo transformov $\mathcal{Z}$, ne da bi transforme spreminjali nazaj v ustrezne nize. Včasih je ta konverzija nujna in jo dobimo z inverznim transformom $\mathcal{Z}$, ki ga označujemo z $\mathcal{Z}^{-1}$:

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}(H(z)) \tag{2.75}$$

Formalna definicija inverznega transformata je preprosta, lahko pa je težaven njen izračun. Uporabljamo več postopkov inverzne transformacije, ki so naštet v nadaljevanju.

2.2.7.1 Inverzni transform z integracijo

Inverzni transform izpeljemo na osnovi teorije o kompleksnih spremenljivkah in Cauchyjevega integrala:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} H(z) z^{n-1} dz \tag{2.76}$$

Niz $h[n]$ je določen z vrednostjo integrala po poljubni zaključeni krivulji $\mathcal{C}$ v ravnini z , ki leži v konvergenčnem področju transformata $\mathcal{Z}$. Če obstaja DTFT niza $h[n]$, leži frekvenčna krožnica v konvergenčnem področju, kar pomeni, da lahko integriramo po frekvenčni krožnici, oziroma postavimo:

$$\begin{aligned}
 z &= e^{j\Omega} \\
 dz &= j e^{j\Omega} d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

in integriramo v mejah od 0 do 2π . Dobimo:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega(n-1)} j e^{j\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (2.78)$$

kar pa je enako inverznemu DTFT. Vidimo torej, da je inverzni transform $\mathcal{Z}$, vedno kadar obstaja DTFT, kar enak IDTFT.

2.2.7.2 Računanje integrala z residuumi

Kadar je $H(z)$ racionalna funkcija spremenljivke z , lahko določimo vrednosti integrala po zaključeni poti (2.76) na osnovi Cauchy-jevega teorema o residuumih. Označimo funkcijo pod integralom s $H_0(z, n)$ in jo zapišimo v obliki:

$$H_0(z, n) = H(z) z^{n-1} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^M (z - z_{pi})^{m_i}} \quad (2.79)$$

kjer je z_{pi} i -ti pol funkcije $H_0(z, n)$, m_i red i -tega pola in M skupno število polov. Pri tem upoštevamo vse pole, vključno s poli v izhodišču ravnine z . Število polov v izhodišču je zaradi faktorja z^{n-1} v funkciji $H_0(z, n)$ odvisno od indeksa n .

Integral po zaključeni poti v (2.76) je potem po Cauchy-jevem teoremu o residuumih enak vsoti residuumov funkcije $H_0(z)$ v polih:

$$h[n] = \sum_{i=1}^M \operatorname{res}_{z=z_{pi}} [H_0(z, n)] \quad (2.80)$$

kjer je:

$$\operatorname{res}_{z=z_{pi}} [H_0(z, n)] = \lim_{z \rightarrow z_{pi}} \left[\frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} \left((z - z_{pi})^{m_i} H_0(z, n) \right) \right] \quad (2.81)$$

2.2.7.3 Inverzni transform z deljenjem

Transform $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije $h[n]$ kavzalnega sistema je enak:

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots \quad (2.82)$$

$H(z)$ je v splošnem izražen kot ulomek dveh polinomov:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.83)$$

Z deljenjem števca z imenovalcem dobimo zaporedne člene vrste (2.82):

$$\begin{aligned} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}) : (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}) = \\ = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (2.84)$$

od koder lahko razberemo vrednosti sistemske funkcije $h[n]$. Rezultata ne dobimo v obliki splošnega izraza, temveč ga dobimo v obliki niza števil. V določenih primerih je ta niz dovolj preprost, da lahko izpeljemo tudi splošen izraz za odziv sistema. Včasih tega niti ne potrebujemo, saj nam že sam niz pove dovolj o lastnostih sistema.

2.2.7.4 Zgled izračuna inverznega transformata $\mathcal{Z}$

Za zgled si oglejmo izračun inverznega transformata $\mathcal{Z}$ prevajalne funkcije z enim polom na realni osi:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (2.85)$$

Postopek z residuumi

Najprej določimo funkcijo $H_0(z, n)$

$$H_0(z, n) = H(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z - a} \quad (2.86)$$

Vidimo, da ima funkcija $H_0(z, n)$ pri $n \geq 0$ natanko en pol prvega reda pri $z = a$, zato v skladu z (2.81) in (2.86) velja:

$$h[n] = \operatorname{res}_{z=a} [H_0(z, n)] = \lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{(z - a)z^n}{(z - a)} \right] = a^n \quad ; \quad n \geq 0 \quad (2.87)$$

Pri $n < 0$ ima funkcija dodaten pol $(-n)$ -tega reda pri $z = 0$. Zato lahko v skladu z (2.80) in (2.81) zapišemo:

$$\begin{aligned} h[n] &= \operatorname{res}_{z=a} [H_0(z, n)] + \operatorname{res}_{z=0} [H_0(z, n)] = \\ &= a^n + \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(-n-1)!} \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}} \left(z^{-n} H_0(z, n) \right) \right] = \\ &= a^n + \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(-n-1)!} \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}} \left((z - a)^{-1} \right) \right] = \\ &= a^n - a^n = 0 \quad ; \quad n < 0 \end{aligned} \quad (2.88)$$

Rezultata za $n \geq 0$ v enačbi (2.87) in $n < 0$ v enačbi (2.88) lahko sedaj združimo v en izraz. Dobimo:

$$h[n] = a^n u[n] \quad (2.89)$$

kar je pričakovan rezultat (glej tabelo 2.1).

Postopek z deljenjem

$$\begin{array}{r} 1 : (1 - az^{-1}) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots \\ - (1 - az^{-1}) \\ \hline az^{-1} \\ - (az^{-1} - a^2z^{-2}) \\ \hline a^2z^{-2} \\ - (a^2z^{-2} - a^3z^{-3}) \\ \hline a^3z^{-3} \end{array} \quad (2.90)$$

Iz zaporednih koeficientov zlahka uganemo splošen rezultat, ki smo ga dobili v enačbi (2.89). Na osnovi zgleda vidimo, da različni postopki izračuna privedejo do istega rezultata. Odločimo se lahko za tistega, ki je za dani primer preprostejši.

3 Vzorčenje in rekonstrukcija

V prejšnjih dveh poglavjih smo se ukvarjali s splošnimi lastnostmi diskretnih signalov in diskretnih LČN sistemov ter spoznali orodja za njihovo analizo. Spoznali smo, da so tako lastnosti signalov in sistemov kot tudi orodja za njihovo analizo v zveznem in diskretnem času zelo podobna, vendar ne enaka.

V praksi imamo večinoma opraviti z analognimi - časovno zveznimi signali. Da bi take signale lahko obdelovali z diskretnimi sistemi, jih moramo najprej pretvoriti v diskretne signale, kar običajno storimo z vzorčenjem signala v enakomernih časovnih intervalih.

Diskreten signal želimo običajno, po tem, ko smo ga obdelali, prenesli ali pa zgolj shranili na elektronski medij, zopet pretvoriti v analogen signal. Postopek imenujemo rekonstrukcija signala.

Da bi lahko pri obdelavi izvorno analognih signalov koristno uporabili diskretne sisteme, moramo dobro razumeti dogajanja ob vzorčenju in poznati omejitve, ki vplivajo na verno rekonstrukcijo signala.

3.1 Vzorčenje analognega signala

Z vzorčenjem analognih signalov dobimo diskretne signale. Enakomerno vzorčenje ustreza ugotavljanju vrednosti zveznega signala $x(t)$ v trenutkih $t = nT_{vz}$, kjer je T_{vz} interval vzorčenja in

$$\omega_{vz} = \frac{2\pi}{T_{vz}} \quad (3.1)$$

vzorčna frekvenca. Tako dobljen časovno diskreten signal je urejen niz števil – vzorcev zveznega signala:

$$x[n] = x(nT_{vz}) \quad (3.2)$$

3.1.1 Vzorčenje z enotnimi impulzi

Za primerjavo z analognimi signali predstavimo diskreten signal s časovno funkcijo, pri čemer predstavlja vzorčenje produkt zveznega signala $x(t)$ in vzorčevalne funkcije $v_\delta(t)$:

$$x_\delta(t) = x(t)v_\delta(t) \quad (3.3)$$

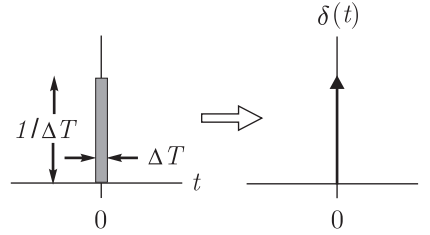
Vzorčevalna funkcija $v_\delta(t)$ je neskončen niz Diracovih ali enotnih impulzov, ki so razmaknjeni med seboj za vzorčno periodo T_{vz} :

$$v_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz}) \quad (3.4)$$

Za Diracov ali enotin impulz $\delta(t)$ velja:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.5)$$

Diracov impulz si lahko predstavljamo kot pravokoten impulz, ki ga skrajšujemo in mu obenem večamo amplitudo prek vseh meja, tako da ostaja njegova ploščina stalno enaka 1, kot je to prikazano na sliki 3.1.

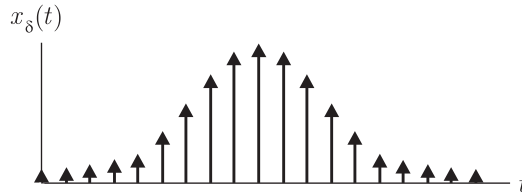


Slika 3.1 – Nastanek Diracovega impulza

Signal $x_\delta(t)$ lahko sedaj zapišemo v obliki:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz})\delta(t - nT_{vz}) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_{vz}) \quad (3.6)$$

Signal $x_\delta(t)$ bomo, da bi ga ločevali od diskretnega signala $x[n]$, imenovali δ -vzorčen signal. Primer δ -vzorčenega signala je prikazan na sliki 3.2.



Slika 3.2 – δ -vzorčen signal

3.1.2 Spekter pri vzorčenju signalov

Doslej smo spektra analognih in diskretnih signalov obravnavali ločeno. Z vzorčenjem smo uvedli povezavo med analognim in diskretnim signalom, zato nas zanima tudi, kakšna je povezava med njunima spektroma.

3.1.2.1 Spektra analognega in δ -vzorčenega signala

Spekter δ vzorčenega signala $X_\delta(\omega)$ lahko zapišemo v obliki, s katere je razvidna njegova povezava s spektrom zveznega signala $X(\omega)$. Najprej vzorčevalno funkcijo $v_\delta(t)$ razvijemo v Fourierovo vrsto. Vsi Fourierovi koeficienti $V[k]$ so enaki $1/T_{vz}$, zato velja:

$$v_\delta(t) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{vz}t} \quad (3.7)$$

S Fourier transformom δ -vzorčenega signala

$$\begin{aligned} X_\delta(\omega) &= \mathcal{F}\{x_\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)v_\delta(t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{vz}t} \right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

Zamenjamo vrstni red seštevanja in integracije in dobimo:

$$X_\delta(\omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - k\omega_{vz})t}dt = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_{vz}) \quad (3.9)$$

Gornja enačba povezuje spekter zveznega signala s spektrom δ -vzorčenega signala. Vidimo lahko, da se spekter zveznega signala $X(\omega)$ ponavlja v spektru δ -vzorčenega signala $X_\delta(\omega)$ okrog vseh mnogokratnikov vzorčne frekvence.

Do enakega rezultata bi prišli, če bi upoštevali, da dobimo zaradi produkta zveznega signala $x(t)$ z vzorčevalno funkcijo $v_\delta(t)$ v časovnem prostoru konvolucijo spektrov $X(\omega)$ in $V_\delta(\omega)$ v frekvenčnem prostoru:

$$X_\delta(\omega) = X(\omega) * V_\delta(\omega) \quad (3.10)$$

kjer je $V_\delta(\omega)$ spekter vzorčevalne funkcije:

$$V_\delta(\omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_{vz}) \quad (3.11)$$

3.1.2.2 Spektra δ -vzorčenega in diskretnega signala

Spekter δ -vzorčenega signala $X_\delta(t)$ dobimo s Fourier transformom δ -vzorčenega signala $x_\delta(t)$:

$$X_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\delta(t)e^{-j\omega t}dt = \sum_n x[n] e^{-j\omega n T_{vz}} \quad (3.12)$$

Spekter je periodičen po frekvenci ω . Perioda je enaka vzorčni frekvenci ω_{vz} :

$$X_\delta(\omega) = X_\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T_{vz}}\right) = X_\delta(\omega + \omega_{vz}) \quad (3.13)$$

Označimo sedaj spekter diskretnega signala $x[n]$, ki ga računamo po enačbi (1.71), z $X_d(\Omega)$:

$$X_d(\Omega) = \sum_n x[n]e^{-j\Omega n} \quad (3.14)$$

Če primerjamo (3.12) in (3.14), vidimo, da se spektra razlikujeta le v merilu na frekvenčni osi:

$$X_\delta(\omega) = X_d(\omega T_{vz}) \quad (3.15)$$

Frekvenca Ω predstavlja torej pri enakomernem vzorčenju kar frekvenco ω , ki je normirana z vzorčno frekvenco f_{vz} :

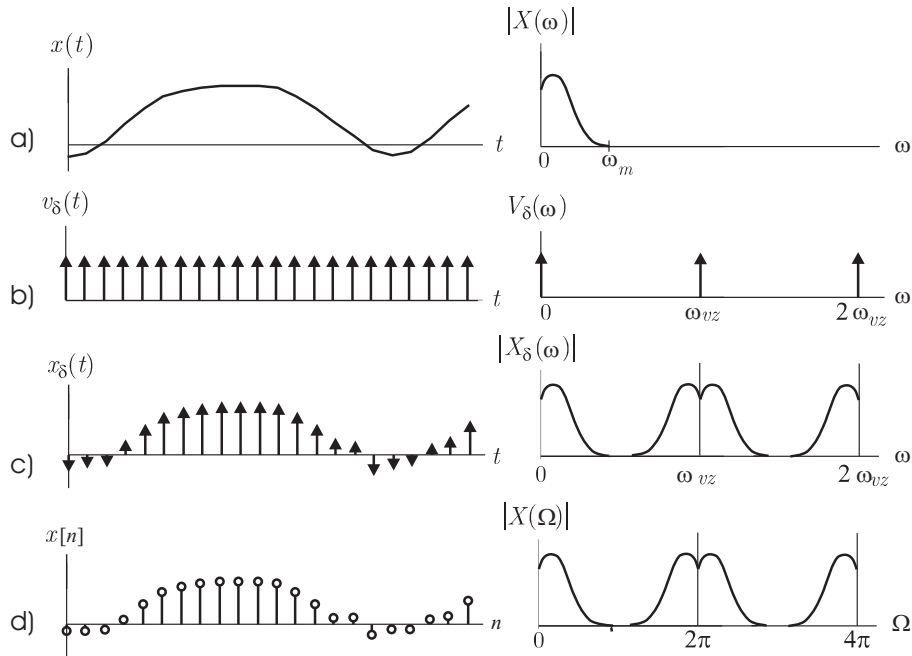
$$\Omega = \omega T_{vz} = \frac{\omega}{f_{vz}} = 2\pi \frac{\omega}{\omega_{vz}} \quad (3.16)$$

3.1.2.3 Prehod od zveznega do diskretnega signala

Če združimo enačbi (3.9) in (3.12), lahko izrazimo spekter diskretnega signala $X_d(\Omega)$ s spektrom analognega signala $X(\omega)$:

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2k\pi}{T_{vz}}\right) \quad (3.17)$$

Prehod od zveznega do diskretnega signala v časovnem in frekvenčnem prostoru je nakazan na sliki 3.3. V zgornjem delu je prikazan segment zveznega nizkopasovnega signala $x(t)$ in njegov spekter $X(\omega)$. Spekter signala je nizkopasoven z mejno frekvenco ω_m . Drugi del slike kaže vzorčevalno funkcijo $v_\delta(t)$ in njen spekter $V_\delta(\omega)$. V tretjem delu je prikazan δ -vzorčen signal kot produkt analognega signala in vzorčevalne funkcije ter njegov spekter, ki je enak konvoluciji med obema spektroma. Na koncu je prikazan še diskretni signal $x[n]$ in njegov spekter $X_d(\Omega)$, ki ga dobimo s spremembo merila na frekvenčni osi.

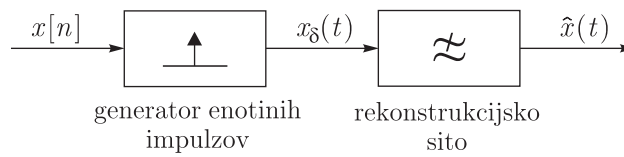


Slika 3.3 – Prehod od zveznega do vzorčenega signala v časovnem in frekvenčnem prostoru: a) zvezni signal, b) vzorčevalna funkcija, c) δ -vzorčeni signal in d) diskretni signal

3.2 Rekonstrukcija zveznega signala

Da bi lahko zvezni signal $x(t)$ popolnoma rekonstruirali iz njegovih vzorcev $x[n]$, morajo ti vzorci vsebovati vso informacijo o zveznem signalu. Če primerjamo spekter analognega signala in spekter diskretnega signala na sliki 3.3, lahko opazimo, da je spekter diskretnega signala v osnovni periodi enak spektru analognega signala. Razlikujeta se le za množilno konstanto $1/T_{vz}$ in v merilu na frekvenčni osi, kot je to razvidno iz enačbe (3.16).

Postopek rekonstrukcije je shematsko prikazan na sliki 3.4. Diskretni signal $x[n]$ najprej s pomočjo generatorja δ -impulzov pretvorimo v δ -vzorčeni signal $x_\delta(t)$. Rekonstruiran signal dobimo tako, da iz signala $x_\delta(t)$ z nizkim sitom, ki ga imenujemo rekonstrukcijsko sito, izsejemo samo osnovno periodo njegovega spektra.



Slika 3.4 – Rekonstrukcija signala

Kadar je osnovna perioda spektra δ -vzorčenega signala enaka spektru analognega signala, bo tudi rekonstruirani signal $\hat{x}(t)$ enak originalnemu signalu $x(t)$. Zgornja predpostavka drži le, kadar je bil analogni signal pred vzorčenjem frekvenčno omejen in smo izbrali dovolj visoko vzorčno frekvenco, da pri vzorčenju ni prišlo do prekrivanja osnovnega spektra s ponovljenimi spektri okrog mnogokratnikov vzorčne frekvence.

3.2.1 Kritično vzorčenje

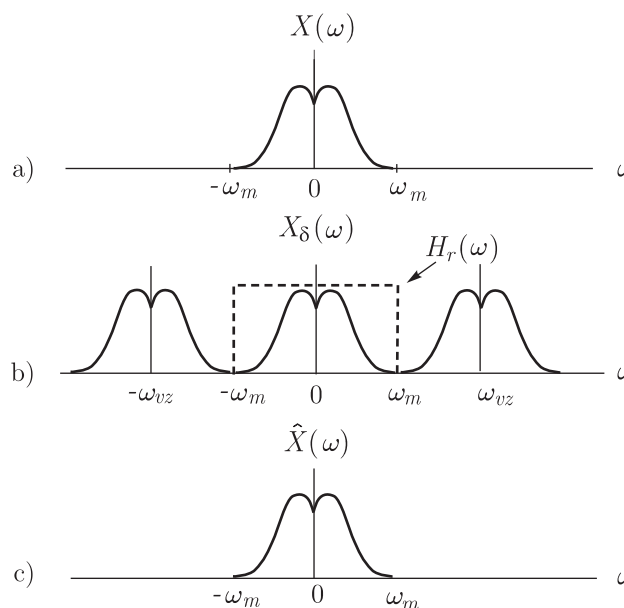
O kritičnem vzorčenju govorimo, kadar je frekvenca vzorčenja ravno dovolj visoka, da ne pride do prekrivanja spektrov, to je, kadar velja:

$$\omega_{vz} = 2\omega_m \quad (3.18)$$

kjer je ω_m označena mejna frekvenca analognega signala, to je najvišja frekvenca, ki nastopa v spektru $X(\omega)$. Da bi lahko iz spektra δ -vzorčenega signala izsejali osnovno periodo spektra, mora imeti rekonstrukcijsko sito frekvenčno karakteristiko idealnega nizkega sita z mejno frekvenco enako polovici vzorčne frekvence in ojačenje enako T_{vz} :

$$H_r(\omega) = \begin{cases} = T_{vz} & ; |\omega| \leq \omega_{vz}/2 \\ = 0 & ; |\omega| > \omega_{vz}/2 \end{cases} \quad (3.19)$$

kot je to prikazano na sliki 3.5.



Slika 3.5 – Rekonstrukcijsko sito pri kritičnem vzorčenju

Oglejmo si sedaj še razmere v časovnem prostoru. Filtriranje z idealnim sitom ponazorimo tako, da spekter δ -vzorčenega signala najprej pomnožimo z množilno konstanto T_{vz} in nato odrežemo vse spektralne komponente nad mejno frekvenco rekonstrukcijskega sita. Rekonstruirani signal $\hat{x}(t)$ je torej enak inverznemu Fourier transformu $T_{vz}X_\delta(\omega)$ v mejah od $-\omega_{vz}/2$ do $\omega_{vz}/2$:

$$\hat{x}(t) = \frac{T_{vz}}{2\pi} \int_{-\omega_{vz}/2}^{\omega_{vz}/2} X_\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.20)$$

V gornjem izrazu nadomestimo $X_\delta(\omega)$ v skladu z (3.12) in zamenjamo vrstni red seštevanja in integracije. Dobimo:

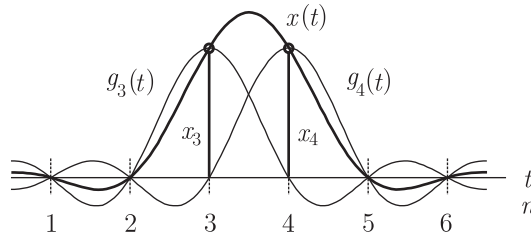
$$\hat{x}(t) = \sum_n x[n] \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_{vz}} - n\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{T_{vz}} - n\right)} \quad (3.21)$$

Vidimo, da lahko filtriranje z rekonstrukcijskim sitom razlagamo tudi kot interpolacijo vrednosti med posameznimi vzorci signala s pomočjo interpolacijske funkcije $g(t)$:

$$g(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T_{vz}}\right)}{\pi\frac{t}{T_{vz}}} = \text{sinc}\left(\pi\frac{t}{T_{vz}}\right) \quad (3.22)$$

Funkcija $g(t)$ predstavlja odziv idealnega nizkega sita na enotin impulz in izraz (3.21) konvolucijo odziva z vzorčenim signalom:

$$\hat{x}(t) = x_\delta(t) * g(t) \quad (3.23)$$



Slika 3.6 – Rekonstrukcija zveznega signala na osnovi vsote odzivov uteženih enotinih impulzov

Na sliki 3.6 je nakazana rekonstrukcija zveznega signala iz diskretnega niza, ki ima le dva vzorca različna od nič. Ker nastopajo ničle interpolacijske funkcije $g(t)$ ravno ob mnogokratnikih vzorčnega intervala nT_{vz} , ob vzorčnih trenutkih nimamo medsebojnega vpliva vzorcev na rekonstruiran signal.

Gornja izvajanja povzema teorem o vzorčenju.

Teorem o vzorčenju. Signal $x(t)$ je mogoče pri enakomernem vzorčenju popolnoma rekonstruirati iz vzorcev signala $x[n]$ le, kadar je signal frekvenčno omejen in je frekvenca vzorčenja večja od dvakratne najvišje frekvence prisotne v signalu. Signal rekonstruiramo s pomočjo idealnega nizkega sita z mejno frekvenco enako polovici vzorčne frekvence, kar je enakovredno interpolaciji z interpolacijsko funkcijo $g(t) = \text{sinc}(\pi(t/T_{vz}))$.

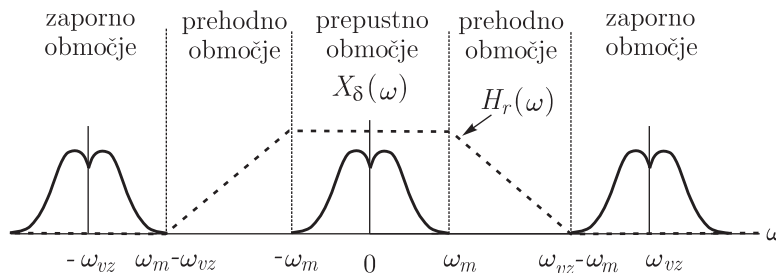
Zavedati se moramo, da idealno sito ni izvedljivo, zato predstavlja teorem o vzorčenju le spodnjo teoretično mejo.

3.2.2 Nadkritično vzorčenje

O nadkritičnem vzorčenju govorimo, kadar je frekvenca vzorčenja višja od kritične vrednosti, ki še zagotavlja, da ne pride do prekrivanja spektrov:

$$\omega_{vz} > 2\omega_m \quad (3.24)$$

V tem primeru ravno tako ne pride do prekrivanja spektrov, vendar pa za rekonstrukcijo ne potrebujemo več idealnega sita. Uporabimo lahko sito s prepustnim območjem $|\omega| \leq \omega_m$, prehodnim območjem $\omega_m < |\omega| < \omega_{vz} - \omega_m$ in zapornim področjem $|\omega| \geq \omega_{vz} - \omega_m$, kot je to prikazano na sliki 3.7.

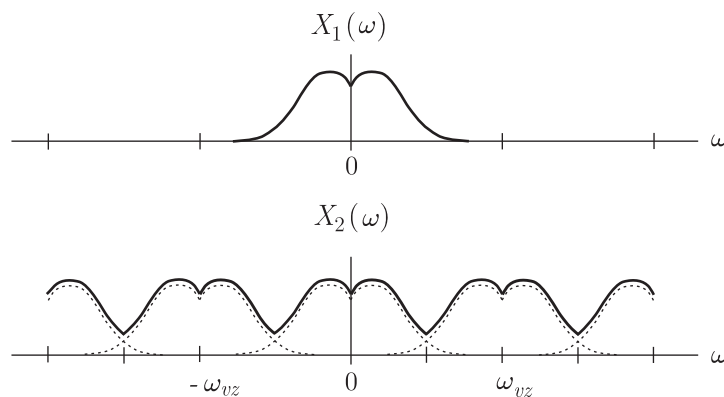


Slika 3.7 – Rekonstrukcijsko sito pri nadkritičnem vzorčenju

Tudi tako rekonstrukcijsko sito ni izvedljivo, vendar se je mogoče z izvedljivimi siti takšni karakteristiki dovolj natančno približati, zato se v praksi večinoma uporablja nadkritično vzorčenje.

3.2.3 Podkritično vzorčenje

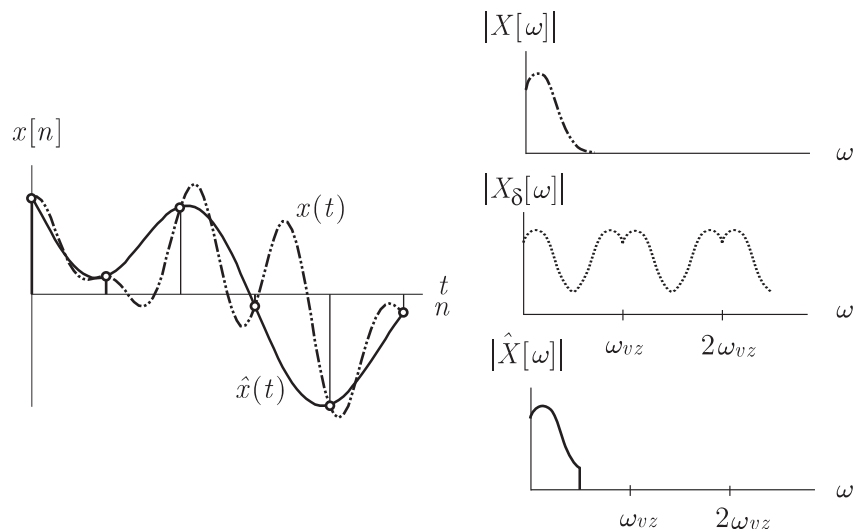
Vzemimo še primer, ko pogoj $\omega_{vz} \geq 2\omega_m$ ni izpolnjen. Mejna frekvenca signala ω_m presega polovico vzorčne frekvence $\omega_{vz}/2$ in govorimo o podkritičnem vzorčenju.



Slika 3.8 – Spektralno prekrivanje oziroma zgibanje zaradi prenizke vzorčne frekvence

Razmere pri rekonstrukciji podvzorčenega signala so prikazane na sliki 3.9.

Vidimo, da ima rekonstruirani signal $\hat{x}(t)$ v vzorčnih trenutkih enake vrednosti kot originalni signal $x(t)$, vendar se potek rekonstruiranega signala med njimi razlikuje od izvirnega. Zaradi prekrivanja spektrov pri vzorčenju spekter rekonstruiranega signala $\hat{X}(\omega)$ ni več enak spektru



Slika 3.9 – Rekonstrukcija signala pri podkritičnem vzorčenju

originalnega signala $X(\omega)$. Obstaja namreč neskončno različnih signalov, ki imajo ob vzorčnih trenutkih enake vrednosti kot originalni signal, pri nizkopasovni rekonstrukciji pa dobimo le tistega, ki je frekvenčno omejen na $\omega_{vz}/2$.

3.3 Spreminjanje vzorčne frekvence

Včasih bi želeli že vzorčenemu signalu spremeniti vzorčno frekvenco. Cilji spreminjanja vzorčne frekvence so lahko:

- prilagajanje vzorčnih frekvenc signalov pri povezavah med sistem,

V sistemih s standardnimi signali imamo standardizirane vzorčne frekvence za vhodne in izhodne signale (govorne, zvočne, slikovne in druge). Pri prehodu signala med dvema različnima sistemoma je zato potrebno prilagoditi vzorčno frekvenco, pri čemer pa bi se želeli izogniti rekonstrukciji in ponovnemu vzorčenju signala. Tak postopek je drag, obenem pa bi zaradi šuma in netočnosti analogno digitalnih in digitalno analognih pretvornikov zmanjšala kakovost signala.

- povečanje učinkovitosti obdelave in

Število potrebnih matematičnih operacij na enoto časa je odvisno od vzorčne frekvence. Pri obdelavi signala lahko to število znatno zmanjšamo, če vzorčno frekvenco sproti prilagajamo pasovni širini signala. Želimo, da je vzorčna frekvenca le malo višja od dvakratne mejne frekvence signala.

- zmanjšanje zahtevnosti sita proti prekrivanju in rekonstrukcijskega sita.

Pred vzorčenjem zveznega signala moramo izločiti neželene signale v frekvenčnem področju nad polovico vzorčne frekvence. Za vzorčenje s frekvenco blizu kritične frekvence pa potrebujemo zahtevna sita z ozkim prehodnim področjem, kot je to razvidno iz slike 3.7. S povečanjem vzorčne frekvence nad kritično frekvenco zmanjšamo zahteve sita proti prekrivanju. V praksi se zato uporabljajo tudi vzorčne

frekvence, ki so za faktor 10 in več višje od kritične frekvence. Frekvenčne komponente, ki naj bi jih sicer zadušilo predsito, moramo potem zadušiti z ustreznim digitalnim sitom, kar pa je običajno ceneje od uporabe zahtevnega analognega sita. Zaradi učinkovite nadaljnje obdelave signala oziroma zaradi večje učinkovitosti pri prenosu in shranjevanju signala moramo potem vzorčno frekvenco zmanjšati na vrednost, ki le malo presega kritično vrednost.

Zahteve za rekonstrukcijsko sito se ekvivalentne zahtevam sita proti prekrivanju. Zato lahko tudi zahtevnost rekonstrukcijskega sita znatno zmanjšamo, če signalu pred rekonstrukcijo povečamo vzorčno frekvenco nad kritično vrednost. Pri predvajalnikih zgoščenk se v ta namen pogosto uporablja štirikratno do osemkratno zvišanje vzorčne frekvence pred rekonstrukcijo signala.

Z opuščanjem vzorcev lahko vzorčno frekvenco zmanjšamo za celoštevilčen faktor. Postopek imenujemo decimacija. Z računanjem vmesnih vzorcev lahko vzorčno frekvenco povečamo za celoštevilčni faktor. Ta postopek imenujemo interpolacija. S kombinacijo obeh postopkov lahko dosežemo spremembe vzorčne frekvence za racionalen faktor.

3.3.1 Decimacija

Frekvenco vzorčenja lahko znižamo za celoštevilčni faktor D tako, da na vsakih D vhodnih vzorcev opustimo $D - 1$ vzorcev. Signal, ki ga dobimo po opuščanju vzorcev je enak kot signal, ki bi ga dobili, če bi analogni signal že v začetku vzorčili z D -krat nižjo frekvenco. To lahko naredimo brez škode le, če tudi nova vzorčna frekvenca ustreza zahtevam teorema o vzorčenju:

$$\omega_{vz2} = \frac{\omega_{vz1}}{D} \geq 2\omega_m \quad (3.25)$$

kar pomeni, da mora biti signal pred decimacijo vsaj za faktor D prevzorčen. Faktor decimacije je:

$$D = \frac{\omega_{vz1}}{\omega_{vz2}} \quad (3.26)$$

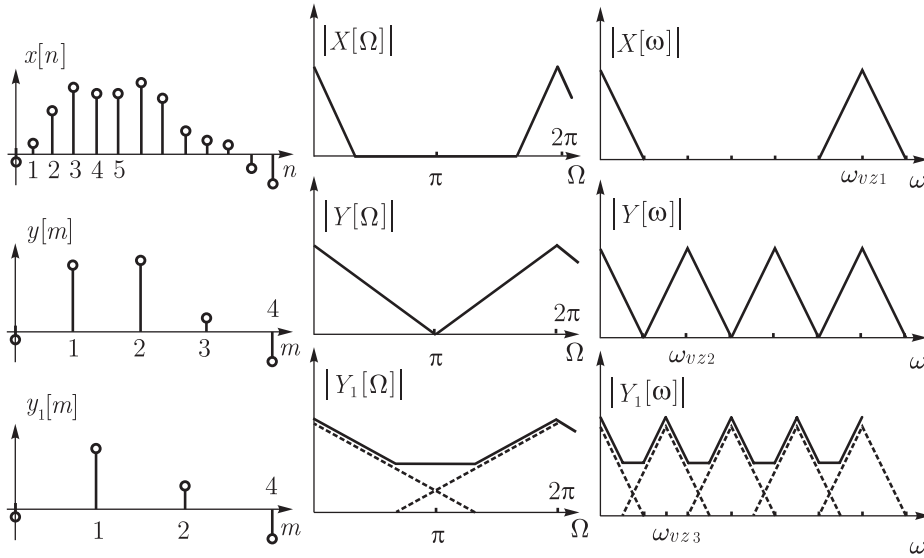
Ker temelji postopek na izpuščanju vzorcev osnovnega niza je lahko faktor decimacije D le naravno število. Kot največjo vrednost D smemo vzeti največje naravno število, ki še zadovoljuje pogoj (3.25):

$$D = \left\lfloor \frac{\omega_{vz1}}{2\omega_m} \right\rfloor \quad (3.27)$$

Iz osnovnega niza $x[n]$ dobimo decimirani niz $y[m]$:

$$y[m] = x[Dm] \quad (3.28)$$

Razmere pri decimaciji signala, vzorčenega s trikratno kritično frekvenco, so prikazane na sliki 3.10. Zgoraj (slika 3.10-a) je prikazan osnovni niz, v sredini (slika 3.10-b) s faktorjem decimacije $D = 3$ decimiran niz in spodaj (slika 3.10-c) niz pri decimaciji s faktorjem $D = 4$. Vidimo, da ostane pri decimaciji $D = 3$, ki izpolnjuje pogoj (3.27), osnovni spekter v odvisnosti od frekvence ω nespremenjen. Če pa ga opazujemo v odvisnosti od normirane frekvence Ω , se ta zaradi spremembe vzorčne frekvence navidezno razširi. Ker pri faktorju $D = 4$ pogoj (3.27) ni več izpolnjen, pride do prekrivanja spektrov, zato se spekter decimiranega signala razlikuje od spektra osnovnega signala.



Slika 3.10 – Decimacija: a) osnovni niz b) decimirani niz, $D = 3$ c) decimirani niz $D = 4$

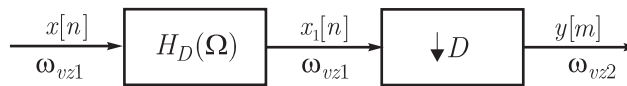
Da ne bi prišlo do prekrivanja, lahko zmanjšamo vzorčno frekvenco šele potem, ko smo omejili pasovno širino signala pod mejno vrednost:

$$\omega_m \leq \frac{\omega_{vz2}}{2} \quad (3.29)$$

zato v decimacijski sistem pred decimacijo z izpuščanjem vzorcev vključimo diskretno nizko sito $H_D(\Omega)$ proti prekrivanju z mejno frekvenco:

$$\Omega_m = 2\pi \frac{\omega_m}{\omega_{vz1}} \leq 2\pi \frac{\omega_{vz2}}{2 \omega_{vz1}} = \frac{\pi}{D} \quad (3.30)$$

kot je to prikazano na sliki 3.11.



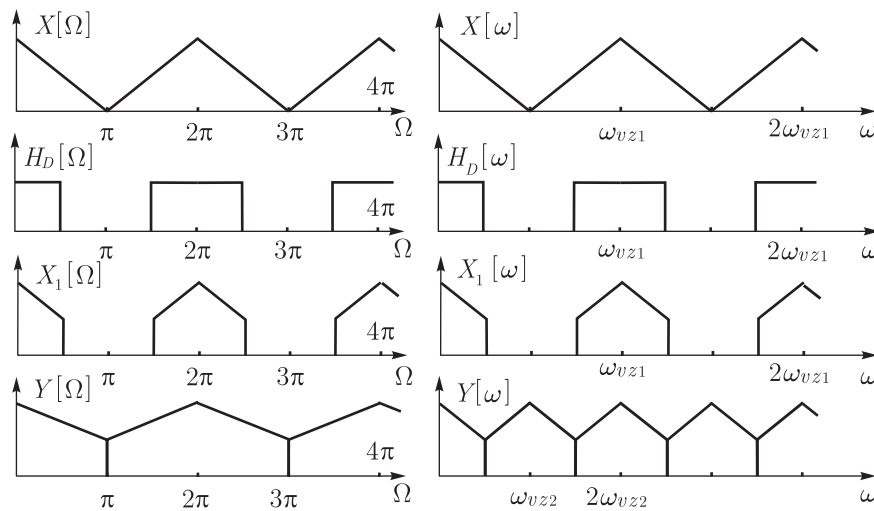
Slika 3.11 – Decimacija s sitom proti prekrivanju

Na ta način ostane osnovni spekter signala do kritične mejne frekvence nespremenjen na račun izgube spektralnih komponent osnovnega signala, ki presegajo kritično mejno frekvenco. Spekter osnovnega signala, idealizirana prevajalna funkcija sita proti prekrivanju in spektra signalov po filtriranju in decimaciji so prikazani na sliki 3.12.

3.3.2 Interpolacija

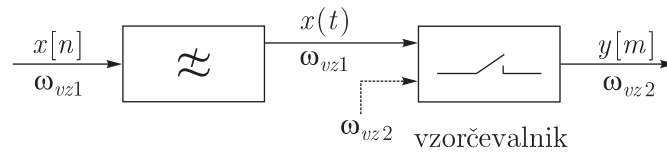
Interpolacija je dualna operacija decimaciji. Z njo povečamo vzorčno frekvenco izhodnega signala. Povečanje vzorčne frekvence je določeno z interpolacijskim faktorjem I . Dvema sosednjima vzorcema osnovnega niza določimo $I - 1$ vmesnih vzorcev. Postopek ustreza vrivanju $I - 1$ vmesnih vzorcev med vzorce osnovnega niza. Interpolacija na tej osnovi omogoča le celoštevilčne interpolacijske faktorje.

$$I = \frac{\omega_{vz2}}{\omega_{vz1}} \quad (3.31)$$



Slika 3.12 – Spektri signalov pri decimaciji s filtrom proti prekrivanju

Interpolacijo z interpolacijskim faktorjem I si lahko razlagamo z zaporedno vezavo enote za rekonstrukcijo zveznega signala in vzorčevalnika z vzorčno frekvenco ω_{vz2} . Če je osnovni signal kritično vzorčen, je interpolirani signal prevzorčen. Na sliki 3.13 je predstavljen interpolacijski sistem z vmesno rekonstrukcijo zveznega signala.



Slika 3.13 – Interpolacijski sistem na osnovi rekonstrukcije zveznega signala

Na sliki 3.14 so prikazani signali, ki nastopijo pri interpolaciji z vmesno rekonstrukcijo in njihovimi spektri pri interpolacijskem faktorju $I = 3$. Pasovna širina signala oziroma mejna frekvenca ω_m se s faktorjem I ne spreminja. Spekter signala pri normirani frekvenci Ω se zožuje s faktorjem I zaradi spremembe vzorčne frekvence.

Interpolacija z vmesno rekonstrukcijo analognega signala in ponovnim vzorčenjem ni smiselna, saj lahko signal interpoliramo neposredno z digitalnim nizkim sitom, ki deluje z vzorčno frekvenco ω_{vz2} . Interpolacijski sistem z interpolatorjem ničelnih vzorcev I in digitalnim interpolacijskim sitom $H_I(\Omega)$ je prikazan na sliki 3.15.

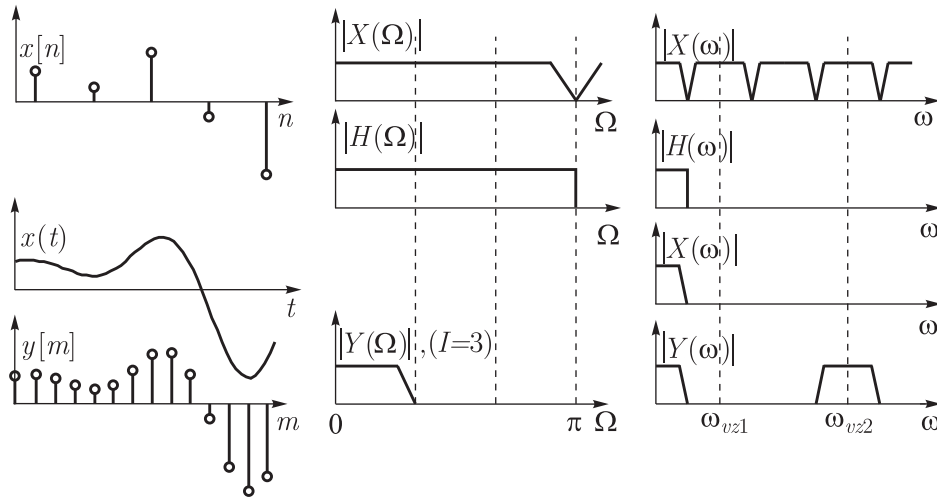
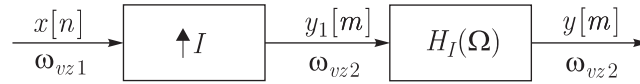
Vhodni signal je niz $x[n]$ z vzorčno frekvenco ω_{vz1} . Ker deluje interpolacijsko sito z I krat višjo vzorčno frekvenco, vrinemo med dva vzorca osnovnega niza $I - 1$ ničelnih vzorcev. Dobimo niz $y_1[m]$:

$$y_1[m] = \begin{cases} x[n] & ; \quad m = nI \\ 0 & ; \quad m \neq nI \end{cases} \quad (3.32)$$

Signali v časovnem prostoru z ustreznimi spektri v odvisnosti od frekvence ω in normirane frekvence Ω so prikazani na sliki 3.16.

Spekter signala se zaradi vrivanja ničelnih vzorcev ne spremeni, zato velja:

$$Y_1(\omega) = X(\omega)$$

Slika 3.14 – Primerjava spektra osnovnega vzorčenega signala in signala interpoliranega s faktorjem $I = 3$ 

Slika 3.15 – Interpolacijski sistem z digitalnim sitom

Pri normirani frekvenci pa se spekter zaradi spremembe vzorčne frekvence zoži, kar ustreza:

$$Y_1(\Omega) = X(I\Omega)$$

Digitalno sito z mejno frekvenco $\omega_m = \omega_{vz1}/2$ oziroma $\Omega_m = \pi/I$ (interpolacijsko sito), interpolira vrednosti vrinjenih vzorcev. Ker deluje interpolacijsko sito z vzorčno frekvenco ω_{vz2} , je njegova prevajalna funkcija periodična s periodo ω_{vz2} . V spektru signala na izhodu interpolacijskega sita $Y(\omega)$ je zato le vsaka I -ta ponovitev osnovnega spektra. Dobimo enak signal, kot pri interpolaciji z vmesno rekonstrukcijo analognega signala (glej sliko 3.14).

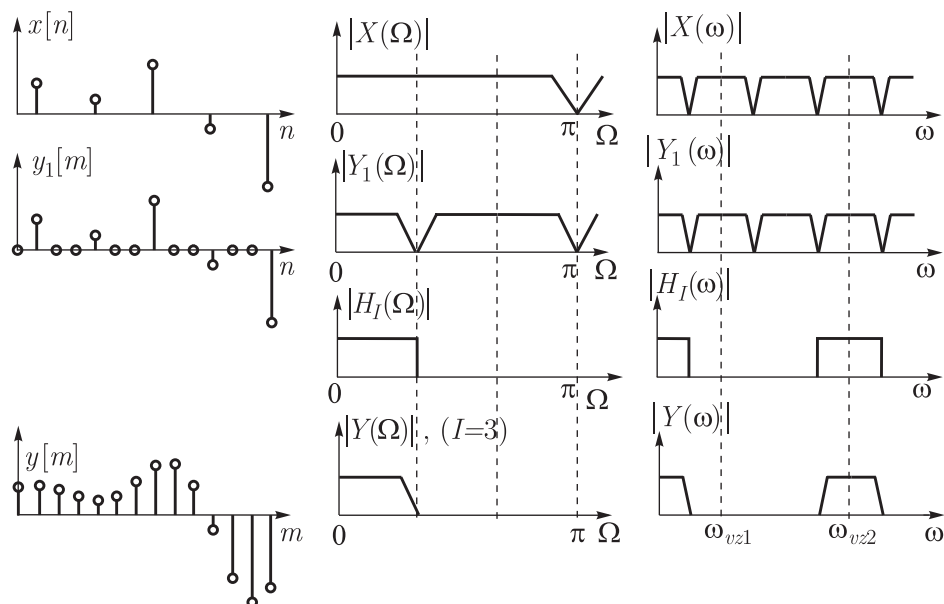
3.3.3 Decimacija in interpolacija za racionalen faktor

Vzemimo, da želimo spremeniti vzorčno frekvenco za racionalen faktor K :

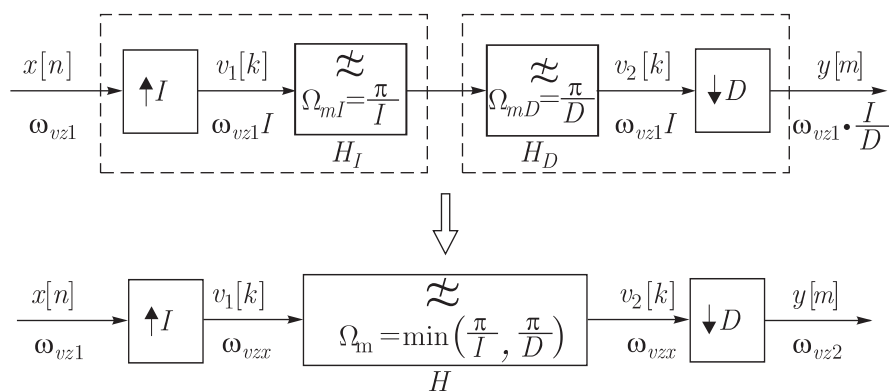
$$\frac{\omega_{vz2}}{\omega_{vz1}} = K = \frac{I}{D} \quad (3.33)$$

Kadar vzorčno frekvenco zmanjšamo ($K < 1$) govorimo o decimaciji in kadar jo povečamo ($K > 1$) o interpolaciji. Sistem realiziramo kot zaporedno vezavo interpolatorja s faktorjem I in decimatorja s faktorjem D . Interpolator vključuje vrivanje ničel in nizko sito z mejno frekvenco $\Omega_{mI} = \pi/I$, ki interpolira vrednosti vrinjenih vzorcev. Interpolirani niz moramo nato frekvenčno omejiti, da pri decimaciji ne nastopi zgibanje spektra. Zato potrebujemo nizko sito z mejno frekvenco $\Omega_{mD} = \pi/D$. Pri zaporedni vezavi dveh nizkih sit ohranimo le nizko sito z ožjo pasovno širino. To je pri $K < 1$ protizgibno sito in pri $K > 1$ interpolacijsko sito. Sistem je prikazan na sliki 3.17.

Kadar je faktor decimacije ali interpolacije iracionalen, lahko rešujemo problem s približnim racionalnim faktorjem ali pa z vmesno interpolacijo analognega signala. Znane so tudi druge aproksimacijske metode z interpolacijo med sosednjimi vzorci.



Slika 3.16 – Signali in njihovi spektri pri interpolaciji



Slika 3.17 – Sistem decimacije z racionalnim faktorjem

4 Diskretna sita

Omenili smo že, da predstavljajo diskretni LČN sistemi frekvenčna sita (filtre), ki določene frekvence signala prepuščajo, druge pa slabijo.

Diskretna sita običajno uporabljamo pri obdelavi diskretnih signalov, ki smo jih dobili z vzorčenjem analognega signala. Po obdelavi signal zopet pretvorimo v analogen signal. Pri načrtovanju frekvenčne karakteristike diskretnega sita moramo zato upoštevati frekvenčno skaliranje, ki nastopi pri vzorčenju signalov.

Frekvenčna karakteristika diskretnega sita $H(\Omega)$ je določena z njegovo prevajalno funkcijo v prostoru z , saj velja

$$H(\Omega) = H_z(e^{j\Omega}) \quad (4.1)$$

Prevajalne funkcije $H(z)$ ne moremo poljubno izbirati, ker vse funkcije z realnimi sistemi niso ustvarljive. V načrtovanju diskretnih sit zato ločimo dve fazi:

1. izbira ustrezne strukture sita, ki omogoča izvedbo sita ob določenih robnih pogojih, ki jih določajo zahtevane lastnosti, računska zmogljivost in cena vezij in
2. iskanje ustrezne prevajalne funkcije $H(z)$, ki čimbolj ustreza želeni karakteristiki sistema in je izvedljiva z izbrano strukturo sita.

Kot smo ugotovili že v razdelku 2.2.6, opisuje izvedljive diskretne sisteme diferenčna enačba (2.63), ki jo zaradi večje preglednosti ponovno navajamo:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^M a_i y[n-i] \quad (4.2)$$

Naredimo transform $\mathcal{Z}$ na obeh straneh zgornje, enačbe preuredimo in dobimo:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad (4.3)$$

Vidimo, da delež preteklih vhodnih vzorcev določa ničle, delež izhodnih vzorcev pa pole prevajalne funkcije. Na tej osnovi ločimo dva osnovna tipa diskretnih sit:

- sita, pri katerih je izhodni vzorec $y[n]$ odvisen le od vhodnih vzorcev $(x[n-i] ; i \geq 0)$ in so vsi koeficienti a_i enaki 0. V prevajalni funkciji sita nastopajo le ničle pri vrednostih $z \neq 0$, vsi poli pa so pri vrednosti $z = 0$. Taka sita imajo končno trajanje odziva na enotin impulz (FIR - Finite Impulse Response).

- sita pri katerih je izhodni $y[n]$ odvisen tudi od preteklih izhodnih vzorcev ($y[n-i]$; $i > 0$), pri čemer je vsaj po en koeficient a_i in b_i različen od nič. V prevajalni funkciji sita nastopajo tudi poli pri $z \neq 0$. Taka sita imajo neskončno trajanje odziva na enotin impulz (IIR - Infinite Impulse Response).

V izrazu (4.2) nastopajo naslednje računske operacije:

- seštevanje dveh vzorcev,
- množenje vzorca s konstanto in
- zakasnitev vzorca za i časovnih intervalov.

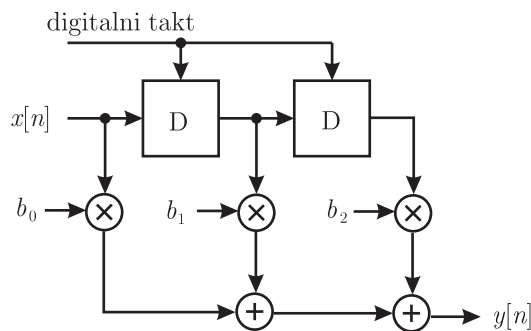
Operacije lahko izvedemo s pomočjo vezja, ki vsebuje seštevvalnike, množilnike in zakasnilne celice. S preurejanjem osnovne enačbe (4.2) oziroma njenega transforma (4.3) lahko dobimo različne strukture vezij. Pojavlja se vprašanje, katera izvedba je boljša ali celo optimalna. Optimalnost ugotavljamo preko obsega zahtevanih vezij in odstopanj od idealnih lastnosti zaradi vpliva zaokroževanja koeficientov in rezultatov, kot je to nujno pri praktični izvedbi vezja, kar bomo natančneje obravnavali v poglavju 7. Različne strukture diskretnih sit običajno prikazujemo v diagramu pretoka signala.

4.1 Diagram pretoka signala

V diagramu pretoka signala prikazujemo strukturo diskretnega vezja. Najlažje si ogledamo diagram pretoka na enostavnem zgledu. Vzemimo sito FIR s tremi koeficienti:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] \quad (4.4)$$

Izvedemo ga lahko s pomočjo vezja na sliki 4.1. Vhodni signal $x[n]$ pripeljemo na vhod pomikalnega registra. Pomikalni register sestavlja veriga D celic. D celica zadrži vrednost za en časovni interval, tako, da je na njenem izhodu vrednost, ki je bila na vhodu v prejšnjem vzorčnem intervalu. Izhodni signal dobimo tako, da trenutni vzorec pomnožimo s koeficientom b_0 , za en časovni interval zakasnjjen vzorec s koeficientom b_1 in za dva časovna intervala zakasnjjen vzorec s koeficientom b_2 . Izhodni vzorec dobimo s seštevanjem dobljenih vrednosti. Ustrezno vezje je prikazano na sliki 4.1

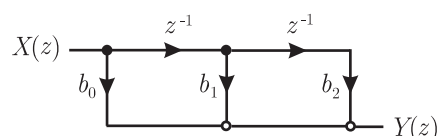


Slika 4.1 – Izvedba FIR sita s tremi koeficienti

Strukturo vezja lahko bolj pregledno prikažemo v diagramu pretoka signala. Najprej naredimo transform $\mathcal{Z}$ na obeh straneh enačbe (4.4) in izraz preuredimo:

$$Y(z) = X(z)b_0 + X(z)z^{-1}b_1 + X(z)z^{-1}z^{-1}b_2 \quad (4.5)$$

V zgornji enačbi nastopajo samo seštevanja in množenja. Zakasnitev za en časovni interval se namreč pri transformaciji preslika v množenje z z^{-1} . Ustrezen diagram pretoka signala je prikazan na sliki 4.2. Zakasnilne celice so označene z operatorjem zakasnitve z^{-1} nad puščico,



Slika 4.2 – Diagram pretoka signala FIR sita s tremi koeficienti

ki kaže smer signala. Množilniki so ponazorjeni s puščico in vrednostjo koeficienta. V vezju so uporabljeni le dvovhodni seštevalniki, ki so ponazorjeni s praznim krogcem. Cepljenje signala je predstavljeno s polno črno piko. V diagramu lahko, zaradi enostavnosti, tudi seštevalnike predstavimo s polno črno piko. Seštevalnike in razcepišča potem ločujemo po smeri puščic v vejah diagrama.

Diagram pretoka signala prikazuje strukturo vezja, vendar ne določa njegove izvedbe. Vezje določene strukture lahko izvedemo z uporabo seštevalnikov, množilnikov in zakasnilnih celic, kot je to prikazano na sliki 4.1, ali pa ga izvedemo programsko na signalnem procesorju. V prvem primeru lahko iz diagrama razberemo število posameznih elementov, ki jih mora vsebovati vezje, v drugem primeru pa lahko iz diagrama razberemo, koliko računskih operacij mora opraviti procesor v časovnem intervalu med dvema vzorcema in koliko pomnilnika potrebuje za shranjevanje podatkov. Za vsako zakasnilno celico in za vsak koeficient potrebujemo namreč svojo pomnilniško lokacijo. Običajno potrebujemo še nekaj dodatnih pomnilniških lokacij za shranjevanje vmesnih rezultatov, kar pa je že odvisno od same izvedbe programa. V programskem jeziku Pascal, bi bil program videti nekako takole:

```
{Nastavitev koeficientov sita}
b0 := 0.5;
b1 := -0.5;
b2 := 0.5;

{Inicializacija začetnih vrednosti}
X0:=0;
X1:=0;

{Zanka v kateri se izvaja program}
Repeat
  {zajem vhodnega vzorca iz vhodne enote}
  Read (Input, X);
```

```

{Pomik vzorcev v pomikalnem registru}
X2 := X1
X1 := X0;
X0 := X;

{Računanje izhodnega vzorca}
Y := b0 * X0
Y := Y + b1 * X1;
Y := Y + b2 * X2;

{Predaja novega vzorca izhodni enoti}
Write (output, Y):
Until False;

```

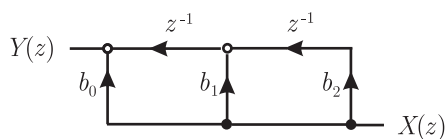
Zgornji izsek iz programske kode je napisan tako, da vsaka vrstica odraža operacijo, ki jo zmore večina signalnih procesorjev izvesti v enem koraku, obenem pa koda neposredno odraža strukturo prikazano v diagramu pretoka signala. Program ni napisan optimalno, kajti v resnici lahko pomikalni register izvedemo brez dejanskega prepisovanja vrednosti in na ta način prihranimo precejšnje število operacij.

4.1.1 Transpozicija diagrama pretoka signala

Diagram poteka signala diskretnega sita z enim vhodom in enim izhodom lahko spremenimo v transponirano obliko. Ustrezno vezje ima enako prevajalno funkcijo kot vezje, iz katerega smo izhajali. Upoštevati moramo naslednja pravila:

- spremenimo smer pretoka v vseh vejah,
- vsa razcepna vozlišča originalnega vezja postanejo seštevalna vozlišča transponirane izvedbe,
- vsa seštevalna vozlišča originalnega vezja postanejo razcepna vozlišča transponirane izvedbe,
- mesti vhodne in izhodne sponke se zamenjata pri prehodu iz originalnega v transponirano vezje.

Diagramu s slike 4.2 transponiran diagram pretoka signala je prikazan na sliki 4.3



Slika 4.3 – Diagramu s slike 4.2 transponiran diagram pretoka signala

4.2 Strukture diskretnih sit

Omenili smo že, da lahko za izvedbo diskretnega sita uporabimo različne strukture. Izhajamo iz zapisa osnovne funkcije $H(z)$, ki jo preuredimo po različnih postopkih, ki ustrezajo različnim načinom vezav posameznih podvezij. Naj naštejemo le nekaj osnovnih:

- Kaskadna vezava: Funkcijo $H(z)$ razstavimo v produkt več funkcij. Vzemimo produkt dveh členov:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (4.6)$$

Vezje bo sestavljeno iz kaskadne, zaporedne vezave dveh vezij, ki bosta imeli prevajalni funkciji $H_1(z)$ in $H_2(z)$, kot je to prikazano na sliki 2.6.

- Vzporedna vezava: Funkcijo $H(z)$ razstavimo v vsoto več členov. Za zgled razstavimo na dva člena:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad (4.7)$$

Vezje vsebuje dve vzporedni veji, ki imata prevajalni funkciji $H_1(z)$ in $H_2(z)$. Vezava je prikazana na sliki 2.7.

- Vezava s povratnim sklopom: Prevajalno funkcijo $H(z)$ izrazimo s prevajalnima funkcijama $H_1(z)$ in $H_2(z)$, tako da velja:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (4.8)$$

V celotnem vezju bo vezje s prevajalno funkcijo $H_2(z)$ nastopalo v povratni vezavi, kot je to prikazano na sliki 2.8.

- Transponirana vezava: Strukturno diskretnega vezja, ki je podana z diagramom pretoka signala, lahko pretvorimo v transponirano izvedbo.

Zgornji postopki predstavljajo le osnovne možnosti. Uporabimo lahko tudi kombinacije teh postopkov nad celotno prevajalno funkcijo ali pa na njenih posameznih delih. Na ta način lahko pridemo do zelo različnih struktur vezij.

4.2.1 Direktna struktura

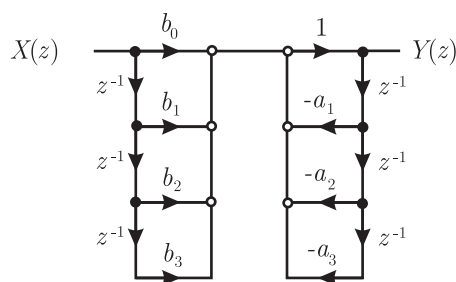
Direktno strukturo časovno diskretnega sita dobimo, če izhajamo neposredno iz enačbe (4.3), ki jo zapišemo v obliki:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i X(z) z^{-i} - \sum_{i=1}^M a_i Y(z) z^{-i} \quad (4.9)$$

Za primer $N = 3$, $M = 3$ dobimo:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) &= X(z)b_0 + X(z)z^{-1}b_1 + X(z)z^{-2}b_2 + X(z)z^{-3}b_3 + \\
 &\quad + Y(z)z^{-1}(-a_1) + Y(z)z^{-2}(-a_2) + Y(z)z^{-3}(-a_3) = \\
 &= X(z)(b_0 + z^{-1}(b_1 + z^{-1}(b_2 + z^{-1}b_3))) + \\
 &\quad + Y(z)z^{-1}(-a_1 + z^{-1}(-a_2 + z^{-1}(-a_3)))
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Diagram pretoka signala, ki ustreza gornji enačbi, je prikazan na sliki 4.4.



Slika 4.4 – Direktna struktura

4.2.2 Direktna struktura I in II

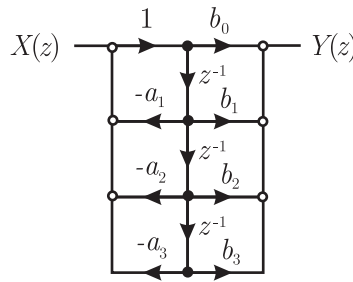
Bolj učinkovito strukturo dobimo, če razstavimo osnovni izraz za $H(z)$ v produkt dveh členov, kar ustreza serijski vezavi dveh podsit. H_1 predstavlja prevajalno funkcijo, ki ima le ničle. Funkcija $H_2(z)$ pa ima le pole.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\
 H_1(z) &= N(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \\
 H_2(z) &= \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vezava na sliki 4.4 je temeljila na serijski vezavi $H_1(z)$ in $H_2(z)$. Zamenjamo vrstni red obeh podsit in ugotovimo, da vzporedna vezava dveh nizov zakasnilnih celic ni potrebna in lahko en niz opustimo. Dobljeno strukturo imenujemo direktna struktura II in je prikazana na sliki 4.5.

Glede na direktno strukturo na sliki 4.4 imamo pri direktni strukturi II pol manj zakasnilnih celic. Izvedena struktura ustreza diferenčni enačbi, ki pa jo neposredno ne ponazarja. Ustrezne diferenčne enačbe lahko dobimo, če uvedemo vmesni signal $W(z)$.

$$\begin{aligned}
 W(z) &= X(z)H_2(z) \\
 Y(z) &= W(z)H_1(z)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$



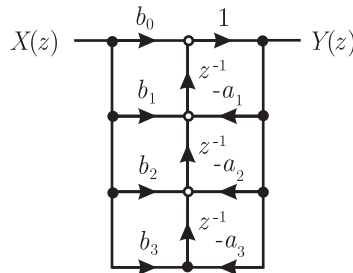
Slika 4.5 – Direktna struktura II

Zgornjim enačbam v prostoru z ustrežata diferenčni enačbi:

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n] - \sum_{i=1}^M a_i w[n-i] \\ y[n] &= \sum_{i=1}^N b_i w[n-i] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Struktura kaže rekurzivni značaj pri določevanju vmesnega signala, medtem ko je izhodni signal $y[n]$ le linearna kombinacija vmesnih vzorcev.

Direktni strukturi II lahko določimo transponirano strukturo. Dobimo direktno strukturo I, ki je podana na sliki 4.6.



Slika 4.6 – Direktna struktura I

Direktni strukturi I in II sta primera kanoničnih struktur, ki na splošno omogočajo realizacijo določene systemske funkcije z najmanjšim številom zakasnilnih celic, seštevalnikov in množilnikov. Če predpostavimo, da je $N = M$, kar je često primer pri IIR sitih, potrebujemo za kanonično strukturo z $N + 1$ koeficienti (to je strukturo reda N):

- N zakasnilnih celic,
- $2N$ seštevalnikov (pri seštevalnikih predvidevamo dva vhoda in en izhod, za seštevalna vozlišča z več vhodi rabimo več elementarnih seštevalnikov) in
- $2N + 1$ množilnikov.

4.2.3 Kaskadna vezava

S faktorizacijo izraza $H(z)$ dobimo prevajalne karakteristike posameznih celic, ki jih vežemo zaporedno. Najpogosteje zapišemo izraz kot produkt ulomkov drugega reda. Na ta način dosežemo

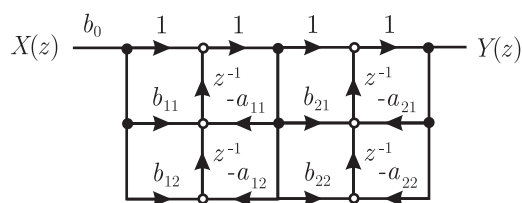
manjšo občutljivost sita na zaokroževanje koeficientov, kar bomo natančneje obravnavali v 7. poglavju.

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (4.14)$$

kjer so

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (4.15)$$

Uporabimo lahko kaskadno vezavo direktne strukture I ali II. Ker sta obe kanonični, porabimo za obe verziji enako število gradnikov. Načelna vezava z direktno strukturo I pri $L = 2$ je prikazana na sliki 4.7.



Slika 4.7 – Kaskadna vezava podsit

Načeloma je mogoče faktorizirati tudi prevajalne funkcije $H(z)$ sit FIR, vendar s tem ničesar ne pridobimo, zato se kaskadna vezava uporablja predvsem pri sitih IIR.

4.2.4 Vzporedna vezava

Izraz $H(z)$ lahko razvijemo v parcialne ulomke. Če želimo, da so pri kompleksnih vrednostih polov in ničel koeficienti realni, moramo združevati kompleksno konjugirane dvojice polov in ničel v podsitih drugega reda. V splošnem dobimo naslednjo razvrstitev:

$$H(z) = \sum_{i=1}^L \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (4.16)$$

Poli posameznih podsit predstavljajo tudi pole celotnega sita, ničle podsit pa v splošnem niso tudi ničle celotnega sita.

Lastnosti sita z vzporedno vezanimi podsiti ne odstopajo od lastnosti sita v direktni strukturi, če nimamo zaokroževanja koeficientov in vmesnih rezultatov. Z ozirom na zaokroževanje je kaskadna vezava ugodnejša od vzporedne.

4.2.5 Druge strukture

Poleg omenjenih struktur je mogoče tvoriti tudi drugačne strukture, ki imajo lahko, glede na namen njihove uporabe, določene prednosti pred opisanimi strukturami.

Polifazna sita, ki so sestavljena iz vzporedno vezanih sit z različnimi faznimi karakteristikami, predstavljajo poseben primer vzporedne vezave. V kombinaciji z decimacijo, ki je natančneje opisana v 3. poglavju, omogočajo ta sita učinkovito izvedbo nekaterih vrst naborov sit.

Določene strukture lahko odražajo fizikalno ozadje nastanka signalov, ki jih obdelujemo. Primer take strukture so tako imenovana valovna sita, ki jih poznamo tudi v analognih izvedbah.

Posebno zvrst sit predstavljajo sita, ki so namenjena adaptivni obdelavi signalov. Takim sitom sproti spreminjamo koeficiente tako, da njihovo delovanje prilagajamo okolju v katerem trenutno delujejo. V ta namen lahko uporabljamo strukture, ki omogočajo izvedbo učinkovitejših algoritmov za prilagajanje. Primer take strukture so tako imenovana lestvičasta sita (angl.: lattice filter).

Natančnejši opis vseh teh in drugih alternativnih struktur sit presega obseg te knjige.

4.3 Načrtovanje prevajalne funkcije diskretnih sit

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da dobimo različne strukture diskretnih sit z ustrezno preureditvijo zapisa prevajalne funkcije $H(z)$.

V tem razdelku si bomo ogledali, kako načrtujemo prevajalno funkcijo $H(z)$, ki čim bolj ustreza podanim zahtevam. Pri načrtovanju moramo upoštevati določene omejitve, predvsem omejitve glede kompleksnosti, ki neposredno vplivajo tudi na ceno. Na ceno najbolj vpliva število računskih operacij, ki jih moramo opraviti v časovni enoti in število pomnilniških celic, ki jih potrebujemo za izvedbo sita. Oboje je neposredno odvisno od reda (dolžine) sita, zato se pri načrtovanju običajno trudimo, da bi izpolnili zahteve s sitom čim nižjega reda.

Z ozirom na ničle in pole v prevajalni funkciji sita smo ločili sita s končnim odzivom FIR in sita z neskončnim odzivom IIR. Pristop k načrtovanju prevajalne funkcije se pri obeh vrstah sit precej razlikuje, zato se moramo najprej odločiti za vrsto sita. Odločamo se z ozirom na njune lastnosti:

- Sita FIR

1. Dolžina odziva je za ena daljša od reda sita (število zakasnilnih elementov), zato je načeloma potreben višji red sita kot pri sitih IIR.
2. V prevajalni funkciji FIR sita nastopajo samo ničle pri vrednostih različnih od nič, zato FIR sita ne morejo biti nestabilna.
3. FIR sita lahko načrtujemo tako, da imajo linearno fazo. Vezja z linearno fazo ne vnašajo faznih popačenj.

- Sita IIR

1. Odziv sita je pri končnem redu sita neskončno dolg. Načeloma so zato vezja pri danih zahtevah nižjega reda kot pri sitih FIR.
2. IIR vezja so lahko nestabilna. To je problematično predvsem, kadar spreminjamo koeficiente sita med samim delovanjem v odvisnosti od okolja, v katerem deluje.
3. Stabilna IIR sita ne morejo imeti linearne faze.
4. Manjše število koeficientov povečuje zahtevnost po natančnosti zapisa koeficientov, zaokroževanje rezultatov pa lahko povzroča večje težave kot pri sitih FIR.

4.4 Načrtovanje sit s končnim odzivom - FIR

4.4.1 Sistemska in prevajalna funkcija sita FIR

V razdelku 2.1.2 smo definirali sistemsko funkcijo LČN sistema kot odziv sistema na enotin impulz. Odziv sita FIR dobimo, če v enačbi (4.2) postavimo vse $a_i = 0$:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i] \quad (4.17)$$

Sistemsko funkcijo dobimo tako, da signal $x[n]$ na vhodu sistema nadomestimo z enotnim impulzom $\delta[n]$. Dobimo:

$$h[n] = \sum_{i=0}^N b_i \delta[n-i] \quad (4.18)$$

Ker je $\delta[n-i]$ različen od 0 le pri $n = i$, dobimo:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & ; \quad 0 \leq n \leq N \\ 0 & ; \quad \text{drugače} \end{cases} \quad (4.19)$$

Vidimo, da koeficienti b_n neposredno določajo odziv sita FIR na enotin impulz, dolžina odziva pa je kar enaka redu sita N .

Prevajalna funkcija sita FIR je potem enaka:

$$H_z(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad (4.20)$$

Če v zgornji izraz vstavimo $z = e^{j\Omega}$, dobimo frekvenčno karakteristiko sita:

$$H(\Omega) = H_z(e^{j\Omega}) = \sum_{i=0}^N b_i e^{-j\Omega i} \quad (4.21)$$

4.4.2 Sita z linearnim faznim potekom

Sita FIR moremo načrtovati tako, da imajo linearen fazni potek. Pri prehodu skozi sito so tedaj vse frekvenčne komponente signala enako zakasnjene, zato taka sita ne vnašajo faznih popačenj. V splošnem lahko prevajalno funkcijo sistema z linearno fazo zapišemo v obliki:

$$H(\Omega) = H_z(e^{j\Omega}) = A(\Omega) e^{-jK\Omega} \quad (4.22)$$

kjer je $A(\Omega)$ amplitudni in $\Phi(\Omega) = -K\Omega$ fazni potek prevajalne funkcije. Pri kavzalnih sistemih je K pozitivna realna konstanta.

4.4.2.1 Koeficienti sita

Skušajmo določiti koeficiente b_i v prevajalni funkciji sita FIR (4.21) tako, da bo potek faze linearen. Predpostavimo, da je K v izrazu (4.22) enak $N/2$ in v izrazu (4.21) izpostavimo faktor, ki predstavlja linearen fazni potek:

$$H(\Omega) = e^{-j(N/2)\Omega} \sum_{i=0}^N b_i e^{j(N/2-i)\Omega} \quad (4.23)$$

Da bi bil fazni potek res linearen, mora vsota v zgornjem izrazu predstavljati amplitudni potek prevajalne funkcije:

$$\sum_{i=0}^N b_i e^{j(N/2-i)\Omega} = A(\Omega) \quad (4.24)$$

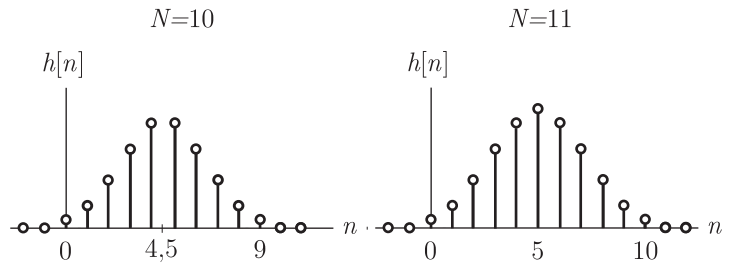
Ker je amplitudni potek realna funkcija, moramo izbrati koeficiente b_i tako, da bo zgornji izraz realen. Združimo po dva člena (prvega in zadnjega, drugega in predzadnjega, ...). Dobimo:

$$A(\Omega) = b_{N/2} + \sum_{i=0}^{(N-2)/2} b_i e^{j(N/2-i)\Omega} + b_{N-i} e^{-j(N/2-i)\Omega} \quad (4.25)$$

kjer smo privzeli $b_{N/2} = 0$, kadar je N liho število. Zgornji izraz je realen pri vseh vrednostih Ω le, kadar velja:

$$b_i = b_{N-i} \quad (4.26)$$

Na osnovi zgornjih izvajanj lahko povzamemo, da bo imelo sito FIR linearno fazno karakteristiko le, kadar so koeficienti sita b_i simetrični okrog točke $N/2$. Sita FIR zato običajno načrtujemo s simetričnimi koeficienti. Primer odziva na enotin impulz ($h[n] = b_n$) sita FIR z linearno karakteristiko pri lih in sodem N je prikazan na sliki 4.8.



Slika 4.8 – Odziv sit FIR z linearno fazo pri $N = 9$ in $N = 10$

4.4.2.2 Lega ničel

Prevajalno funkcijo $H(z)$ sita FIR z linearnim faznim potekom lahko na osnovi izraza (4.25) in pogoja (4.26) zapišemo kot:

$$H(z) = z^{-N/2} \left[b_{N/2} + \sum_{i=0}^{(N-2)/2} b_i (z^{N/2-i} + z^{i-N/2}) \right] \quad (4.27)$$

Zamenjamo z z z^{-1} in dobimo:

$$H(z^{-1}) = z^{N/2} \left[b_{N/2} + \sum_{i=0}^{(N-2)/2} b_i (z^{N/2-i} + z^{i-N/2}) \right] \quad (4.28)$$

Sledi:

$$H(z^{-1}) = z^N H(z) \quad (4.29)$$

Označimo z $z_n \neq 0$ ničlo prevajalne funkcije $H(z)$:

$$H(z_n) = 0 \quad (4.30)$$

Iz (4.29) potem neposredno sledi tudi:

$$H(z_n^{-1}) = 0 \quad (4.31)$$

kar pomeni, da je inverzna vrednost ničle tudi ničla prevajalne funkcije.

Na osnovi dejstva, da so koeficienti b_i realni, sledi, da so ničlam konjugirano kompleksne vrednosti tudi ničle prevajalne funkcije, torej velja:

$$H(z_n^*) = 0 \quad (4.32)$$

in

$$H((z_n^*)^{-1}) = 0 \quad (4.33)$$

Za lego ničel prevajalne funkcije sita FIR z linearnim potekom faze tako ločimo več primerov:

- V splošnem nastopajo ničle v četverčkih, kar je posledica inverznih in konjugirano kompleksnih dvojic.

$$z_n^* \neq z_n \quad ; \quad z_n^{-1} \neq z_n^* \quad (4.34)$$

- Kadar je ničla realna, je njena vrednost enaka konjugirano kompleksni vrednosti. Dobimo dvojice ničel na realni osi.

$$z_n^* = z_n \quad ; \quad z_n^{-1} \neq z_n^* \quad (4.35)$$

- Kadar je absolutna vrednost ničle enaka 1, je njena konjugirano kompleksna vrednost enaka njeni inverzni vrednosti. Dobimo dvojice ničel na frekvenčni krožnici.

$$z_n^* \neq z_n \quad ; \quad z_n^{-1} = z_n^* \quad (4.36)$$

- Pri vrednostih ničle $z_n = 1$ ali $z_n = -1$ ima ničla absolutno vrednost enako ena in je hkrati realna, zato lahko nastopa samostojno.

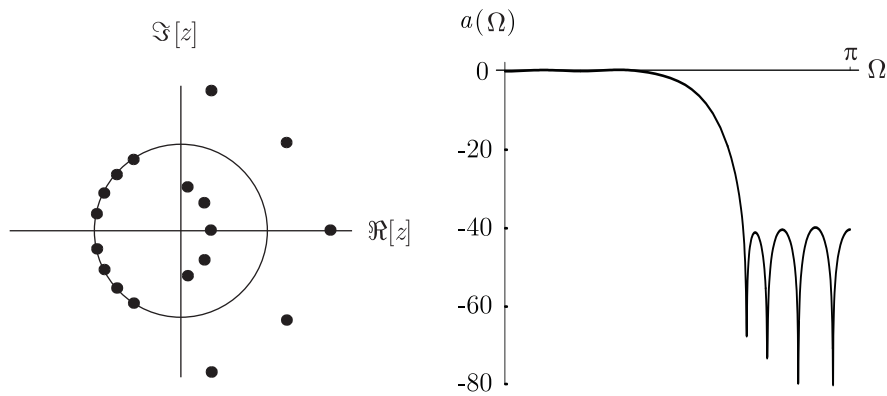
$$z_n^* = z_n \quad ; \quad z_n^{-1} = z_n^* \quad (4.37)$$

Na sliki 4.9 je prikazana lega ničel nizkega sita FIR in njegova amplitudna karakteristika $a(\Omega)$:

$$a(\Omega) = 20 \log_{10} |H(\Omega)| \quad (4.38)$$

V prepustnem področju sita določajo amplitudni potek predvsem ničle v četverčkih, v zapornem področju pa ničle na frekvenčni krožnici v kompleksno konjugiranih dvojicah.

Sita FIR imajo lahko poljuben fazni potek, ta je odvisen od lege ničel. Če bi pri situ z linearno fazo vse ničle, ki leže izven frekvenčne krožnice, preslikali znotraj frekvenčne krožnice, bi dobili sito z enako amplitudno karakteristiko in minimalnim faznim zasukom. Ničle v legah $|z_{ni}| > 1$ je potrebno prestaviti v lege $(z^*)^{-1}$. Sito z linearnim faznim potekom lahko spremenimo tudi v sito z enako amplitudno karakteristiko in maksimalnim faznim zasukom, če vse ničle znotraj frekvenčne krožnice preslikamo izven kroga.



Slika 4.9 – Zgled lege ničel nizkega sita

4.4.3 Načrtovanje z inverznim Fourier transformom

Postopek načrtovanja sit FIR s pomočjo inverznega Fourier transformata je zelo pripraven in ga lahko uporabimo za poljubno frekvenčno karakteristiko.

Ker uporabljamo običajno diskretna sita za obdelavo izvorno analognih signalov, ki jih pred obdelavo vzorčimo in po obdelavi zopet pretvorimo v analogne signale, izhajamo pri načrtovanju iz želene amplitudne karakteristike sita $A_a(\omega)$ ustreznega analognega sita. Prevaljalno funkcijo $H_a(\omega)$ izberemo kot čisto realno funkcijo:

$$H_a(\omega) = A_a(\omega) \quad (4.39)$$

Sistemska funkcija $h_a(t)$ ustreznega analognega sita dobimo tako, da naredimo IFT njegove prevajalne funkcije:

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.40)$$

Ker bomo sito izvedli s časovno diskretnim sistemom, moramo izbrati ustrezno frekvenco vzorčenja:

$$\omega_{vz} = \frac{2\pi}{T_{vz}} \quad (4.41)$$

s katero bomo vzorčili analogni signal pred obdelavo. Sistemsko funkcijo diskretnega sita dobimo z vzorčenjem sistemske funkcije analognega sita:

$$h_d[n] = h_a(nT_{vz}) \quad (4.42)$$

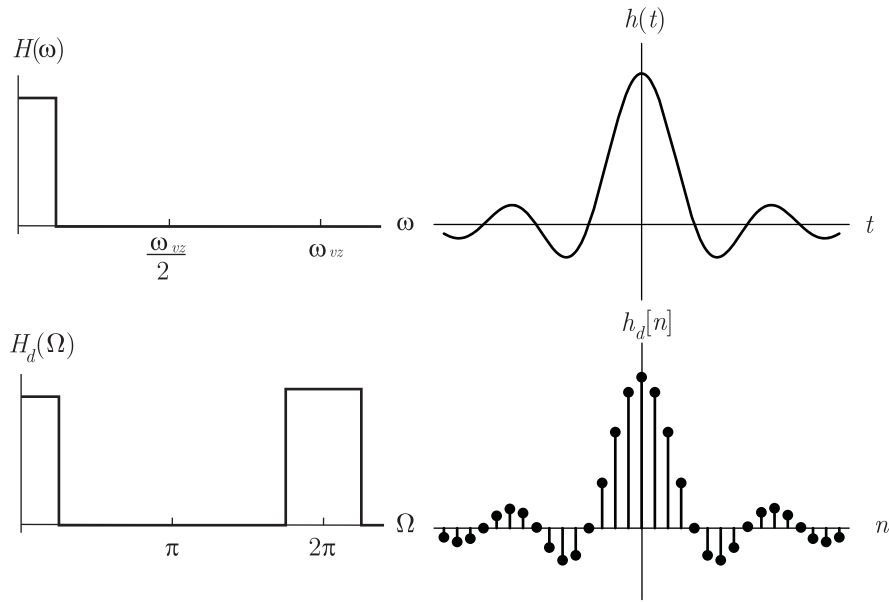
Vzorčenje sistemske funkcije ima na prevajalno funkcijo enak učinek kot ga ima vzorčenje signala na njegov spekter, kar smo obravnavali v 3. poglavju. V skladu z izrazom (3.17) lahko zapišemo:

$$H_d(\Omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\frac{\Omega - 2k\pi}{T_{vz}}\right) \quad (4.43)$$

Vzorčno frekvenco moramo izbrati tako, da velja:

$$H_a(\omega) = 0 \quad ; \quad |\omega| \geq \frac{\omega_{vz}}{2} \quad (4.44)$$

in ne pride do prekrivanja ponovljenih prevajalnih funkcij okrog mnogokratnikov $2k\pi$. Za primer, ko za želeno prevajalno funkcijo izberemo idealno nizko sito z mejno frekvenco ω_m , so razmere



Slika 4.10 – Vzorčenje prevajalne funkcije idealnega nizkega sita

prikazane na sliki 4.10. Vidimo, da bi izbira $\omega_{vz} = 2\omega_m$ povzročila, da bi se sosednje prevajalne funkcije dotikale, zato bi namesto nizkega sita dobili vseprepustno sito. Pri nizkem situ je zato smiselna izbira $\omega_{vz} \geq 4\omega_m$. V primeru na sliki je na primer izbrano $\omega_{vz} = 8\omega_m$.

Pri gornji določitvi sistemske funkcije diskretnega sita nastopata dve težavi: odziv sita je neskončno dolg in nekavzalen. Ker imajo sita FIR končen odziv, moramo sistemsko funkcijo $h[n]$ omejiti na $N + 1$ vzorcev. Da bi dobili linearno fazno karakteristiko, mora biti odziv simetričen, zato upoštevamo le vzorce $h_d[n]$ na območju $-N/2 \leq n \leq N/2$, pri čemer mora biti N sodo število¹. Tak odziv je še vedno nekavzalen, zato moramo vzorce v odzivu zakasniti za $N/2$:

$$h[n] = h_d[n - \frac{N}{2}] \quad ; \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.45)$$

Ker smo dodali samo zakasnitev, bo ostala fazna karakteristika linearna, ker pa smo zanemarili vzorce, se spremeni amplitudna karakteristika. Nova prevajalna funkcija je podana z izrazom:

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\Omega n} \quad (4.46)$$

Odstopanja amplitudne karakteristike od želenega poteka, ker smo zanemarili vzorce v odzivu na enotin impulz, so odvisna od reda sita N . Z naraščanjem reda sita N se vedno bolj približujemo idealni karakteristiki prevajalne funkcije. Načrtovanje z IFT daje najboljšo aproksimacijo glede na minimalno varianco odstopanja

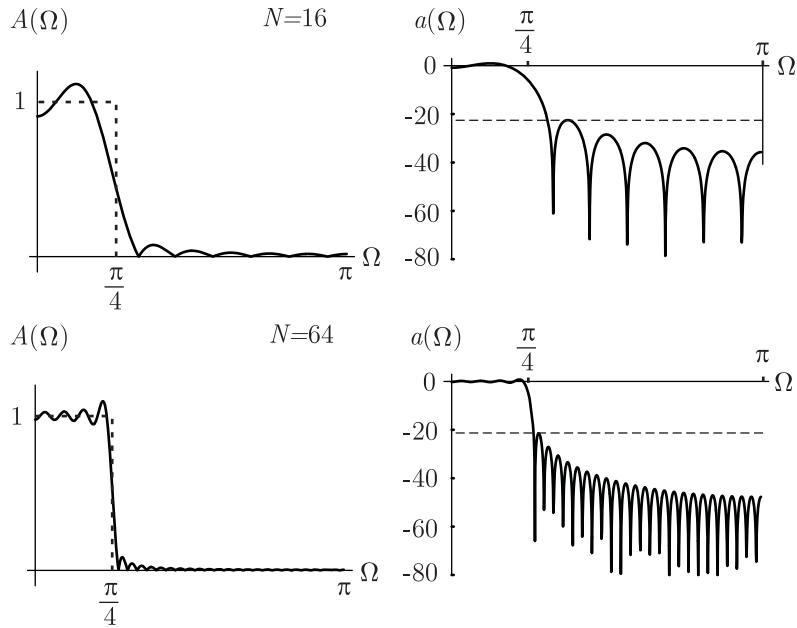
$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (A_d(\Omega) - A(\Omega))^2 d\Omega \quad (4.47)$$

med želenim amplitudnim potekom $A_d(\Omega)$ in dejanskim potekom $A(\Omega)$.

Pri taki obravnavi so vsa odstopanja med karakteristikama enako utežena. Kadar želimo imeti veliko slabljenje v zapori, ta kriterij ni najbolj primeren. Za primer nizkega sita z vzorčno

¹Možna je tudi izvedba z lihim N , vendar bi bilo potrebno v tem primeru prevajalno funkcijo $H_a(\omega)$ ustrezno fazno zamakniti, da bi dobili simetrijo koeficientov sita. Postopek prepuščamo bralcu v razmislek.

frekvenco $\omega_{vz} = 8\omega_m$, so dejanske amplitudne karakteristike pri $N = 16$ in $N = 64$ prikazane na sliki 4.11. Če opazujemo amplitudno karakteristiko v linearnem merilu na levi strani slike,



Slika 4.11 – Amplitudna karakteristika nizkega sita pri $N = 16$ in $N = 64$

vidimo, da se z večanjem N amplitudna karakteristika približuje željeni karakteristiki, ki je označena s črtkano črto. Pogled v logaritemskem merilu na desni strani razkrije, da z večanjem N ne povečujemo bistveno slabljenja v zavori. Prvi stranski snop je namreč v obeh primerih približno enako oslavljen, z večanjem N se karakteristika v zavori zgolj stiska po frekvenčni osi.

Povečanje slabljenja v zavori lahko dosežemo z uporabo okenskih funkcij, kar bomo obravnavali v naslednjem razdelku.

4.4.4 Oknjenje

Zaradi končne dolžine odziva sita FIR moramo odziv, ki ga dobimo s pomočjo IFT, omejiti, kot smo to storili že v prejšnjem razdelku, kjer smo zanemarili vse vzorce odziva izven končne dolžine sita FIR. Namesto, da bi odvečne vzorce preprosto odrezali, lahko neskončni odziv $h_d[n]$ množimo s časovno omejeno okensko funkcijo $w[n]$:

$$h[n] = w[n]h_d[n] \quad (4.48)$$

Ker je željeni odziv $h_d[n]$ soda funkcija, mora biti, da bi dobili linearen fazni potek, tudi okenska funkcija $w[n]$ soda. Da bi bil odziv kavzalen, moramo tudi pri oknjenju niz zakasniti za $N/2$. Ker zakasnitev ne vpliva na amplitudno karakteristiko, bomo v nadaljevanju, zaradi preprostejše obravnave, to zakasnitev zanemarili. Pri tem smo se omejili na okna z lihim številom vzorcev, to je okna, pri katerih je $N/2$ celo število.

Množenju dveh nizov v časovnem prostoru ustreza konvolucija v frekvenčnem prostoru:

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} W(\Omega) * H_d(\Omega) \quad (4.49)$$

Ker je konvolucija poljubne funkcije s funkcijo $\delta(\Omega)$ kar enaka sami funkciji, bo dobljena prevajalna funkcija $H(\Omega)$ tem bolj podobna želeni prevajalni funkciji $H_d(\Omega)$, kolikor bolj bo $W(\Omega)$ podoben $\delta(\Omega)$. Želimo, da je okenska funkcija $W(\Omega)$ čim ožja funkcija s ploščino 2π .

Ker so okenske funkcije časovno omejene, nastopa v njihovi amplitudni karakteristiki poleg osnovnega tudi več stranskih snopov – več maksimumov. Izbira okenske funkcije predstavlja kompromis med širino osnovnega snopa in maksimalno amplitudo stranskih snopov. Širina osnovnega snopa določa širino prehodnega področja med prepustnim in zapornim področjem filtra, velikost stranskih snopov pa določa valovitost v prepustnem in zapornem področju.

Okske funkcije običajno poudarijo vzorce na sredini okna in oslabijo vzorce na robovih okna. Na ta način se ublaži učinek rezanja odvečnih vzorcev, ki v frekvenčno karakteristiko prinese stranske snope.

Oknjenje bi lahko predstavili tudi v analognem prostoru. Namesto, da bi diskretni odziv množili z diskretnim oknom, lahko analogni odziv $h_a(t)$ pred vzorčenjem množimo z zvezno okensko funkcijo $w_a(t)$:

$$h(t) = w_a(t)h_a(t) \quad (4.50)$$

V frekvenčnem prostoru predstavlja množenje konvolucijo, zato velja:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} W_a(\omega) * H_a(\omega) \quad (4.51)$$

Ta konvolucija za razliko od konvolucije v (4.49) ni krožna, vendar moramo sedaj odziv $h(t)$ še vzorčiti. Pri vzorčenju pride do prekrivanja spektrov okrog mnogokratnikov vzorčne frekvence, kar da na koncu enak rezultat kot krožna konvolucija.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj pogostejše uporabljanih oken. Pravokotno okno je najosnovnejše okno in je enakovredno preprostemu rezanju vzorcev, ki smo ga že obravnavali. Kaiserjeva okna imajo skoraj optimalno slabljenje stranskih snopov pri dani širini osnovnega snopa.

4.4.4.1 Pravokotno okno

Pravokotno okno je enakovredno zanemarjanju vzorcev pri $|n| > N/2$. Okensko funkcijo zapišemo kot:

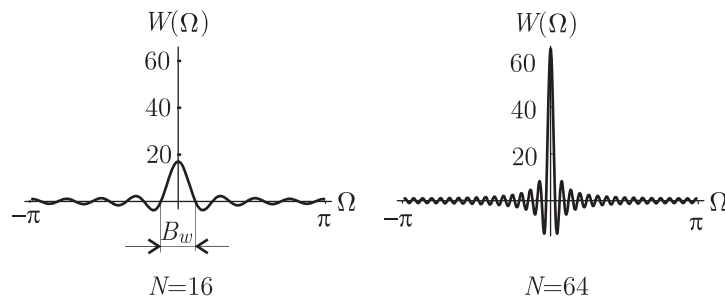
$$w[n] = \begin{cases} 1 & ; |n| \leq N/2 \\ 0 & ; |n| > N/2 \end{cases} \quad (4.52)$$

DTFT pravokotnega okna je enak:

$$W(\Omega) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin((N+1)\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \quad (4.53)$$

Frekvenčna karakteristika pravokotnega okna pri $N = 16$ in $N = 64$ je prikazana na sliki 4.12. Vidimo, da v frekvenčni karakteristiki nastopa osnovni snop in stranski snopi. Z večanjem N se karakteristika oži in osnovni snop viša, tako da se karakteristika na nek način približuje idealni karakteristiki $\delta(\Omega)$. V frekvenčni karakteristiki sta pomembna predvsem širina osnovnega snopa in slabljenje stranskih snopov.

Pri načrtovanju sita na osnovi oknjenja sistemske funkcije idealnega sita določa širina osnovnega snopa širino prehodnega območja med prepustnim in zapornim področjem, stranski

Slika 4.12 – DTFT pravokotnega okna ($N = 16$ in $N = 64$)

snopi pa določajo valovitost v obeh področjih. Valovitost je običajno bolj kritična v zapornem področju, saj omejuje slabljenje v tem področju, kot smo to videli na sliki 4.11.

Pri pravokotnem oknu lahko določimo širino B_w osnovnega snopa kot razdaljo med prvima ničloma:

$$B_w = \frac{4\pi}{N+1} \quad (4.54)$$

Slabljenje prvega stranskega snopa v amplitudni karakteristiki sita, ki ga dobimo z oknjenjem, je pri pravokotnem oknu bolj ali manj neodvisno od dolžine okna $N+1$ in je približno enako 21 dB (glej sliko 4.11). Ker je v skladu z enačbo (4.49) amplitudna karakteristika sita enaka konvoluciji karakteristike idealnega sita s frekvenčno karakteristiko okna, je slabljenje v zapori neposredno odvisno od razmerja ploščine pod osnovnim snopom in ploščine pod prvim stranskim snopom, to pa je pri pravokotnem oknu skoraj neodvisno od $N+1$.

4.4.4.2 Kosinusna okna

Pravokotno okno ima sorazmerno visoke stranske snope, ki so posledica hitrih preskokov na robovih okna. Veliki stranski snopi v frekvenčni karakteristiki okna poslabšajo tudi zaporno slabljenje z oknjenjem dobljenega sita. Z oblikovanjem okenske karakteristike okna lahko te preskoke omilimo in na ta način zmanjšamo stranske snope v frekvenčni karakteristiki okna.

Pri načrtovanju sit FIR se pogosto uporabljajo okna, ki temeljijo na kosinusnih funkcijah:

$$w[n] = \sum_{k=0}^K a_k \cos(k2\pi n/N) \quad ; \quad |n| \leq \frac{N}{2} \quad (4.55)$$

Z izbiro koeficientov a_k dobimo okna z različnimi lastnostmi. V tej družini oken so najbolj znana:

pravokotno okno

$$a_0 = 1 \quad (4.56)$$

Hannovo okno

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,5 \\ a_1 &= 0,5 \end{aligned} \quad (4.57)$$

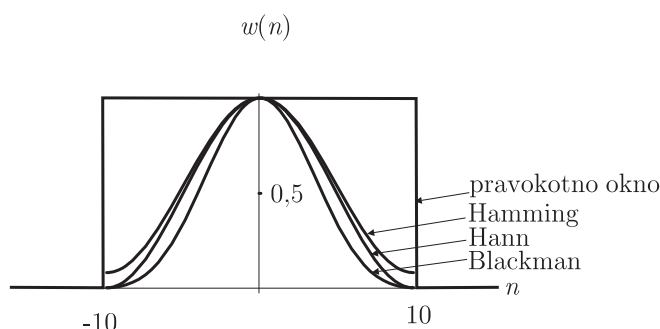
Hammingovo okno

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,54 \\ a_1 &= 0,46 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Blackmanovo okno

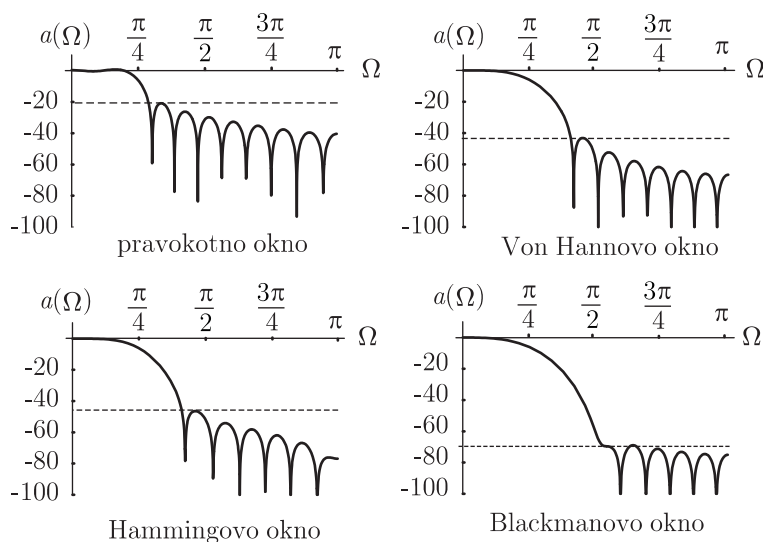
$$\begin{aligned} a_0 &= 0,42 \\ a_1 &= 0,5 \\ a_2 &= 0,08 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Okske funkcije so v obliki zveznih krivulj prikazane na sliki 4.13.



Slika 4.13 – Nekatera kosinusna okna ($N = 20$)

Amplitudne karakteristike filtrov, ki jih dobimo z oknjenjem odziva idealnega nizkega sita z mejno frekvenco $\Omega_m = \pi/4$ in uporabo različnih kosinusnih oken so v logaritemskem merilu prikazane na sliki 4.14.



Slika 4.14 – Slabljenje nizkih sit s kosinusnimi okni ($N = 20$)

Z ustrezno izbiro koeficientov a_k bi pravzaprav lahko dobili poljubno okensko funkcijo. Pri tem je problematično predvsem to, da lahko postane število koeficientov zelo veliko, pri čemer ne vemo natančno, kako izbira posameznih koeficientov vpliva na končni rezultat, zato bi bilo potrebno uporabiti metodo s poskušanjem.

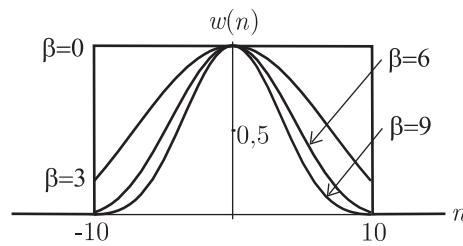
4.4.4.3 Kaiserjeva okna

Zelo dobre rezultate z ozirom na slabljenje stranskih snopov dobimo z uporabo Kaiserjevih oken. Ta tvorijo celo družino oken, ki temelje na modificiranih Besselovih funkcijah ničtega reda prve vrste. So skoraj optimalna glede na slabljenje stranskih snopov pri dani časovni omejitvi odziva. Okno iz družine je določeno z enim samim parametrom β , ki ga izberemo na osnovi kompromisa med širino osnovnega snopa in slabljenjem največjega stranskega snopa.

Družina Kaiserjevih oken je podana z enačbo:

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - (2n/N)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad ; \quad |n| \leq \frac{N}{2} \quad (4.60)$$

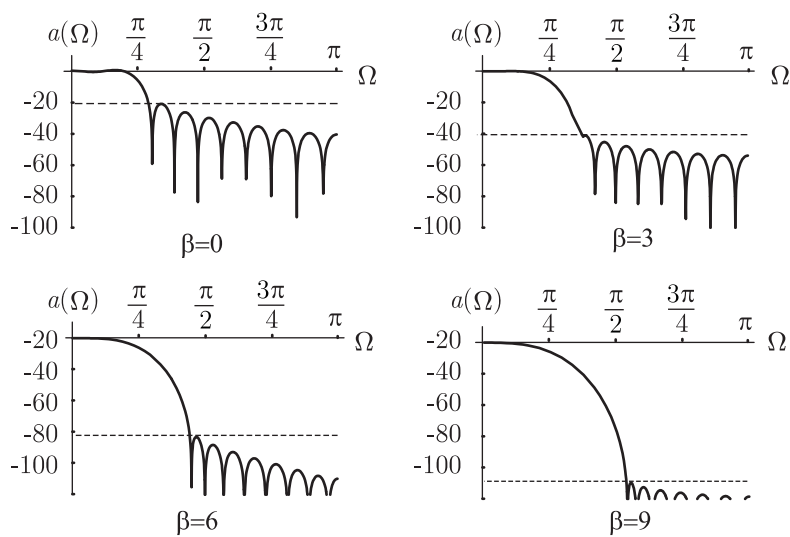
Kaiserjeva okna pri različnih vrednostih parametra β so prikazana na sliki 4.15. Tipične vred-



Slika 4.15 – Kaiserjeva okna ($N = 20$)

nosti parametra β so v območju med 4 in 9. Za $\beta = 0$ dobimo pravokotno okno in pri $\beta = 5,44$ okno, ki je zelo podobno Hammingovem oknu. Za modificirano Besselovo funkcijo ničtega reda prve vrste velja:

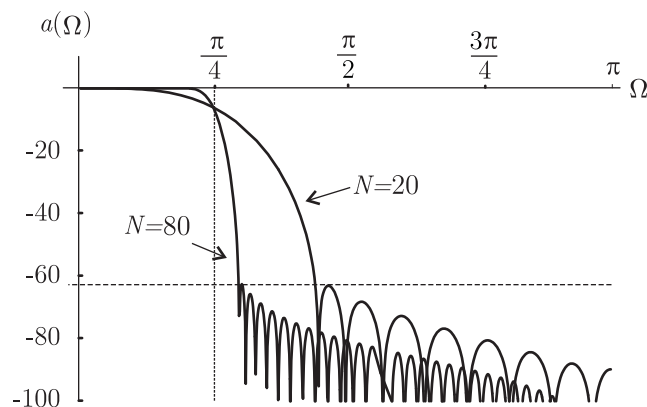
$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^m}{m! 2^m} \right)^2 \quad (4.61)$$



Slika 4.16 – Slabljenje nizkih sit na osnovi Kaiserjevih oken ($N = 20$)

Na sliki 4.16 so prikazane amplitudne karakteristike nizkih sit, ki so dobljena z oknjenjem odziva idealnega nizkega sita s Kaiserjevimi okni ($N = 20$, $\Omega_m = \pi/4$).

Ker je širina osnovnega snopa v frekvenčni karakteristiki okna, ki preko konvolucije vpliva na širino prehodnega področja med prepustnim in zapornim področjem sita, obratno sorazmerna N , lahko širino prehodnega območja pri danem minimalnem slabljenju zmanjšujemo le tako, da povečujemo dolžino sita N . Za ilustracijo vpliva N na slabljenje, je na sliki 4.17 podana primerjava amplitudnih karakteristik nizkega sita s Kaiserjevim oknom $\beta = 6$ pri $N = 20$ in $N = 80$.

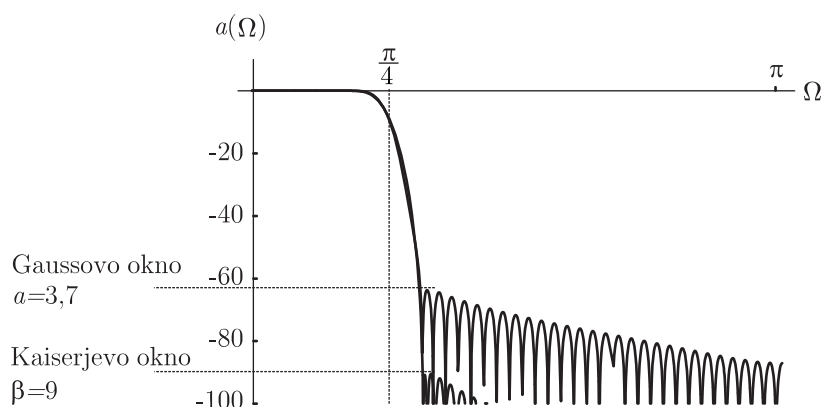


Slika 4.17 – Vpliv dolžine sita na potek slabljenja ($\beta = 6$)

Primernost Kaiserjevih oken lahko preverimo, če jih primerjamo z Gaussovimi okni:

$$w[n] = e^{-(an/N)^2} \quad ; \quad |n| \leq N/2 \quad (4.62)$$

ki so v časovnem prostoru zelo podobne oblike kot Kaiserjeva okna, vendar ima sito načrtovano na osnovi Gaussovega okna pri enaki širini prehodnega območja bistveno nižje slabljenje v zapori kot sito na osnovi Kaiserjevega okna. Primerjava vpliva Gaussovega in Kaiserjevega okna z enako širino prehodnega področja je prikazana na sliki 4.18.



Slika 4.18 – Primerjava vpliva Gaussovega in Kaiserjevega okna

4.4.5 Sita z enakomerno valovitostjo

Pri načrtovanju sit FIR z inverznim Fourier transformom in oknjenjem smo izhajali iz idealne karakteristike sita. Zaradi omejitve dolžine odziva je na koncu karakteristika sita bolj ali manj odstopala od idealne karakteristike. Želeli smo, da so ta odstopanja čim manjša, vendar

maksimalnih dopustnih odstopanj nismo vnaprej predpisali. Pri izbrani dolžini sita smo z izbiro okenske funkcije naredili kompromis med širino prehodnega področja in minimalnim slabljenjem v zaporu.

Pri načrtovanju sit z enakomerno valovitostjo vnaprej podamo dopustna odstopanja slabljenja od idealnega poteka v prepustnem in zapornem področju in širino prehodnega območja, v katerem mora biti ojačanje monotono padajoča funkcija frekvence. Pri FIR sitih običajno predpostavimo linearen fazni potek. V splošnem ima lahko sito več prepustnih in zapornih področij. V takem primeru je potrebno podati zahteve za vsa posamezna področja.

Kot primer si oglejmo specifikacijo nizkega sita. Nizko sito ima na intervalu $0 \leq \Omega \leq \pi$ eno prepustno, eno prehodno in eno zaporno področje. Pri nizkem situ je potrebno določiti parametre. V specifikaciji sita moramo podati:

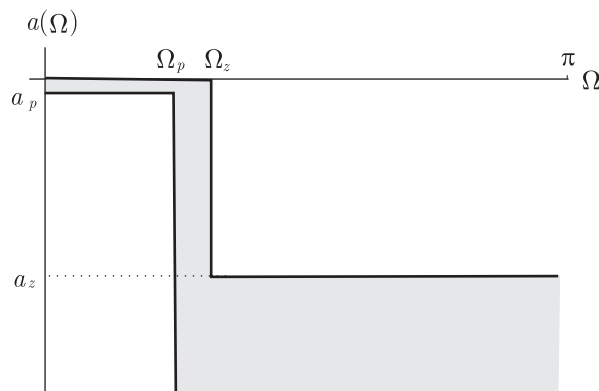
Ω_p – mejna frekvenca prepustnega področja,

Ω_z – mejna frekvenca zapornega področja,

a_p – minimalno ojačenje (valovitost) v prepustnem območju in

a_z – maksimalno ojačenje (valovitost) v zapornem področju.

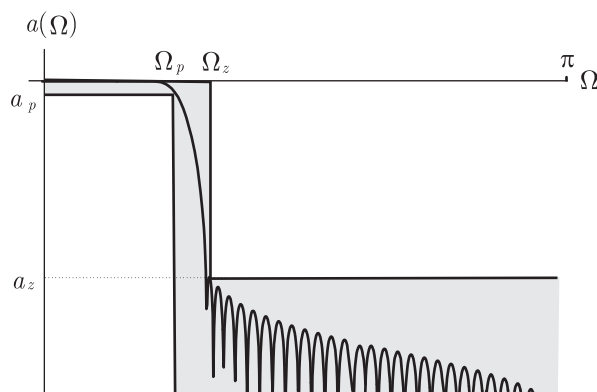
Ti parametri določajo okvir (gabarit), ki je prikazan na sliki 4.19. Amplitudna karakteristika sita lahko poteka le v področju, ki je na sliki obarvano sivo.



Slika 4.19 – Specifikacija nizkega sita

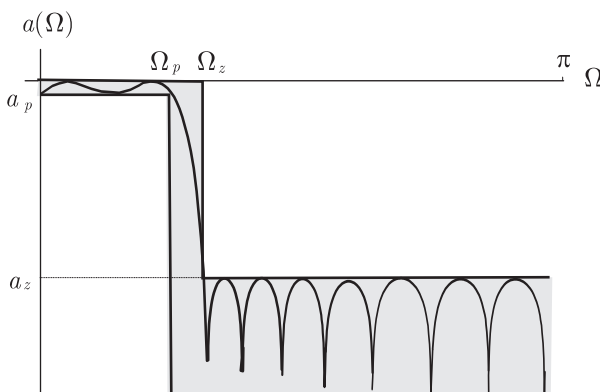
Z ustrezno izbiro dolžine sita N in z izbiro primerne okenske funkcije lahko tudi po doslej obravnavanih postopkih načrtamo sito, ki ustreza podani specifikaciji, kot je to prikazano na sliki 4.20. Vidimo, da amplituda stranskih snopov v zaporu upada z odmikom od prepustnega področja. Zelo oddaljeni snopi so precej pod dopustno mejo ojačenja v zaporu. Ker tako velikega slabljenja ne potrebujemo, lahko amplitudo stranskih snopov povečamo in na ta način zmanjšamo dolžino sita, ki je potrebna, da izpolnimo zahteve.

Podobno velja tudi za prepustno področje. Ojačenje doseže svojo minimalno vrednost le na robu prepustnega območja, povsod drugje pa je večje. Tudi tu lahko zmanjšamo potrebno dolžino sita, če karakteristiko načrtujemo tako, da ojačenje v prepustnem področju večkrat doseže minimalno vrednost.



Slika 4.20 – FIR sito s Kaiserjevim oknom, ki ustreza podanim specifikacijam

Izkaže se, da je potrebna dolžina sita FIR najmanjša, kadar je valovitost tako v zapornem kot v prepustnem območju enakomerna, tako da so vsi minimumi in maksimumi enako visoki, kot je to prikazano na sliki 4.21.



Slika 4.21 – Sito z enakomerno valovitostjo

Približek sita s kriterijem enake valovitosti znotraj predpisanih meja ne predstavlja najboljšega približka glede na minimalno kvadratično odstopanje preko celotnega frekvenčnega področja, ki ga dosežemo s postopkom z inverznim Fourier transformom in pravokotnim oknom. Če pa izhajamo le iz specifikacij za določena frekvenčna področja, bodo filtri z enakomerno valovitostjo odstopanja v teh področjih optimalni.

Načrtovanje sita z enakomerno valovitostjo poteka po iterativnem postopku. Velikost ekstremov v amplitudni karakteristiki sita je odvisna od njihove lege na frekvenčni osi, ta pa je odvisna od lege ničel v ravnini z . Z razporejanjem ekstremov vzdolž frekvenčne osi moremo doseči enako valovitost.

Za načrtovanje sta bila razvita dva osnovna pristopa. Pri prvem, ki sta ga predlagala Hermann in Schuessler, izberemo red sita N , minimalno ojačenje v prepustnem območju a_p , maksimalno ojačenje v zapori a_z in mejno frekvenco prepustnega območja Ω_p . Širine prehodnega področja oziroma frekvence Ω_z ne moremo poljubno izbrati, ker je že določena s prejšnjimi parametri. Če je prehodno področje preširoko, moramo povečati N , če pa je ožje od zahtevanega lahko N zmanjšamo.

Pri drugem postopku, ki ga sta ga razvila Parks in McClellan, izberemo N , Ω_p in Ω_z in razmerje δ_p/δ_z , kjer je:

$$\delta_p = 1 - A_p = 1 - 10^{a_p/20} \quad (4.63)$$

valovitost v prepustnem območju in

$$\delta_z = A_z = 10^{a_z/20} \quad (4.64)$$

valovitost v zapornem področju. Vrednosti a_p in a_z sta posredno odvisni od izbranih parametrov, tako da moramo, podobno kot pri prejšnjem postopku, uporabiti iterativni postopek približevanja podanim zahtevam. Ta postopek je osnova večine danes uporabljenih načrtovalskih programov za sita FIR z enakomerno valovitostjo.

4.4.6 Načrtovanje sit FIR s frekvenčnim vzorčenjem

Postopek načrtovanja s frekvenčnim vzorčenjem je zelo primeren za sita, kjer imamo predpisano prevajalno karakteristiko, ki ni določena z območji s konstantno amplitudo. Taka sita so na primer diferenciator, sito Hilbertovega transforma, korekcijsko sito pri rekonstrukciji, sito za izločevanje intersimbolne interference pri prenosu podatkov in druga podobna sita. Prednosti tega postopka sta predvsem:

- Dolžino časovnega odziva omejimo že na začetku, tako da ne pride do problemov, ki nastopijo pri oknjenju.
- Izhajamo iz spektra časovno diskretnih signalov, zato ne nastopi problem prekrivanja prevajalne funkcije zaradi vzorčenja. Postopek je zato primeren za načrtovanje poljubno izbrane frekvenčne karakteristike v frekvenčnem področju $0 \leq \Omega \leq \pi$.

4.4.6.1 Enakomerno vzorčenje

Na osnovi transformacije DFT vemo, da K vzorcev v frekvenčnem prostoru določa K točk v časovnem prostoru. Če izberemo K vrednosti prevajalne funkcije $H[k]$, lahko določimo K vzorcev časovnega odziva $h[n]$ (red sita $N = K - 1$).

Najprej izberemo želeno prevajalno funkcijo časovno diskretnega sistema $H_d[\Omega]$. Če želimo imeti linearno fazno karakteristiko, jo izberemo kot čisto realno funkcijo:

$$H_d(\omega) = A_d(\omega) \quad (4.65)$$

Da bi bil odziv sita realen, mora biti amplitudna karakteristika in zato tudi prevajalna funkcija $H_d(\Omega)$ soda:

$$H_d(\Omega) = H_d(-\Omega) \quad (4.66)$$

kar pomeni, da jo lahko poljubno izbiramo le na področju $0 \leq \Omega \leq \pi$.

Željeno prevajalno funkcijo vzorčimo v enakomernih frekvenčnih intervalih:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{K} \quad (4.67)$$

znotraj osnovnega frekvenčnega področja 0 do 2π :

$$H_v[k] = H_d(k\Omega_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, K - 1 \quad (4.68)$$

S pomočjo IDFT (1.27) nato izračunamo ustrezno sistemsko funkcijo:

$$h_v[n] = \text{IDFT}\{H[k]\} \quad (4.69)$$

Sistemsko funkcijo $h_v[n]$ smo izračunali s pomočjo IDFT in s tem implicitno predpostavili, da je periodična. Pri lihem K vzamemo za prevajalno funkcijo sita FIR le osnovno periodo prevajalne funkcije $h_v[n]$ na intervalu $-(K-1)/2 \leq n \leq (K-1)/2$ vzorcev:

$$h[n] = h_v[n - \frac{K-1}{2}] \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, K-1 \quad (4.70)$$

Prevajalna funkcija dobljenega sita je enaka DTFT sistemske funkcije:

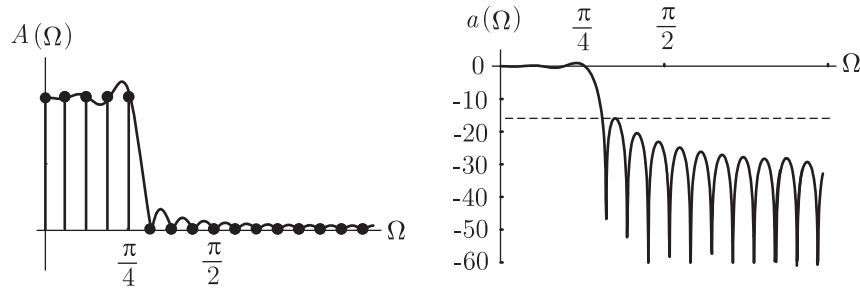
$$H(\Omega) = \text{DTFT}\{h[n]\} \quad (4.71)$$

Amplitudni potek $H(\Omega)$ se ujema z želenim potekom $H_d(\Omega)$ v K izbranih frekvenčnih točkah, fazni potek pa je linearen:

$$\Phi(\Omega) = -\frac{K-1}{2}\Omega \quad (4.72)$$

kar je posledica dodane zakasnitve. Med izbranimi točkami lahko amplitudni potek močno odstopa od želenega poteka, kar je odvisno predvsem od gostote vzorčenja frekvenčnega poteka in od izbire želene prevajalne funkcije.

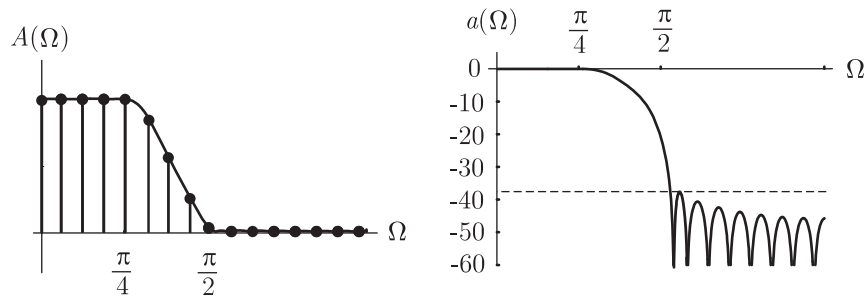
Oglejmo si preprost zgled načrtovanja nizkega sita z $\omega_p = \pi/4$, $\omega_z = \pi/2$ in $K = 31$. Vsi vzorci v prepustnem področju naj bodo enaki 1 in vsi vzorci v zapornem področju enaki 0. V prehodnem področju lahko vzorce poljubno izbiramo. Na sliki 4.22 je prikazana amplitudna karakteristika sita, ki jo dobimo, če tudi vse vzorce v prehodnem področju $\pi/4 < \Omega < \pi/2$ postavimo na 0. Zaradi strmega prehoda med prepustnim in zapornim področjem dobimo med vzorci znatno odstopanje karakteristike od idealnega poteka.



Slika 4.22 – Frekvenčni vzorci pri nizkem situ

Veliko boljši rezultat dobimo, če izberemo vzorce v prehodnem področju tako, da karakteristika od prepustnega do zapornega področja počasi upada, kot je to prikazano na sliki 4.23.

V opisanih primerih smo načrtovali sita z lihim številom koeficientov, kjer je nekoliko preprosteje doseči simetrijo sistemske funkcije kot pri sodem številu, vendar to ne pomeni, da se s frekvenčnim vzorčenjem ne da načrtovati sit s sodim številom koeficientov. Za take primere si bralec lahko za vajo določi ustrezne izraze.



Slika 4.23 – Frekvenčni vzorci pri nizkem situ

4.4.7 Nekaj primerov sit FIR

4.4.7.1 Povprečevalno sito

Najenostavnejše nizkopasovno sito je povprečevalnik preko zadnjih $N + 1$ vzorcev (Moving Average Filter). Odziv tega sita podaja enačba:

$$y[n] = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x[n-i] \quad (4.73)$$

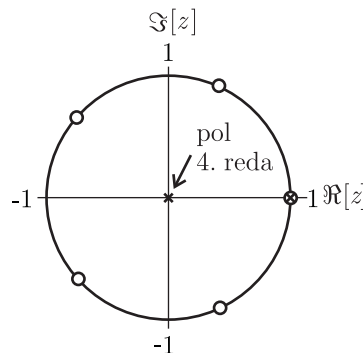
Vsi koeficienti sita b_i so enaki $1/(N+1)$, zato je prevajalna funkcija sita enaka:

$$H(z) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N z^{-i} \quad (4.74)$$

Vsoto s členi v zgornji enačbi lahko izrazimo s kvocientom:

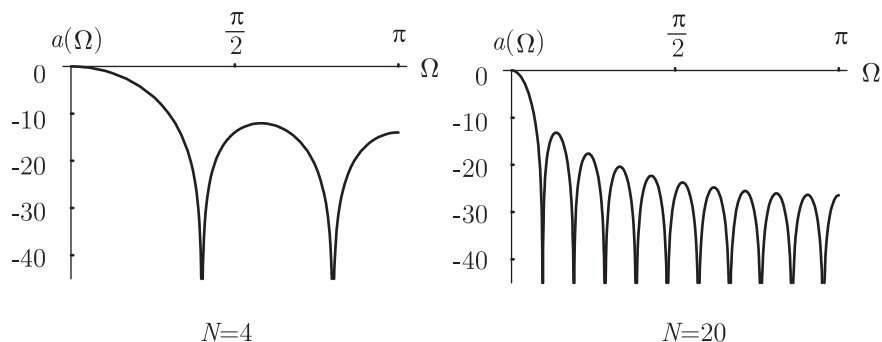
$$H_z(z) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}} \quad (4.75)$$

Zgornji izraz ima $N + 1$ ničel, ki so enakomerno razmeščene po frekvenčni krožnici. Izraz $1 - z^{-1}$ v imenovalcu pa daje pol pri $z = 1$, ki kompenzira ničlo v tej legi. N polov leži v koordinatnem izhodišču. Za $N = 4$ so narisane lege polov in ničel na sliki 4.24.

Slika 4.24 – Lege polov in ničel povprečevalnega sita ($N = 4$)

Frekvenčno karakteristiko povprečevalnega sita dobimo, če v izrazu (4.75) nadomestimo z z $e^{j\Omega}$.

$$H(\Omega) = H_z(e^{j\Omega}) \quad (4.76)$$

Slika 4.25 – Frekvenčna karakteristika povprečevalnega sita pri $N = 4$ in $N = 20$

Ojačenje povprečevalnega sita pri $N = 4$ in $N = 20$ je prikazano na sliki 4.25.

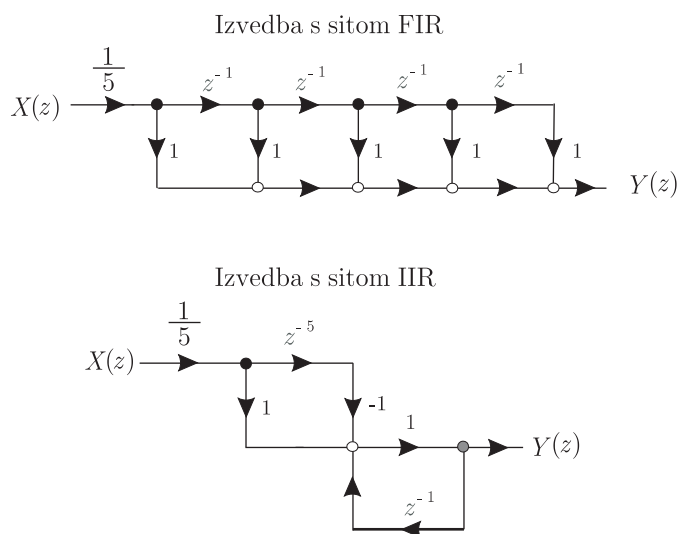
Izraz (4.75) kaže možnost izvedbe povprečevalnega sita s kaskadno vezavo dveh sit, sita FIR s prevajalno funkcijo:

$$H_1(z) = \frac{1}{N+1}(1 - z^{-(N+1)}) \quad (4.77)$$

in sita IIR s prevajalno funkcijo:

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4.78)$$

Taka izvedba zahteva manj računskih operacij kot izvedba v čisti strukturi FIR. Obe izvedbi za $N = 4$ sta predstavljeni na sliki 4.26.

Slika 4.26 – Struktura povprečevalnika brez in z rekurzivnim delom pri $N = 4$

4.4.7.2 Diskretni diferenciator

Najpreprostejši diferenciator določa razliko med dvema zaporednima vzorcema. Zanj velja enačba:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - x_{n-1} \\ H(z) &= 1 - z^{-1} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Prevajalna karakteristika tega enostavnega diferenciatorja je:

$$H(\Omega) = 1 - e^{-j\Omega} = 1 - \cos \Omega + j \sin \Omega \quad (4.80)$$

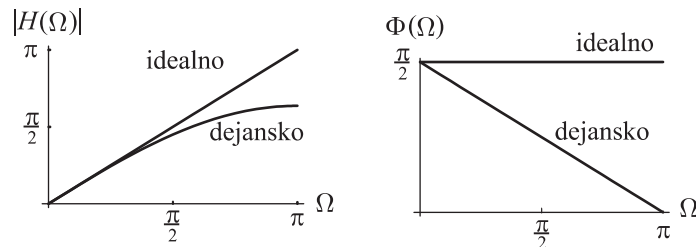
Po absolutni vrednosti je prevajalna karakteristika enaka:

$$|H(\Omega)| = 2 \sin \left(\frac{\Omega}{2} \right) \quad (4.81)$$

in fazni zasuk:

$$\arg H(\Omega) = \arctan \left(\frac{\sin \Omega}{1 - \cos \Omega} \right) \quad (4.82)$$

Na sliki 4.27 sta narisani idealna in dejanska karakteristika filtra z diferenco prvega reda. Preprost diferenciator se po karakteristiki približuje idealnemu diferenciatorju le pri zelo nizkih frekvencah, ko je $\sin \Omega$ približno enak Ω .



Slika 4.27 – Idealna in dejanska karakteristika filtra z diferenco prvega reda

Za idealen diferenciator zahtevamo, da je frekvenčni odziv sorazmeren frekvenci in da je fazni zasuk enak 90° neodvisno od frekvence. To nam da zahtevo:

$$H(\Omega) = jB(e^{j\Omega}) = j\Omega \quad -\pi < \Omega < \pi \quad (4.83)$$

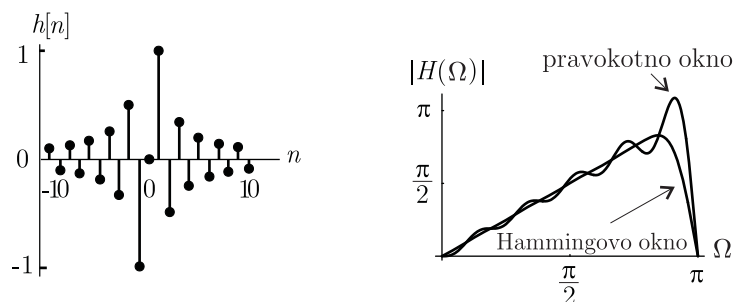
Uporabimo postopek z inverznim Fourier transformom in dobimo:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\Omega e^{jn\Omega} d\Omega \quad (4.84)$$

Kot rešitev dobimo antisimetričen niz vzorcev okoli $h_0 = 0$:

$$h_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{|n|+1}}{n} & n \neq 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

Odziv je antisimetričen in predznak se spreminja med zaporednimi vzorci. Če uporabimo pravokotno okno za omejitev dolžine, bomo ugotovili valovitost prevajalne karakteristike. Ta je bistveno manjša, če uporabimo okno s počasnim prehodom. Na sliki 4.28 sta narisani karakteristiki za pravokotno in Hammingovo okno dolžine 20.



Slika 4.28 – Karakteristiki diferenciatorja s pravokotnim in Hammingovim oknom

4.4.7.3 Hilbertov transform

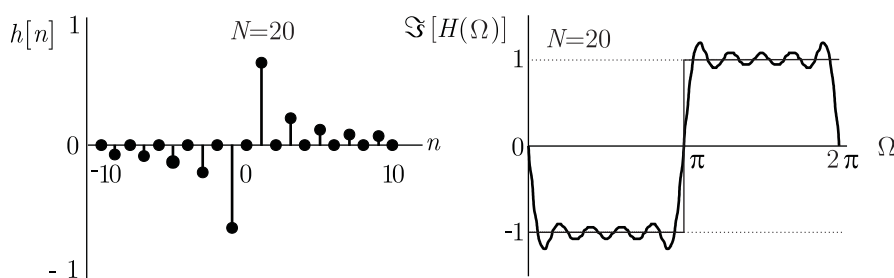
V določenih primerih potrebujemo vezje, ki je vseprepušno sito z amplitudo 1 in suče fazo za -90° . Tako idealno vezje ustreza Hilbertovi transformaciji, katere karakteristika je:

$$H(\Omega) = \begin{cases} -j & 0 < \Omega < \pi \\ j & -\pi < \Omega < 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

Zgornji izraz zahteva nekavzalen filter z liho simetrijo odziva $h(n)$. Aproksimacija, ki ustreza idealnim zahtevam, ne bo izpolnila zahteve po amplitudi v dveh točkah, to je v $\Omega = 0$ in π . Na osnovi zahtev za $H(\Omega)$ izračunamo odziv za idealni primer. Vzorci odziva tvorijo neskončen antisimetričen niz:

$$\begin{aligned} h_{2n} &= 0 \\ h_{2n-1} &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Na sliki 4.29 je narisana idealna karakteristika in odziv h_n .

Slika 4.29 – Karakteristika in odziv h_n Hilbertovega transformata

4.5 Načrtovanje sit z neskončnim odzivom - IIR

Izhodni vzorec sita IIR je odvisen od trenutnega vhodnega vzorca in enega ali več preteklih vhodnih in izhodnih vzorcev, kot je to razvidno iz enačbe (2.63). Zaradi boljše preglednosti jo zapišimo ponovno:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^M a_i y[n-i] \quad (4.88)$$

Oprava imamo s sistemom s povratnim sklopom, kar pogosto zelo učinkovito oblikuje prevajalno karakteristiko sita. Sito IIR z nekaj koeficienti v povratnem sklopu lahko, glede na slabljenje v zapornem območju, nadomesti sito FIR s sto in več koeficienti.

Sita IIR imajo tudi pomanjkljivosti. Pri napačni izbiri koeficientov lahko postanejo IIR sita nestabilna, kar je posebno moteče pri načrtovanju adaptivnih sistemov, pri katerih se koeficienti spreminjajo med samim delovanjem. IIR sita tudi ne morejo imeti linearnega faznega poteka. Za linearen fazni potek je namreč potrebna simetrija sistemske funkcije $h[n]$, kot smo to že ugotovili pri obravnavi sit FIR v razdelku 4.4.2. Sita IIR imajo neskončno dolg odziv $h[n]$. Velikost vzorcev odziva $h[n]$ pri stabilnem sistemu upade na nič, ko gre $n \rightarrow \infty$. To pomeni, da pri ustvarljivih (kavzalnih) sistemih odziv ne more biti simetričen in zato tako sito ne more imeti linearnega faznega poteka.

V razdelku 2.2.6 smo zapisali prevajalno funkcijo sita v obliki, s katere so razvidni poli in ničle prevajalne funkcije v ravnini z :

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_{ni} z^{-1})}{\prod_{i=1}^M (1 - z_{pi} z^{-1})} = b_0 z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^M (z - z_{pi})} \quad (4.89)$$

in pokazali, da so lastnosti sita, kot so to amplitudni potek, fazni potek, stabilnost in druge, neposredno odvisne od lege polov in ničel.

Digitalna sita IIR bi torej lahko načrtovali tako, da bi določili izhodiščne lege polov in ničel glede na željen amplitudni potek prevajalne funkcije. Nato bi izračunali dobljeno prevajalno funkcijo. Na osnovi razlike med dobljeno in željeno karakteristiko bi korigirali lege polov in ničel ali celo dodali kakšen pol ali ničlo. Postopek bi morali večkrat ponoviti, da bi dobili zadovoljiv rezultat. Tak postopek je preprost le za sita nizkega reda. Sita višjih redov načrtujemo na računalnikih s programsko podporo, ki je primerna za adaptivno načrtovanje sit.

Bistveno boljši pristop je načrtovanje diskretnih sit s pomočjo transformacije prevajalne funkcije analognih sit. Transformacije temelje na preslikavi polov in ničel iz ravnine s v ravnino z . Tak pristop je smiseln predvsem zato, ker so postopki za načrtovanje analognih sit dobro raziskani, znane pa so tudi optimalne rešitve glede na potreben red sita (Čebiševjeva sita, eliptična sita, ...). Dokler ni bilo na voljo računalniških programov, so načrtovali analogna sita na osnovi frekvenčno normiranih sit, ki jih je bilo moč najti v obširnih katalogih analognih sit. Danes so postopki za načrtovanje analognih sit običajno že vgrajeni v računalniške programe, ki omogočajo načrtovanje diskretnih sit na osnovi transformacije.

Poznamo več vrst transformacij, od teh sta najbolj pogosto uporabljeni bilinearna in impulzno invariantna transformacija.

4.5.1 Preprosto načrtovanje na osnovi polov in ničel

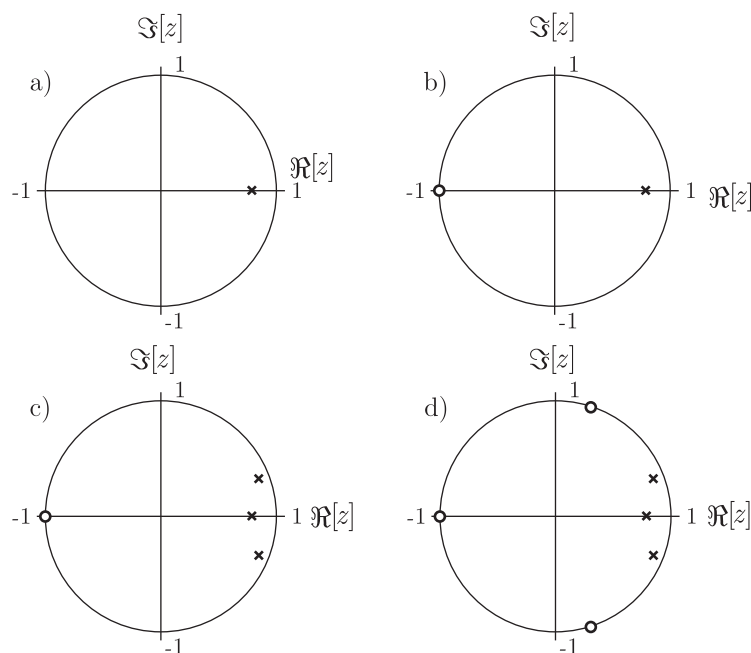
S postopkom določanja lege polov in ničel v ravnini z na osnovi intuicije si lahko pomagamo le pri sitih zelo nizkega reda. Ker sita najpogosteje načrtujemo na osnovi specifikacij amplitudnega poteka prevajalne funkcije, zapišimo ponovno enačbo (2.67), ki podaja odvisnost amplitudnega

poteka prevajalne funkcije od lege polov in ničel:

$$A(\Omega) = |b_0| \frac{\prod_{i=1}^N d_{ni}(\Omega)}{\prod_{i=1}^M d_{pi}(\Omega)} \quad (4.90)$$

kjer so $d_{ni}(\Omega)$ in $d_{pi}(\Omega)$ označene razdalje ničel in polov od točke na krožnici pri kotu Ω . Za zagotavljanje stabilnosti sita morajo biti poli v enotinem krogu.

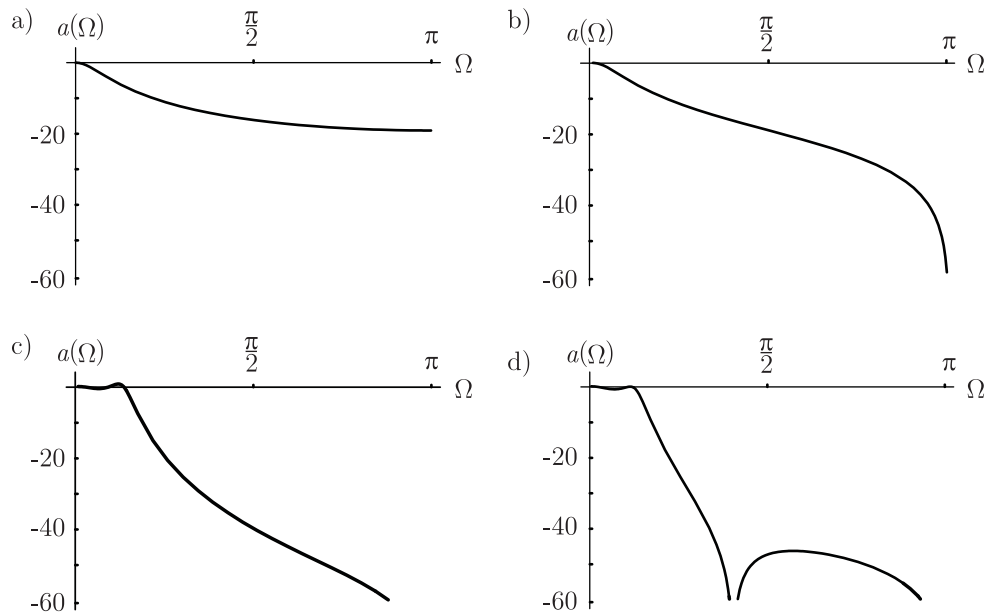
Postopek načrtovanja preprostih sit z določanjem lege polov in ničel je prikazan na sliki 4.30, amplitudne karakteristike dobljenih sit pa na sliki 4.31



Slika 4.30 – Načrtovanje nizkega sita na osnovi lege polov in ničel

- Ker nastopajo poli v imenovalcu izraza (4.90), se s približevanjem pola frekvenčni krožnici (točki $z = 1$) povečuje amplituda prevajalne funkcije pri frekvenci 0.
- Pri nizkem situ je smiselno, da je amplituda prevajalne funkcije pri frekvenci $\Omega = \pi$, enaka 0. To lahko dosežemo z dodajanjem ničle pri $z = -1$.
- Z dodatnimi poli lahko izboljšamo potek v prepustnem območju. Pole dodajamo v enotski krog v bližini krožnice v prepustnem področju. Če želimo, da bo imelo sito realne koeficiente, morajo nastopati poli v konjugirano kompleksnih parih.
- Potek v zapori lahko izboljšamo z dodatkom ničel na frekvenčni krožnici v zapornem področju. S tem zožimo širino prehodnega področja in povečamo minimalno slabljenje v zapornem področju. Tudi ničle morajo nastopati v konjugirano kompleksnih parih, da bi bili koeficienti sita realni.

Koeficient b_0 v izrazu (4.90) izberemo tako, da je amplituda pri frekvenci $\Omega = 0$ enaka 1.



Slika 4.31 – Amplitudne karakteristike preprostih sit s slike 4.30

Visoko sito lahko dobimo z zrcaljenjem polov in ničel nizkega sita preko imaginarne osi, ali pa ga načrtujemo neposredno, podobno kot nizko sito.

Najpreprostejše pasovno prepustno sito je resonator z dvojico kompleksno konjugiranih polov v notranjosti frekvenčnega kroga (slika 4.32 a). Slabljenje v zapori povečamo z dodatnimi ničlami na frekvenčni krožnici (slika 4.32 b). Z dodajanjem polov v bližini centralne frekvence bi lahko, podobno kot pri nizkem situ, razširili prepustno področje in povečali strmino v prehodnem področju.

Pri najpreprostejšem pasovnem zapornem situ potrebujemo dvojico kompleksno konjugiranih ničel na frekvenčni krožnici in dvojico kompleksno konjugiranih polov znotraj frekvenčne krožnice.

Sita z zahtevnejšimi specifikacijami načrtujemo s pomočjo transformacij analognih prototipnih sit oziroma modeliranja prevajalne funkcije.

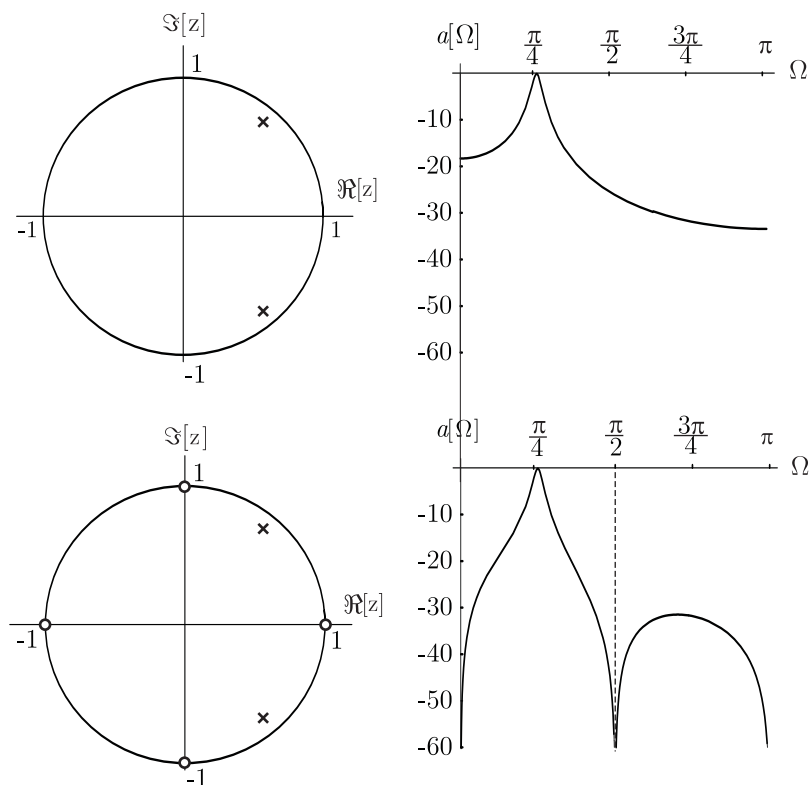
4.5.2 Impulzno invariantna transformacija

Postopek impulzno invariantne transformacije je najbolj neposredna preslikava sita iz prostora s v prostor z . Izhajamo iz zahteve po ohranitvi (invarianti) odziva sita na enotin impulz. Želimo torej, da je sistemska funkcija s transformacijo dobljenega diskretnega sita $h[n]$ enaka vzorčeni sistemske funkciji analognega prototipnega sita $h_a(t)$:

$$h[n] = h_a(nT_{vz}) \quad (4.91)$$

Pri načrtovanju se moramo zavedati, da se pri vzorčenju sistemske funkcije, v skladu z ugotovitvami v 3. poglavju, prevajalna funkcija preslika okrog mnogokratnikov vzorčne frekvence:

$$H_\delta(\omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\omega - \frac{2k\pi}{T_{vz}}) \quad (4.92)$$



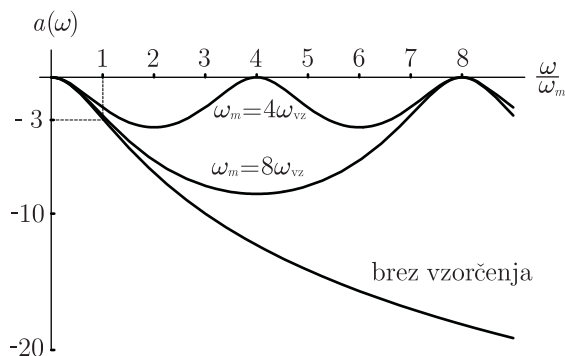
Slika 4.32 – Preprosto načrtovanje pasovnega sita

Prevajalno funkcijo diskretnega sita dobimo nato v skladu s (3.17) zgolj s spremembo merila na frekvenčni osi:

$$H(\Omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\frac{\Omega - 2k\pi}{T_{vz}}\right) \quad (4.93)$$

Če vrednost prevajalne funkcije $H_a(\omega)$ nad Nyquistovo frekvenco (nad polovico vzorčne frekvence) ni zanemarljivo majhna, dobimo prekrivanje preslikanih prevajalnih funkcij. Tudi pri nizkih vrednostih prevajalne funkcije v področju nad Nyquistovo frekvenco, pride do prekrivanja, vendar to vpliva predvsem na zaporno področje, vpliv na prepustno področje pa ni izrazit.

Za primer nizkega sita z enim polom na realni osi ($s_p = -\omega_m$) je vpliv prekrivanja na frekvenčno karakteristiko prikazan na sliki 4.33. Vidimo, da je vpliv prekrivanja tudi pri vzorčni



Slika 4.33 – Prekrivanje frekvenčne karakteristike zaradi vzorčenja

frekvenci $\omega_{vz} = 8\omega_m$ še vedno izdaten, ker pri tako preprostem situ amplituda prevajalne funkcije s frekvenco relativno počasi upada.

Iz navedenih razlogov je impulzno invariantna transformacija primerna predvsem za nizka sita, ki jim slabljenje v zapornem področju naglo oziroma vsaj monotono upada, kot so to na primer Butterworthova in Čebiševjeva sita tipa I. Za eliptična sita in Čebiševjeva sita tipa II z enakomerno valovitostjo v zapornem področju impulzno invariantna transformacija ni primerna zaradi prevelikega vpliva prekrivanja preslikanih prevajalnih funkcij.

Za realizacijo diskretnega sita potrebujemo njegovo prevajalno funkcijo v prostoru z :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_a(nT_{vz})z^{-n} \quad (4.94)$$

Zgornji izraz v splošnem ni primeren za neposredno transformacijo, saj običajno nimamo podane sistemske funkcije analognega sita $h_a(t)$ temveč le njegovo prevajalno funkcijo $H_a(s)$ v prostoru s . Da bi lahko prevajalno funkcijo $H_a(s)$ neposredno preslikali iz prostora s v prostor z , jo najprej zapišemo v obliki vsote parcialnih ulomkov. Prevajalno funkcijo N -tega reda, ki nima polov višjega reda, število polov pa je večje od števila ničel (kar zagotavlja monotono upadanje amplitudne karakteristike), lahko zapišemo v obliki:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - s_{pi}} \quad (4.95)$$

kjer so s_{pi} označeni poli prevajalne funkcije, konstante C_i pa so enaka residuum prevajalne funkcije v njenih polih:

$$C_i = \operatorname{res}_{s=s_{pi}} [H(s)] \quad (4.96)$$

Vsak člen v enačbi (4.95) je posledica enega pola. Odziv analognega sita na enotin impulz je enak vsoti odzivov, ki pripadajo posameznim parcialnim ulomkom:

$$h_a(t) = u(t) \sum_{i=1}^N C_i e^{s_{pi}t} \quad (4.97)$$

kjer je $u(t)$ označena enotina stopnica. Sistemska funkcija diskretnega sita je potem enaka:

$$h[n] = h_a(nT_{vz}) = u[n] \sum_{i=1}^N C_i e^{s_{pi}T_{vz}n} \quad (4.98)$$

Naredimo transform $\mathcal{Z}$ na obeh straneh zgornjega izraza in upoštevajmo linearnost transformata $\mathcal{Z}$. Dobimo:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N C_i \mathcal{Z} \left\{ \left(e^{s_{pi}T_{vz}} \right)^n u[n] \right\} \quad (4.99)$$

Iz razpredelnice transformov $\mathcal{Z}$ (tabela 2.1 na strani 39) lahko razberemo:

$$\mathcal{Z} \left\{ \left(e^{s_{pi}T_{vz}} \right)^n u[n] \right\} = \frac{1}{1 - \left(e^{s_{pi}T_{vz}} \right) z^{-1}} \quad (4.100)$$

in od tod:

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{1 - \left(e^{s_{pi}T_{vz}} \right) z^{-1}} \quad (4.101)$$

Vidimo, da se vsi poli s_{pi} iz ravnine s preslikajo v pole:

$$z_{pi} = e^{s_{pi}T_{vz}} \quad (4.102)$$

v ravnini z .

S to transformacijo lahko dobimo popolnoma uporabna sita, vendar zaradi prekrivanja prevajalnih funkcij transformacija ne ohranja verno lastnosti v frekvenčnem prostoru. Preslikava je sprejemljiva, če so vsi poli prevajalne funkcije v pasu $|\Im(s)| < \pi/T_{vz}$ ravnine s oziroma čim bliže realni osi.

Primer 4.1 – Kot zgled si oglejmo načrtovanje diskretnega nizkega sita z mejno frekvenco $\Omega_m = \pi/4$ in valovitostjo 3 dB v prepustnem področju na osnovi Čebiševjevega sita tretjega reda.

Čebiševjevo sito ima samo pole, zato lahko njegovo prevajalno funkcijo zapišemo v obliki:

$$H(s) = \frac{1}{(1 - \frac{s}{s_{p1}})(1 - \frac{s}{s_{p2}})(1 - \frac{s}{s_{p3}})} \quad (4.103)$$

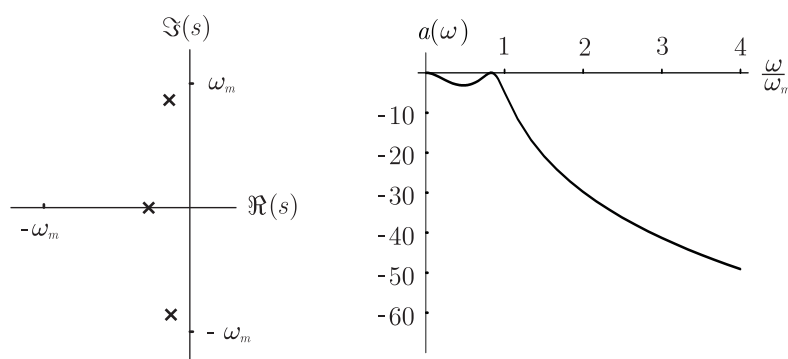
T_{vz} določimo tako, da dobimo ustrezno mejno frekvenco diskretnega sita, s pomočjo enačbe:

$$T_{vz} = \frac{\Omega_m}{2\pi f_m} \quad (4.104)$$

kjer je $z f_m$ označena mejna frekvenca prototipnega sita, ki jo lahko izberemo poljubno. Za $f_m = 1$ lahko preberemo vrednosti polov iz ustreznega kataloga analognih sit:

$$\begin{aligned} s_{p1} &= -1,75 \\ s_{p2} &= -0,875 + 5,441j \\ s_{p3} &= -0,875 - 5,441j \end{aligned}$$

Lega polov v ravnini s in frekvenčna karakteristika prototipnega sita sta prikazana na sliki 4.34. Prevajalno funkcijo $H(z)$ zapišemo v obliki:



Slika 4.34 – Lega polov in frekvenčna karakteristika prototipnega sita

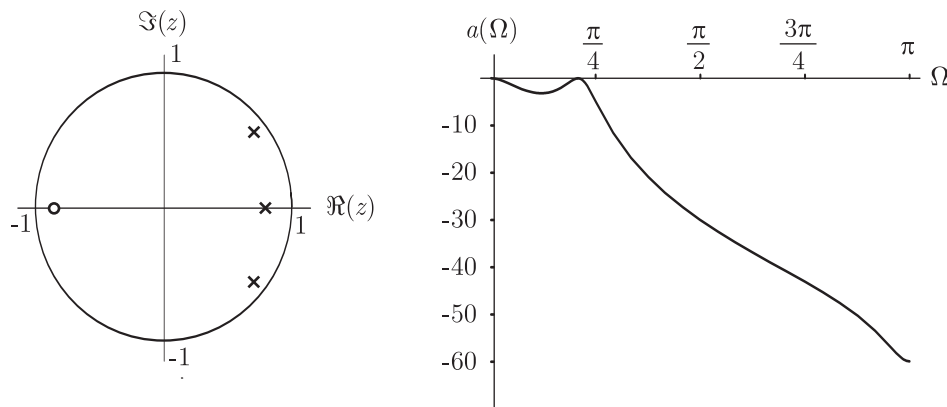
$$H(z) = \frac{C_1}{1 - z_{p1}z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - z_{p2}z^{-1}} + \frac{C_3}{1 - z_{p3}z^{-1}} \quad (4.105)$$

pole z_{pi} in konstante C_i izračunamo na osnovi enačb (4.102) in (4.96). Dobimo:

$$\begin{aligned} z_{p1} &= 0,803 & C_1 &= 1,75 \\ z_{p2} &= 0,697 + 0,564j & C_2 &= -0.875 + 0,141j \\ z_{p3} &= 0,697 - 0,564j & C_3 &= -0.875 - 0,141j \end{aligned}$$

Z numerično rešitvijo enačbe $H(z) = 0$ izračunamo še ničle prevajalne funkcije. Ena ničla leži v izhodišču, edina od nič različna ničla pa na negativni realni osi pri $z_n = -0,863$.

Lega polov in ničel in frekvenčna karakteristika tako dobljenega diskretnega sita sta prikazana na sliki 4.35.



Slika 4.35 – Lega polov in ničel ter frekvenčna karakteristika diskretnega sita

4.5.3 Bilinearna transformacija

Pri bilinearni transformaciji preslikamo vse točke ravnine s v točke ravnine z preko relacije:

$$z = \frac{1 + s/\omega_0}{1 - s/\omega_0} \quad (4.106)$$

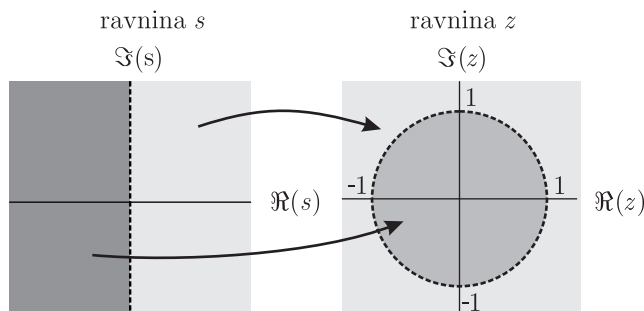
Transformacijo imenujemo bilinearna, ker sta števec in imenovalec linearni funkciji spremenljivke s .

Pri bilinearni transformaciji se preslika leva polravnina s znotraj frekvenčne krožnice v ravnini z in desna polravnina s izven frekvenčne krožnice v ravnini z , kot je to prikazano na sliki 4.36. Frekvenčna merilo se pri preslikavi nelinearno ukrivi, pri čemer se področje frekvenc $0 \leq \omega \leq \omega_0$ preslika v področje $0 \leq \Omega \leq \pi/2$ in področje frekvenc $\omega > \omega_0$ v področje $\pi/2 < \Omega < \pi$.

4.5.3.1 Preslikava prevajalne funkcije

Prevajalno funkcijo $H_a(s)$ analognega prototipnega sita lahko neposredno preslikamo iz ravnine s v ravnino z , tako da najprej na osnovi relacije (4.106) eksplicitno izrazimo s in nato z njim nadomestimo s v prevajalni funkciji $H_a(s)$:

$$H(z) = H_a\left(\omega_0 \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (4.107)$$

Slika 4.36 – Preslikava iz ravnine s v ravnino z

Ker pri bilinearni transformaciji preslikamo vse točke ravnine s v ravnino z , se na enak način preslikajo tudi poli in ničle prevajalne funkcije $H_a(s)$:

$$\begin{aligned} z_{pi} &= \frac{1 + s_{pi}/\omega_0}{1 - s_{pi}/\omega_0} \\ z_{ni} &= \frac{1 + s_{ni}/\omega_0}{1 - s_{ni}/\omega_0} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Pri analognem situ mora biti število ničel N manjše ali kvečjemu enako številu polov M , da je sito ustvarljivo. Kadar je število polov večje od števila ničel, leži $M - N$ ničel v neskončnosti. Te se pri bilinearni transformaciji preslikajo v točko $z = -1$. Če poznamo pole in ničle prototipnega analognega sita, lahko zapišemo prevajalno funkcijo $H(z)$ neposredno v obliki, s katere so razvidne ničle in poli:

$$H(z) = b_0(1 + z^{-1})^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_{ni}z^{-1})}{\prod_{i=1}^M (1 - z_{pi}z^{-1})} \quad (4.109)$$

Konstanto b_0 določimo tako, da imamo enako vrednost prevajalne funkcije preslikanega in originalnega sita pri frekvenci 0.

$$H(1) = H_a(0) \quad (4.110)$$

4.5.3.2 Sprememba frekvenčnega merila

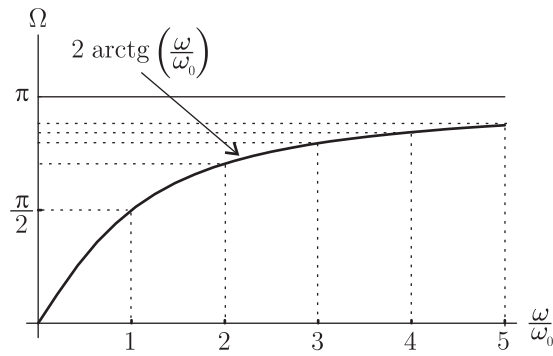
Frekvenčna os $s = j\omega$, ki predstavlja mejo med obema polravninama v ravnini s na sliki 4.36, se preslika v frekvenčno krožnico $z = e^{j\Omega}$ v ravnini z , pri čemer se nelinearno spremeni frekvenčno merilo. Kakšna je sprememba merila, lahko ugotovimo, če v izrazu (4.107) nadomestimo $s \leftarrow j\omega$ in $z \leftarrow e^{j\Omega}$ in izraz preuredimo. Dobimo:

$$\omega = \frac{\omega_0}{j} \frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega} + 1} = \frac{\omega_0}{j} \frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}} = \omega_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (4.111)$$

in

$$\Omega = 2 \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (4.112)$$

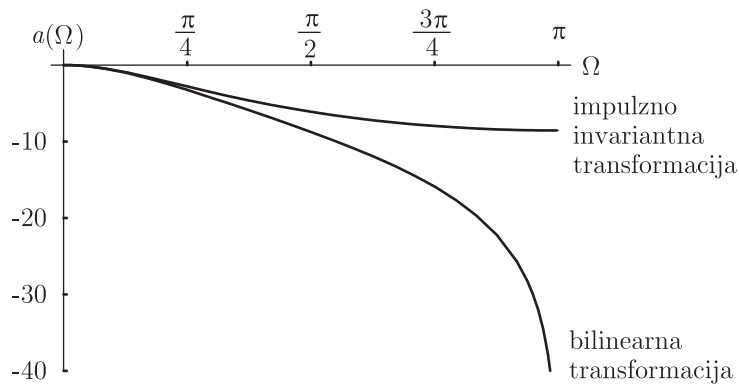
Celotno frekvenčno področje ω se stisne v interval med $-\pi$ in π frekvence Ω , pri tem pa se merilo nelinearno ukrivi. Ukrivljenje merila za frekvence $\omega > 0$ je prikazano na sliki 4.37. Frekvence



Slika 4.37 – Ukrikljenost merila na frekvenčni osi

do frekvence ω_0 se preslikajo dokaj linearno, nad to frekvenco pa se prične frekvenčno merilo vedno bolj stiskati. Sama frekvenca ω_0 pa se preslika točno na polovico aktualnega frekvenčnega področja Ω , to je v točko $\Omega = \pi/2$. Z izbiro frekvence ω_0 torej določamo, kako se bo merilo pri preslikavi ukrivilo.

Za primer sita z enim polom s slike 4.33 je primerjava frekvenčnih karakteristik dobljenih z impulzno invariantno ($\omega_{vz} = 8\omega_m$) in bilinearno transformacijo ($\omega_0 = 4\omega_m$) prikazana na sliki 4.38.



Slika 4.38 – Primerjava frekvenčnih karakteristik dobljenih z bilinearno in impulzno invariantno transformacijo
($s_p = -\omega_m$, $\omega_0 = 4\omega_m$, $\omega_{vz} = 8\omega_m$)

Na enak način kot pri amplitudnem poteku se spremeni tudi merilo faznega poteka prevajalne funkcije. Ta sprememba spremeni fazno popačenje, ki ga dobimo za prototipno sito v ravnini s .

Ker se pri preslikavi spremeni samo frekvenčno merilo, ostane valovitost pri sitih z enakomerno valovitostjo nespremenjena.

4.5.3.3 Povzetek postopka načrtovanja

Celoten postopek načrtovanja IIR sit s pomočjo bilinearne transformacije obsega naslednje faze:

1. Izhajamo iz specifikacij diskretnega nizkega sita Ω_p , Ω_z , a_p in a_z , kot so podane na strani 79.
2. Na osnovi izraza (4.111) transformiramo Ω_p in Ω_z v ω_p in ω_z analognega prototipnega sita.
3. Na osnovi zahtev ω_p , ω_z , a_p in a_z določimo red sita in izberemo ustrezno analogno sito.

4. Na osnovi izraza (4.108) transformiramo ničle s_{ni} in pole s_{pi} iz ravnine s v ničle z_{ni} in pole z_{pi} v ravnini z .
5. V skladu z (4.109) zapišemo izraz za $H(z)$.
6. Na osnovi (4.110) določimo še konstanto b_0 .
7. Če potrebujemo visoko ali pasovno sito, preslikamo nizkopasovno funkcijo $H(z)$ z ustrezno frekvenčno transformacijo.
8. Izberemo ustrezno strukturo. Najmanjši vpliv kvantizacije koeficientov imamo pri serijski vezavi celic drugega reda. V vsaki celici lahko združimo po en konjugirano kompleksen par polov in ničel. Združevanje konjugirano kompleksih parov je potrebno, če želimo imeti realne koeficiente sita. Kako in katere pole in ničle bomo združevali v celice, je nebitveno, če ne upoštevamo praktičnih omejitev pri kvantizaciji koeficientov in zaokroževanju rezultatov v množilnikih.
9. Izračunamo koeficiente sita za izbrano strukturo.

Primer 4.2 – Načrtati želimo diskretno nizko sito. Podane so specifikacije analognega sita, ki ga dobimo z dodatkom vzorčevalnika na vходу in rekonstrukcijskega vezja na izhodu diskretnega sita:

$$\begin{aligned}
 f_p &= 1\text{kHz} \\
 f_z &= 1,5\text{kHz} \\
 f_{vz} &= 10\text{kHz} \\
 a_p &= -0,30\text{dB} \\
 a_z &= -50\text{dB}
 \end{aligned}$$

Izračun:

- Določimo frekvenci Ω_p in Ω_z diskretnega sita

$$\begin{aligned}
 \Omega_p &= 2\pi f_p / f_{vz} = 0,628 \\
 \Omega_z &= 2\pi f_z / f_{vz} = 0,942
 \end{aligned}$$

- Ker so analogna sita v katalogih ponavadi podana za normirano frekvenco $\omega_p = 1$, izberemo ω_0 tako, da se mejna frekvenca Ω_p preslika v $\omega_p = 1$.

$$\omega_0 = \text{tg}^{-1}(\Omega_p/2) = 3,08$$

- Na osnovi (4.111) izračunamo ω_z prototipnega sita.

$$\omega_z = 1,568$$

- Iz tabeliranih podatkov za eliptične filtre ugotovimo, da dobimo pri $N = 5$ in $\omega_z = 1,556$ valovitost v prepustnem področju $a_p = -0,28\text{ dB}$ in v zapornem področju $a_z = -50,1\text{ dB}$,

kar izpolnjuje podane zahteve. Dobili smo prototipno sito z naslednjimi poli in ničlami:

$$\begin{aligned}
 s_{p1,2} &= -0.097 \pm 1,030j \\
 s_{p3,4} &= -0,334 \pm 0,718j \\
 s_{p5} &= -0,495 \\
 s_{n1,2} &= \pm 1,617j \\
 s_{n3,4} &= \pm 2,438j \\
 s_{n5} &\rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

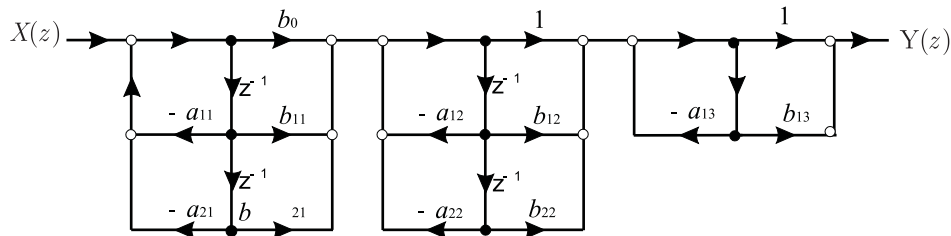
- Na osnovi izraza (4.108) preslikamo pole in ničle iz ravnine s v ravnino z . Dobimo:

$$\begin{aligned}
 z_{p1,2} &= 0.754 \pm 0.570j \\
 z_{p3,4} &= 0.728 \pm 0.364j \\
 z_{p5} &= 0.723 \\
 z_{n1,2} &= 0.567 \pm j0.824j \\
 z_{n3,4} &= 0.229 \pm 0.973j \\
 z_{n5} &= -1
 \end{aligned}$$

- Po izrazu (4.110) izračunamo konstanto b_0

$$b_0 = 0,0082$$

- Sito izvedemo kot kaskadno vezavo dveh celic drugega reda in ene celice prvega reda v diskretni strukturi II, kot je to prikazano na sliki 4.39.



Slika 4.39 – Struktura diskretnega sita petega reda

- V posamezni celici združimo po en konjugirano kompleksen par polov in ničel. Za prvo celico uporabimo $z_{p1,2}$ in $z_{n1,2}$, za drugo $z_{p3,4}$ in $z_{n3,4}$ ter za zadnjo z_{p5} in z_{n5} .
- Koeficienta a_{11} in a_{21} prve celice izračunamo tako, da izenačimo polinom imenovalca z $(1 - z_{p1})(1 - z_{p2})$:

$$1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2} = (1 - z_{p1}z^{-1})(1 - z_{p2}z^{-1})$$

Z rešitvijo gornje enačbe dobimo:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(z_{p1} + z_{p2}) \\
 a_{21} &= z_{p1}z_{p2}
 \end{aligned}$$

- Po podobnem postopku izračunamo še vse ostale koeficiente sita. Dobimo:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1,508 & a_{21} &= 0,893 \\ b_{11} &= 1,130 & b_{21} &= 1,000 \\ a_{12} &= -1,456 & a_{22} &= 0,662 \\ b_{12} &= -0,458 & b_{22} &= 1,000 \\ a_{13} &= -0,723 & b_{13} &= 1,000 \end{aligned}$$

4.6 Problemi

1. Določite, ali ima sito s podano prevajalno funkcijo linearno fazo in kakšna je zakasnitev signala.

$$\begin{aligned} H_1(z) &= 1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} \\ H_2(z) &= 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} \end{aligned}$$

Fazne razmere preverite s primerjavo potekov izhodnega signala pri harmoničnem signalu $x[n] = \sin(2\pi n/100)$ za podani siti.

2. Določite pasovno širino (-3 dB) povprečevalnega sita s prevajalno funkcijo $H(z)$ za primera $N = 5$ in 21 . Primerjajte upadanje amplitudne karakteristike od števila N .

$$H(z) = \sum_{n=0}^N z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (4.113)$$

3. Pasovno sito pri centralni frekvenci Ω_0 načrtujte na osnovi predstavitev karakteristike povprečevalnika kot nizkega sita v lego okoli Ω_0 . To dosežemo s konvolucijo spektralne črte pri Ω_0 in karakteristike nizkega sita v frekvenčnem prostoru.

a) Izračunajte karakteristiko s konvolucijo. Določite prevajalno karakteristiko v odvisnosti od frekvence za primera $\Omega_0 = \pi/2$ in $\pi/3$ ter $N = 21$.

b) Preverite izračunano karakteristiko za $\Omega_0 = \pi/2$ in $\pi/3$ ter $N = 21$ na osnovi odziva v časovnem prostoru. Odziv pasovnega sita izračunamo kot produkt odziva idealnega resonatorja in nizkega sita.

Razložite bistveno počasnejše upadanje stranskih vrhov pri selektivnem situ kakor pri nizkem situ. S čim razlagate nesimetričnost stranskih vrhov pri $\Omega_0 = \pi/3$.

4. Določite odziv idealnega pasovnega sita preko inverznega Fourier transforma. Za spodnjo mejno frekvenco izberite $\Omega_1 = \pi/5$ in zgornjo $\Omega_2 = \pi/3$. Izračunajte prevajalno karakteristiko, če odziv simetrično oknite s pravokotnim oknom z $N = 21$. Oglejte si karakteristiko še za $N = 41, 51$ in 81 .
5. Situ vrste FIR z $y(n) = x(n) - x(n - 4)$ določite amplitudni in fazni odziv ter odziv na vhodni signal $x(n) = \cos(\pi n/2) + \cos(\pi n/4)$.

6. Imamo dva povprečevalnika, katerih prevajalni funkciji sta določeni z:

$$y_1(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$$

$$y_2(n) = \frac{1}{4M} x[n+M] + \frac{1}{2M} \sum_{k=-M+1}^{M-1} x[n-k] + \frac{1}{4M} x[n-M]$$

Katera izvedba povprečevalnika je boljša glede na prevajalno karakteristiko oziroma v čem se razlikujeta? Analizirajte razliko pri $M = 10$.

7. Določite sito FIR, ki popolnoma zaduši harmonični signal frekvence $\Omega = 2\pi/3$. Prevajalna funkcija naj ima $H(\Omega = 0) = 1$ in sito realne koeficiente.
8. Imamo povprečevalnik s funkcijo:

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-9}$$

Frekvenca vzorčenja je 1 kHz. Katere harmonične komponente sito popolnoma zaduši?

9. Načrtajte na osnovi nizkega sita FIR z mejno frekvenco $\Omega_m = \pi/3$, ki ste ga določili na osnovi enega postopka, naslednja sita:
- a) visoko sito VS s pomočjo prestavitve centralne frekvence na $f_{vz}/2$,
 - b) pasovnega zapornega sita PZS na osnovi vsote odzivov nizkega in visokega sita in
 - c) pasovnega prepustnega sita PS na osnovi ustrezne kombinacije odzivov vseprepustnega VPS, nizkega NS in visokega sita VS.

Preverite lastnosti načrtovanih sit.

10. Določite, kakšen fazni potek (minimalno, maksimalno ali linearno fazo) imajo sita FIR na osnovi lege ničel s prevajalno funkcijo:

$$H_1(z) = (1/6)(6 + z^{-1} - z^{-2})$$

$$H_2(z) = (1/6)(1 - z^{-1} - 6z^{-2})$$

$$H_3(z) = (1/3)(1 - 2.5z^{-1} - 1.5z^{-2})$$

$$H_4(z) = (1/2)(1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2})$$

Gornje funkcije imajo vse enako amplitudno karakteristiko. Razložite z lego ničel. Za minimalno fazo so vse ničle prevajalne funkcije znotraj enotske krožnice, za maksimalno fazo so vse ničle zunaj enotske krožnice in za linearno fazo ležijo ničle inverzno in konjugirano kompleksno.

11. Ugotovite, če ima FIR z naslednjim odzivom $H(z) = 10 + 9z^{-1} - 7z^{-2} - 8z^{-3} + 5z^{-5} + 3z^{-6}$ minimalni fazni potek sita.
12. Določite ničle sistemskih funkcij in določite značaj vezij:

$$y_1[n] = x[n] + x[n-1]$$

$$y_2[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$y_3[n] = x[n] - x[n-3]$$

$$y_4[n] = x[n-4]$$

$$y_5[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y_6[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

13. Preverite trditvi: konvolucija dveh nizov minimalne faze je vedno niz minimalne faze in vsota dveh nizov minimalne faze je vedno niz minimalne faze.
14. Določite frekvenčno karakteristiko pravokotnega, trikotnega, Hannovega, Hammingovega in Kaiserjevega ($\beta = 8$) okna za $N = 51$. Primerjajte širine osnovnega snopa, upadanje stranskih snopov in slabljenje največjega stranskega snopa.
15. Načrtajte nizko sito z mejno frekvenco $\pi/3$ reda $N = 21$ na osnovi oknjenja odziva preko inverznega Fourier transforma. Uporabite pravokotno, trikotno in Hammingovo okno. Primerjajte pasovno širino pri usihu za -3 dB glede na frekvenco $\Omega = 0$ in širino do prvega minimuma.
16. Načrtajte nizko sito enake valovitosti z mejno frekvenco $\pi/3$ reda $N = 21$ s Hammingovim oknom. Z ustreznim matematičnim programom določite lege ničel in preverite, ali lege ustrezajo pogojem za sita z linearno fazo.
17. Načrtajte sito Hilbertovega transformata na osnovi idealnega odziva in oknjenja s Hammingovim oknom z $N = 21$. Primerjajte izhodni signal sita z vhodnim pri krmiljenju s harmoničnim signalom frekvence $\pi/4$. Določite maksimalna odstopanja znotraj frekvenčnega področja med 0.1π in 0.9π , če amplitudo karakteristike normirate na srednjo aritmetično vrednost omenjenega področja. Kakšne razmere dobite pri uporabi Blackmanovega okna?
18. S harmoničnim signalom vzporedno krmilite sito Hilbertovega transformata $H_1(z)$ iz problema 17 in vseprepuščno sito FIR $H_2(z)$. Obe siti naj enako zakasni signal na izhodu. Preverite, ali sta izhodna signala obeh sit med seboj ortogonalna? Ali je potrebno s korelacijo preveriti ortogonalnost za različne frekvence vhodnega signala med 0 in π ?
19. Diferenciator načrtajte na osnovi odziva idealnega diferenciatorja, ki ga oknite s Hammingovim oknom z $N = 20$. Določite maksimalna relativna odstopanja med doseženo in idealno amplitudno karakteristiko v območju med 0 in 0.9π . Kakšne razmere dobite pri uporabi Hammingovega okna?
20. S primernim računalniškim programom načrtujte različna sita na osnovi oknjenja in na osnovi načrtovanja enake valovitosti.
21. Določite amplitudno in fazno karakteristiko filtra prvega reda s prevajalno karakteristiko:

$$H(z) = \frac{z-2}{2(z-0,5)}$$

Narišite lego polov in ničel.

22. Sito drugega reda ima dvojni pol pri $p_{1,2} = 0.5$ in ničli pri $z_{1,2} = e^{\pm 3\pi/4}$. Določite frekvenčni odziv in mejno frekvenco.

23. Določite pasovni širini nizkih sit:

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-2}}$$

24. Načrtajte nizko sito s poskušanjem lociranja polov. Sito naj ima približno enako pasovno širino ($\pi/3$) za primere:

a) prvega reda z realnim polom ($z_{n_1} = 0, z_{p_1} = a_1$),

b) drugega reda ($z_{n_1,2} = 0$, konjugirano kompleksna pola $z_{p_{1,2}} = r_2 e^{\pm j\phi_2}$) in

c) tretjega reda ($z_{n_1} = -1, z_{n_{2,3}} = 0$, kompleksno konjugirana pola $z_{p_{1,2}}$ na radiju r_3 pri kotu $\pm\phi_3$ in z_{p_3} na realni osi na razdalji r_4).

Določite amplitudne in fazne karakteristike.

25. Na osnovi problema 24 narišite lege polov in ničel za sita prvega, drugega in tretjega reda.

26. Na osnovi problema 24 z nizkim sitom narišite lege polov in ničel za vseprepusno sito prvega, drugega in tretjega reda.

27. Vzemimo sito z glavnikasto karakteristiko v frekvenčnem prostoru s prevajalno karakteristiko $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-L(M+1)}}{1 - z^{-L}}$$

Določite amplitudno in fazno karakteristiko za parametra $L = 3$ in $M = 7$. Narišite lege polov in ničel ter si razložite delovanje sita.

28. Na osnovi ugotovitev pri reševanju problema 27 načrtajte sito, ki bo zadušilo osnovni harmonični signal frekvence $\pi/10$ in vse višje (do devete) razen pete harmonične komponente.

29. S primernim načrtovalskim programom za načrtovanje sit IIR preverite postopke načrtovanja na osnovi impulzne invariance in bilinearne transformacije. Preverite različne vrste sit (nizka, visoka in pasovna) ter različne tipe (Butterworthove, Čebiševjeve I in II, eliptične in Besselove). Pri načrtovanju bodite pozorni na vpliv širine prehodnega območja in dopustne valovitosti na zahtevan red sita ter lokacije polov in ničel. Opazujte fazne poteke različnih tipov sit in zakasnitve signala.

30. Določite vse možne strukture sita drugega reda z enačbo:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Sestavite za izbrane strukture ustrezne programe, ki bodo računali izhodni niz $y[n]$ na osnovi vhodnega niza $x[n]$.

31. Imamo paralelno strukturo dveh celic sit prvega reda:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

Analizirajte sito glede na posamezno celico in skupno vezavo. Za $a=0.5$ določite vezavo z eno celico drugega reda.

32. V izrazu $H(z)$ iz problema 31 tvorite razliko obeh ulomkov. Kakšno sito dobimo in kakšen bo zapis za sito z eno celico drugega reda?
33. Imamo podano sito FIR četrtega reda s koeficienti a_0, a_1, a_2, a_3 in a_4 . Kakšni bi bili koeficienti dveh kaskadno vezanih sit FIR drugega reda?

5 Uporaba DFT pri analizi in obdelavi signalov

Fourier transform uporabljamo pri analognih signalih predvsem kot matematično orodje za spektralno analizo signala. Določene lastnosti signalov je namreč mnogo lažje razbrati iz spektra signala kot iz njegovega časovnega poteka. Analognih signalov ne moremo obdelovati s pomočjo Fourier transforme iz preprostega razloga, ker nimamo na voljo analognega vezja, ki bi neposredno izvajalo Fourier transform signala. Zato tudi analogni spektralni analizatorji niso izvedeni na osnovi Fourier transforme. Običajno so spektralni analizatorji izvedeni s pasovnim sitom in frekvenčnim mešanjem signala s spremenljivo frekvenco, tako da se centralna frekvenca sita navidezno pomika vzdolž frekvenčne osi.

Pri diskretnih signalih je situacija nekoliko drugačna. Tu lahko nad signali neposredno izvajamo matematične operacije. Omejitev predstavlja predvsem hitrost, s katero lahko izvajamo računske operacije in natančnost tako računanja kot zapisa posameznih vzorcev signala. Pri analizi diskretnih signalov smo se srečali z dvema oblikama diskretnega Fourier transforme: diskretni Fourier transform (DFT), ki smo ga definirali pri obravnavi periodičnih diskretnih signalov v razdelku 1.4 kot:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (5.1)$$

in časovno diskretni Fourier transform, ki smo ga definirali pri obravnavi aperiodičnih signalov v razdelku 1.4 kot:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (5.2)$$

Ker imamo večinoma opravka z analizo aperiodičnih signalov bi potrebovali DTFT vendar ta za analizo (s spektralnim analizatorjem) ni najbolj primeren, ker je spekter zvezen, kar pomeni, da bi ga morali izračunati v neskončno frekvenčnih točkah. Zato namesto tega, kot bomo videli v nadaljevanju, ponavadi uporabimo kar DFT.

Poleg tega, da nam služi DFT kot orodje za analizo signalov, pa ga lahko uporabimo tudi pri sami obdelavi signalov, kot na primer pri filtriranju, če na ta način povečamo računsko učinkovitost obdelave. Računsko učinkovitost obdelave signalov je mogoče z uporabo DFT povečati predvsem zato, ker

- so nekatere operacije (npr. operacija filtriranja) v frekvenčnem prostoru precej preprostejše kot v časovnem prostoru in
- ker obstajajo hitri algoritmi za izračun DFT in IDFT, ki jih poznamo pod skupnim imenom *hitri Fourier transform*.

V tem poglavju si bomo najprej ogledali osnovne algoritme za hitri izračun diskretnega Fourier transforme, nato pa še nekaj primerov uporabe DFT pri analizi in obdelavi signalov.

5.1 Hitri Fourier transform - FFT

Kot smo omenili že v uvodu tega poglavja, uporabljamo izraz *hitri Fourier transform* (FFT - Fast Fourier Transform) kot skupno ime za različne algoritme, ki omogočajo izračun DFT z bistveno manjšim številom računskih operacij, kot bi bilo to potrebno, če bi ga računali neposredno na osnovi izraza (5.1).

Želja po zmanjšanju računskih operacij pri izračunu DFT je že zelo stara. Za prvi učinkovit algoritem lahko štejemo postopek Cooley-Turkey. Ime ima po avtorjih, ki sta ga objavila leta 1965, čeprav je bilo kasneje, leta 1985, odkrito, da je postopek opisal že Gauss leta 1805 v manj znani reviji, ki je izhajala le v latinskem jeziku.

Že na samem začetku se zdi potrebno opozoriti na pravilno razumevanje in rabo pojma FFT. Pogosto bomo, tudi v nadaljevanju te knjige, srečali povezave kot: "naredimo FFT", "FFT signala je enak" in podobno. Takšna raba je lahko zelo zavažajoča, saj dajejo občutek, da gre pri FFT za nek nov transform, kar pa ni res. Pravilno bi se zgornji dve izjavi namreč glasili: "s pomočjo FFT izračunamo DFT" in "DFT (ki smo ga izračunali s pomočjo FFT) je enak".

Postopki FFT temelje na dekompoziciji transformata dolžine N na več krajših transformov. Poznamo dva osnovna postopka dekompozicije: decimacijo po času (DIT - Decimation In Time) in decimacijo po frekvenci (DIF - Decimation In Frequency).

5.1.1 Decimacija v času

Pri tem postopku izvedemo dekompozicijo z decimacijo N vzorcev vhodnega signala. Dekompozicija je najučinkovitejša, kadar je število N celoštevilčna potenca števila 2:

$$N = 2^M \iff M = \log_2 N \quad (5.3)$$

kjer je M naravno število. V tem primeru dobimo z M polovičenji (decimacijami za faktor 2) osnovnega niza N nizov z enim samim vzorcem.

Izhajamo iz enačbe (5.1). V osnovni definiciji bomo zaradi enostavnosti izpustili skalirni faktor $1/N$, saj lahko dobljene komponente transformata pomnožimo s skalirnim faktorjem šele po izračunu. Osnovno vrsto najprej razstavimo v dve vrsti. Prva vrsta naj vsebuje vzorce s sodimi indeksi:

$$n = 2r \quad ; \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (5.4)$$

in druga vzorce z lihimi indeksi:

$$n = 2r + 1 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (5.5)$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} = \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \left(W_N^2\right)^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] \left(W_N^2\right)^{kr} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Konstanto W_N^2 v gornjem izrazu, ki pripada transformu dolžine N , lahko izrazimo s konstanto transformu dolžine $N/2$:

$$W_N^2 = e^{-2j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \quad (5.7)$$

Upoštevamo to v izrazu (5.6) in dobimo:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{kr} \quad (5.8)$$

Če primerjamo gornji izraz z osnovnim izrazom za izračun DFT (5.1) vidimo, da prva vsota predstavlja DFT sodih vzorcev osnovnega niza. Označimo ga z $X_s[k]$. Druga vsota predstavlja DFT lihih vzorcev in ga označimo z $X_l[k]$. Dobimo:

$$X[k] = X_s[k] + X_l[k]W_N^k \quad (5.9)$$

$X_s[k]$ in $X_l[k]$ sta transformi polovične dolžine, zato je tudi perioda spektra enaka $N/2$ in velja:

$$\begin{aligned} X_s[k + N/2] &= X_s[k] \\ X_l[k + N/2] &= X_l[k] \end{aligned} \quad (5.10)$$

kar pomeni, da je potrebno izračunati le njune komponente za $0 \leq k < N/2$. Komponente osnovnega transformu za $0 \leq k < N/2$ računamo torej neposredno po enačbi (5.9), za preostale pa uporabimo izraz:

$$X[k + N/2] = X_s[k] + X_l[k]W_N^{k+N/2} \quad ; \quad 0 \leq k < N/2 \quad (5.11)$$

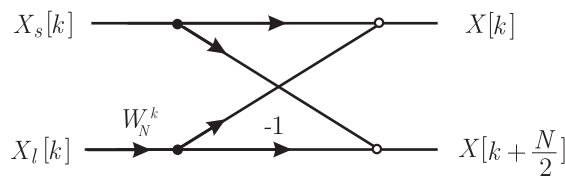
Upoštevamo še:

$$W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N/2}{N}} = e^{j\pi} = -1 \quad (5.12)$$

in dobimo:

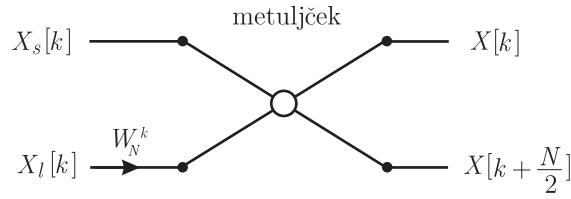
$$X[k + N/2] = X_s[k] - X_l[k]W_N^k \quad ; \quad 0 \leq k < N/2 \quad (5.13)$$

Za komponente transformu z indeksi med $N/2$ in $N-1$ lahko tako uporabimo že izračunane komponente $X_s[k]$ in $W_N^k X_l[k]$, tako da hkrati izračunamo $X[k]$ in $X[k+N/2]$, kot je to prikazano v diagramu pretoka signala na sliki 5.1.

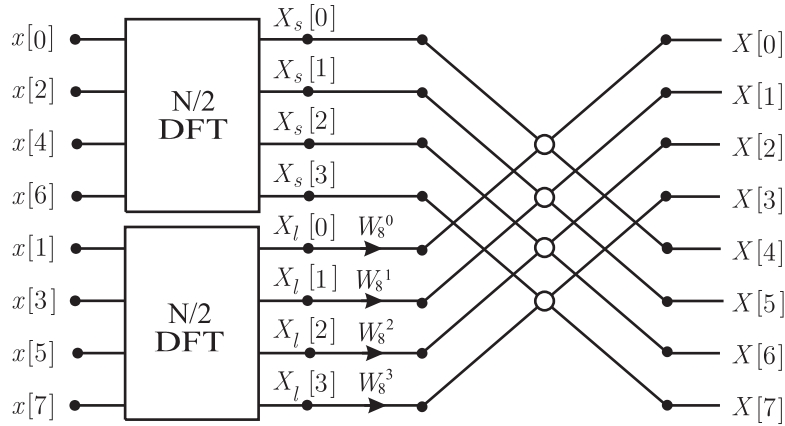


Slika 5.1 – Kombinacija dveh soležnih komponent polovičnih transformov

Za izračun dveh komponent izhodnega transformu iz komponent polovičnih transformov potrebujemo tako le eno množenje, eno seštevanje in eno odštevanje. Kombinacija seštevanja in odštevanja je enaka pri izračunu vseh komponent transformu, saj ni odvisna od indeksa k . Zaradi specifične oblike jo imenujemo tudi metuljček (angl. butterfly). Ker se pri izračunu FFT pogosto ponavlja, uvedemo zanjo nov simbol, kot je to prikazano na sliki 5.2.



Slika 5.2 – Metuljček kot osnovna komponenta izračuna pri FFT

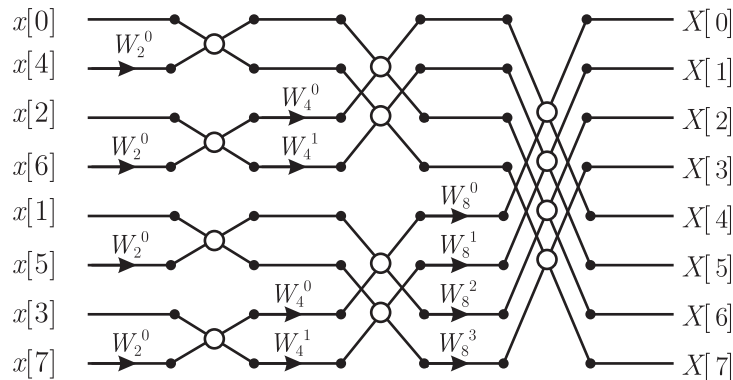
Slika 5.3 – Struktura FFT-DIT dimenzije $N = 8$ po prvi dekompoziciji

Za primer $N = 8$ je postopek izračuna celotnega DFT po prvi dekompoziciji prikazan na sliki 5.3.

Postopek dekompozicije lahko sedaj ponovimo na obeh transformih dolžine $N/2$ in dobimo 4 transforme dolžine $N/4$. Po M dekompozicijah dobimo na vhodu N transformov dolžine 1, ki pa so kar enaki vhodnim vzorcem, saj za DFT dolžine 1 velja:

$$X[0] = \sum_{n=0}^0 x[n]W_1^0 = x[0] \quad (5.14)$$

Za primer $N = 8$ je končni rezultat po 3-kratni ($\log_2 N$) dekompoziciji prikazan na sliki 5.4.

Slika 5.4 – Struktura FFT-DIT dimenzije $N = 8$

Opazimo lahko, da indeksi signala na vhodu ne nastopajo več v pravilnem vrstnem redu temveč premešano. To premešanje je posledica zaporednega razdeljevanja na sode in lihe vrednosti. Pokazati je mogoče, da tako dobljen vrstni red ustreza bitno reverznemu razvrščanju. Tega

naravni indeks	binarni zapis	obrnjen zapis	reverzen indeks
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Tabela 5.1 – Naravni in bitno reverzni indeksi pri FFT

dobimo, če indekse najprej zapišemo v binarnem zapisu v naravnem vrstnem redu in jim nato obrnemo vrstni red bitov. Zgled za $N = 8$ kaže razpredelnica 5.1. Za hitrejše računanje FFT imajo nekateri zmogljivejši signalni procesorji že vgrajeno možnost naslavljanja v reverznem bitnem redu.

5.1.2 Računska učinkovitost FFT

Računsko učinkovitost FFT lahko ugotavljamo, če primerjamo število računskih operacij, ki jih potrebujemo za izračun, s številom računskih operacij, ki bi jih potrebovali z računanjem neposredno po enačbi (5.1). Pred pojavom signalnih procesorjev so bila pomembna predvsem množenja, saj je potreboval za množenje procesor približno tridesetkrat več časa kot za seštevanje. Zato je bilo narejenih veliko algoritmov, ki so zmanjševali potrebno število množenj na račun povečanega števila seštevanj. Ker imajo signalni procesorji vgrajene množilnike, ki lahko množenje opravijo v enem urnem ciklu, takšni algoritmi nimajo več pravega pomena. Ker je večina procesorjev sposobna v istem ciklu rezultat množenja še prišteti neki vrednosti, se pogosto kot merilo uporablja kar število operacij zmnoži in prištej. Takšen način je zelo primeren za diskretna sita, ker se rezultat množenja zelo pogosto prišteva prej dobljenemu rezultatu. Ker ima FFT precej zahtevnejšo strukturo, tako poenostavljeno vrednotenje računskih operacij ni najprimernejše. Nekateri algoritmi FFT so sicer dodatno prilagojeni tem zmožnostim signalnih procesorjev, vendar njihova obravnava presega okvire te knjige.

Iz zgoraj navedenih razlogov bomo pri računanju potrebnega števila operacij enakovredno upoštevali seštevanja, odštevanja in množenja. Pri tem pa se moramo zavedati, da je potrebno za množenje dveh kompleksnih števil (a,b) in (b,c) :

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (5.15)$$

izvesti šest operacij (4 množenja in dve seštevanji), za množenje realnega števila s kompleksnim pa sta potrebni le dve množenji. Za seštevanje dveh kompleksnih števil sta potrebni dve operaciji.

Oglejmo si sedaj število operacij, ki je potrebno za izračun DFT po osnovni enačbi (5.1). Za izračun vsake komponente transformata je potrebno N množenj in $N - 1$ seštevanj. Množenja in seštevanja so v splošnem kompleksna. Ker moramo izračunati N komponent transformata, je

skupno število operacij enako:

$$K_{\text{DFT}} = N(6N + 2(N - 1)) \doteq 8N^2 \quad (5.16)$$

Če predpostavimo, da je signal $x[n]$ realen, so namesto kompleksnih množenj potrebna množenja kompleksnega števila z realnim številom. Poleg tega je potrebno pri realnih signalih zaradi simetrije izračunati le $N/2$ vrednosti. Celotno število operacij je v tem primeru enako:

$$K_{\text{DFTre}} = \frac{N}{2}(2N + 2(N - 1)) \doteq 2N^2 \quad (5.17)$$

kar je četrtno manj kot pri kompleksnem signalu.

Pri oceni števila operacij potrebnih za FFT si lahko pomagamo s sliko 5.4. Vidimo, da računamo transform v $M = \log_2 N$ stopnjah. V vsaki stopnji nastopa $N/2$ metuljkov. Za izračun vsakega metuljčka sta potrebni dve kompleksni seštevanji in eno kompleksno množenje. Skupno število računskih operacij je tako enako:

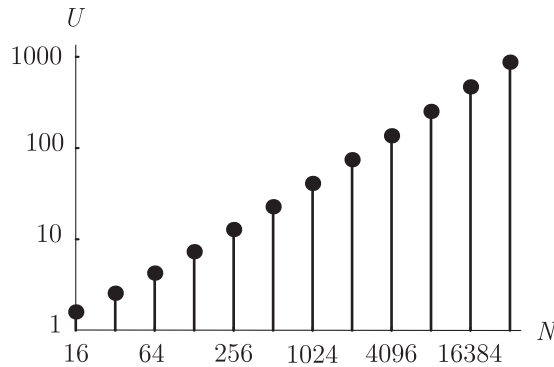
$$K_{\text{FFT}} = \log_2(N) \frac{N}{2}(4 + 6) = 5N \log_2 N \quad (5.18)$$

Predpostavka, da je signal $x[n]$ realen, nima bistvenega vpliva na zmanjšanje števila operacij, saj se to pozna le v prvi stopnji, potem pa množenja postanejo spet kompleksna. Ravno tako zelo malo prihranimo, če računamo samo polovico komponent transforma, ker se to pozna le v zadnji stopnji.

Ker imamo večinoma opravka z realnimi signali, je smiselno pri izračunu faktorja učinkovitosti število operacij pri FFT primerjati s številom operacij DFT realnega signala:

$$U = \frac{K_{\text{DFTre}}}{K_{\text{FFT}}} = \frac{2}{5} \frac{N}{\log_2 N} \quad (5.19)$$

Vidimo, da učinkovitost hitro, skoraj linearno narašča z dolžino transforma N , kot je to prikazano na sliki 5.5. Pri manjših dolžinah FFT lahko učinkovitost nekoliko povečamo, če upoštevamo,



Slika 5.5 – Učinkovitost FFT v odvisnosti od dolžine transforma

da je $W_K^0 = 1$ za vsak K in vsa ta množenja izpustimo, vendar lahko to precej zaplete izvedbo samega algoritma.

5.1.3 Decimacija po frekvenci

Postopek decimacije po frekvenci (DIF) je dualen postopku DIT. Tu izvajamo decimacijo v frekvenčnem namesto v časovnem prostoru. Dekompozicija temelji na ločitvi komponent transforma $X[k]$ v dva niza, prvega s sodimi in drugega z lihimi indeksi. Vhodni signal $x[n]$ pri tem

razdelimo v dva enako dolga niza v naravnem vrstnem redu. Ob upoštevanju lastnosti potenc števila W_N , ki smo jih upoštevali tudi pri DIT, in lastnosti:

$$W_N^{rN} = (W_N^N)^r = 1^r = 1 \quad (5.20)$$

zapišimo najprej DFT za sode indekse $k = 2r$:

$$\begin{aligned} X[2r] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{2rn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{2rn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{rn} + W_N^{rN} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] W_{N/2}^{rn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + N/2]) W_{N/2}^{rn} = \\ &= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{x[n] + x[n + N/2]\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

in nato še za lihe indekse $k = 2r + 1$:

$$\begin{aligned} X[2r + 1] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{(2r+1)n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{(2r+1)n} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{rn} W_N^n + \\ &+ W_N^{rN} W_N^{N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] W_{N/2}^{rn} W_N^n = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} ((x[n] - x[n + N/2]) W_N^n) W_{N/2}^{rn} = \\ &= \text{DFT}_{\frac{N}{2}} \{(x[n] - x[n + N/2]) W_N^n\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Gornja izraza določata postopek računanja FFT-DIF po eni decimaciji po frekvenci, kot je to za primer $N = 8$ prikazano na sliki 5.6.

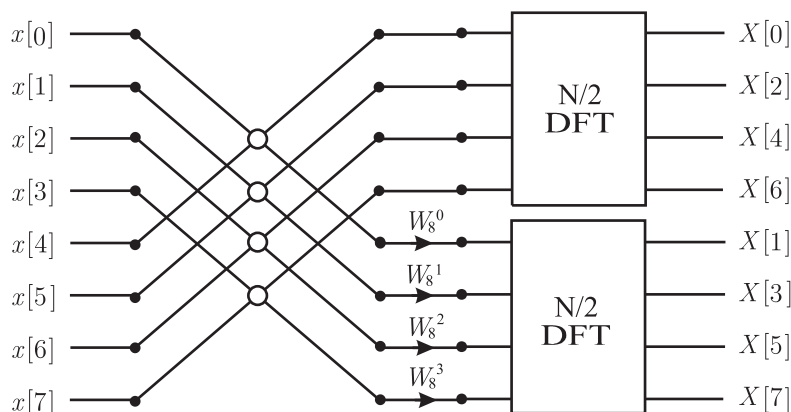
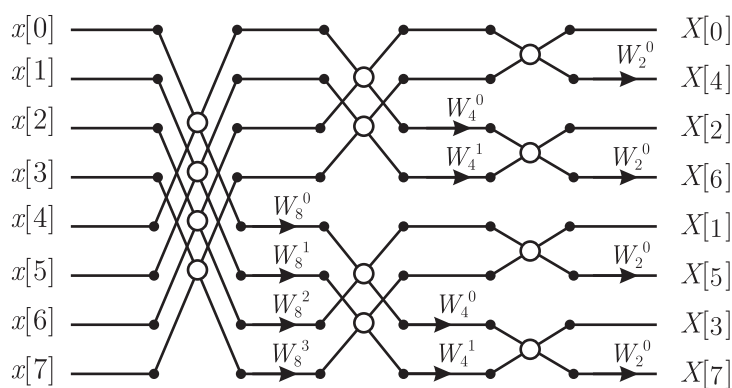
Če nadaljujemo z dekompozicijo polovičnih transformov, dobimo končno shemo FFT-DIF kot je prikazana na sliki 5.7.

Iz slik lahko ugotovimo, da imamo pri postopku DIF naravno razvrščene časovne vzorce, frekvenčni vzorci pa so premešani po reverznem bitnem redu. Računska učinkovitost je pri DIF enaka kot pri DIT, razlika je le v razvrstitvi vzorcev na vhodu oziroma izhodu.

Če primerjamo DIT prikazan na sliki 5.4 in DIF na sliki 5.7, lahko opazimo, da predstavlja diagram pretoka signala za DIF transpozicijo diagrama pretoka signala za DIT. Pri tem velja opozoriti, da pravil o transpoziciji diagrama pretoka signala ne moremo enostavno posplošiti iz primera vezja z enim vhodom in enim izhodom na več vhodno in več izhodno vezje.

5.1.4 FFT realnih signalov

Pri obravnavi računske učinkovitosti FFT v razdelku 5.1.2 smo videli, da FFT omogoča obdelavo kompleksnih signalov, zato v primeru realnih signalov ne izkoriščamo celotne zmogljivosti algo-

Slika 5.6 – Struktura FFT-DIF dimenzije $N = 8$ po prvi dekompozicijiSlika 5.7 – Struktura FFT - DIF dimenzije $N = 8$

ritma. Temu se ognemo, če sočasno obdelujemo dva realna signala. Realna signala $x_1[n]$ in $x_2[n]$ združimo v en kompleksen signal:

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n] \quad (5.23)$$

Na osnovi linearnosti DFT lahko zapišemo:

$$X[k] = X_1[k] + jX_2[k] \quad (5.24)$$

Zapišimo še konjugirano kompleksno vrednost transformata z obrnjenimi indeksi:

$$X^*[N - k] = X_1^*[N - k] - jX_2^*[N - k] \quad (5.25)$$

Ker sta $X_1[k]$ in $X_2[k]$ transformata realnih signalov, velja:

$$\begin{aligned} X_1^*[N - k] &= X_1[k] \\ X_2^*[N - k] &= X_2[k] \end{aligned} \quad (5.26)$$

in od tod tudi:

$$X^*[N - k] = X_1[k] - jX_2[k] \quad (5.27)$$

Z seštevanjem oziroma odštevanjem enačb (5.24) in (5.27) dobimo po preureditvi rezultat:

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N - k]}{2}$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X^*[N-k]}{2j} \quad (5.28)$$

Za izračun transformov dveh realnih nizov potrebujemo torej toliko operacij kot za izračun transformov enega kompleksnega niza z dodatkom $2N$ kompleksnih seštevanj.

5.2 Analiza časovno omejenih signalov z DFT

Kot smo že omenili na začetku tega poglavja, je DFT določen z enačbo (5.1), v osnovi orodje za spektralno analizo periodičnih signalov. DFT preslika N vzorcev ene periode signala $x[n]$ v N spektralnih komponent ene periode spektra $X[k]$. Zaradi periodičnosti signala imamo opravka z diskretnimi spektralnimi komponentami pri mnogokratnikih osnovne frekvence Ω_0 :

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (5.29)$$

Indeks k pove kateri mnogokratnik osnovne frekvence predstavlja posamezna spektralna komponenta.

Za spektralno analizo aperiodičnih energijskih signalov uporabljamo DTFT, ki ga definira enačba (??). Tu nimamo več opravka s posameznimi spektralnimi komponentami temveč z gostoto spektra $X(\Omega)$, ki je funkcija zvezne frekvence Ω .

Posebna vrsta aperiodičnih signalov so signali končnega trajanja. Vzemimo da je signal $x[n]$ časovno omejen in ima nenične vzorce le na intervalu $0 \leq n < N$. DTFT takega signala je potem enak:

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (5.30)$$

Primerjava gornje enačbe z enačbo (5.1) pokaže, da je gostota spektra pri mnogokratnikih frekvence Ω_0 kar enaka N -kratniku ustrezne spektralne komponente pripadajočega periodičnega signala:

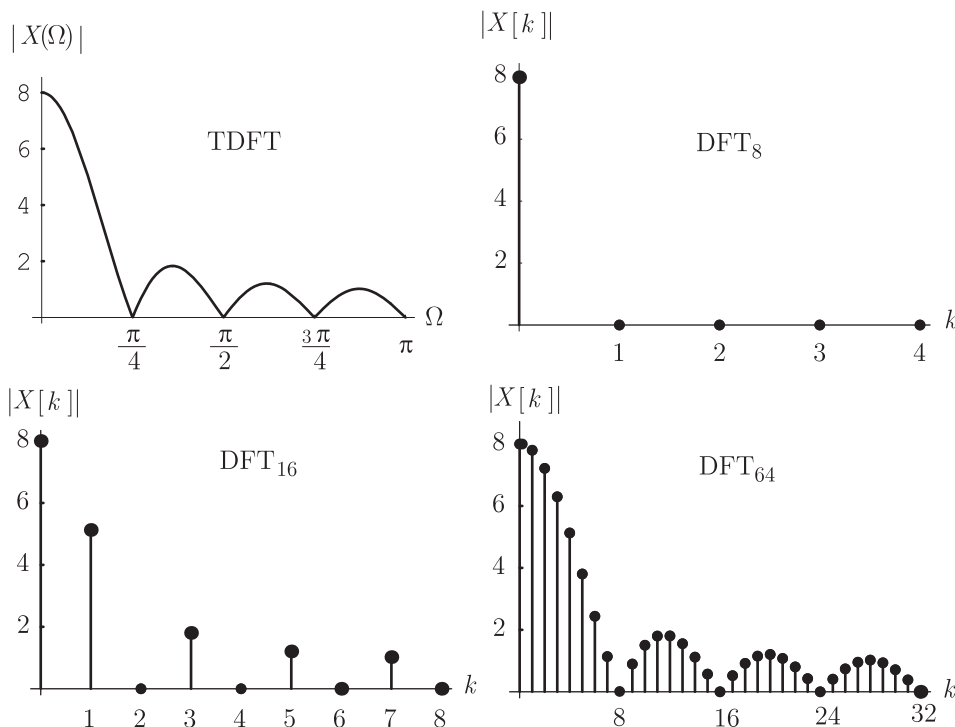
$$X(k\Omega_0) = NX[k] \quad (5.31)$$

kjer je z $X(\cdot)$ označen DTFT in z $X[\cdot]$ DFT signala $x[n]$. Vidimo, da je mogoče gostoto spektra časovno omejenega signala v posameznih točkah izračunati neposredno s pomočjo DFT, kar je pomembno predvsem zato, ker lahko pri izračunu uporabimo FFT algoritem.

Problem lahko nastopi takrat, kadar je osnovna frekvenca Ω_0 prevelika glede na frekvenčno vsebino signala in so frekvenčne komponente izračunane z DFT preveč na redko, da bi ponujale jasno predstavo o signalu. V tem primeru si pomagamo z dodatkom ničel na koncu signala (angl. zero padding). Z dodatkom ničel se poveča perioda pripadajočega periodičnega signala in s tem zmanjša osnovna frekvenca. Podobno si lahko z dodajanjem ničel pomagamo, kadar dolžina signala ni enaka celi potenci števila 2 in želimo pri računanju uporabiti FFT. Primer izračuna gostote spektra pravokotnega signala dolžine $N = 8$ s pomočjo DFT dolžine 8, 16 in 64 je prikazan na sliki 5.8.

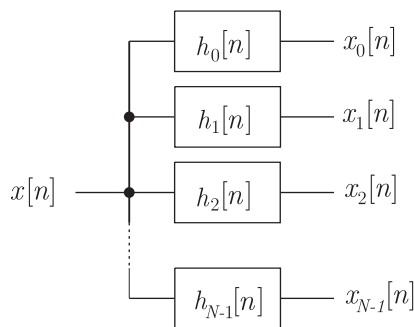
5.3 Spektralna analiza časovno neomejenih signalov

Pri naključnih signalih, tako zveznih kot diskretnih, ne moremo narediti natančne spektralne analize, ker časovno niso omejeni. Signal bi namreč morali opazovati ves čas trajanja, kar



Slika 5.8 – DTFT pravokotnega signala dolžine 8 in njegov izračun z DFT dolžin 8, 16 in 64

pa večinoma v praksi ni sprejemljivo. V ta namen zato pogosto uporabljamo nabore pasovno prepustnih sit, ki so uglasena na različne frekvence, kot je to prikazano na sliki 5.9.

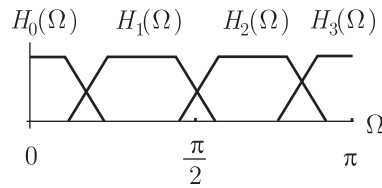


Slika 5.9 – Nabor diskretnih sit

Vhodni signal $x[n]$ pripeljemo na vhode vseh sit, in na njihovih izhodih opazujemo signale od $x_1[n]$ do $x_{N-1}[n]$. Amplituda signala na izhodu posameznega sita v grobem ustreza amplitudnemu spektru signala v frekvenčnem področju, ki ga to sito pokriva. Od pasovne širine sit, njihove kvalitete in razporeditve centralnih frekvenc je odvisna tudi vrsta spektralne analize. V splošnem lahko trdimo, da ožja sita bolj verno odražajo spekter signala, zato pa je tudi njihov odziv počasnejši. Ker v spektru signala, ki ga dobimo na ta način, ni zajet celoten signal, se spekter s časom spreminja. Tovrstno spektralno analizo imenujemo zato tudi kratkoročna spektralna analiza.

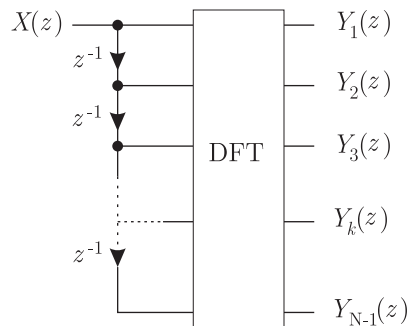
Običajno želimo, da je posamezna frekvenčna komponenta v signalu čim bolj lokalizirana, kar pomeni, da idealno povzroči odziv enega samega sita, kar pomeni, da se frekvenčne karakteristike sit med seboj ne bi smele prekrivati. Ker po drugi strani želimo, da bi bilo celotno frekvenčno

področje čim bolj enakomerno pokrito, moramo dovoliti delno prekrivanje karakteristik sit, kot je to shematično prikazano na sliki 5.10.



Slika 5.10 – Delno prekrivanje frekvenčnih karakteristik nabora sit

Ker so sita v naboru načeloma ozkopasovna, lahko naredimo decimacijo signalov na njihovih izhodih, ali pa, za povečanje računske učinkovitosti, že na vseh posameznih sit. Obstaja cela vrsta učinkovitih postopkov za različne vrste naborov sit, vendar njihova obravnava presega okvire te knjige. V tem razdelku želimo zgolj pokazati, da lahko DFT interpretiramo tudi kot nabor preprostih sit FIR. Frekvenčne karakteristike sit v naboru sicer niso najbolj ugodne, velika prednost pa je v računski učinkovitosti, ki jo dosežemo z uporabo FFT. Prav v tem je razlog, da so tudi nekateri bolj zapleteni nabori sit osnovani na DFT.



Slika 5.11 – DFT kot nabor sit

Osnovna vezava DFT kot nabora sit je prikazana na sliki 5.11. Signal $y_k[n]$ na k -tem izhodu je enak komponenti $X[k]$ transforme preteklih $N-1$ vzorcev in trenutnega vzorca signala, zato lahko zapišemo:

$$y_k[n] = \sum_{m=N-1}^0 x[n-m] W_N^{k(N-1-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] W_N^{-k(m+1)} \quad (5.32)$$

Če primerjamo gornji izraz z odzivom linearnega sistema na vhodni signal (2.6), vidimo, da ta predstavlja odziv linearnega sistema s sistemsko funkcijo enako:

$$h_k[n] = W_N^{-k(n+1)} \quad ; \quad 0 \leq n < N \quad (5.33)$$

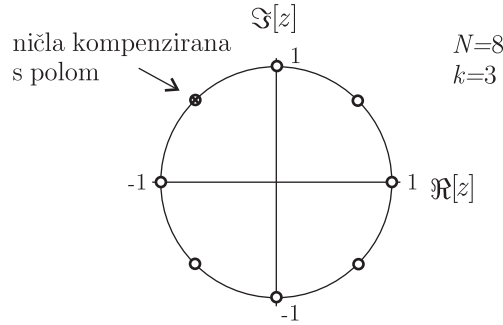
Ker je odziv končen je to sito FIR. Prevajalno funkcijo k -tega sita v naboru sit je enaka transformi $\mathcal{Z}$ njegove sistemske funkcije:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-k(n+1)} z^{-1} = W_N^{-k} \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.34)$$

Gornji izraz ima N ničel, ki so enakomerno razporejene po frekvenčnem krogu. Pol, ki tudi leži na frekvenčnem krogu, natančno kompenzira ničlo pri frekvenci:

$$\Omega_k = k \frac{2\pi}{N} = k\Omega_0 \quad (5.35)$$

tako, da ostane le $N - 1$ ničel, frekvenca Ω_k pa predstavlja centralno frekvenco k -tega sita. Za $N = 8$ in $k = 3$ je razporeditev ničel prikazana na sliki 5.12.



Slika 5.12 – Razporeditev ničel za sito DFT s $k = 3$ pri $N = 8$

Frekvenčno karakteristiko k -tega sita dobimo tako, da v enačbo (5.34) vstavimo:

$$\begin{aligned} z &= e^{j\Omega} \\ W_N^{-k} &= e^{jk \frac{2\pi}{N}} = e^{j\Omega_k} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dobimo:

$$H_k(\Omega) = e^{j\Omega_k} \frac{1 - e^{-jN(\Omega_k - \Omega)}}{1 - e^{-j(\Omega_k - \Omega)}} \quad (5.37)$$

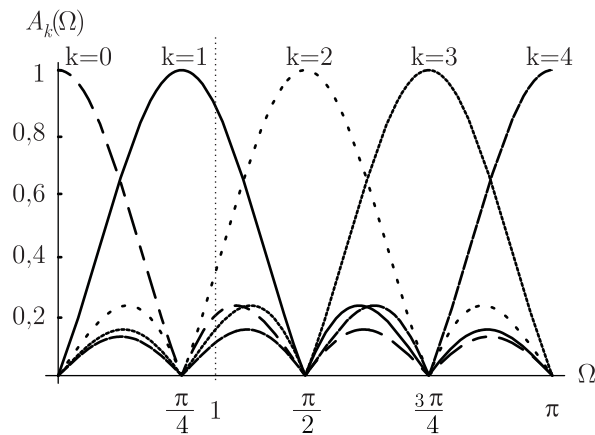
Izraz nekoliko preuredimo:

$$\begin{aligned} H_k(\Omega) &= e^{j\Omega_k} \cdot \frac{e^{-jN(\Omega_k - \Omega)/2}}{e^{-j(\Omega_k - \Omega)/2}} \cdot \frac{e^{-jN(\Omega_k - \Omega)/2} - e^{-jN(\Omega_k - \Omega)/2}}{e^{-j(\Omega_k - \Omega)/2} - e^{-j(\Omega_k - \Omega)/2}} = \\ &= e^{j\Omega_k} \cdot e^{-j(N-1)(\Omega_k - \Omega)/2} \cdot \frac{\sin(N(\Omega_k - \Omega)/2)}{(\Omega_k - \Omega)/2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Prva dva faktorja v zgornjem izrazu sta po absolutni vrednosti enaka 1, zato je amplitudni potek prevajalne funkcije k -tega sita enak:

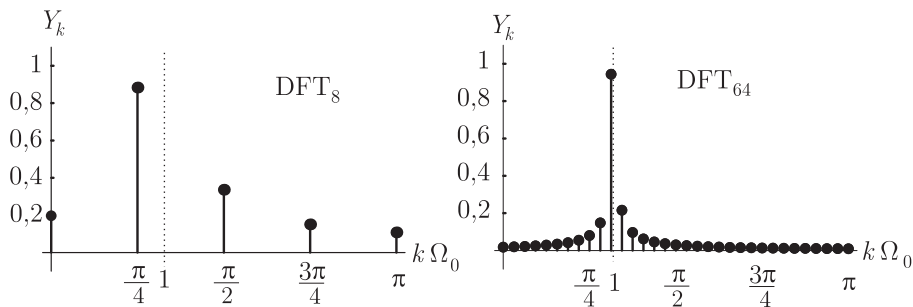
$$A_k(\Omega) = \left| \frac{\sin(N(\Omega - \Omega_k)/2)}{(\Omega - \Omega_k)/2} \right| \quad (5.39)$$

Pri $k = 0$ dobimo povprečevalno sito, vsa ostala sita pa imajo enak amplitudni potek, le da je ta premaknjen po frekvenčni osi za frekvenco $\Omega_k = k\Omega_0$, kot je to prikazano na sliki 5.13. Na sliki je prikazano le frekvenčno področje $0 \leq \Omega \leq \pi$, saj bo odziv na realne signale simetričen okrog frekvence π . Vidimo, da so sita nabora DFT sorazmerno šibka. Predvsem moti majhno slabljenje stranskih snopov. Na posamezno frekvenco v vhodnem signalu se zato odzovejo vsa sita, kot je to v sliki nakazano z navpično pikčasto črto pri frekvenci $\Omega = 1$, ki seka karakteristike vseh sit. Izjema so le frekvence v rastru DFT, to je frekvence, ki so mnogokratniki osnovne frekvence Ω_0 . Na posamezno frekvenco v rastru se vedno odzove eno samo sito, ker imajo vsa ostala sita pri tej

Slika 5.13 – Amplitudni poteki prevajalnih funkcij za sito DFT_8

frekvenci ničlo. To je tudi pričakovan rezultat, saj je DFT prvotno namenjen analizi periodičnih signalov, v katerih nastopajo samo mnogokratniki osnovne frekvence.

Rezultat, ki bi ga dobili s frekvenčno analizo harmoničnega signala frekvence $\Omega = 1$ s pomočjo DFT_8 in DFT_{64} , je prikazan na sliki 5.14. Vidimo, da rezultat, ki ga dobimo z DFT_8 , ne pove

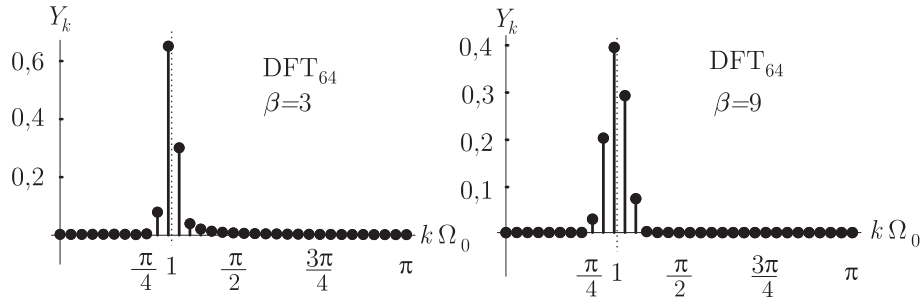
Slika 5.14 – Rezultat frekvenčne analize harmoničnega signala $\Omega = 1$ z DFT_8 in DFT_{64}

kaj dosti o frekvenci vhodnega signala. Enak rezultat bi lahko dobili, če bi bil na vhodu spektralnega analizatorja signal s petimi frekvencami ustreznih amplitud v rastru DFT. Analiza z DFT_{64} daje boljši rezultat, še posebej, ker je frekvenca $\Omega = 1$ zelo blizu frekvence $5\pi/16$, ki je v rastru DFT_{64} .

Mnogo boljše rezultate lahko dobimo s predhodnim oknjenjem signala. Stranske snope v sitih DFT nabora bi lahko namreč pripisali tudi pravokotnemu oknu, s katerim smo iz celotnega signala $x[n]$ vzeli le zadnjih N vzorcev. Če uporabimo namesto pravokotnega okna eno od oken, ki smo jih obravnavali v razdelku 4.4.4, lahko močno povečamo slabljenje stranskih snopov in s tem izboljšamo lokalizacijo signala v frekvenci. Sistemska funkcija k -tega sita je potem enaka:

$$h_k[n] = h_k[n] = W_N^{-k(n+1)} w[n + (N-1)/2] = e^{j\Omega_k(n+1)} w[n + (N-1)/2] \quad (5.40)$$

kjer smo z $w[n]$ označili okensko funkcijo v izhodiščni legi. Vidimo, da je okenska funkcija množena s kompleksnim harmoničnim signalom frekvence Ω_k , kar pomeni, da se amplitudna karakteristika premakne za Ω_k iz osnovne lege, podobno, kot se pri neoknjenem DFT premika frekvenčna karakteristika pravokotnega okna. Za primer Kaiserjevega okna ($\beta = 3$ in $\beta = 9$) je rezultat frekvenčne analize signala frekvence $\Omega = 1$ z DFT_{64} prikazan na sliki 5.15. Vidimo,

Slika 5.15 – Odziv DFT s Kaiserjevim oknom na signal frekvence $\Omega = 1$)

da je vpliv stranskih snopov močno zmanjšan, zato ni odziva na sitih, ki so bolj oddaljena od $\Omega = 1$, vendar pa se zato razširi osnovni snop. Z daljšanjem transformacije zožimo osnovni snop in s tem povečamo resolucijo spektralnega analizatorja.

Omeniti velja tudi, da dobimo pri obravnavanih naborih sit na vsak vhodni vzorec N izhodnih vzorcev, po enega na vsakem situ. Ker lahko z IDFT iz N spektralnih komponent enoumno določimo N vzorcev vhodnega signala, bi lahko signal rekonstruirali, če bi naredili DFT vsakih N vzorcev in ne pri vsakem novem vzorcu na vhodu. S tem za faktor N zmanjšamo število operacij. Postopek je enakovreden decimaciji izhodnih vzorcev za faktor N . Kljub temu, da na ta način nismo izgubili informacije o signalu, saj je mogoče signal zopet rekonstruirati, pa je prikaz spektra nestacionarnega signala vsakih N preveč redek, da bi lahko spremljali spremembe spektra s časom. Med enim in drugim vzorcem spektra se ta namreč lahko popolnoma spremeni. V praksi se pogosto uporablja prekrivanje posameznih DFT v $N/2$ vzorcih.

5.4 Izvedba sita FIR s pomočjo DFT

Izhodni signal sita FIR dolžine M podaja enačba:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]h[m] = x[n] * h[n] \quad (5.41)$$

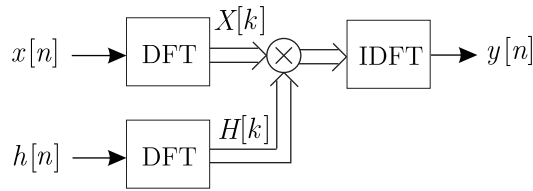
kjer je $*$ označena linearna konvolucija. Po gornji enačbi potrebujemo za filtriranje L vzorcev vhodnega signala LM množenj in $L(M-1)$ seštevanj. Konvolucijo lahko namesto v časovnem prostoru izvedemo v frekvenčnem prostoru, kjer dobimo odziv preprosto z množenjem DFT signala $X[k]$ in prevajalne funkcije sita $H[k]$:

$$Y[k] = X[k]H[k] \quad (5.42)$$

Da bi dobili izhodni signal v časovnem prostoru, moramo narediti še IDFT dobljenega produkta, kot je to prikazano na sliki 5.16. Pri tem pa se moramo zavedati, da smo pri DFT predpostavili periodičnost signala in je konvolucija zato krožna in periodična s periodo N , kjer je N dolžina DFT. Linearna konvolucija po enačbi (5.41) bo dala na izhodu sita signal dolžine $M + L - 1$ vzorcev. Če želimo, da ne pride do prekrivanja med sosednjimi periodami, mora zato veljati:

$$N \geq M + L - 1 \quad (5.43)$$

Preden naredimo DFT, moramo zato signalu in sistemski funkciji sita dodati ustrezno število ničelnih vzorcev. Izračun konvolucije z množenjem v frekvenčnem prostoru zagotovo ne bi bil



Slika 5.16 – Izračun konvolucije preko množenja v frekvenčnem prostoru

učinkovitejši od direktnega izračuna, če ne bi imeli na voljo učinkovitih algoritmov FFT. Da bi lahko računali transform s pomočjo FFT, mora biti dolžina transform celoštevilska potenca števila dva:

$$N = 2^K \geq M + L - 1 \quad (5.44)$$

Izberemo najmanjše število K , ki še izpolnjuje gornji pogoj. Manjkajoče vzorce lahko dopolnimo z ničnimi vzorci, bolj smiselno pa je ustrezno podaljšati odziv sita in na ta način izboljšati njegovo karakteristiko, ali pa vzeti daljši signal. Postopek imenujemo tudi hitra konvolucija (FC - Fast Convolution).

Oglejmo si sedaj še računsko učinkovitost postopka. Kadar je signal realen, je število računskih operacij, ki jih moramo izvesti po osnovni enačbi enako:

$$K_{\text{FIR}} = LM + L(M - 1) = L(2M - 1) \quad (5.45)$$

Zaradi preprostosti predpostavimo, da $N = L + M - 1$ izpolnjuje zahtevo po celoštevilčni potenci. Pri izračunu potrebnega števila operacij moramo šteti operacije, ki so potrebne za izračun FFT signala, za izračun produkta prevajalne funkcije in transform signala in za izračun IFFT, ki je računsko enako zahteven kot FFT. Operacij potrebnih za izračun $H[k]$ ni potrebno izračunati, ker se ta ne spreminja in jo lahko izračunamo vnaprej. V skladu z enačbo (5.18) je skupno število operacij za izračun s pomočjo hitre konvolucije enako:

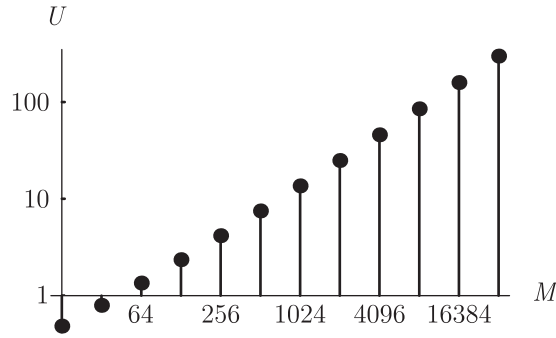
$$\begin{aligned} K_{\text{FC}} &= 10(M + L - 1) \log_2(M + L - 1) + 6(M + L - 1) = \\ &= 10(M + L - 1)(\log_2(M + L - 1) + 6) \end{aligned} \quad (5.46)$$

učinkovitost pa je enaka:

$$U = \frac{L(2M - 1)}{10(M + L - 1)(\log_2(M + L - 1) + 6)} \quad (5.47)$$

Za primer $L = M$ je računsko učinkovitost postopka v odvisnosti od dolžine sita M prikazana na sliki 5.17. Vidimo, da je postopek hitre konvolucije učinkovitejši od neposrednega izračuna za sita FIR dolžine 64 in več. Z dodatnimi optimizacijami se da učinkovitost nad 1 doseči že pri $N = 32$. Podobno kot pri izračunu DFT pa lahko tudi pri izvedbi sita s hitro konvolucijo računamo odziva dveh sit naenkrat. Če vzamemo kombinacijo DIF za FFT in DIT za IFFT so indeksi na vhodu in izhodu v naravnem vrstnem redu.

Malce drugačen problem imamo, če želimo filtrirati zelo dolg ali celo neprekinjen vhodni niz s sitom FIR dolžine M . Vhodni niz je predolg, da bi računali en sam transform DFT. Velika dolžina DFT vnaša tudi veliko zakasnitev, ki pri obdelavi signalov v realnem času včasih ni dopustna. Izhodni signal je namreč zakasnen najmanj za celotno dolžino DFT. Vhodni niz

Slika 5.17 – Računska učinkovitost hitre konvolucije pri $L = M$

moramo zato razdeliti v krajše odseke in za vsak odsek ločeno izračunati konvolucijo, nato pa rezultate posameznih konvolucij združiti v en izhodni niz. To razdeljevanje in združevanje lahko naredimo na različne načine. V nadaljevanju si bomo ogledali dva najbolj znana postopka: *prekrij in seštej* (ang. overlap-add) in *prekrij in shrani* (ang. overlap-save).

5.4.1 Postopek *prekrij in seštej*

Pri tem postopku razdelimo vhodni signal $x[n]$ na neprekrivajoče odseke dolžine L . Za vsak odsek izračunamo konvolucijo po zgoraj opisanem postopku. Ker je dolžina konvolucije enaka $M + L - 1$, se konvolucije, ki pripadajo različnim odsekom, časovno prekrivajo v $M - 1$ vzorcih. Vhodni signal lahko predstavimo kot vsoto posameznih odsekov:

$$x[n] = \sum_i x_i[n] \quad (5.48)$$

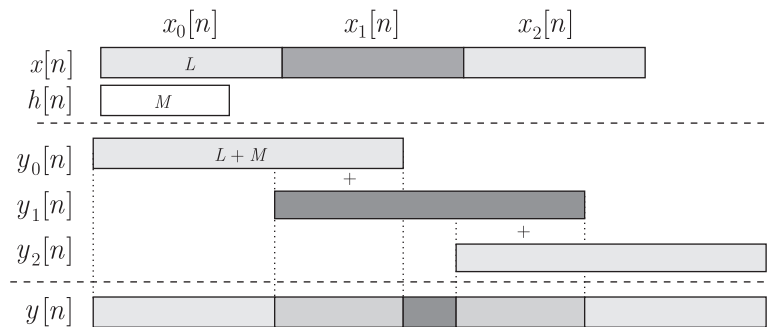
kjer smo z $x_i[n]$ označili i -ti odsek vhodnega signala. Izhodni signal, ki pripada i -temu odseku je potem enak:

$$y_i[n] = x_i[n] * h[n] \quad (5.49)$$

Ker je konvolucija linearna operacija, je konvolucija vsote enaka vsoti konvolucij, zato velja:

$$y[n] = \sum_i y_i[n] \quad (5.50)$$

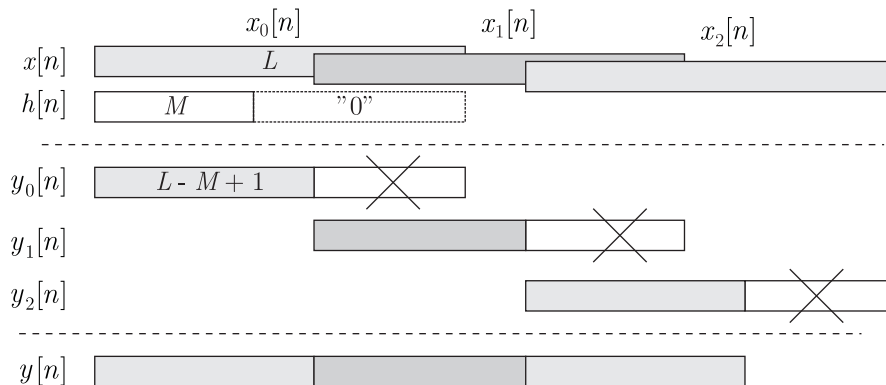
kar pomeni, da dobimo izhodni signal preprosto s seštevanjem konvolucij posameznih odsekov. Razmere so prikazane na sliki 5.18. Računsko je postopek skoraj enako učinkovit kot pri

Slika 5.18 – Računanje konvolucije po postopku *prekrij in seštej*

računanju konvolucije s končnim nizom dolžine L , saj je potrebno po izračunu posamezne konvolucije dodati le še $M - 1$ realnih seštevanj.

5.4.2 Postopek *prekrij in shrani*

Ta postopek temelji neposredno na krožni konvoluciji. Namesto, da bi vzorce signala dopolnili z ničnimi vzorci, vzamemo rajši daljše odseke signala L , ki pa se med seboj prekrivajo v $M - 1$ vzorcih. L mora biti zato obvezno večji od dolžine sita M . Dolžina DFT je pri tem postopku kar enaka dolžini posameznega odseka signala $N = L$ in mora biti cela potenca števila 2, da lahko uporabimo FFT. Ker delamo krožno konvolucijo je tudi ta dolžine L , pri čemer se $M - 1$ vzorcev, za kolikor je linearna konvolucija daljša od krožne, prekriva z vzorci osnovne periode. Problem prekrivanja vzorcev v časovnem prostoru je dualen problemu prekrivanja spektrov pri vzorčenju signalov. To, da naredimo DFT namesto DTFT, je pravzaprav enakovredno vzorčenju spektra s frekvenčnim razmikom Ω_0 . Zadnjih $M - 1$ vzorcev konvolucije je zato napačnih in jih zavržemo, kot je to prikazano na sliki 5.19. Ime postopka izvira iz dejstva, da moramo shraniti



Slika 5.19 – Postopek *prekrij in shrani*

$M - 1$ vzorcev vhodnega niza, ki so hkrati zadnji vzorci prve analize in prvi vzorci naslednje analize. Računsko je postopek približno enako učinkovit kot postopek *prekrij in seštej*, le da se pri tem postopku izognemo potrebi po dodatnih seštevanjih.

5.5 Problemi

1. Imamo signal končne dolžine z vzorci $x_1[n] = \{1, 2, 3, 2, 1, 1\}$. Zanj določite Fourier transform $X_1(k)$ za $N = 6$. Iz gornjega niza $x[n]$ s krožno zakasnitvijo dobimo niz $x_2[n] = \{3, 2, 1, 1, 1, 2\}$. Ugotovite, s kakšnim faktorjem moramo množiti transform $X_2(k)$, da bo enak transformu $X_1(k)$.
2. Zakasnitev niza $x[n] = \{3, 2, 4, 2, 1, 4\}$ za tri intervale naredite preko DFT postopka.
3. Izračunajte linearno konvolucijo dveh nizov $x_1 = [1, 2, 3, 3]$ in $x_2 = [1, 1, 2, 2, 2, 2]$ preko DFT. Primerjajte dobljeno vrednost z rezultatom direktne konvolucije.
4. Za niz x_2 iz problema 3 preverite Parsevalov teorem.

5. Analizirajte rezultate frekvenčne analize signala `linebreak` z dvema harmoničnima komponentama: $x[n] = \cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n)$ s frekvencama $f_1 = 5/128$ in $f_2 = 11/128$. Določite DFT za dimenzije $N = 64, 128$ in 256 . Ugotovite razlike med transformi.
6. S simulacijami na računalniku analizirajte rezultate frekvenčne analize signala z dvema harmoničnima komponentama: $x[n] = \cos(2\pi f_1 n) + \cos(2\pi f_2 n)$ s frekvencama $f_1 = 5/128$ in $f_2 = 11/128$. Primerjajte rezultate analize DFT dimenzije $N = 256$ pri različnih vrednostih dolžine niza $0 \leq n \leq N_1$ osnovnega signala, ki je dopolnjen z ničelnimi vzorci. Za N_1 vzemite $64, 128$ in 256 . Ugotovite razlike med transformi.
7. Signal z dvema frekvenčnima komponentama iz problema 5 utežite s Hammingovim oknom in nato določite DFT za $N = 64, 128$ in 256 . Signal je prisoten preko celotnega trajanja analize.
8. S simulacijami na računalniku analizirajte rezultate frekvenčne analize amplitudno moduliranega signala z modulacijskim signalom z dvema harmoničnima komponentama: $x[n] = 1 + 0.25 \cos(2\pi f_1 n) + 0.25 \cos(2\pi f_2 n)$ in nosilcem $x_0(n) = \cos(2\pi f_0 n)$. Frekvence komponent so: $f_1 = 1/128, f_2 = 5/128$ in $f_0 = 30/128$. Določite vrednost transform DFT pri dimenzijah $N = 32$ in 256 .
9. Za simetrični žagasti signal med ± 1 določite vzorčeni signal. Vzorčna frekvenca je $16, 64$ in 256 krat višja od osnovne frekvence žagastega signala. Določite transform DFT za $N = 256$ in primerjajte rezultate z izrazom iz matematičnega priročnika, ki določa časovno zvezni žagasti signal z vrsto harmoničnih komponent $(4/\pi)(\cos(x) + \cos(3x)/9 + \cos(5x)/25 + \dots)$.
10. Z DFT analiziramo signal z le eno harmonično komponento. Določite postopek, s katerim bi lahko iz dveh po velikosti največjih komponent transform izračunali amplitudo in frekvenco signala. Najenostavnejši način določitve frekvenčnega odmika od rastra lahko določimo s tabelo, kjer imamo podan frekvenčni odmik od razmerja dveh največjih spektralnih komponent. Frekvenčni odmik lahko izrazimo z normirano vrednostjo potenčne vrste $\arctan(|X_m/X_{m-1}|)$, kjer sta X_m in X_{m-1} največja in prva manjša sosednja komponenta DFT. Enako lahko računamo amplitudni korekcijski faktor. Vzemite transform dimenzije $N = 128$ in poskusite dobiti primerne postopke.
11. Na razpolago imamo računalniški program za DFT. Kako moramo prirediti rezultate $X(k)$, da uporabimo isti program za IDFT.
12. Imamo kompleksen signal z dvema harmoničnima komponentama $x[n] = \sin(2\pi f_1 n) + j \sin(2\pi f_2 n)$ s $f_1 = 3/16$ in $f_2 = 7/16$. Za $N = 16$ izračunajte transform DFT. Ločite iz transform del, ki pripada realnemu in imaginarnemu delu vhodnega niza.
13. Določite linearno konvolucijo dveh nizov $h[n] = \{1, 1, -1, -1, 0, 0, \dots\}$ in $x[n] = \cos(2\pi n/32)$ za $n = \{0, 1, \dots, 24\}$ s pomočjo transformacije DFT. Rezultat preverite s konvolucijo v časovnem prostoru.
14. Določite odziv $y[n]$ za $n = 0, 1, \dots, 95$ povprečevalnega sita s $H(z) = \sum_{n=0}^7 z^n$ pri vhodnem signalu $x[n] = \sin(\pi n/16) + \sin(\pi n/2)$. Konvolucijo v času naredite preko transform DFT

po metodi “prekrij in prištej”. Določite izhodni signal s transformom z $N = 64$ za dva intervala. V prvem intervalu poskrbite, da se signal začne pri nivoju nič. Pri pravilnem postopku bo ovojnica izhodnega signala zvezna.

15. Določite odziv na vhodni signal $x[n] = a_1 \sin(\pi n/16) + a_2 \sin(\pi n/2)$ povprečevalnega sita s $H(z) = \sum_{n=0}^7 z^n$ preko obdelave v frekvenčnem prostoru po metodi “prekrij in shrani”. Prvo določite odziv le za signal z eno harmonično komponento ($a_1 = 1, a_2 = 0$). Določite izhodni signal s transformom DFT z $N = 64$ za dva intervala. V prvem intervalu poskrbite, da se signal začne pri nivoju nič. Nato dodajte še drugo harmonično komponento ($a_1 = a_2 = 1$) in določite izhodni signal. Pravilnost postopka bo pokazala zveznost ovojnice izhodnega signala. Ocenite, koliko operacij potrebujemo pri določitvi konvolucije v času in koliko preko frekvenčnega prostora, če predpostavimo, da potrebujemo za N točkovni transform $4N \log_2(N)$ realnih aritmetičnih operacij.
16. Imamo DFT z $N = 64$ in naslednjimi komponentami, ki so različne od nič za naslednje primere:

$$X(8) = 32, X(56) = 32$$

$$X(1) = 32, X(8) = 32, X(56) = 32, X(63) = -32$$

$$X(1) = 32, X(8) = 32, X(56) = 32, X(63) = 32$$

Določite vhodni signal (realni in imaginarni del).

17. Na osnovi analogije načrtajte postopek hitrega transformata DFT za $N = 9$ po principu decimacije vhodnih vzorcev v tri podnize.

6 Generiranje diskretnih signalov

V sistemih za obdelavo signalov pogosto potrebujemo pomožne signale. To so predvsem harmonični signali z eno ali več komponentami in naključni signali z vnaprej predpisano amplitudno porazdelitvijo in/ali vnaprej predpisanim močnostnim spektrom. Te signale želimo generirati neposredno v časovno diskretnem prostoru in se na ta način izogniti nepotrebnim pretvorbi analognih signalov.

6.1 Generiranje harmoničnih signalov

Diskretne harmonične signale lahko generiramo s pomočjo diskretnega oscilatorja ali pa odčitavamo vzorce harmoničnega signala iz pomnilniške tabele. Prvi način je manj zahteven glede pomnilniških zmogljivosti vendar je zato računsko nekoliko zahtevnejši.

6.1.1 Harmonični oscilator

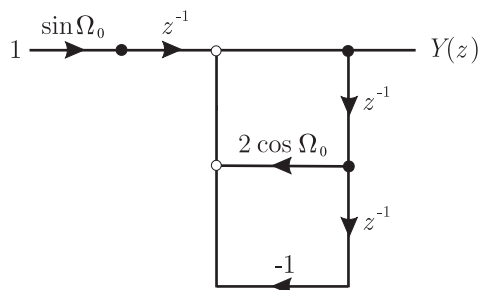
Diskretni harmonični oscilator je sito FIR s sistemsko funkcijo enako želenemu harmoničnemu signalu. Za generiranje sinusnega signala potrebujemo torej sito s sistemsko funkcijo:

$$h_s[n] = \sin(\Omega_0 n) u[n] \quad (6.1)$$

Prevajalna funkcija sita je enaka transformu $\mathcal{Z}$ sistemske funkcije. Transform $\mathcal{Z}$ gornje funkcije lahko najdemo v tabeli transformov na strani 39, od koder lahko razberemo:

$$H_s(z) = \frac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}} \quad (6.2)$$

Struktura sita, ki ustreza tej prevajalni funkciji je prikazana na sliki 6.1. Oscilator na sliki 6.1



Slika 6.1 – Harmonični oscilator

vzbudimo k oscilacijam z δ impulzom ($\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$). Časovni odziv vezja pri vzbujanju z δ impulzom podaja rekurzivna enačba:

$$y_s[n] = \sin(\Omega_0)\delta[n-1] + 2\cos\Omega_0 y_s[n-1] - y_s[n-2] \quad (6.3)$$

Vsi izhodni vzorci pred nastopom vzbujanja ($n \leq 0$) so enaki 0. Zapišimo še nekaj zaporednih izhodnih vzorcev po vzbujanju:

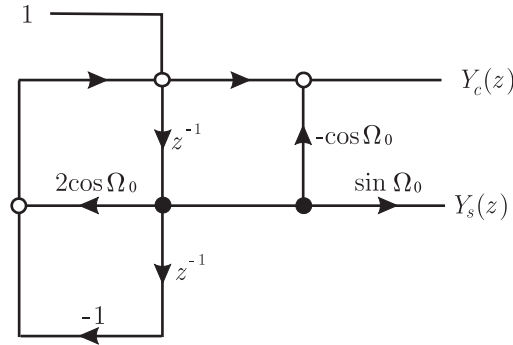
$$\begin{aligned}
 y_s[0] &= 0 \\
 y_s[1] &= \sin(\Omega_0) \\
 y_s[2] &= 2 \cos(\Omega_0) \sin(\Omega_0) = \sin(2\Omega_0) \\
 y_s[3] &= -\sin(\Omega_0) + 2 \cos(\Omega_0) \sin(2\Omega_0) = \sin(3\Omega_0) \\
 y_s[4] &= -\sin(2\Omega_0) + 2 \cos(\Omega_0) \sin(3\Omega_0) = \sin(4\Omega_0)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Na podoben način lahko naredimo tudi generator kosinusnega signala, le da je v tem primeru prevajalna funkcija, ki jo preberemo iz tabele transformov $\mathcal{Z}$ enaka:

$$H_c(z) = \frac{1 - \cos(\Omega_0)z^{-1}}{1 - 2 \cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}} \tag{6.5}$$

Vidimo, da imamo v obeh primerih konjugirano kompleksen par polov na frekvenčni krožnici pri kotih $\pm \Omega_0$. Obe siti imata torej enak rekurzivni del, razlikujeta se le v nerekurzivnem delu, ki ga določajo ničle prevajalne funkcije. Pri vzbujanju z δ impulzom vpliva ta le na začetno stanje obeh zakasnilnih celic.

Obe enačbi 6.2 in 6.5 lahko realiziramo v vezavi na sliki 6.2. Tako dobimo kvadrturni os-



Slika 6.2 – Oscilator z ortogonalnima izhodoma

cilator oziroma oscilator z ortogonalnima izhodoma. Amplitudo oscilacij nastavimo z začetnima vrednostma v obeh zakasnilnih celicah. Podana zasnova oscilatorja omogoča spreminjanje frekvenca le s spreminjanjem koeficienta $a_1 = 2 \cos \Omega_0$. Pri spremembi koeficienta se bosta spremenili frekvenca in amplituda signala. Zavedati se moramo, da sta v pomnilnih celicah vrednosti, ki pripadata prejšnji frekvenci, in bosta dali pri spremenjeni frekvenci drugačne amplitudne pogoje. Za izvedbo generatorja spremenljive frekvenca zato potrebujemo še posebno vezje za nadzor amplitude.

6.1.2 Generiranje na osnovi tabeliranih vrednosti

Harmonični signal lahko generiramo preprosteje z odčitavanjem vzorcev v pomnilniški tabeli. V tabelo zapišemo N vzorcev ene periode. Načeloma potrebujemo dve tabeli, tabelo za kosinus in

tabelo za sinus:

$$\begin{aligned} c[[n]] &= \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad ; \quad 0 \leq n < N \\ s[[n]] &= \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad ; \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (6.6)$$

kjer $[[n]]$ označuje naslov pomnilniške lokacije. Če iz tabel čitamo zaporedne vzorce, dobimo harmoničen signal najnižje frekvence:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (6.7)$$

Z odčitavanjem vsakega k -tega vzorca dobimo harmoničen signal, ki je k -ta harmonska komponenta signala z najnižjo frekvenco.

$$\begin{aligned} y_c[n] &= C[[kn \bmod N]] \\ y_s[n] &= S[[kn \bmod N]] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Na ta način lahko generiramo le signale frekvenc v rastru $k\Omega_0$, kjer je $0 \leq k < N/2$. Najnižja frekvenca Ω_0 predstavlja frekvenčno resolucijo generatorja. Čim več točk ene periode zapišemo v pomnilnik, tem boljša je frekvenčna resolucija generatorja. Naslove pomnilnika generiramo s števcem po modulu N , ki mu ob vsakem koraku povečamo vrednost za k . Zaradi preprostejšega izračuna operacije po modulu vzamemo $N = 2^L$, kjer je L naravno število. Namesto operacije po modulu je potrebno pri naslavljanju pomnilnika v tem primeru vzeti le zadnjih L bitov števca.

Potrebe po pomnilniku lahko zmanjšamo, če upoštevamo:

$$\begin{aligned} c[[n]] &= c[[N - n]] \quad ; \quad n \geq N/2 \\ c[[n]] &= -c[[N/2 - n]] \quad ; \quad n > N/4 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Na ta način potrebujemo le $N/4 + 1$ pomnilniških lokacij za zapis ene periode kosinusa. Isto tabelo pa lahko uporabimo tudi za sinus, saj velja:

$$s[[n]] = c[[N/4 - n]] \quad (6.10)$$

Če faktor k v enačbi (6.8) ne bi bil omejen zgolj na naravna števila, bi lahko dobili tudi frekvence, ki niso v rastru. Ker v tem primeru tudi število

$$r = kn \bmod N \quad (6.11)$$

ki predstavlja trenutno fazo signala, v splošnem ni celo število, vrednosti vzorca ne moremo odčitati neposredno iz tabele. Vrednost lahko izračunamo na osnovi sosednjih vzorcev s pomočjo interpolacije. Najpreprostejša je linearna interpolacija. Označimo z i indeks najbližje tabelirane vrednosti, to je največje celo število manjše od r , in z Δr razliko med trenutno vrednostjo faze in indeksom i :

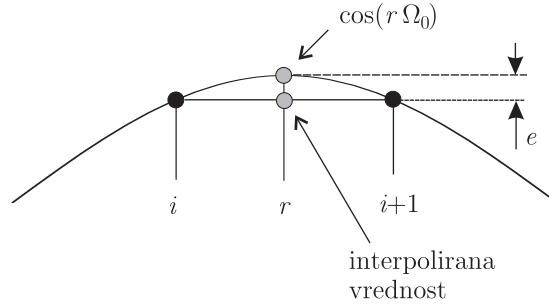
$$\Delta r = r - i \quad (6.12)$$

Vrednost vzorca kosinusnega signala lahko potem izračunamo s pomočjo enačbe:

$$y_c[n] = c[[i]] + (c[[i+1]] - c[[i]])\Delta r = c[[i]] + r\Delta c[[i]] \quad (6.13)$$

Enemu seštevanju se lahko izognemo, če poleg vrednosti $c[[i]]$ tabeliramo tudi vrednosti $\Delta c[[i]]$. Namesto linearne interpolacije bi lahko uporabili tudi kakšen drug, natančnejši postopek, vendar je smiselnost tega, zaradi večje računske zahtevnosti vprašljiva.

Linearna interpolacija vnaša napako. Napaka, ki jo naredimo, je neposredno odvisna od N . Največjo napako naredimo na delu krivulje, kjer je odstopanje od linearosti največje. Pri harmoničnem signalu je to v bližini ekstremov. Najslabši primer, je prikazan na sliki 6.3. Ker



Slika 6.3 – Napaka pri linearni interpolaciji

do takega primera pri sodem N ne more priti, je napaka linearne interpolacije vedno manjša od napake δ prikazane na sliki. Na osnovi slike lahko izračunamo zgornjo mejo napake linearne interpolacije. Za vrednost r lahko vzamemo katerokoli vrednost, pri kateri ima funkcija $\cos(\Omega_0 r)$ ekstrem. Zaradi preprostejšega izračuna vzamemo $r = 0$ in dobimo:

$$\delta = \cos(0) - \cos\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \doteq \frac{\pi^2}{2N^2} \quad (6.14)$$

Ker je maksimalna vrednost kosinusne funkcije enaka 1, predstavlja δ kar relativno napako. S pomočjo gornje enačbe lahko tako ocenimo potrebno velikost N , da bo relativna napaka pod dopustno mejo δ :

$$N > \frac{\pi}{\sqrt{2\delta}} \quad (6.15)$$

Pri zahtevi, da je maksimalna napaka vsaj 100 dB pod maksimalno vrednostjo signala, bi dobili v skladu z gornjo enačbo pogoj $N > 497$. Ker želimo, da je N cela potenca števila 2, vzamemo $N = 512$. Velikost potrebnega pomnilnika za zapis celotne tabele je tako majhna, da optimizacija v skladu z (6.9) v tem primeru nima pravega pomena.

6.2 Generiranje naključnih signalov

Pogosto potrebujemo naključen signal za preverjanje lastnosti sistemov. Vzorcem takega niza pripišemo vrednosti naključnih števil. S pomočjo časovno diskretnih vezij ali s pomočjo računalnikov pravzaprav ne znamo generirati resnično naključnih signalov. Signali, ki jih generiramo so rezultat determinističnih matematičnih postopkov, zato so tudi sami deterministični. Večina signalov, ki jih generiramo na ta način je periodičnih, vendar imajo lahko zelo veliko periodo. Kadar tak signal opazujemo le delček periode, je videti naključen, zato imenujemo take signale psevdonaključni signali.

Naključne signale najboljše opisujejo značilne funkcije, ki jih pripišemo tem signalom. Predvsem sta pomembni dve značilni funkciji: porazdelitvena funkcija amplitude in avtokorelacijska funkcija.

Porazdelitvena funkcija amplitude ali krajše amplitudna porazdelitev pove, kako pogosto oziroma s kakšno verjetnostjo nastopa določena amplituda v signalu. Kadar je amplituda signala diskretna, je tudi amplitudna porazdelitev diskretna funkcija.

Ker so naključni signali močnostni signali, je njihova avtokorelacijska funkcija definirana z enačbo (1.67) na strani 22. Avtokorelacijska funkcija govori o tem, v kolikšni meri so vzorci signala med seboj linearno odvisni. Kadar so med seboj popolnoma neodvisni, je avtokorelacijska funkcija enaka δ impulzu. DTFT avtokorelacijske funkcije je enak gostoti močnostnega spektra signala. Kadar so vzorci med seboj neodvisni, je spekter konstanten in neodvisen od frekvence. Pravimo, da je spekter bel, naključen signal z belim spektrom pa imenujemo bel šum.

6.2.1 Signali z enakomerno amplitudno porazdelitvijo

Najprej si oglejmo nekaj postopkov za generiranje naključnih signalov z enakomerno amplitudno porazdelitvijo, ki so tudi osnova za generiranje signalov z drugimi porazdelitvami. Enakomerna porazdelitev je porazdelitev, pri kateri nastopajo vse amplitude v določenem intervalu z enako verjetnostjo. Ogledali si bomo le postopke, ki generirajo niz naravnih števil v mejah $0 \leq x[n] < N$. Pri veliki vrednosti N dobimo približek zvezne porazdelitve na intervalu $0 \leq x[n] \leq 1$, če delimo dobljene vzorce z N .

Zelo pogosto se za generiranje signala z enakomerno porazdelitvijo uporablja preprost postopek, pri katerem računamo trenutni vzorec iz vrednosti preteklega vzorca po izrazu:

$$x[n] = (Ax[n-1]) \bmod N \quad (6.16)$$

kjer je N veliko praštevilo. Predhodni vzorec množimo z velikim številom A in nato izračunamo ostanek deljenja z N . Vrednost $x[n] = 0$ je prepovedana, ker bi bili potem vsi nadaljnji vzorci enaki 0. Lastnosti niza so odvisne od izbire vrednosti N , A in začetne vrednosti $x[0]$. Niz je periodičen, njegova perioda pa ne more biti daljša od $N - 1$. Za izračun posameznega vzorca je potrebno eno množenje in eno deljenje. Popolnoma enakomerno porazdelitev dobimo, če je perioda enaka $N - 1$, saj nastopa v tem primeru vsako naravno število na intervalu $0 < x[n] < N$ natanko enkrat. Pri tem postopku je lahko problematična primerna izbira vrednosti N , A in $x[0]$, ki zagotavlja dovolj veliko periodo. Poleg tega je računanje ostanka pri deljenju z velikim praštevilo relativno zahtevna operacija.

Podoben je postopek, pri katerem izračunamo naslednji vzorec po enaki enačbi kot v prejšnjem postopku, le da tu N ni praštevilo, temveč cela potenca števila 2:

$$N = 2^L \quad (6.17)$$

za A pa velja relacija:

$$A = 4K + 1 \quad (6.18)$$

kjer sta L in K naravni števili. Prednost tega postopka je v tem, da lahko operacijo po modulu, to je računanje ostanka pri deljenju z N , nadomestimo z rezanjem bitov nad $L - 1$ bitom v binarnem zapisu števila. Za primer:

$$K = 511$$

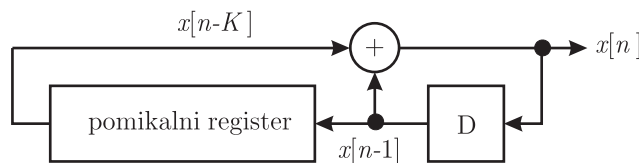
$$\begin{aligned} L &= 20 \\ x[0] &= 12357 \end{aligned} \quad (6.19)$$

dobimo psevdonaključni niz s periodo 2^{18} z zelo dobro enakomerno porazdelitvijo. Če razdelimo interval vseh možnih števil, ki jih lahko dobimo z računom po modulu N , na 1024 enakih podintervalov, lahko s pomočjo simulacije ugotovimo, da je v vsakem podintervalu natanko 256 vzorcev tako dobljenega niza, z izjemo enega podintervala, ki vsebuje en vzorec manj.

Naključni signal lahko generiramo tudi na osnovi seštevanja dveh preteklih vzorcev po modulu N , v skladu z izrazom:

$$x[n] = (x[n-1] + x[n-K]) \bmod N \quad (6.20)$$

kjer je N cela potenca števila 2 kot v izrazu (6.17). Za razliko od prej opisanih postopkov potrebujemo tu K začetnih vrednosti. Naključni signal je torej odvisen od izbire K , N in vseh začetnih vrednosti $x[0] \dots x[K-1]$. Postopek daje dobre rezultate pri izbiri K reda 50. Shematično je vezje za generiranje prikazano na sliki 6.4. Na sliki je izpuščena operacija po modulu, ker



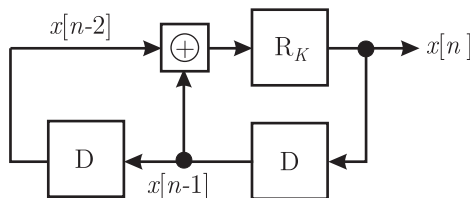
Slika 6.4 – Generiranje naključnega signala na osnovi seštevanja preteklih vzorcev

je seštevanje v digitalnih vezjih vedno izvedeno po modulu dolžine binarnega zapisa števila. Namesto pomikalnega registra, lahko uporabimo tudi pomnilnik, ki ga krožno naslavljam.

Še preprostejši generator dobimo z bitnim seštevanjem po modulu 2 dveh zaporednih preteklih vzorcev (operacija XOR oziroma $\oplus$) in ciklično rotacijo bitov zapisa števila za K mest. Zapišemo temeljno enačbo:

$$x[n] = R_K\{x[n-1] \oplus x[n-2]\} \quad (6.21)$$

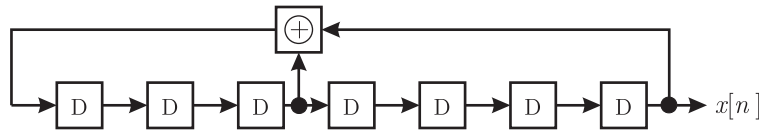
kjer je $R_K\{\cdot\}$ označen operator rotacije za K bitov. Shematično je vezje prikazano na sliki 6.5. Po literaturi povzemamo, da so pri dolžini zapisa vzorcev z 19 biti in cikličnim premikom za eno mesto v desno dobili niz s periodo skoraj $15 \cdot 10^6$ vzorcev.



Slika 6.5 – Generator naključnih vzorcev z linearno porazdelitvijo

6.2.2 Psevdonaključni binarni niz

Psevdonaključni binarni niz lahko generiramo s pomočjo pomikalnega registra dolžine L bitov. Določene odcepe na pomikalnem registru vezemo v povratno vezavo, kot je to prikazano na



Slika 6.6 – Generiranje niza ML(3,7)

sliki 6.6. Z ustrezno izbiro odcepov v povratni vezavi ima niz periodo $2^L - 1$, kar pomeni, da v periodi nastopijo vse možne variacije bitov v pomikalnem registru razen kombinacije samih ničel, ki je prepovedana, ker bi bile potem tudi vse nadaljnje vrednosti enake nič. Tak niz imenujemo tudi niz maksimalne dolžine (ML - Maximum Length). Nize ML lahko označujemo s številkami odcepov, ki jih vežemo v povratno vezavo. Niz, ki ga generiramo z vezjem na sliki 6.6, bi tako označili z ML(3,7). Ker je $L - 1$ odcep vedno vezan v povratno vezavo, dolžine registra ni potrebno posebej označevati, saj je razvidna iz številke zadnjega odcepa. Generiranje niza ML(3,7) opisuje enačba:

$$x[n] = x[n - 3] \oplus x[n - 7] \quad ; \quad x[n] \in \{0, 1\} \quad (6.22)$$

V literaturi je mogoče najti tabelirane številke odcepov, ki dajejo pri različnih dolžinah L pomikalnega registra niz maksimalne dolžine.

Nizi maksimalne dolžine imajo zelo dobre avtokorelacijske lastnosti. Niz $y[n]$, ki ga dobimo iz ML niza $x[n]$ na osnovi izraza:

$$y[n] = 2x[n] - 1 \quad (6.23)$$

ima avtokorelacijsko funkcijo enako:

$$R_{yy}[m] = \begin{cases} 1 & ; \quad m = 0 \\ 1/N & ; \quad m \neq 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Vidimo da je avtokorelacijska funkcija skoraj idealno enaka δ impulzu, zato ima niz maksimalne dolžine bel spekter. Nenična vrednost avtokorelacijske funkcije pri $m \neq 0$ je posledica dejstva, da je stanje samih ničel v pomikalnem registru prepovedano. V spektru se to pozna kot nekoliko bolj izražena enosmerna komponenta. Nizi maksimalne dolžine se zaradi svojih dobrih spektralnih lastnosti uporabljajo kot gradniki pri generiranju naključnih kodnih zaporedij pri prenosu signalov z razširjenim spektrom v mobilni telefoniji.

Zaporedne bite v pomikalnem registru pa lahko tolmačimo tudi kot binarni zapis nekega števila. Ker nastopijo v eni periodi ML niza vse variacije bitov, dobimo na ta način tudi vsa števila, ki jih je mogoče zapisati z L biti. Niz vzorcev, ki bi ga dobili na ta način, bi imel zato enakomerno porazdelitev. Ker pa dobimo naslednji vzorec takega niza zgolj z vpisom enega novega bita v pomikalni register, bi bili sosednji vzorci med seboj odvisni. Tej odvisnosti se lahko izognemo, če jemljemo le vsako K -to število, pri čemer mora veljati $K > L$ in K tuje $2^L - 1$.

6.2.3 Signali z Gaussovo porazdelitvijo

Gaussova amplitudna porazdelitev s srednjo vrednostjo nič je definirana z izrazom:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (6.25)$$

kjer je σ^2 varianca oziroma srednja izmenična moč signala. Gaussova porazdelitev je zvezna porazdelitev, zato zgornja enačba podaja gostoto amplitudne porazdelitve. Vrednost x lahko zavzame poljubno vrednost na realni osi. Praktično tega ni mogoče realizirati, zato imajo lahko signali, ki jih generiramo, le približno Gaussovo porazdelitev, saj po eni strani natančnost zapisa onemogoča, da bi zavzeli poljubno vrednost, po drugi strani pa je tudi njihova amplituda omejena. Porazdelitev je lahko zato le približno Gaussova.

Najpreprostejši postopek generiranja naključnega niza z Gaussovo porazdelitvijo temelji na centralnem limitnem teoremu, ki pravi, da se porazdelitev naključne spremenljivke, ki jo dobimo s seštevanjem več naključnih spremenljivk, približuje Gaussovi porazdelitvi. Niz z Gaussovo porazdelitvijo lahko dobimo s seštevanjem N nizov z enakomerno porazdelitvijo ali s seštevanjem N zaporednih vzorcev enega niza z enakomerno porazdelitvijo:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[nN - i] \quad (6.26)$$

Z večanjem števila N se porazdelitev $y[n]$ vedno bolj približuje Gaussovi porazdelitvi, vendar hkrati narašča tudi računska zahtevnost. V praksi običajno zadošča N med 10 in 20. Pri izbiri N moramo paziti tudi na to, da je N tuj periodi signala $x[n]$, ker bi bila v nasprotnem primeru perioda signala $y[n]$ krajša od periode signala $x[n]$.

Iz naključnega niza z linearno porazdelitvijo pa lahko dobimo niz z Gaussovo porazdelitvijo tudi preko matematičnih relacij, ki jih tu navajamo brez dokaza. Naj imata signala $x_1[n]$ in $x_2[n]$ zvezno enakomerno amplitudno porazdelitev na intervalu med 0 in 1. Niz $y[n]$, ki ga dobimo na osnovi relacije:

$$y[n] = \sigma \cos(2\pi x_2[n]) \sqrt{-2 \ln(x_1[n])} \quad (6.27)$$

ima potem Gaussovo porazdelitev s srednjo vrednostjo 0 in varianco σ^2 . Postopek je računsko precej zahteven. Funkciji kosinusa in logaritma lahko računamo na osnovi tabel, podobno kot smo to opisali pri generiranju harmoničnih signalov, in na ta način precej zmanjšamo računsko zahtevnost.

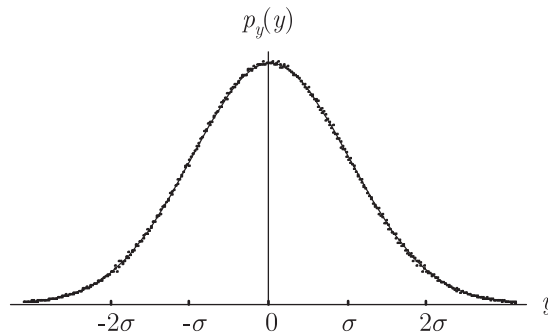
Oglejmo si primer generiranja signala po opisanem postopku. Niza $x_1[n]$ in $x_2[n]$, ki ju potrebujemo za generiranje po izrazu (6.27) lahko tvorimo na osnovi niza $x[n]$ z enakomerno porazdelitvijo. Vzorce obeh nizov lahko tvorimo na osnovi relacij:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \frac{1}{N} x[n] \\ x_2[n] &= \frac{1}{N} (Bx[n]) \bmod N \end{aligned} \quad (6.28)$$

Vrednosti so normirane s faktorjem N , da zagotovimo enakomerno porazdelitev na intervalu med 0 in 1. Konstanto B lahko izberemo skoraj poljubno. Na sliki 6.7 je prikazana porazdelitev niza $y[n]$, ki jo dobimo z izbiro $B = 7513$. Vidimo, da se porazdelitev dokaj dobro prilega Gaussovi porazdelitvi, ki je na sliki narisana s polno črto.

Računsko približno enako zahteven je postopek, pri katerem izhajamo iz nizov $x_1[n]$ in $x_2[n]$ z enakomerno amplitudno porazdelitvijo na intervalu med -1 in 1. Iz obeh nizov izračunamo vzorce pomožnega niza $s[n]$:

$$s[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n] \quad (6.29)$$



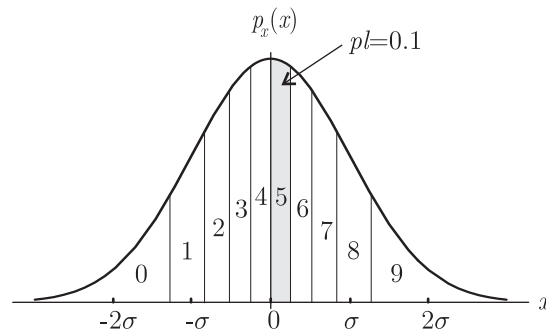
Slika 6.7 – Amplitudna porazdelitev generiranega signala

Če izračunana vrednost preseže 1, zavržemo rezultat in se lotimo izračunavanja na osnovi naslednjih dveh vzorcev. Verjetnost, da vzorci $s[n]$ presežejo vrednost 1, je le 21 %. Pri računski zahtevnosti moramo to upoštevati. Izhodni niz dobimo na osnovi izraza:

$$y[n] = x_1[n] \sqrt{-\frac{2 \ln s[n]}{s[n]}} \quad (6.30)$$

Slabost tega postopka je, da zaradi zanemarjanja nekaterih vzorcev, vzorci na izhodu ne prihajajo v enakomernih časovnih intervalih.

Vrednosti naključnega niza z Gaussovo porazdelitvijo lahko tudi tabeliramo. Funkcijo gostote amplitudne porazdelitve razdelimo na odseke z verjetnostjo $1/N$. Ker je verjetnost, da bo vrednost na določenem odseku enaka ploščini pod krivuljo, moramo krivuljo razdeliti na odseke z enakimi ploščinami, kot je to za primer $N = 10$ prikazano na sliki 6.8. Označimo z $a_k\sigma$ spodnjo



Slika 6.8 – Odseki z verjetnostjo 0.1 pri Gaussovi porazdelitvi

mejo k -tega intervala. Kumulativna verjetnost, to je verjetnost, da je vrednost x manjša od vrednosti σa_k , je potem enaka:

$$F_x(a_k\sigma) = \int_{-\infty}^{a_k\sigma} p_x(x) dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{a_k}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{k}{N} \quad (6.31)$$

Kjer je z $\operatorname{erf}(\cdot)$ označena funkcija napake:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (6.32)$$

Na osnovi izraza (6.31) lahko določimo konstante a_k , ki določajo spodnje meje intervalov:

$$a_k = \sqrt{2} \operatorname{ierf} \left(\frac{2k}{N} - 1 \right) \quad (6.33)$$

kjer je $\text{ierf}(\cdot)$ označena inverzna funkcija napake. Na k -ti naslov v tabeli vpišemo povprečno vrednost vzorcev na k -tem intervalu:

$$x[[k]] = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi} (a_{k+1} - a_k)} \int_{a_k \sigma}^{a_{k+1} \sigma} x e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \quad (6.34)$$

Vrednosti iz tabele odčitavamo po naključnem vrstnem redu. Za tvorjenje naslova lahko uporabimo nekaj bitov naključnega binarnega niza, ki smo ga opisali v prejšnjem razdelku. Če zadošča, da je perioda tako dobljenega psevdonaključnega signala enaka dolžini tabele N , lahko vpišemo vrednosti v tabelo po naključnem vrstnem redu in jih nato pri generiranju signala beremo po pravilnem vrstnem redu.

6.3 Generiranje naključnega signala v frekvenčnem prostoru

Včasih želimo generirati šum z vnaprej predpisanim močnostnim spektrom. Tak šum najpreprosteje generiramo v frekvenčnem prostoru z uporabo IDFT. Vzorce kompleksnega spektra signala tvorimo v skladu z enačbo:

$$X[k] = A[k] e^{j\Phi[k]} \quad ; \quad 0 \leq k < N \quad (6.35)$$

kjer je $A[k]$ želen potek amplitudnega spektra in $\Phi[k]$ naključna faza z enakomerno amplitudno porazdelitvijo na intervalu med 0 in 2π . Psevdonaključni signal dobimo potem s pomočjo IDFT tako dobljenega spektra:

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} \quad (6.36)$$

ki ga lahko računamo s pomočjo FFT algoritma. Ker želimo, da so vzorci dobljenega signala realni, moramo izpolniti pogoja:

$$\begin{aligned} A[N-k] &= A[k] \\ \Phi[N-k] &= -\Phi[k] \end{aligned} \quad (6.37)$$

Perioda dobljenega signala je N , njegova varianca pa je v skladu z Parsevalovim teoremom enaka:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{N-1} A^2[k] \quad (6.38)$$

Ker dobimo pri IDFT izhodne vzorce s seštevanjem N med seboj neodvisnih vzorcev, se amplitudna porazdelitev pri velikih N približuje Gaussovi porazdelitvi. Namesto, da bi vzorce računali sproti, zadošča, da jih izračunamo enkrat in vpišemo v tabelo, iz katere jih čitamo pri generiranju signala.

Postopek je še posebej uporaben pri preizkušanju akustičnih sistemov, kjer potrebujemo obarvan šum ("pink noise" – rožnat šum), to je šum, ki mu močnostni spekter upada s 3 dB/oktavo.

6.4 Problemi

1. Simulirajte oscilator harmoničnega signala na osnovi rekurzivnega vezja drugega reda s koeficientoma $a_1 = -2 \cos \Omega_0$ in $a_2 = 1$. Ugotovite vpliv spremembe frekvence na amplitudo

izhodnega signala, če vzamemo na primer za Ω_0 prvo vrednost $\pi/6$ in pozneje $\pi/8$. Zamislite si dodatni regulacijski sistem, ki bo korigiral spremembe amplitude ob spremembah frekvence!

2. Za oscilator na osnovi rekurzivnega vezja drugega reda z enim izhodom nakažite ustrezno vezje $H_o(z)$ za generiranje ortogonalne komponente preko zakasnitve in preprostega Hilbertovega transformata z $N = 3$ in $N = 7$!
3. Ugotovite, ali nenatančnost izračunavanja vzorcev vpliva na frekvenco in amplitudo oscilatorskega sistema iz problema 1. Predpostavite, da je koeficient podan le z devetimi biti za piko in da so z enako dimenzijo računani rezultati za izhodne vzorce. Isto ponovite, če računate z vrednostmi, ki imajo le pet bitov za piko! Določite vplive!
4. Harmonični signal generiramo z odčitavanjem vzorcev iz tabele. Frekvenca signala naj temelji na odčitavanju vsakega M -tega vzorca po kolobarju $0, 1, \dots, N-1$. Vzemite $N = 512$ in vzorčno frekvenco $f_{vz} = 8$ kHz. Signale katerih frekvenc lahko generiramo na ta način? Določite število bitov, ki so potrebni za zapis vrednosti vzorcev pri zaokroževanju, da razmerje moči signala proti moči kvantizacijskega šuma ne preseže 60 dB! Ali kvantizacijski šum pri generiranju z odčitavanjem iz tabele ustreza belemu šumu?
5. Harmonični signal generiramo s čitanjem vzorcev iz tabele. Želimo generirati harmonični signal poljubne frekvence med 0 in Nyquistovo frekvenco pri frekvenci vzorčenja $f_{vz} = 16$ kHz. Argument signala v območju 2π zapišimo s šestnajst bitno besedo. Z zaokroženo vrednostjo argumenta določamo lokacijo v tabeli. Ta mora biti takega obsega, da se odčitana vrednost ne bo razlikovala za več kot 10^{-3} pri amplitudi izhodnega signala 1! Koliko lokacij mora imeti tabela?
6. S pomočjo tabele generirajte harmoničen signal frekvence 1 kHz pri frekvenci vzorčenja 16 kHz. Vzorci so zaokroženi na sedem bitno vrednost. Določite spektralno sliko signala! S kakšno natančnostjo morajo biti določeni vzorci, da nobena spektralna komponenta ne preseže nivoja -80 dB?
7. Za generiranje naključnega signala z linearno porazdelitvijo amplitude uporabite generiranje naključnih števil v vašem osebнем računalniku. Dobljene vrednosti od -1 do 1 kvantizirajte z osmimi biti z zaokroževanjem in izračunajte amplitudno porazdelitev za 1000 vzorcev na 128 intervalov!
8. S pomočjo tabele generirajte naključne vzorce preko naključne funkcije $\text{rnd}(\ast)$, kjer preslikate linearno porazdelitev v Gaussovo v 128 intervalov!

7 Praktični vidiki izvedbe diskretnih sistemov

Pri obravnavi časovno diskretnih sistemov smo doslej predpostavljali, da so diskretni signali, ki jih dobimo z vzorčenjem analognih signalov realna števila, to je, da lahko zavzamejo poljubno vrednost na realni osi. Pri izvedbi takih sistemov smo omejeni s končno dolžino zapisa števila. Vzorci signala imajo lahko zato le vrednosti, ki jih je mogoče zapisati z določenim številom bitov. Signali, s katerimi imamo opravka zato niso diskretni samo po času, temveč so diskretni tudi po amplitudi oziroma kvantizirani. Signale s kvantiziranimi vzorci imenujemo digitalni signali, namesto o vzorčenju pa govorimo o analogno digitalni pretvorbi.

Pri rekonstrukciji signala smo predpostavili, da imamo na voljo generator idealnih δ impulzov. Predpostavili pa smo tudi idealnost rekonstrukcijskega sita. V praksi enega in drugega nimamo na voljo. Realni digitalno analogni pretvorniki zato odstopajo od idealnih sistemov za rekonstrukcijo signalov.

Poleg kvantizacije signalov pa imamo pri obdelavi signalov opravka s kvantizacijo koeficientov in z zaokroževanjem vmesnih rezultatov. Lastnosti digitalnih sistemov zato odstopajo od lastnosti idealnih časovno diskretnih sistemov.

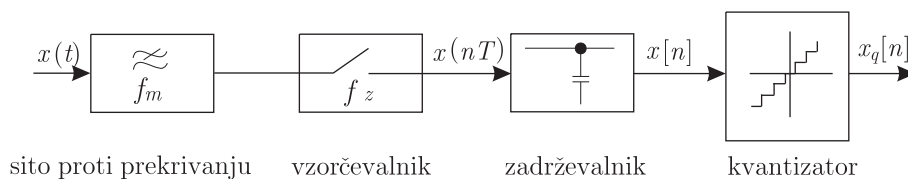
V tem poglavju si bomo ogledali nekaj problemov, ki nastopajo pri analogno digitalni (A/D) in digitalno analogni (D/A) pretvorbi signalov, vpliv kvantizacije signala in kvantizacije koeficientov in na koncu še nekaj osnovnih značilnosti digitalnih signalnih procesorjev (DSP), ki jih najpogosteje uporabljamo za digitalno obdelavo signalov.

7.1 Analogno digitalna pretvorba signalov

Izvedba sistema za A/D pretvorbo signalov je shematsko prikazana na sliki 7.1. Sistem vsebuje analogno predsito, vzorčevalnik, zadrževalnik in kvantizator. Iz analognega signala $x(t)$ najprej s predsitom izločimo spektralne komponente, ki bi ob vzorčenju povzročile prekrivanje spektrov okrog mnogokratnikov vzorčne frekvence. Zato imenujemo to sito tudi sito proti prekrivanju. Frekvenčno omejen vhodni signal vzorčimo in dobimo vzorce vrednosti $x(nT)$. Amplitudo vzorcev v zadrževalniku raztegnemo po možnosti preko celotnega intervala med dvema zaporednima vzorcema. S kvantizatorjem še kvantiziramo vrednosti amplitud vzorcev na končno število amplitud, ki jih zahteva končna dolžina zapisa vzorcev.

7.1.1 Sito proti prekrivanju

Pred vzorčenjem signala moramo izločiti iz signala vse komponente signala, ki bi povzročile prekrivanje spektra vzorčenega signala. To so komponente s frekvenco, ki presega polovično vrednost vzorčne frekvence. Ker frekvenčno omejujemo analogni signal, moramo uporabiti analogno sito. Najustreznejše bi bilo idealno nizko sito z mejno frekvenco $f_{vz}/2$. Ker ne moremo izdelati



Slika 7.1 – A/D pretvornik

idealnega sita, moramo načrtovati realno sito s prehodnim območjem med f_p in f_z . Za mejno frekvenco zapornega področja vzamemo $f_z = f_{vz}/2$. Mejna frekvenca prepustnega področja f_p določa tudi mejno frekvenco signala f_m . Razmerje f_z/f_p tako določa tudi potrebni faktor prevzorčenja signala (glej poglavje 3) obenem pa je od tega razmerja neposredno odvisna zahtevnost sita (glej dodatek C), kar vpliva tudi na njegovo ceno. Običajno uporabljamo frekvenco, ki je za 10 do 20% višja od dvakratne mejne frekvence signala.

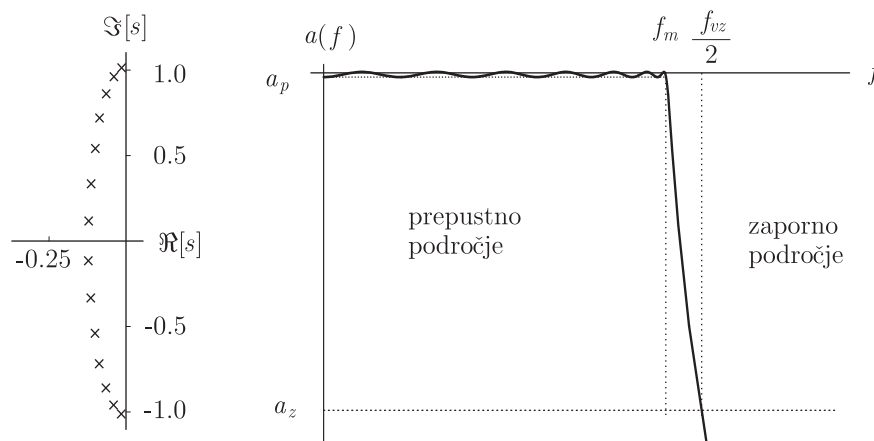
Za dobro načrtovanje karakteristike predsita moramo natančno poznati spekter vhodnega zveznega signala. Pri digitalizaciji zvočnega signala za zapis na zgoščenkah imamo na primer standardizirano vzorčno frekvenco $f_{vz} = 44,1$ kHz in podano mejno frekvenco signala $f_m = 20$ kHz, kar natančno podaja faktor prevzorčenja, ki je v tem primeru enak 1,1025, in s tem tudi širino prehodnega področja sita proti prekrivanju.

Pri načrtovanju se moramo zavedati, da se pri vzorčenju vse frekvence nad polovico vzorčne frekvence preslikajo v področje pod polovico vzorčne frekvence in se prištejejo koristnemu signalu kot šum. Kadar so lahko v signalu, ki ga vzorčimo, prisotne tudi precej višje frekvence od mejne frekvence signala, mora biti zato karakteristika sita v zapori pri visokih frekvencah monotono upadajoča, saj bi drugače prišlo do seštevanja spektralnih komponent okrog vseh večkratnikov vzorčne frekvence. Število polov v prevajalni funkciji sita mora biti večje od števila ničel, zato sita z enakomerno valovitostjo v zapori niso najbolj primerna. Najprimernejša so sita s samimi poli, ki imajo monotono padajoč potek ojačenja v celotnem zapornem področju. To dodatno povečuje zahtevnost sita proti prekrivanju.

Da bi natančno podali zahteve sita proti prekrivanju, moramo poznati tudi dopustno valovitost frekvenčne karakteristike v prepustnem področju ($-a_p$) in minimalno slabljenje v zapori ($-a_z$). Valovitost v prepustnem področju je določena z dopustnim amplitudnim popačenjem signala. K celotnemu amplitudnemu popačenju sme sito proti prekrivanju prinesiti le polovico, ker se bo pri rekonstrukciji signala prištela tudi valovitost rekonstrukcijskega sita. Če za sito proti prekrivanju pri digitalizaciji zvočnega signala dopustimo 0.5 dB valovitosti v prepustnem področju in zahtevamo, da je slabljenje v zapori najmanj 40 dB, potrebujemo Čebiševjevo sito 14. reda. Lega polov in amplitudna karakteristika ustreznega sita je prikazana na sliki 7.2.

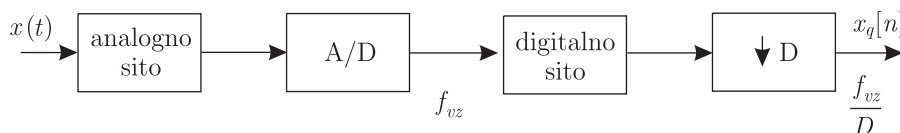
Izvedba analognega sita 14. reda je zelo zahtevna in tudi draga. Zahtevnost sita bi lahko precej zmanjšali z dodatkom ničel v zapornem področju v bližini prehodnega področja. Ker bi dodatne ničle povzročile povečanje slabljenja na robu prepustnega področja, bi morali pole na robu prepustnega področja nekoliko približati imaginarni osi.

Bistveno manj zahtevno analogno predsito potrebujemo, če se odločimo za vzorčenje z višjo vzorčno frekvenco in decimacijo signala. Vlogo sita proti prekrivanju na ta način razdelimo med analogno sito proti prekrivanju in digitalno decimacijsko sito, ki sledi vzorčevalniku. Analogno sito na vходу le prepreči, da ne nastopi prekrivanje želenega signala pri vzorčenju z visoko



Slika 7.2 – Karakteristika Čebiševjevega sita proti prekrivanju zvokovnega signala

vzorčno frekvenco. Z digitalnim sitom nato preprečimo prekrivanje spektra pri decimaciji signala, s katero zmanjšamo vzorčno frekvenco na želeno vrednost, kot je to shematsko prikazano na sliki 7.3.



Slika 7.3 – A/D pretvornik s prevzorčenjem in decimacijo

Oglejmo si razmere pri vzorčenju zvočnega signala iz prejšnjega primera, če se odločimo za dvojno frekvenco vzorčenja $f_{vz} = 88.2$ kHz, kar da faktor prevzorčenja 2,205. Ker sta sedaj v serijo vezani dve siti, moramo valovitost v prepustnem področju posameznega sita zmanjšati na polovično vrednost, to je $a_p = -0.25$ dB, slabljenje v zapori pa naj ostane 40 dB. Za analogno sito v tem primeru zadošča že Čebiševjevo sito 5. reda, vendar mora temu situ slediti še digitalno sito. V našem primeru bi potrebovali digitalno sito z naslednjimi specifikacijami:

$$\begin{aligned}
 \Omega_p &= \pi/2, 205 \\
 \Omega_z &= \pi/2 \\
 a_p &= -0, 25 \text{ dB} \\
 a_z &= -40 \text{ dB}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ker smo zahtevo po monotonem upadanju že izpolnili z analognim sitom, lahko za digitalno sito uporabimo preslikano eliptično sito z enakomerno valovitostjo v zapori. Za izpolnitev gornjih specifikacij zadošča diskretno eliptično sito 6. reda.

7.1.2 Kvantizacija signala

Naloga kvantizatorja je pretvorba signala $x[n]$ z zveznimi vrednostmi v kvantiziran signal $x_q[n]$ s končno zalogo vrednosti, ki jih lahko zapišemo binarno. Število bitov L , ki jih potrebujemo za zapis posameznega vzorca na izhodu kvantizatorja, imenujemo tudi ločljivost kvantizatorja.

Število različnih vrednosti M , ki jih lahko zapišemo z L biti je enako:

$$M = 2^L \quad (7.2)$$

Amplitude vzorcev na vходу kvantizatorja so omejene na vhodno območje kvantizatorja med A_{min} in A_{max} . Vse vrednosti, ki so izven tega območja, moramo pri kvantizaciji nadomestiti z mejnimi vrednostmi, kar imenujemo tudi trdo omejevanje ali rezanje signala. Običajno je območje kvantizatorja simetrično okrog vrednosti 0, za območje kvantizatorja pa vzamemo normirane vrednosti:

$$\begin{aligned} A_{max} &= 1 \\ A_{min} &= -1 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Posamezen vzorec x_q na izhodu kvantizatorja¹ zapišemo v obliki predznačenega binarnega števila, zato so njegove vrednosti omejene na območje med $-K$ in K , kjer je:

$$K = 2^{L-1} - 1 \quad (7.4)$$

Zaradi simetrije se moramo odpovedati enemu nivoju:

$$M = 2^L - 1 \doteq 2^L \quad (7.5)$$

vendar je to pri velikem številu nivojev zanemarljivo. Da bi lahko vzorce x v vhodnem območju kvantizatorja kvantizirali, jih najprej s funkcijo $f(x)$ preslikamo v vzorce x' v izhodnem območju kvantizatorja:

$$x' = f(x) \quad (7.6)$$

Pri simetričnem kvantizatorju mora biti $f(x)$ liha funkcija, za katero velja:

$$\begin{aligned} f(1) &= K + \frac{1}{2} \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Vrednosti x' nato kvantiziramo s kvantizacijsko funkcijo:

$$x_q = Q(x') \quad (7.8)$$

Kot kvantizacijsko funkcijo $Q(x)$ lahko uporabimo funkcijo zaokroževanja na najbližjo celo vrednost ali pa funkcijo rezanja odvečnih bitov v binarnem zapisu. Ker naredimo pri zaokroževanju bistveno manjšo napako kot pri rezanju, bomo v nadaljevanju predpostavili, da vrednosti zaokrožujemo.

Da bi iz kvantiziranih vzorcev rekonstruirali signal, uporabimo funkcijo $g(x)$, ki je inverzna funkciji $f(x)$:

$$\hat{x} = f^{-1}(x_q) = g(x_q) \quad (7.9)$$

¹Ker kvantizator obravnava vsak vzorec signala ločeno, neodvisno od drugih vzorcev, bomo v nadaljevanju v zapisu izpuščali časovni indeks n , razen kadar bomo želeli eksplicitno poudariti, da gre za signal.

Zaradi vmesne kvantizacije $\hat{x}$ ni enak x . Kvantizirani signal odstopa od originalnega signala. Označimo z ε_x kvantizacijsko napako:

$$\varepsilon_x = \hat{x} - x \quad (7.10)$$

Kvantizirani signal lahko potem zapišemo kot vsoto originalnega signala in signala napake:

$$x_q[n] = x[n] + \varepsilon_x[n] \quad (7.11)$$

Ob predpostavki, da sta signal napake in originalni signal statistično neodvisna, kar pomeni, da je njuna korelacija enaka 0, lahko signal napake obravnavamo kot aditivni šum in ga imenujemo kvantizacijski šum.

Kvaliteto kvantizatorja ocenjujemo z razmerjem med varianco signala σ_x^2 in varianco kvantizacijskega šuma σ_ε^2 (*SNR* - Signal to Noise Ratio):

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} \quad (7.12)$$

Pri naključnem signalu s srednjo vrednostjo 0 je varianca signala enaka:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx \quad (7.13)$$

kjer je $p_x(x)$ gostota amplitudne porazdelitve signala. Pri veliki ločljivosti kvantizatorja lahko predpostavimo, da x' z enako verjetnostjo zavzame poljubno vrednost med dvema celima vrednostma, zato ima napaka ε_q :

$$\varepsilon_q = x_q - x' \quad (7.14)$$

enakomerno porazdelitev:

$$p_q(\varepsilon_q) = \begin{cases} 1 & ; \quad |\varepsilon_q| \leq 1/2 \\ 0 & ; \quad |\varepsilon_q| > 1/2 \end{cases} \quad (7.15)$$

Kvantizacijska napaka ε_x je enaka:

$$\varepsilon_x = \hat{x} - x = g(x_q) - g(x_q - \varepsilon_q) \doteq g'(x_q)\varepsilon_q \quad (7.16)$$

kjer je z $g'(x_q)$ označena vrednost odvoda funkcije $g(x)$ v točki $x = x_q$. Varianca napake pri tej vrednosti je potem enaka:

$$\sigma_\varepsilon^2[x_q] \doteq g'^2(x_q) \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{g'^2(x_q)}{12} \quad (7.17)$$

Celotna varianca napake je enaka povprečju posameznih varianc:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sum_{x_q=-K}^K P[x_q] \sigma_\varepsilon^2[x_q] \quad (7.18)$$

kjer je s $P[x_q]$ označena verjetnost, da bo imel kvantiziran vzorec vrednost x_q .

7.1.2.1 Linearna kvantizacija

Pri linearni kvantizaciji vzamemo za $f(x)$ linearno funkcijo, ki izpolnjuje pogoj (7.7):

$$f(x) = (K + 1/2)x = \frac{M}{2}x = \frac{x}{\Delta} \quad (7.19)$$

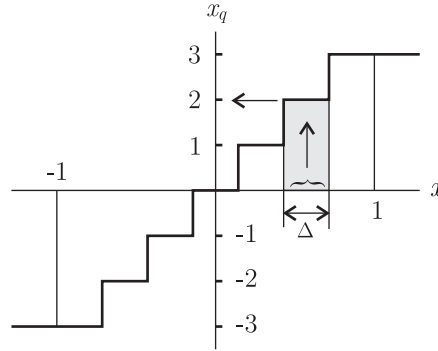
kjer smo z Δ označili korak kvantizacije:

$$\Delta = \frac{2}{M} \quad (7.20)$$

Kvantizirana vrednost je potem enaka:

$$x_q = Q\left(\frac{x}{\Delta}\right) \quad (7.21)$$

Za primer $L = 3$ in $M = 2^L - 1 = 7$ je linearna kvantizacija z zaokroževanjem prikazana v diagramu na sliki 7.4.



Slika 7.4 – Linearna kvantizacija na osnovi zaokroževanja

Predpostavimo, da ima signal na vhodu enakomerno amplitudno porazdelitev med $-k$ in k :

$$p_x(x) = \frac{1}{2k} \quad (7.22)$$

kjer smo s k označili faktor izkrmljenja kvantizatorja. Da ne bi prišlo do rezanja signala, mora imeti k vrednosti med 0 in 1. Varianca signala je tedaj enaka:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2k} \int_{-k}^k x^2 dx = \frac{k^2}{3} \quad (7.23)$$

Funkcija $g(x)$ je inverzna funkciji $f(x)$ in je enaka:

$$g(x) = \frac{2}{M}x \quad (7.24)$$

njen odvod pa je konstanten in enak $2/M$. Varianca kvantizacijskega šuma je potem v skladu z (7.18) enaka:

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{4}{12M^2} \sum_{x_q=-K}^K P[x_q] = \frac{1}{3M^2} \quad (7.25)$$

Na osnovi gornjih izrazov lahko izrazimo SNR kot:

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{k^2 \cdot 3M}{3 \cdot 1} = M^2 k^2 = 2^{2L} k^2 \quad (7.26)$$

Vidimo, da SNR narašča s številom nivojev M in izkrmiljenjem signala k . Maksimalno vrednost SNR dobimo pri polnem izkrmiljenju kvantizatorja ($k = 1$). Izrazimo SNR še v decibelih:

$$SNR_{dB} = 20 \log(k) + 20 \log(2^L) = k_{dB} + 6,02 L \quad (7.27)$$

Povečanje ločljivosti kvantizatorja za en bit izboljša razmerje med signalom in šumom za 6 dB.

Gornja izvajanja veljajo le, kadar ima signal enakomerno amplitudno porazdelitev, v splošnem pa bi lahko za poljubno zvezno porazdelitev z omejeno amplitudo in srednjo vrednostjo 0 zapisali:

$$SNR_{dB} = k_{dB} + 6,02 L + K_p \quad (7.28)$$

kjer je K_p konstanta odvisna od porazdelitve in je enaka:

$$K_p = 10 \log(3 \sigma_1^2) \quad (7.29)$$

in σ_1^2 varianca vhodnega signala pri polnem izkrmiljenju. Za harmonični signal (sinus ali kosinus) velja:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \quad (7.30)$$

in

$$K_p = 10 \log\left(\frac{3}{2}\right) = 1.76 \quad (7.31)$$

SNR je pri harmoničnem signalu nekoliko večje kot pri signalu z enakomerno porazdelitvijo. SNR pri polnem izkrmiljenju s harmoničnim signalom imenujemo tudi dinamično območje kvantizatorja in ga označujemo z R . Izraženo v decibelih, je dinamično območje enako:

$$R_{dB} = 6,02 L + 1,76 \quad (7.32)$$

Razmere so nekoliko drugačne, kadar ima signal Gaussovo porazdelitev. Gaussova porazdelitev s srednjo vrednostjo 0 in varianco σ_x^2 je podana z izrazom:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)} \quad (7.33)$$

Ker signal po amplitudi ni omejen, definiramo faktor izkrmiljenja nekoliko drugače:

$$k = \frac{\sigma_x}{A_{max}} \quad (7.34)$$

Ker smo privzeli $A_{max} = 1$, velja kar:

$$k = \sigma_x \quad (7.35)$$

Vse vzorce, ki po absolutni vrednosti presežejo vrednost 1, moramo odrezati, zato dobimo poleg napake kvantizacije še napako, ki nastopi zaradi rezanja signala. Varianca signala napake je enaka vsoti varianc kvantizacijskega šuma in šuma, ki nastopi zaradi rezanja:

$$\sigma_e^2 = P_q \sigma_q^2 + \sigma_r^2 \quad (7.36)$$

v gornjem izrazu je P_q verjetnost, da bo signal v območju kvantizatorja:

$$P_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\sigma_x/k}^{\sigma_x/k} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)} dx = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{k\sqrt{2}}\right) \quad (7.37)$$

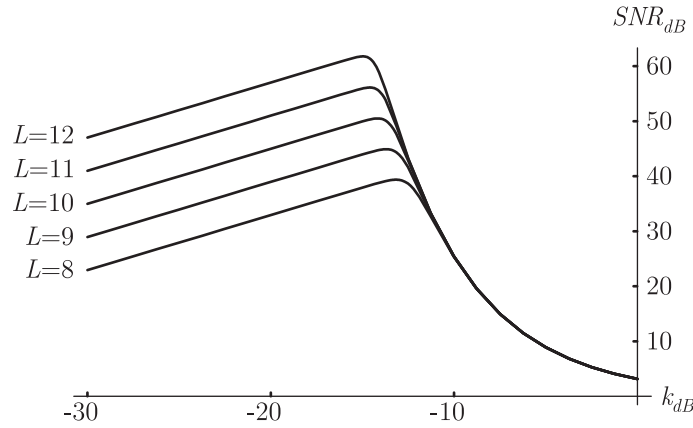
σ_q^2 srednja moč kvantizacijskega šuma:

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{3M^2} = \frac{\sigma_x^2}{3M^2k^2} \quad (7.38)$$

in σ_r^2 moč šuma, zaradi rezanja signala:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= 2 \int_{\sigma_x/k}^{\infty} x^2 p_x(x) dx - 2k^{-2} \int_{\sigma_x/k}^{\infty} p_x(x) dx = \\ &= (1 - k^{-2}) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{k\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{2}{k\sqrt{2\pi}} e^{-1/(2k^2)} \end{aligned} \quad (7.39)$$

Celoten izraz za izračun SNR v skladu z gornjimi izvajanjmi je dokaj zapleten, zato si pri nadaljnji obravnavi pomagamo z grafom na sliki 7.5, ki prikazuje SNR v odvisnosti od izkrmiljenja k v log-log merilu pri različnih ločljivostih kvantizatorja L . Vidimo, da SNR na začetku narašča z



Slika 7.5 – SNR pri kvantizaciji Gaussovega signala

izkrmiljenjem, nato pa začne zaradi prevlade šuma rezanja nad kvantizacijskim šumom naglo upadati. Optimalna vrednost izkrmiljenja je odvisna od ločljivosti kvantizatorja. Pri ločljivosti $L = 8$ nastopi maksimum pri izkrmiljenju $k_{dB} = -13,2$ dB, pri ločljivosti $L = 16$ pa pri $k_{dB} = -14,6$ dB. To pomeni, da moramo signal odrezati pri $\sigma_x = 4,56$ v prvem in pri $\sigma_x = 5,39$ v drugem primeru.

V področju izkrmiljenja pod optimalno vrednostjo, je vpliv šuma rezanja zanemarljivo majhen ($\sigma_r^2 \rightarrow 0$), ker je zanemarljivo majhna verjetnost, da bo signal izven območja kvantizatorja ($P_q \doteq 1$). V tem področju moramo zato pri izračunu SNR upoštevati zgolj napako kvantizacije σ_q^2 . Če izrazimo SNR v področju pod optimalno vrednostjo izkrmiljenja v decibelih, dobimo:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} \right) = 10 \log (3k^2 2^{2L}) = k_{dB} + 6,02L + 4,77 \quad (7.40)$$

Če primerjamo ta rezultat z rezultatom, ki smo ga dobili pri enakomerni porazdelitvi signala, lahko ugotovimo, da je pri kvantizaciji Gaussovega signala SNR pri optimalnem izkrmiljenju $k_{dB} \approx -14$ dB precej nižje kot pri signalu z enakomerno porazdelitvijo, kjer je optimum pri $k_{dB} = 0$.

7.1.2.2 Logaritemska kvantizacija

Kvantizacijski šum je sorazmeren s kvantizacijskim korakom. Pri linearni kvantizaciji je kvantizacijska napaka neodvisna od amplitude signala, zato se pri majhnih signalih poslabša SNR , kar je lahko zelo moteče, še posebno pri akustičnih signalih z veliko dinamiko. Temu se lahko izognemo, če velikost kvantizacijskega koraka prilagodimo velikosti vhodnega vzorca. Ker je v skladu z enačbo (7.16) kvantizacijski korak približno enak odvodu funkcije $g(x)$ bomo konstantno vrednost SNR dosegli, če bo odvod sorazmeren vrednosti funkcije:

$$g'(x) = \delta g(x) \quad (7.41)$$

kjer je δ relativna vrednost kvantizacijskega koraka. Kot rešitev gornje enačbe dobimo funkcijo:

$$g(x) = Ce^{\delta x} \quad (7.42)$$

kjer je C poljubna integracijska konstanta. Funkcija kvantizatorja $f(x)$ je inverzna funkciji $g(x)$, zato velja:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{x}{C} \right) \quad (7.43)$$

Gornja funkcija bi sicer zagotovila konstanten SNR pri vseh vrednostih vhodnega signala, vendar pri nobeni izbiri konstante C ne more izpolniti pogoja $f(0) = 0$ v (7.7). To je razumljivo. Če bi bil namreč kvantizacijski korak vedno sorazmeren signalu tudi, ko gre vrednost signala proti 0, bi šla tudi vrednost kvantizacijskega koraka proti nič in bi dobili neskončno število kvantizacijskih nivojev. Problem je mogoče rešiti na različne načine, ki dajejo podobne rezultate. Pri vseh načinih je pri višjih vrednostih signala SNR konstanten, pri zelo nizkih vrednostih pa začne upadati.

Ena izmed možnih rešitev je, da premaknemo logaritemsko funkcijo tako, da gre skozi izhodišče koordinatnega sistema:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{x}{C} + 1 \right) \quad (7.44)$$

Ta rešitev je uporabljena v tako imenovanem zakonu μ (μ -law) logaritemske kvantizacije, ki je standardiziran za kvantizacijo govornega signala predvsem v Severni Ameriki in na Japonskem. Namesto parametra δ , je tu uporabljen parameter μ , tako da velja:

$$\delta = \frac{2 \ln(1 + \mu)}{M} \quad (7.45)$$

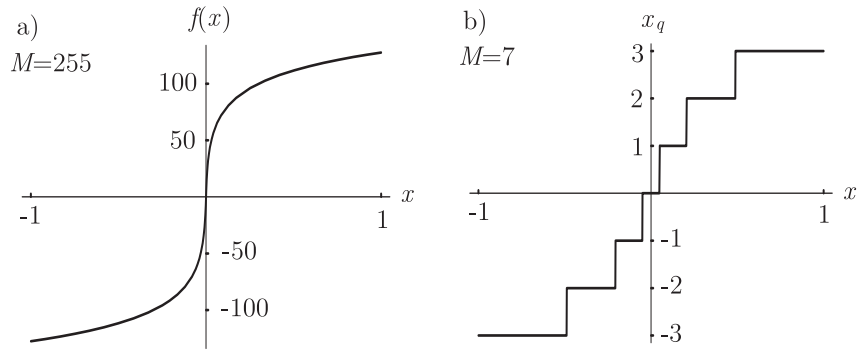
Iz robnega pogoja (7.7) lahko nato izračunamo konstanto C :

$$C = \frac{1}{\mu} \quad (7.46)$$

To funkcijo uporabimo le za pozitivne vrednosti x , za negativne vrednosti pa jo preslikamo skozi izhodišče koordinatnega sistema. Kot končni rezultat dobimo:

$$f(x) = \text{sig}(x) \frac{M}{2 \ln(1 + \mu)} \ln(1 + \mu |x|) \quad (7.47)$$

Z izbiro parametra μ lahko na račun poslabšanja SNR pri visokih vrednostih signala pomaknemo območje s konstantnim SNR proti nižjim vrednostim x . V standardu je predvideno $\mu = M$. Pri

Slika 7.6 – Logaritemska kvantizacija po zakonu μ a) $M=255$ in b) $M=7$

kvantizaciji govornega signala je uporabljen 8-bitni zapis, zato velja $M = 255$. Na sliki 7.6 a je prikazana funkcija $f(x)$ za $M = 255$. Za nazornejšo ilustracijo so na sliki 7.6 b prikazane kvantizirane vrednosti pri $M = 7$.

Malo drugačna rešitev je uporabljena pri zakonu A (A -law) logaritemske kvantizacije, ki se uporablja za govorni signal v Evropi. Namesto, da bi logaritemsko funkcijo premaknili v izhodiščno lego, je tu funkcija $f(x)$ sestavljena iz treh odsekov. Logaritemski funkciji za pozitivne in negativne vrednosti signala sta povezani z linearnim odsekom skozi izhodišče. Funkcijo $f(x)$ pri zakonu A lahko zapišemo v obliki:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{AM}{2(1+\ln(A))}x & ; |x| < \frac{1}{A} \\ \frac{M \operatorname{sig}(x)}{2(1+\ln(A))} \left(1 + \ln(A|x|)\right) & ; \frac{1}{A} \leq |x| \leq 1 \end{cases} \quad (7.48)$$

Parameter A ima pri zakonu A podobno vlogo, kot jo ima parameter μ pri zakonu μ , kar pomeni, da lahko z njegovo pomočjo na račun slabšega SNR pri visokem izkrmiljenju izboljšamo SNR pri majhnih izkrmiljenjih. V standardu za PCM telefonski signal sta izbrani vrednosti $A = 87,6$ in $M = 8$. Funkcija $f(x)$ je pri zakonu A videti enaka kot pri zakonu μ , zato ni posebej narisana. Relativna vrednost kvantizacijskega koraka δ je pri zakonu A enaka:

$$\delta = \frac{2(1+\ln(A))}{M} \quad (7.49)$$

Pri visokih vrednostih izkrmiljenja $k > 0,1$ bo funkcija $f(x)$ pri obeh postopkih zelo malo odstopala od idealne logaritemske funkcije. Kvantizacijski korak bo zato približno enak:

$$\Delta[x_q] = \delta x_q \quad (7.50)$$

Pri dani vrednosti x_q bo zato SNR enak:

$$SNR[x_q] = \frac{12x_q^2}{\Delta^2[x_q]} = \frac{12}{\delta^2} \quad (7.51)$$

Vidimo, da je $SNR[x_q]$ konstanten in neodvisen od x_q in zato kar enak SNR . Pri standardiziranih vrednostih parametrov μ in A dobim po gornjem izrazu pri obeh postopkih $SNR=38$ dB.

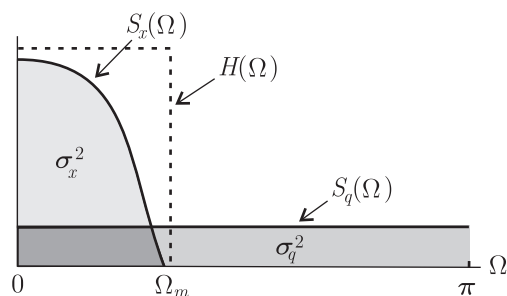
Zgornji izračun velja le pri velikem izkrmiljenju. Pri izkrmiljenjih pod -30 dB začne SNR pri obeh postopkih upadati, a je pri zakonu μ nekoliko višje kot pri zakonu A . Pri obeh postopkih pa je SNR za izkrmiljenja pod -10 dB precej ugodnejši kot pri linearni kvantizaciji.

V praksi logaritemske kvantizacije skoraj nikoli ne delamo neposredno. Pri kvantizaciji govornega signala, signal običajno najprej pretvorimo z 12-bitnim linearnim A/D pretvornikom in ga nato s pomočjo digitalne obdelave signalov logaritmsko stisnemo po zakonu A ali μ . Pretvorbo najpreprosteje izvedemo s pomočjo tabele, ki je zapisana v pomnilniku. Za zapis vseh 12-bitnih vrednosti potrebujemo pomnilnik s 4096 lokacijami na katerih so vpisane vrednosti logaritmov. Pretvorbo potem izvedemo s preprostim odčitavanjem ustreznih vrednosti iz tabele.

7.1.2.3 Kvantizacija s prevzorčenjem

Doslej smo pri obravnavi kvantizacijskega šuma predpostavili, da je ločljivost kvantizatorja omejena z dolžino zapisa števila po kvantizaciji. V praksi pa ločljivost kvantizatorja pogosto omejuje komparator, to je vezje, ki mora ločiti M kvantizacijskih nivojev. Pri 16 bitni kvantizaciji bi moral komparator ločiti $M = 65535$ nivojev, kar pa je izredno zahtevna naloga. Tako zahtevnemu komparatorju se lahko izognemo, če signal najprej močno prevzorčimo, ga kvantiziramo z večjim kvantizacijskim korakom in nato izločimo del kvantizacijskega šuma.

Varianca signala σ_x^2 in varianca kvantizacijskega šuma σ_q^2 se pri povečanju vzorčne frekvence ne spremenita. Zato samo povečanje vzorčne frekvence ne more izboljšati razmerja med signalom in šumom SNR . Da bi lahko kasneje izboljšali SNR , moramo signalu pred vzorčenjem omejiti mejno frekvenco $f_m \ll f_{vz}/2$, tako da signal dejansko prevzorčimo. Če so posamezne napake kvantizacijske napake med seboj neodvisne, ima kvantizacijski šum bel spekter in je spektralna gostota kvantizacijskega šuma $S_q(\Omega)$ enakomerno porazdeljena v celotnem pasu med 0 in π , spekter signala $S_x(\Omega)$ pa je omejen na področje med 0 in $\Omega_m = \pi f_m/f_{vz}$, kot je to prikazano na sliki 7.7. V skladu s Parsevalovim izrekom je moč signala enaka ploščini pod krivuljo gostote



Slika 7.7 – Močnostni spekter signala in šuma pri prevzorčenju

močnostnega spektra. Z nizkim sitom $H(\Omega)$ zadušimo šum nad mejno frekvenco, signal pa ostane nespremenjen. Varianca šuma σ_n^2 se pri filtriranju zmanjša v razmerju:

$$\sigma_n^2 = \frac{\Omega_m}{\pi} \sigma_q^2 = \frac{2f_m}{f_{vz}} = \frac{\sigma_q^2}{k_p} \quad (7.52)$$

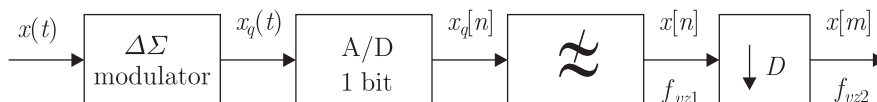
kjer je z k_p označen faktor prevzorčenja. Ker ostane moč signala nespremenjena se SNR poveča za faktor k_p . Pri podvojitvi vzorčne frekvence se torej podvoji tudi SNR , kar ustreza povečanju resolucije kvantizatorja za 1/2 bita. Po filtriranju lahko signal decimiramo na osnovno vzorčno frekvenco, ki je le nekoliko višja od kritične vzorčne frekvence.

Za znatno povečanje resolucije kvantizatorja bi morali izredno povečati vzorčno frekvenco. Razmere lahko prikažemo z zgledom. Kvantizirati želimo zvočni signal z mejno frekvenco 20 kHz

in resolucijo $L = 16$, kar ustreza zvočnemu zapisu laserske plošče. V vhodni stopnji izberemo kvantizator z ločljivostjo desetih bitov. Povečanje resolucije za šest bitov dosežemo s povečanjem standardizirane vzorčne frekvence 44,1 kHz za faktor $4^6 = 4096$. Za opisani primer bi morali vzorčiti signal s frekvenco 180 MHz. Osnovni pretvornik z resolucijo deset bitov in vzorčno frekvenco 180 MHz bi bilo zelo težko izdelati v CMOS tehnologiji. Poleg tega se pri izredno velikem prevzorčenju signal spreminja zelo počasi v primerjavi z vzorčno frekvenco. Napake zaokroževanja zato med seboj niso več neodvisne in šum nima belega spektra, kar močno omejuje faktor prevzorčenja, ki še omogoča izboljšavo SNR .

7.1.3 Pretvorniki $\Delta\Sigma$

Pretvorniki na osnovi modulacije $\Delta\Sigma$ najprej v vhodni enoti modulirajo signal. Signal $x_q(t)$ na izhodu $\Delta\Sigma$ modulatorja, je dvonivojski signal z amplitudama $\pm X_0$. Signal pretvorimo v digitalen signal s pomočjo enobitnega A/D pretvornika, ki ugotavlja zgolj predznak signala na vhodu. Vzorčna frekvenca pretvornika f_{vz1} je mnogo višja od pasovne širine vhodnega signala. Želeno vzorčno frekvenco f_{vz2} dobimo z decimacijo, ki sledi digitalnemu situ proti prekrivanju. Načelna vezava je prikazana na sliki 7.8.



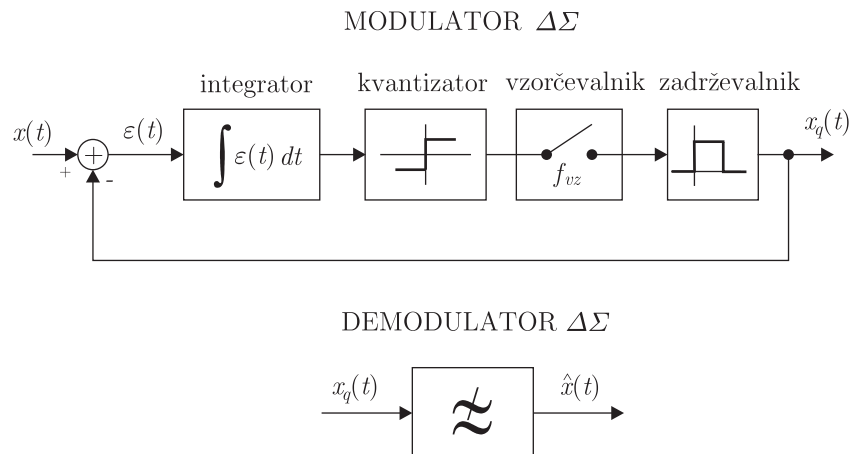
Slika 7.8 – Načelna vezava pretvornika na osnovi modulacije $\Delta\Sigma$

Porazdelitev moči kvantizacijskega šuma ni enakomerna kot pri linearni večbitni kvantizaciji, temveč je poudarjena pri visokih frekvencah. Spektra želenega signala in šuma se pri dovolj velikem prevzorčenju skoraj ne prekrivata, zato nizko sito proti prekrivanju znatno zmanjša kvantizacijski šum.

Zahtevana stopnja prevzorčenja za doseganje določene ločljivosti je pri $\Delta\Sigma$ pretvornikih ugodnejša kot pri pretvornikih z linearno večbitno kvantizacijo, kjer kvantizacijski šum pade v področje spektra signala. Pri $\Delta\Sigma$ pretvornikih imamo opravka z visokimi faktorji prevzorčenja in zanje potrebujemo preprosta, hitra analogna in dokaj obsežna digitalna vezja.

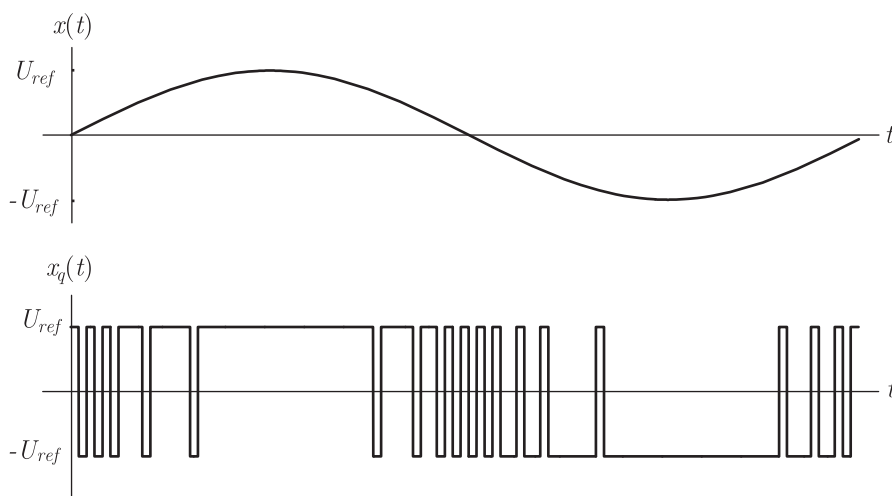
Da bi lahko analizirali delovanje pretvornika, si moramo najprej ogledati delovanje modulatorja $\Delta\Sigma$. Načelna vezava modulatorja in demodulatorja je prikazana na sliki 7.9.

Signal napake $\varepsilon(t)$ je enak razliki med vhodnim signalom in izhodnim signalom. Signal napake integriramo in nato ob vzorčnih trenutkih spreminjamo predznak izhodnega signala v skladu s predznakom signala napake. Izhodni signal se spreminja med vrednostma $\pm X_0$ tako, da sproti zmanjšuje vrednost integrala napake in s tem tudi srednjo vrednost signala napake. Če se vhodni signal ne bi spreminjal (enosmeren signal), bi bila srednja vrednost izhodnega signala kar enaka vhodnemu signalu. Kadar se vhodni signal spreminja relativno počasi glede na vzorčno frekvenco f_{vz1} lahko trdimo, da bo kratkotrajna srednja vrednost izhodnega signala približno enaka trenutni vrednosti vhodnega signala. Ker dobimo kratkotrajno srednjo vrednost s pomočjo nizkega sita, nizko sito služi tudi kot demodulator $\Delta\Sigma$ moduliranega signala. Sito proti

Slika 7.9 – Struktura modulatorja in demodulatorja $\Delta\Sigma$

prekrivanju na sliki 7.8 bi zato lahko razlagali tudi kot digitalni demodulator, ki rekonstruira digitalno $\Delta\Sigma$ moduliran signal.

Na sliki 7.10 je prikazan izhodni signal modulatorja $\Delta\Sigma$ pri vzbujanju s harmoničnim signalom $x(t) = X \sin(\omega_0 t)$. Čim višja je vzorčna frekvenca in čim manjše je razmerje X/X_0 , tem pogostejši so preskoki izhodnega signala, težišče spektralne gostote pa se pomakne k višjim frekvencam.

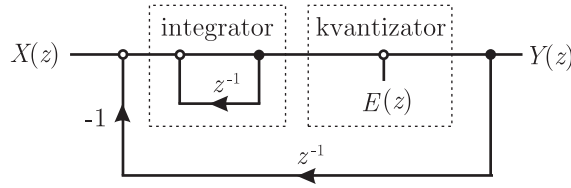
Slika 7.10 – Izhodni signal modulatorja $\Delta\Sigma$ pri harmoničnem vzbujanju

7.1.3.1 Šum pri pretvorbi $\Delta\Sigma$

Pretvornik $\Delta\Sigma$ je izveden iz dveh delov: analognega modulatorja $\Delta\Sigma$ in digitalnega decimatorja. Modulator $\Delta\Sigma$ lahko izvedemo tudi digitalno. S praktičnega vidika taka izvedba nima smisla, saj bi morali pred modulator vključiti še zelo natančen A/D pretvornik, ki bi obenem deloval pri zelo visoki vzorčni frekvenci. Če bi imeli tak pretvornik na voljo, potem pretvornika $\Delta\Sigma$ ne bi potrebovali.

Pri analizi šuma pa je predpostavka, da je modulator $\Delta\Sigma$ izveden kot diskretno vezje smiselna, saj močno olajša analizo. Diagram pretoka signala ustreznega vezja je prikazan na

sliki 7.11. $X(z)$ je transform $\mathcal{Z}$ nekvantiziranega vhodnega signala. Integrator je nadomeščen



Slika 7.11 – Linearizirani diskretni model modulatorja $\Delta\Sigma$

z zakasnitvijo z^{-1} v povratni vezavi. $E(z)$ predstavlja transform $\mathcal{Z}$ kvantizacijskega šuma. Na ta način lahko nelinearno funkcijo kvantizatorja predstavimo v linearnem modelu. Pri tem se moramo zavedati, da šum ni popolnoma neodvisen od signala, zato tudi rezultati analize ne bodo povsem točni, služijo pa lahko za kvalitativno oceno.

Izhodni signal $Y(z)$ je posledica vhodnega signala $X(z)$ in signala kvantizacijskega šuma $E(z)$:

$$Y(z) = H_x(z)X(z) + H_e(z)E(z) \quad (7.53)$$

pri čemer se prevajalna funkcija poti signala $H_x(z)$ razlikuje od prevajalne funkcije poti kvantizacijskega šuma $H_e(z)$. Prevajalno funkcijo poti signala obravnavamo kot vezje s povratno vezavo v skladu z enačbo (2.45), ki jo zaradi preglednosti zapišemo ponovno:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (7.54)$$

kjer je $H_1(z)$ prevajalna funkcija napredujoče smeri in je v našem primeru enaka prevajalni funkciji diskretnega integratorja:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (7.55)$$

H_2 pa je funkcija v povratni vezavi, kjer imamo samo zakasnilni element in množenje z^{-1} , torej velja:

$$H_2(z) = -z^{-1} \quad (7.56)$$

Vstavimo (7.55) in (7.56) v (7.54) in dobimo:

$$H_x(z) = \frac{\frac{1}{1 - z^{-1}}}{1 + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = 1 \quad (7.57)$$

Prevajalna funkcija poti signala je torej enaka prevajalni funkciji vseprepusnega sita, kar pomeni, da pride sam signal skozi sistem nespremenjen. Tudi pot, po kateri gre kvantizacijski šum, lahko obravnavamo kot sistem s povratno vezavo, vendar tu velja:

$$H_1(z) = 1 \quad (7.58)$$

in

$$H_2(z) = -\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (7.59)$$

Prevajalna funkcija poti šuma je torej enaka:

$$H_e(z) = \frac{1}{1 + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = 1 - z^{-1} \quad (7.60)$$

Prevajalna funkcija šuma ima ničlo pri $z = 1$, kar povzroči močno slabljenje šuma pri nizkih frekvencah. Pri visokem prevzorčenju je zato večina moči šuma izven frekvenčnega področja signala. Šum izven frekvenčnega področja signala pa zadušimo s sitom proti prekrivanju pred decimacijo.

Za oceno kolikšno je zmanjšanje šuma ob povečanju vzorčne frekvence, predpostavimo, da je kvantizacijski šum bel, z varianco σ_e^2 . Sito proti prekrivanju pred decimatorjem ima mejno frekvenco $\Omega_m = \pi/D$, faktor decimacije D pa je enak faktorju prevzorčenja signala. Predpostavimo dalje, da je decimacijsko sito idealno nizko sito, tako da prepušča šum zgolj pri frekvencah pod mejno frekvenco. Moč šuma na izhodu je tedaj v skladu s Parsevalovim teoremom (1.100) enaka:

$$\begin{aligned} P_e(D) &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} |H_e(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi/D}^{\pi/D} |1 - e^{-j\Omega}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (7.61)$$

Kot rešitev gornjega integrala dobimo izraz:

$$P_e(D) = 2\sigma_e^2 \left[\frac{1}{D} - \frac{\sin(\pi/D)}{\pi} \right] \quad (7.62)$$

Funkcijo sinus v gornjem izrazu nadomestimo s prvima dvema členoma razvoja v vrsto:

$$\sin\left(\frac{\pi}{D}\right) \doteq \frac{\pi}{D} - \frac{\pi^3}{6D^3} \quad (7.63)$$

Dobimo:

$$P_e(D) \doteq \frac{\sigma_e^2 \pi^2}{3D^3} \quad (7.64)$$

Označimo z K_2 faktor izboljšanja SNR pri podvojitvi vzorčne frekvence. Ker je moč signala neodvisna od vzorčne frekvence, lahko zapišemo:

$$K_{2dB} = 10 \log \left[\frac{P_e(D)}{P_e(2D)} \right] = 10 \log 8 = 9.03 \text{ dB} \quad (7.65)$$

Vidimo, da se SNR izboljša za 9 dB pri vsaki podvojitvi vzorčne frekvence.

Z večkratno zaporedno integracijo signala pred kvantizacijo dobimo $\Delta\Sigma$ pretvornike višjih redov, pri katerih je še povečan učinek slabljenja nizkofrekvenčnih komponent kvantizacijskega šuma.

Na podoben način kot pri $\Delta\Sigma$ pretvorniku bi za pretvornik reda N ugotovili, da je faktor izboljšanja SNR pri podvojitvi vzorčne frekvence enak:

$$K_{2dB} = (2N + 1) \cdot 3,01 \text{ dB} \quad (7.66)$$

Vidimo, da se SNR pri modulatorju $\Delta\Sigma$ drugega reda izboljša za 15 dB in pri modulatorju 3 reda že za 21 dB pri vsaki podvojitvi vzorčne frekvence. Zavedati se moramo, da smo pri

analizi uporabili lineariziran model in smo zanemarili odvisnost kvantizacijskega šuma od signala. Zaradi te odvisnosti so lahko rezultati nekoliko slabši, pretvorniki višjih redov pa lahko postanejo nestabilni, predvsem pri enobitni kvantizaciji, kjer je ta odvisnost najbolj izrazita.

Ne glede na red pretvornika lahko uporabimo večbitni kvantizator. S tem močno zmanjšamo moč kvantizacijskega šuma, saj povečanje za 1 bit predstavlja povečanje razmerja S/N za 6 dB. Pri večbitnih kvantizatorjih je zelo pomembna linearnost karakteristike, ker se nelinearna popačenja neposredno preslikajo v izhodni signal. Pri zelo visokih vzorčnih frekvencah pa je težko zagotoviti veliko linearnost zato se v praksi uporabljajo le kvantizatorji do največ 6 bitov.

A/D pretvornik akustičnih signalov z ločljivostjo 16 bitov pri frekvenci vzorčenja 44,1 kHz (kvaliteta akustičnega signala na laserski plošči) lahko izdelamo z modulatorjem $\Delta\Sigma$ drugega reda s pet-bitnim kvantizatorjem in vzorčno frekvenco 1,5 MHz.

Pretvorniki na osnovi modulacije $\Delta\Sigma$ so poleg pretvorbe akustičnih signalov zelo uporabni tudi za pretvorbo drugih nizkopasovnih realnih signalov, realnih in kompleksnih pasovnih signalov in tudi za pretvorbo signalov v vzporednih naborih pasovnih sit.

7.2 Digitalno analogna pretvorba signalov

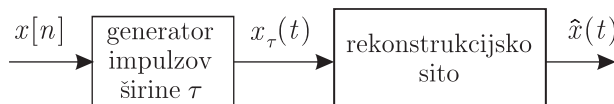
Dosedanja izvajanja v 3. poglavju so nazorno predstavila postopek rekonstrukcije zveznega signala, vendar praktična izvedba D/A pretvornika neposredno na tej osnovi ni mogoča predvsem iz dveh razlogov:

- Iz digitalnega signala bi morali generirati signal $x_\delta(t)$ oziroma niz uteženih enotskih impulzov s ploščinami, ki bi bile enake vrednostim vzorcev. V realnih sistemih tega ne moremo narediti. Namesto tega lahko vzorce diskretnega signala pretvorimo le v impulze končne širine.
- Sistemska funkcija rekonstrukcijskega sita ima nekavzalen odziv in zato tako sito ni izvedljivo. V ta namen potrebujemo analogno sito z odzivom, ki je približek odziva idealnega sita z mejno frekvenco med ω_m in $\omega_{vz}/2$.

V praksi je rekonstrukcijsko vezje sestavljeno iz:

- Generatorja impulzov, ki digitalni signal pretvori v niz impulzov širine τ in amplitude $x[n]$.
- Rekonstrukcijskega sita, ki je analogno nizko sito pasovne širine med ω_m in $\omega_{vz}/2$.

Na sliki 7.12 je prikazana načelna vezava rekonstrukcijskega vezja.

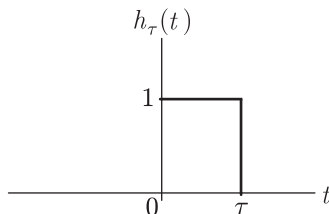


Slika 7.12 – Sistem za rekonstrukcijo

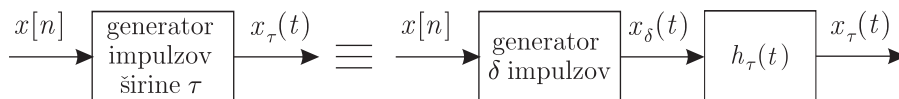
Če tvorimo časovni diskretni signal z nizom zelo ozkih uteženih impulzov širine $\tau \ll T_{vz}$ in amplitude x_n , dobimo po interpolaciji zvezen signal verne oblike in zelo majhne amplitude. Z naraščanjem širine impulzov τ linearno narašča amplituda rekonstruiranega signala, vendar pa se spremeni njegova frekvenčna karakteristika.

7.2.1 Rekonstrukcija signala z impulzi končne širine

Analizirajmo interpolacijo niza impulzov širine τ z amplitudami vzorcev $x[n]$. Širina impulzov lahko doseže največ vrednost T_{vz} . Generator realnih impulzov širine τ lahko matematično predstavimo kot zaporedno vezavo generatorja idealnih δ impulzov in analognega nizkega sita oblike impulza s sistemsko funkcijo $h_\tau(t)$, kot je to prikazano na sliki 7.14.



Slika 7.13 – Sistemna funkcija vrinjenega sita

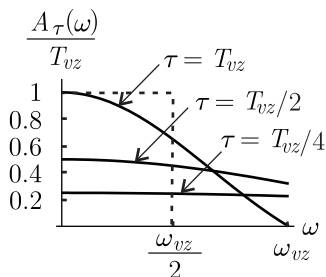


Slika 7.14 – Ponazoritev generatorja impulzov

Med generator δ impulzov in rekonstrukcijsko sito je vrinjeno nizko sito, ki pokvari frekvenčni potek signala. Da bi na izhodu vrinjenega sita res dobili impulze širine τ , mora biti sistemna funkcija enaka obliki impulza, kot je vidno na sliki 7.13, saj so na vhodu δ impulzi, sistemna funkcija pa je definirana kot odziv sistema na δ impulz. Prevaljalna funkcija sita $H_\tau(\omega)$ je enaka FT sistemske funkcije:

$$H_\tau(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \quad (7.67)$$

Amplitudna karakteristika $A_\tau(\omega)$ vrinjenega sita se množi z amplitudno karakteristiko rekonstrukcijskega sita. Amplitudna karakteristika pri različnih širinah impulzov τ je prikazana na sliki 7.15.



Slika 7.15 – Amplitudna karakteristika pravokotnemu impulzu ekvivalentnega sita

Amplituda je največja pri impulzih širine $\tau = T_{vz}$, to je, kadar je izhodni signal D/A pretvornika stopničasta funkcija, vendar dobimo pri tej širini impulzov tudi največje odstopanje od idealno ravne amplitudne karakteristike.

Odstopanja od idealne karakteristike pri stopničastem signalu lahko preprosto kompenziramo s korekcijskim digitalnim sitom pred D/A pretvornikom. Prevajalna funkcija korekcijskega sita mora biti enaka inverzni vrednosti prevajalne funkcije $H_\tau(\omega)$:

$$H_k(\Omega) = H_\tau^{-1}\left(\frac{\Omega}{T_{vz}}\right) \quad ; \quad |\Omega| < \pi \quad (7.68)$$

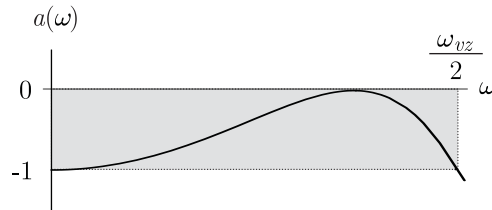
Pri korekciji digitalnega signala lahko uporabimo sita vrste IIR ali FIR. Za zgled si oglejmo preprosto sito IIR prvega reda s prevajalno funkcijo:

$$H_k(z) = \frac{b}{1 + az^{-1}} \quad (7.69)$$

Normirana korigirana amplitudna karakteristika:

$$a(\omega) = 20 \log [H_k(\omega T_{vz}) H_\tau(\omega) / T_{vz}] \quad (7.70)$$

ki jo dobimo po korekciji s sitom IIR prvega reda pri $a = 0,224$ in $b = 1,092$, je prikazana na sliki 7.16. Vidimo, da že z zelo preprostim sitom dosežemo valovitost 1 dB v frekvenčnem



Slika 7.16 – S sitom IIR prvega reda kompenzirana amplitudna karakteristika D/A pretvornika

področju pod polovico vzorčne frekvence, z malo zahtevnejšim sitom pa lahko dosežemo še bistveno manjša odstopanja od ravne karakteristike.

Vpliv širine impulza lahko upoštevamo že v predhodni obdelavi signala, tako da vključimo zahtevano korekcijo v sita, ki jih potrebujemo pri obdelavi signala. Tako načrtovanje sit je označeno kot načrtovanje s kompenzacijo $\sin(x)/x$.

7.2.2 Rekonstrukcija s predhodno interpolacijo

Odstopanje frekvenčne karakteristike zaradi širokih rekonstrukcijskih impulzov postane skoraj zanemarljivo, če signal pred rekonstrukcijo interpoliramo s faktorjem interpolacije I :

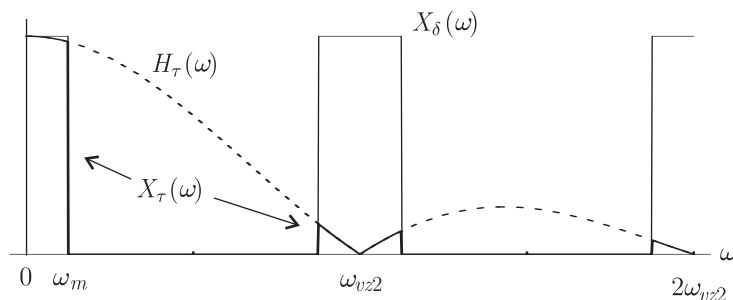
$$f_{vz2} = I f_{vz1} \quad (7.71)$$

Kot širino impulza vzamemo nov vzorčni interval:

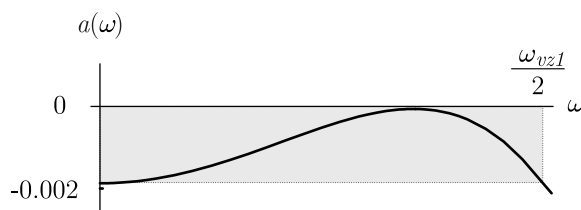
$$\tau = T_{vz2} = \frac{T_{vz1}}{I} \quad (7.72)$$

Frekvenčna karakteristika sita oblike impulza $H_\tau(\omega)$ se zato raztegne po frekvenčni osi, mejna frekvenca signala pa ostane nespremenjena. Na sliki 7.17 je shematsko prikazan primer pri interpolaciji za faktor $I = 4$.

Vidimo, da širina impulza le še malo vpliva na slabljenje signala do mejne frekvence. Zaradi prevzorčenja se ponovitve spektra okrog mnogokratnikov frekvence močno razmaknejo, poleg

Slika 7.17 – Spekter signala pri rekonstrukciji z interpolacijo $I = 4$

tega pa so še oslabljene, saj nastopajo ničle sita oblike impulza ravno pri mnogokratnikih vzorčne frekvence in močno oslabijo ponovljene spektre. To močno zmanjša zahteve za analogno rekonstrukcijsko sito, saj je prehodno področje zelo široko, zahteve po slabljenju pa so tudi manjše. Če dodamo še korekcijsko IIR sito z enim polom, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, dobimo z izbiro $a = 0,105$ in $b = 1,10476$ v področju pod mejno frekvenco signala skoraj idealno ravno karakteristiko z valovitostjo pod 0,002 dB, kot je to prikazano na sliki 7.18.



Slika 7.18 – S sitom IIR prvega reda korigiran potek prevajalne funkcije pri štirikratnem prevzorčenju

Za poenostavitev rekonstrukcijskega vezja se v D/A pretvornikih za reprodukcijo laserskih plošč pogosto uporablja osemkratno prevzorčenje.

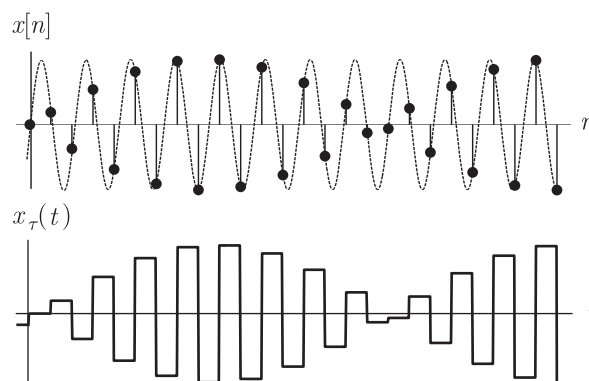
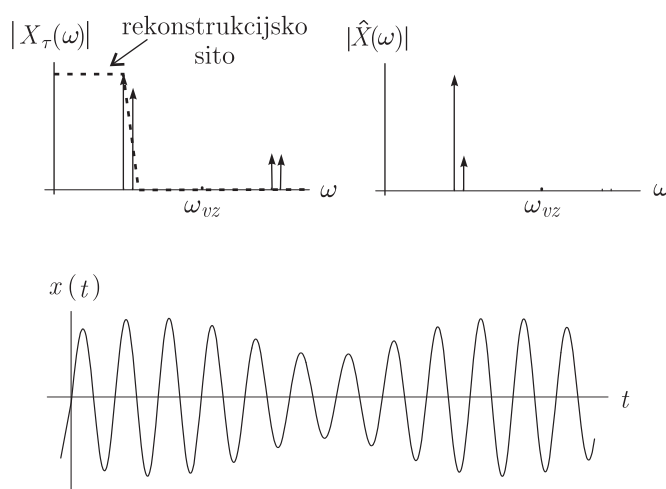
7.2.3 D/A pretvorba harmoničnega signala

Rekonstrukcija digitalnega harmoničnega signala stalne amplitude, ki je vzorčen le malo nad kritično frekvenco, je problematična. Za zgled si oglejmo sinusni signal s frekvenco $\Omega_0 = 0.94\pi$. Na sliki 7.19 so prikazani vzorci $x[n]$ in stopničast signal po D/A pretvorbi $x_\tau(t)$ pred rekonstrukcijskim sitom.

Ker je frekvenca harmoničnega signala blizu polovice frekvence vzorčenja, imamo na eno periodo vzorčenega signala približno po dva vzorca. Amplitude vzorcev se spreminjajo med 0 in temensko vrednostjo signala s frekvenco $\omega_{vz} - \omega_0$. Da bi dobili iz signala $x_\tau(t)$ po filtriranju z rekonstrukcijskim sitom rekonstruiran signal $\hat{x}(t)$ s konstantno amplitudo, bi morale imeti rekonstrukcijsko sito zelo veliko vztrajnost, saj bo v nasprotnem primeru signal amplitudno moduliran.

Razmere lahko še nazorneje prikažemo v frekvenčnem prostoru. Na sliki 7.20 je shematsko prikazan amplitudni spekter signala na izhodu A/D pretvornika $X_\tau(\omega)$ in spekter rekonstruiranega signala $\hat{X}(\omega)$.

Prva ponovljena spektralna komponenta je zelo blizu želeni komponenti, zato je z neidealnim rekonstrukcijskim sitom ne moremo popolnoma izločiti. Na izhodu dobimo zato signal, ki vsebuje

Slika 7.19 – D/A pretvorba harmoničnega signala $\Omega_0 = 0,94 \pi$ 

Slika 7.20 – Vpliv rekonstrukcijskega sita pri D/A pretvorbi harmoničnega signala

dve spektralni komponenti, ki sta le malo razmaknjeni, zato dobimo utripanje amplitude. Če bi imelo rekonstrukcijsko sito pri $\omega_{vz} - \omega_0$ slabljenje 10 dB, kar je lahko zelo velika zahteva, kadar je vzorčna frekvenca le malo nad kritično, bi izhodni signal izgledal kot je prikazan na sliki 7.20.

7.3 Obdelava signalov s končno natančnostjo

Pri obdelavi signalov imamo opravka z aritmetičnimi enotami, ki delujejo z različnimi formati zapisa števil. Ločimo predvsem zapisa s stalno in plavajočo vejico, oba pa sta omejena na določeno število binarnih mest.

Pri analizi diskretnih sit smo predpostavljali, da so koeficienti sit realna števila. Pri izvedbi moramo koeficiente zaokrožiti na natančnost, ki jo dopušča uporabljena strojna oprema. Zaradi zaokroževanja se spremenijo karakteristike sit, ki smo jih načrtovali ob predpostavki, da so koeficienti popolnoma natančni. Vpliv kvantizacije koeficientov bistveno zmanjšamo, če že pri načrtovanju upoštevamo kvantizacijo in uporabimo posebne načrtovalske postopke, ki na osnovi zahtevane frekvenčne karakteristike izračunavajo že kvantizirane vrednosti koeficientov. Vpliv kvantizacije koeficientov je močno odvisen od vrste, reda in strukture sit. Največ vpogleda dobimo, če raziščemo vpliv kvantizacije koeficientov na lokacije polov in ničel v ravnini z .

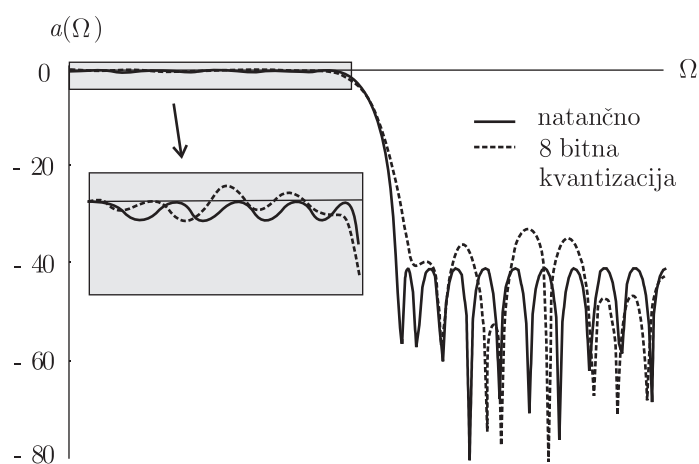
Poleg zaokroževanja koeficientov pa moramo zaokroževati tudi rezultate aritmetičnih operacij, ki povečajo dolžino zapisa števila. Pri digitalni obdelavi signalov so to predvsem množenja. Pri množenju je dolžina rezultata enaka vsoti dolžin posameznih operandov. Zaokroževanje vmesnih rezultatov teče za razliko od zaokroževanja koeficientov ves čas obdelave, zato je vpliv zaokroževanja vmesnih rezultatov podoben vplivu zaokroževanja signala pri pretvorbi A/D in ga obravnavamo kot šum. Vmesni rezultati lahko pri zapisu s stalno vejico presežejo maksimalno vrednost zapisa, zato moramo vmesne rezultate sproti skalirati.

7.3.1 Kvantizacija koeficientov sit FIR

Pri sitih FIR je prevajalna karakteristika določena izključno z legami ničel. Pri realizaciji v direktni obliki imamo torej opravka s polinomom višjega reda $H(z)$ in bi pričakovali močan vpliv kvantizacije koeficientov. To ne drži. Ničle, ki določajo potek v prepustnem področju sita, leže precej stran od frekvenčne krožnice. Na frekvenčni potek vpliva razdalja med ničlo in točkami na frekvenčni krožnici. Ker se zaradi kvantizacije koeficientov ta razdalja le malo spremeni, kvantizacija koeficientov ne bo bistveno vplivala na potek prevajalne funkcije v prepustnem področju sita.

Če želimo, da ima sito FIR linearen fazni potek, morajo biti koeficienti sita simetrični oziroma antisimetrični. S kvantizacijo simetrije ne pokvarimo, zato sito tudi po kvantizaciji ohrani linearen fazni potek pri nekoliko spremenjeni amplitudni karakteristiki.

Ničle, ki določajo karakteristiko filtra v zapornem območju, leže na frekvenčni krožnici ali v njeni neposredni bližini. Kvantizacija bo morebiti dve ničli, ki ležita na frekvenčni krožnici ena poleg druge, izmaknila iz kroga v recipročno dvojico ničel. Odmik ničel od frekvenčne krožnice povzroča zmanjšanje slabljenja v zaporu. Za zgled si oglejmo karakteristiko sita FIR dolžine $N = 38$ z 8 bitnimi koeficienti. Razlika med karakteristiko z natančno izračunanimi koeficienti in z grobo kvantiziranimi koeficienti je sorazmerno majhna in opazna predvsem v področju zapore.



Slika 7.21 – Vpliv zaokroževanja koeficientov na 8 bitov pri situ FIR ($N = 38$)

7.3.2 Zaokroževanje vmesnih rezultatov sit FIR

Oglejmo si še učinek zaokroževanja vmesnih rezultatov na izhodne vzorce sita FIR, ki jih računamo po enačbi:

$$y[n] = \sum_{m=0}^N b_m x[n-m] \quad (7.73)$$

Naj bodo koeficienti zapisani z L_k biti in vzorci signala z L_s biti. Za natančen zapis rezultata množenja potrebujemo $L_k + L_s - 1$ bitov. Predpostavimo, da računamo gornjo enačbo tako, da rezultat posameznih množenj vzorca signala z ustreznim koeficientom sproti prištevamo vmesnemu rezultatu v registru procesorja. Pri tem ločimo dva primera:

- Register procesorja je dovolj dolg, da omogoča shranjevanje natančnih vmesnih rezultatov. V tem primeru moramo zaokrožiti na L_s bitov le izhodne vzorce sita. Zaokroževanje izhodnih vzorcev ima enak učinek, kot ga ima zaokroževanje vzorcev signala pri A/D pretvorbi. Pri zapisu s stalno vejico je učinek, enak kot pri linearni kvantizaciji, pri zapisu s plavajočo vejico pa približno enak kot pri logaritmski kvantizaciji.
- V registru procesorja lahko zapišemo število z enako natančnostjo, kot je zapis vzorcev signala. Vsak produkt koeficienta in vzorca signala moramo potem sproti zaokrožiti in tako zaokrožene vrednosti prišteti vrednosti v registru. V situ reda N z $N + 1$ odcepi imamo $N + 1$ zaokroževanj, kar da v izhodnem signalu $N + 1$ krat večjo moč kvantizacijskega šuma v primerjavi s prvim primerom.

Iz gornjih razlogov ima večina signalnih procesorjev dvojno dolžino registrov za shranjevanje vmesnih rezultatov. Procesorji s plavajočo vejico imajo poleg tega, da so preprostejši za uporabo, tudi prednost, da vnašajo manj kvantizacijskega šuma zaradi zaokroževanja vmesnih rezultatov.

7.3.3 Kvantizacija koeficientov sit IIR

Vpliv zaokroževanja na lego ničel smo obravnavali že pri sitih FIR. Sita IIR imajo v prevajalni funkciji poleg ničel tudi pole, ki vplivajo na frekvenčno karakteristiko sita. Sprememba koeficientov a_n ima na lego polov popolnoma enak vpliv, kot ga ima sprememba koeficientov b_n na lego ničel. Ker pa leže pri sitih IIR poli, ki vplivajo na karakteristiko sita v prepustnem področju, v bližini frekvenčne krožnice, lahko že majhen premik lege povzroči veliko odstopanje frekvenčne karakteristike v prepustnem področju. Poli, ki ležijo zelo blizu frekvenčne krožnice, se utegnejo zaradi kvantizacije premakniti na samo krožnico in povzročiti nestabilnost sita.

Oglejmo si najprej vpliv kvantizacije na sito prvega reda s prevajalno funkcijo:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (7.74)$$

Pol leži pri vrednosti a na realni osi v ravnini z . Vrednosti a smejo biti le na intervalu med -1 in 1. Natančnost kvantizacije koeficienta a neposredno vpliva na natančnost lege pola v ravnini z . Z zapisom dolžine L bitov dobimo največ 2^L možnih leg pola na realni osi.

Z enim polom lahko naredimo nizko ali visoko sito. Pasovna širina sita se manjša, njegova kvaliteta pa narašča s približevanjem pola frekvenčni krožnici. Kvantizacija koeficienta a je

lahko problematična le pri sitih zelo visoke kvalitete, drugače pa povzroči zgolj nenatančnost pri nastavitvi pasovne širine sita.

Pri situ drugega reda ima kvantizacija vrednosti koeficientov močnejši vpliv. Vzemimo, da imamo pasovno sito s kompleksno konjugirano dvojico polov pri $r e^{\pm j\varphi}$ s prevajalno funkcijo:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 - r e^{j\varphi} z^{-1})(1 - r e^{-j\varphi} z^{-1})} \quad (7.75)$$

Z izenačenjem imenovalcev v gornjem izrazu dobimo:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2r \cos \varphi = -2\Re[z_p] \\ a_2 &= r^2 \end{aligned} \quad (7.76)$$

in od tod možne lege polov:

$$\begin{aligned} \Re[z_p] &= \frac{Q(a_1)}{2} \\ |z_p| &= \sqrt{Q(a_2)} \end{aligned} \quad (7.77)$$

kjer je s $Q(\cdot)$ označena funkcija zaokroževanja na najbližjo vrednost pri dani natančnosti zapisa koeficientov.

Kvantizacija koeficienta a_1 vpliva na kvantizacijo realnega dela oziroma odmaknjenost polov v smeri realne osi. Pola lahko zato ležita le na navpičnih premicah, ki so med seboj razmaknjene za polovico kvantizacijskega koraka Δ . Kvantizacija koeficienta a_2 pa vpliva na radij, na katerem ležita pola, zato lahko pola ležita le na koncentričnih krogih, katerih radiji se zaradi kvadratnega korena v gornjem izrazu ne spreminja linearno.

Pri stabilnih sitih ležijo poli v enotskem krogu, zato mora veljati:

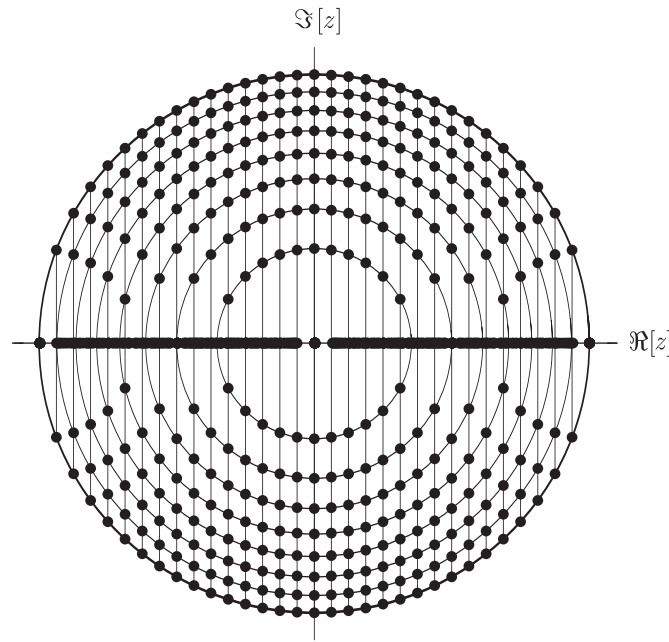
$$\begin{aligned} |a_1| &\leq 2 \\ |a_2| &\leq 1 \end{aligned} \quad (7.78)$$

Če bi v celoti izkoristili dolžino zapisa koeficientov, bi bila, pri dani dolžini L , velikost kvantizacijskega koraka Δ določena s koeficientom a_1 , ki ima lahko vrednosti v mejah med -2 in 2:

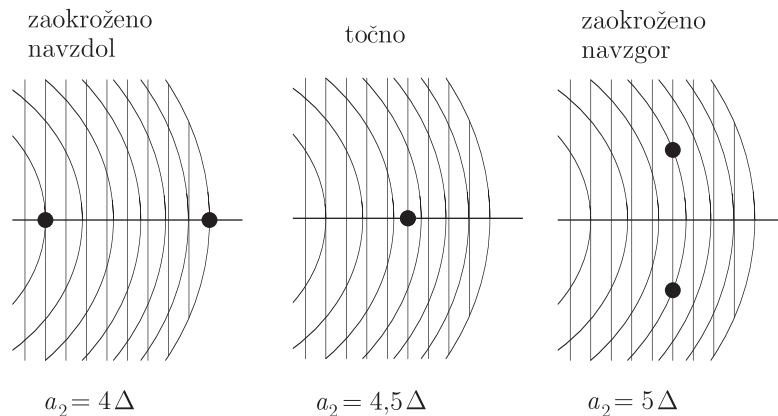
$$\Delta = \frac{4}{2^L} \quad (7.79)$$

Možne lege polov pri grobi kvantizaciji ($L = 5$) so prikazane na sliki 7.22. Konjugirano kompleksne dvojice polov lahko leže le na presečiščih navpičnih premic s krožnicami. Vidimo, da je gostota možnih lokacij v bližini $\pm j$ mnogo večja kakor v bližini ± 1 . Majhna gostota možnih lokacij je tudi okoli $z = 0$, kar pa ni problematično.

Polov, ki leže na realni osi v izračunu nismo upoštevali, saj smo predpostavili konjugirano kompleksen par polov. Realni poli lahko leže tudi izven presečišč mreže. Gostota možnih leg je tu precej večja kot pri konjugirano kompleksnih parih, kar daje vtis, da lahko njihove lege kljub zaokroževanju koeficientov določamo zelo natančno. Tak vtis je napačen, ker zaokroževanje koeficientov a_1 in a_2 polov na realni osi ne premakne v najbližji možni legi. Za primer si oglejmo

Slika 7.22 – Mreža, ki določa možne lege polov sita drugega reda pri $L = 5$

dvakratni pol pri $z = 0,75$, ki ga dobimo pri vrednostih koeficientov $a_1 = -3/2$ in $a_2 = 9/16$. Pri $L = 5$ velja Δ enak $1/8$. Koeficienta a_1 torej ni potrebno zaokrožiti, koeficient a_2 pa lahko zaokrožimo navzdol na $1/2$ ali navzgor na $5/8$. V prvem primeru dobimo par polov na realni osi $z_{p1} = 0,5$ in $z_{p2} = 1$, v drugem primeru konjugirano kompleksen par polov $z_{p1,2} = 0,75 \pm 0,25j$. Vidimo, da so odstopanja kar precejšnja glede na gostoto možnih lokacij na realni osi. Razmere so prikazane na sliki 7.23. Pri situ prvega reda lahko lege polov na realni osi določimo bistveno natančneje.

Slika 7.23 – Zaokroževanje koeficienta a_2 pri dvakratnem polu

Če bi imelo sito poleg polov tudi ničle, ki bi ležale zunaj enotnega kroga, bi morali še povečati kvantizacijski korak, saj bi bil koeficient b_1 v tem primeru po absolutni vrednosti lahko večji od 2. Prednost pri situ drugega reda v primerjavi s siti višjih redov, ki smo jih obravnavali pri sitih FIR, je v tem, da lahko ničle postavimo točno na krožnico in s tem dosežemo ugodnejši potek v zapornem področju.

Analiza postane precej bolj zapletena, če povečujemo red sita. Če ohranimo direktno obliko, določa kvantizacija koeficienta a_4 pri redu sita $N = 3$ vse možne radije, na katerih lahko ležale poli. Za radije velja $r = \sqrt[4]{a_4}$, kar povzroči še večjo neenakomernost razdalj med krožnicami. Občutljivost leg polov na kvantizacijo v splošnem narašča z redom sita pri direktni obliki realizacije. Zato sita višjih redov običajno realiziramo kot zaporedne ali vzporedne vezave filtrskih celic drugega reda.

Pri serijski vezavi sit drugega reda imamo izraz:

$$H(z) = H_{i0} \frac{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} \quad (7.80)$$

Če števec gornjega izraza določa ničle, ki prispevajo slabljenje v zapornem območju, bodo te ničle ležale na frekvenčni krožnici znotraj zapornega področja, s čimer je lega dvojic ničel podana z $e^{\pm\varphi_i}$. Iz tega sledi, da je $b_{i2} = 1$ in $b_{i1} = -2\cos(\varphi)$. Prvi pogoj ni vprašljiv, kvantizacija koeficienta b_{i1} pa lahko ničlo samo malo zamakne po enotinem krogu.

Pri paralelni strukturi sita na osnovi celic drugega reda se izkaže, da je ta realizacija bolj občutljiva glede na kvantizacijo koeficientov, ki določajo ničle posameznih celic.

7.3.4 Zaokroževanje vmesnih rezultatov sit IIR

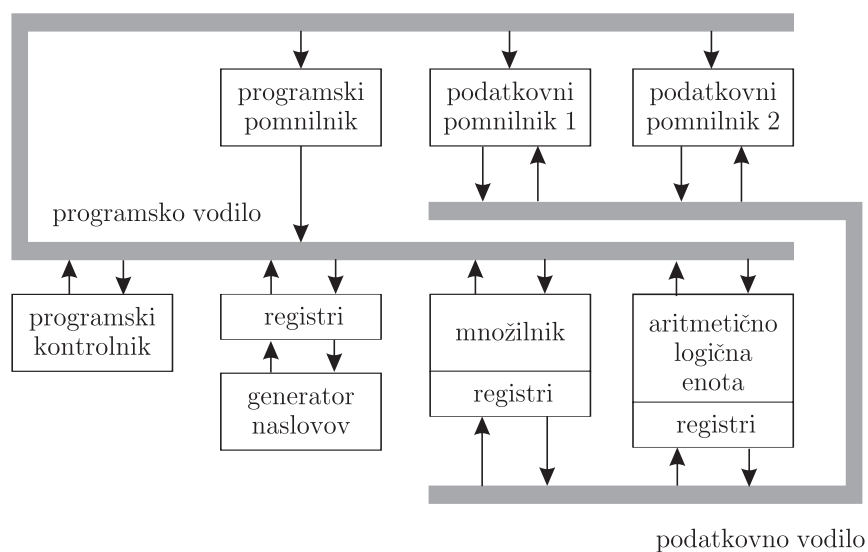
Analiza vpliva zaokroževanja vrednosti produktov pri sitih IIR je precej bolj zahtevna kot pri sitih FIR. Vsako zaokroževanje prispeva kvantizacijski šum z naravo belega šuma. Posamezni šumni prispevki pridejo na izhod sita po različnih poteh z različnimi prevajalnimi funkcijami. Šum na izhodu nastane zato kot vsota velikega števila različno obarvanih šumov. Na moč izhodnega šuma vpliva struktura sita in vrstni red posameznih stopenj v sitih višjega reda.

7.4 Digitalni signalni procesorji

Vezja za digitalno obdelavo signalov lahko izvedemo neposredno z uporabo ustreznih integriranih elektronskih komponent, kot so to zakasnilne celice, pomikalni registri, seštevalniki, množilniki in podobno. Veliko število takšnih komponent je lahko integrirano v enem samem integriranem vezju, na voljo pa so tudi integrirana vezja z osnovnimi gradniki, ki jih je mogoče povezovati programsko – programabilna integrirana vezja. V zadnjem času imajo prednost predvsem izvedbe z digitalnim signalnim procesorjem (DSP), saj njihova računska moč in hitrost naraščata, obenem pa njihova cena pada. Signalni procesor je v osnovi mikroprocesor z arhitekturo, prilagojeno digitalni obdelavi signalov. Večnamenski mikroprocesorji so običajno zasnovani na klasični von Newmanovi arhitekturi, ki predvideva skupno vodilo za podatke in ukaze, medtem ko so digitalni signalni procesorji zasnovani na Harvard arhitekturi, pri kateri sta ločeni podatkovno in programsko vodilo. Načelna arhitektura signalnega procesorja je prikazana na sliki 7.24.

Pri izvedbi digitalnih sit se zelo pogosto pojavlja kombinacija računskih operacij, pri kateri moramo zmnožiti dve števili in rezultat prišteti prejšnjemu rezultatu. Pri klasični izvedbi procesorja moramo zato opraviti veliko število korakov:

- prebrati ukaz iz programskega pomnilnika,
- nastaviti naslov prve vrednosti,



Slika 7.24 – Načelna arhitektura signalnega procesorja

- prebrati prvo vrednost v register,
- nastaviti naslov druge vrednosti,
- prebrati drugo vrednost v register,
- zmnožiti obe vrednosti,
- prebrati ukaz iz programskega pomnilnika,
- rezultat prišteti prejšnjemu rezultatu, ki je shranjen v registru.

Večino zgoraj naštetih operacij lahko opravimo v enem urinem taktu procesorja, z izjemo množenja, ki je zahtevna operacija in zahteva večje število procesorskih ciklov, ki je odvisno od dolžine operandov. Za celoten postopek bi pri klasičnem procesorju zato potrebovali okrog 40 procesorskih ciklov.

Arhitektura signalnega procesorja prikazana na sliki 7.24 omogoča, da potrebuje procesor za izvedbo bistveno manjše število korakov. Ker sta ločeni programsko in podatkovno vodilo, lahko hkrati z branjem oziroma shranjevanjem podatka in izvajanjem trenutnega ukaza prebere in pripravi za izvajanje naslednji ukaz iz programskega pomnilnika. Tak način delovanja imenujemo tudi cevovodni način. Paralelni množilnik omogoča izvedbo operacije množenja v enem procesorskem ciklu, ker pa je seštevalnik v ločeni aritmetično logični enoti (ALU - Arithmetic and Logic Unit), lahko procesor v istem ciklu v cevovodnem načinu opravi tudi eno seštevanje. Nekoliko dražji procesorji imajo že vgrajeno množenje in seštevanje s plavajočo vejico (ang. floating point), medtem ko cenejši omogočajo zgolj operacije s celimi števili.

Pogosto je v digitalnih signalnih procesorjih ločen tudi vhodni in izhodni pomnilnik, tako da se lahko hkrati z branjem novega podatka shrani tudi prejšnji rezultat.

Izkoriščanje cevovodnega načina delovanja signalnega procesorja je lahko programsko zelo zahtevno. V celoti ga lahko izkoristimo le, če program napišemo v zbirnem jeziku procesorja. Pri uporabi višjih programskih jezikov (običajno je to programski jezik C) moramo večino optimizacije prepustiti prevajalniku. Zavedati pa se moramo, da prevajalnik ne more tako dobro

optimizirati kot bi to lahko storil programer, ki pozna vsebino problema in lahko po potrebi tudi prilagodi sam algoritem.

Poleg cevovodnega načina delovanja so v digitalnih signalnih procesorjih obdelavi signalov prilagojeni tudi različni načini naslavljanja. Tipično imajo digitalni signalni procesorji vgrajeno naslavljanje s hkratnim povečanjem naslova in krožni način naslavljanja, ki ju potrebujemo za izvedbo pomikalnega registra ter bitno reverzni način naslavljanja, ki ga potrebujemo za FFT.

Novejši digitalni signalni procesorji imajo lahko vgrajenih več ALU enot in množilnikov, tako da je mogoče vzporedno izvajanje večjega števila ukazov s pomočjo tako imenovanega nabora zelo dolgih ukazov (VLIW - Very Large Instruction Word). Izkoriščanje take arhitekture pa je programske še mnogo zahtevnejše.

7.5 Problemi

1. Določite lego pola nizkega sita prvega reda z mejno frekvenco 100 Hz pri tolerancah 10 Hz in vzorčni frekvenci 50 kHz. S koliko biti moramo zapisati koeficient filtra? S koliko biti lahko zapišemo koeficient za enako vrsto nizkega sita s pasovno širino 10 kHz pri enakih tolerancah?
2. Imamo pasovno zaporno sito drugega reda z dvojno ničlo pri $\pi/6$ na frekvenčni krožnici in dvojni pol pri istem kotu in na razdalji od središča $d = 0.98$. V prvem primeru vzemite natančen zapis, v drugem pa zaokrožene vrednosti na 8 bitov, kjer imamo en bit za predznak in ostale bite za vrednost med 0 in 2! Kakšni pasovni širini dobimo?
3. Sito FIR z zaokroženimi koeficienti lahko predstavimo kot vzporedno vezavo dveh sit FIR enakega reda. Koeficienti prvega naj bodo enaki natančno izračunanim koeficientom, koeficienti drugega pa so enaki razliki $h_e[n] = h_q[n] - h_{ideal}[n]$. Za karakteristiko sita vzemite odziv idealnega sita širine $\pi/8$ reda $N = 256$, uteženega s Hammingovim oknom. Za sito s koeficienti napake določite frekvenčno karakteristiko!

Dodatek

A Analogni signali

A.1 Definicija in matematični zapis analognega signala

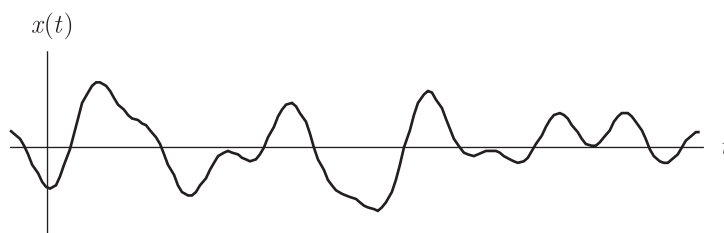
Signal je poljubna fizikalna veličina (napetost, tok, električno in magnetno polje, pritisk, ...), ki se spreminja z eno ali več neodvisnimi spremenljivkami. Te so lahko na primer čas, prostor, temperatura in podobno. V praksi se pogosto omejimo na najpreprostejše signale, to je signale, ki se spreminjajo zgolj s časom. Tak signal matematično zapišemo kot funkcijo časa t . Pri signalih, ki predstavljajo neko fizikalno veličino, uporabljamo ustrezna imena funkcij, številčne vrednosti pa podajamo z ustreznimi enotami:

$u(t)$ - napetost, $i(t)$ - tok, $p(t)$ - pritisk, ... [merska enota]

Pogosto fizikalna narava signala, ki ga opazujemo, ni pomembna in je zato ne upoštevamo. Tak signal imenujemo splošen signal in njegove vrednosti podajamo brez enot:

$x(t)$ - vhodni signal, $y(t)$ - izhodni signal (brez enot)

Signale pogosto predstavljamo grafično. Grafična predstavitev splošnega signala je prikazana na sliki A.1.



Slika A.1 – Grafični prikaz analognega signala

A.2 Vrste analognih signalov

Signale lahko delimo na več načinov na osnovi raznih lastnosti. Izberimo delitve na osnovi

- energije oziroma povprečne moči
 - energijski in
 - močnostni signali,
- periodičnosti
 - periodični
 - aperiodični signali in

- poznavanja signala
 - deterministični in
 - naključni signali.

A.2.1 Energijski in močnostni signali

Na osnovi energije signala oziroma njegove povprečne moči delimo signale na energijske in močnostne. Energijski so signali, ki imajo končno energijo. Ker je energija v naravi končna, so vsi fizikalni signali energijski signali. Močnostne imenujemo signale, ki imajo neskončno energijo in končno povprečno moč. V naravi ni močnostnih signalov. Signale, ki jih opazujemo samo določen čas, lahko predstavimo kot močnostne signale, če predpostavimo, da trajajo neskončno dolgo. Uporaba močnostnih signalov je zelo primerna z matematičnega vidika in pri obdelavi signalov. Poleg signalov s končno močjo včasih uporabljamo tudi signale z neskončno močjo, predvsem kot matematično orodje, ki služi za poenostavitev zapisa. Primer takega signala je niz enotinih impulzov.

A.2.2 Periodični in aperiodični signali

Periodični signali so tisti signali, ki se ponavljajo v neskončnost. Perioda signala T je najmanjša pozitivna vrednost ($T > 0$), ki zagotavlja veljavnost izraza:

$$x(t) = x(t + T) \quad (\text{A.1})$$

To je čas, po katerem se začne signal prvič ponavljati. Periodičnost imamo tudi pri poljubnem mnogokratniku periode kT , kjer je k celo število. Če poznamo signal znotraj ene periode, poznamo signal za celotno časovno območje $-\infty < t < \infty$. Ker trajajo periodični signali neskončno dolgo, imajo neskončno energijo. Običajno imajo omejeno povprečno moč, zato jih uvrščamo med močnostne signale. V naravi lahko signali izpolnjujejo pogoj (A.1) le v omejenem časovnem intervalu, ker se vsi signali nekoč začnejo in končajo. Grafična predstavitev periodičnega signala je na sliki A.2 a.

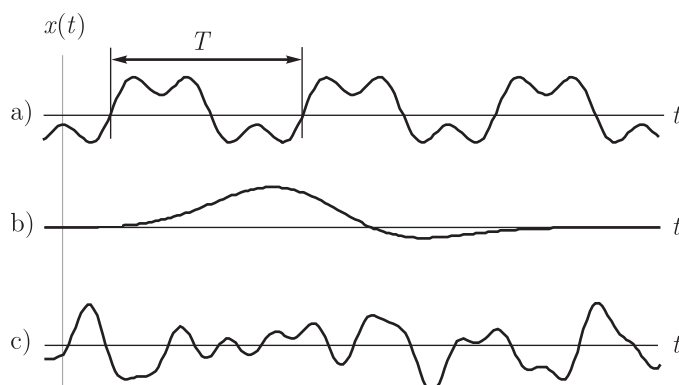
Aperiodični signali so signali, ki jim ne moremo določiti periodičnosti oziroma gre njihova perioda preko vseh meja ($T \rightarrow \infty$). Značilen predstavnik aperiodičnega signala je signal, ki je različen od 0 le znotraj določenega časovnega intervala. Običajno ima tak signal omejeno energijo, zato ga štejemo med energijske signale. Skica časovno omejenega aperiodičnega signala je na sliki A.2 b.

A.2.3 Deterministični in naključni signali

Deterministične imenujemo signale, za katere v celoti poznamo njihov potek. Običajno jih lahko zapišemo kot matematično funkcijo. Primer determinističnega signala je periodičen signal.

Naključni signali so po naravi aperiodični in so zanje podane le statistične lastnosti, kot sta amplitudna porazdelitev $p(x)$ in varianca σ_x^2 . Pri naključnih signalih lahko poznamo zgodovino signala, ne poznamo pa njegove prihodnosti. Ker ne poznamo v celoti njihovega poteka, vzamemo, da trajajo neskončno dolgo in jih zato uvrščamo med močnostne signale. Pri obdelavi

signalov imamo večinoma opravka z naključnimi signali. Grafični prikaz naključnega signala je podan na sliki A.2 c.



Slika A.2 – Grafična predstavitev a) periodičnega, b) aperiodičnega in c) naključnega signala

A.3 Značilne vrednosti analognih signalov

Signale lahko med seboj primerjamo na osnovi njihovih značilnih vrednosti. Za različne vrste signalov si bomo ogledali naslednje značilne vrednosti:

- srednjo vrednost ali enosmerno komponento,
- energijo,
- srednjo moč in
- varianco ali izmenično moč

Pri energijskih signalih je zanimiva predvsem energija signala, ki je podana z:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (\text{A.2})$$

Vse ostale zgoraj naštetje značilne vrednosti so enake 0, ker pri izračunu enosmerne komponente in srednje moči signala povprečimo čez neskončen časovni interval, kot bomo to videli v naslednjem razdelku.

Energija močnostnih signalov je neskončna, ostale značilne vrednosti močnostnih signalov pa so podane v razpredelnici A.1. Za določitev značilnih vrednosti naključnih signalov moramo poznati njihovo gostoto verjetnostne porazdelitve $p(x)$.

A.4 Korelacijska funkcija

Korelacijska funkcija je funkcija, s katero lahko primerjamo dva signala med seboj. Avtokorelacijska funkcija je integral produkta prvega signala in zamaknjene različice drugega signala in je funkcija časovnega zamika τ . Avtokorelacijska funkcija je definirana različno za posamezne vrste signalov:

značilna vrednost	periodični signali	aperiodični signali	naključni signali
srednja vrednost $\bar{x}$	$\frac{1}{T} \int_T x(t) dt$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$
srednja moč $\frac{\overline{x^2}}{x^2}$	$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$
varianca σ_x^2	$\frac{1}{T} \int_T (x(t) - \bar{x})^2 dt$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (x(t) - \bar{x})^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx$

Tabela A.1 – Značilne vrednosti močnostnih signalov

Periodični signali

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t+\tau) d\tau \quad (\text{A.3})$$

Aperiodični energijski signali

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) d\tau \quad (\text{A.4})$$

Aperiodični močnostni signali

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t+\tau) d\tau \quad (\text{A.5})$$

A.5 Avtokorelacijska funkcija

Avtokorelacijsko funkcijo dobimo, če v korelacijski funkciji drugo funkcijo, to je $y(t)$, nadomestimo s prvo, to je $x(t)$. Signal torej primerjamo sam s seboj. Vrednost avtokorelacijske funkcije v izhodišču ($\tau = 0$) je pri energijskih signalih enaka energiji signala:

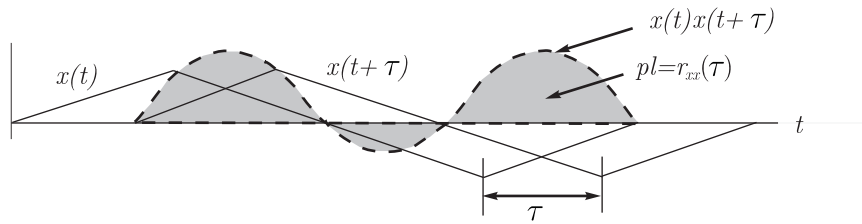
$$E_x = r_{xx}(0) \quad (\text{A.6})$$

pri močnostnih signalih pa povprečni moči signala:

$$\overline{x^2(t)} = R_{xx}(0) \quad (\text{A.7})$$

Vrednost avtokorelacijske funkcije je največja v izhodišču. Pri periodičnih signalih je periodična. Maksimalna vrednost se zato ponovi pri celih mnogokratnikih periode.

Zgled izračuna avtokorelacijske funkcije časovno omejenega energijskega signala je narisano na sliki A.3.

Slika A.3 – Signal $x(t)$, zakasnjena replika $x(t + \tau)$ in avtokorelacijska funkcija $r_{xx}(\tau)$

A.6 Spekter analognih signalov

A.6.1 Spekter periodičnih signalov

Vsak periodičen signal končne moči lahko zapišemo v obliki vsote kosinusnih in sinusnih členov:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Koeficienti a_k in b_k predstavljajo amplitude posameznih sinusnih in kosinusnih členov in jih lahko izračunamo na osnovi izrazov:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Periodičen signal lahko vsebuje enosmerno komponento in izmenične komponente, ki so mnogokratniki osnovne frekvence ω_0 . Osnovna frekvenca ω_0 je določena s trajanjem periode T in je tem nižja, čim daljša je perioda. Število višjih harmonskih komponent navzgor ni omejeno. Koeficiente a_k in b_k imenujemo tudi spekter signala. Spekter periodičnega analognega signala je diskreten. Koeficienti a_k predstavljajo kosinusni in koeficienti b_k sinusni del spektra.

Elegantnejši matematični zapis spektra signala dobimo, če uporabimo pri razvoju signala v vrsto namesto kosinusnih in sinusnih signalov kompleksne harmonične signale:

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \quad (\text{A.10})$$

Signal v časovnem prostoru je potem podan z vsoto kompleksnih harmoničnih komponent:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \quad (\text{A.11})$$

kjer predstavljajo koeficienti $X[k]$ kompleksni frekvenčni spekter signala in jih izračunamo na osnovi izraza:

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (\text{A.12})$$

Indeks k v izrazu (A.11) zavzema tudi negativne vrednosti, torej imamo na videz opravlja z negativnimi frekvencami. Negativne frekvence nimajo fizikalnega pomena in so uvedene zgolj

zaradi enostavnejšega matematičnega zapisa, saj za vsak realen voden signal $x(t)$ velja:

$$X[k] = X[-k]^* = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad (\text{A.13})$$

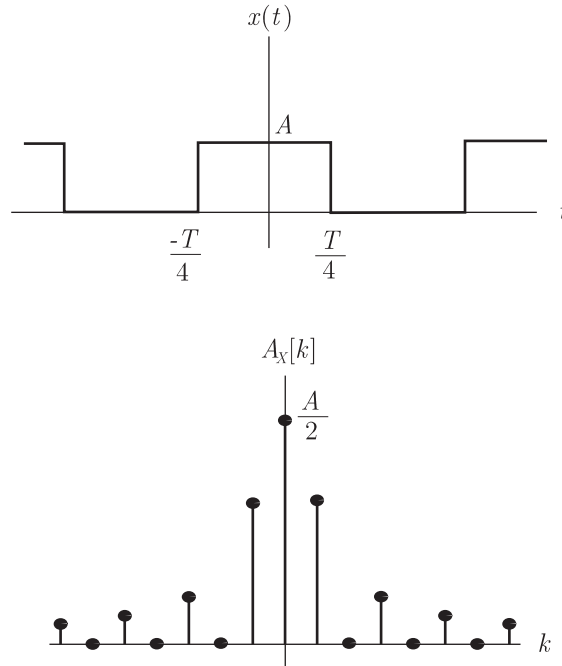
Realni deli koeficientov predstavljajo kosinusne, imaginarni pa sinusne komponente spektra. Komponente spektra lahko izrazimo tudi z amplitudami $|X[k]|$ in faznimi zasuki Φ_k :

$$X[k] = |X[k]|e^{j\Phi_k} \quad (\text{A.14})$$

Vsak periodičen signal lahko izrazimo v časovnem ali frekvenčnem prostoru. Oba zapisa sta enakovredna ter predstavljata med seboj odvisno dvojico – Fourierev par. V splošnem zapisu za Fourierev par velja:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X[k] \\ X[k] &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X[k]\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Na sliki A.4 je prikazan primer pravokotnega periodičnega signala in njegovega amplitudnega spektra.



Slika A.4 – Pravokoten periodičen signal v a) časovnem in b) frekvenčnem prostoru

Fourier transform avtokorelacijske funkcije periodičnega signala $r_{xx}(t)$ imenujemo močnostni spekter signala:

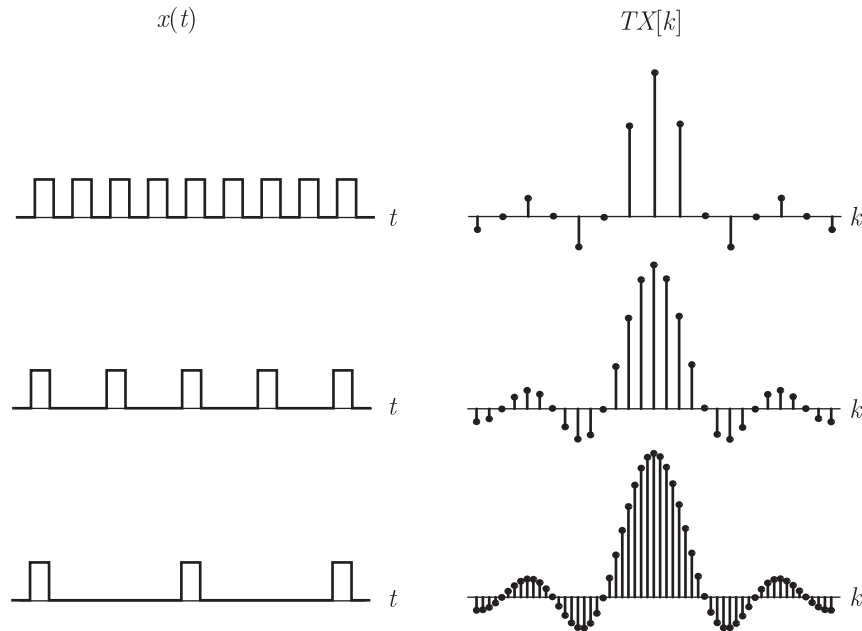
$$S_x[k] = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} \quad (\text{A.16})$$

Pokazati je mogoče tudi, da je močnostni spekter enak kvadratu amplitudnega spektra:

$$S_x[k] = |X[k]|^2 \quad (\text{A.17})$$

A.6.2 Spekter aperiodičnih energijskih signalov

Aperiodičen signal lahko dobimo tako, da povečujemo periodo periodičnega signala prek vseh meja. Pri tem se zmanjšuje frekvenca osnovne harmonske komponente ω_0 . Na sliki A.5 je prikazano povečevanje periode. Najprej izločimo signal vsake druge periode in končno ohranimo le eno periodo.



Slika A.5 – Predstavitev periodičnega signala v časovnem in frekvenčnem prostoru ter njegova transformacija v aperiodični signal

Če povečujemo periodo T čez vse meje, tvori osnovna harmonska komponenta z višjimi harmonskimi komponentami zvezen spekter, ker postaja razmik med frekvenčnimi komponentami infinitezimalno majhen ($\omega_0 \rightarrow d\omega$). Če bi izhajali iz enačb za periodične signale, moramo upoštevati naslednje odnose:

$$\begin{aligned}
 T &\rightarrow \infty \\
 \omega_0 &\rightarrow d\omega \\
 k\omega_0 &\rightarrow \omega \\
 TX[k] &\rightarrow X(\omega) \\
 \sum &\rightarrow \int
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

kar nas privede do Fourier transforme, ki preslika signal iz frekvenčnega v časovni prostor in obratno.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

V splošnem zapisu za Fourierjev par velja:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Spekter $X(\omega)$ je kompleksen in ga lahko izrazimo z amplitudo in fazo:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \quad (\text{A.21})$$

Poleg amplitudnega in faznega spektra poznamo tudi energijski spekter signala $W(\omega)$, ki je definiran kot Fourier transform avtokorelacijske funkcije:

$$W_x(\omega) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} \quad (\text{A.22})$$

Energijski spekter ni odvisen od faze signala in je realna soda funkcija frekvence. Pokazati je mogoče, da je energijski spekter enak kvadratu amplitudnega spektra:

$$W_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (\text{A.23})$$

A.6.3 Spekter naključnih signalov

Mnogo fizikalnih pojavov v naravi najboljše označimo z naključnimi signali. Mednje lahko uvrstimo razne meteorološke pojave in napetosti termičnega šuma elektronskih komponent. Ravno tako so naključni signali, s katerimi v telekomunikacijah prenašamo sporočila. Naključne signale modeliramo kot neskončno trajajoče signale z neskončno energijo in končno močjo, zato jih štejemo med močnostne signale. Pri naključnih signalih ne poznamo poteka signala, lahko pa poznamo njegovo avtokorelacijsko funkcijo $r_{xx}(\tau)$. Močnostni spekter $S_x(\omega)$ naključnega signala je definiran kot Fourier transform avtokorelacijske funkcije.

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} \quad (\text{A.24})$$

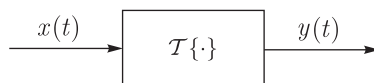
Močnostni spekter je merilo naključnosti signala. Bolj naključni oziroma manj korelirani signali imajo ožjo avtokorelacijsko funkcijo in širši močnostni spekter. Pokazati je mogoče, da je močnostni spekter enak limiti:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} W_T(\omega) \quad (\text{A.25})$$

kjer je $W_T(\omega)$ energijski spekter na interval $(-T/2, T/2)$ omejenega signala.

B Analogni sistemi

Za sistem na sliki B.1 lahko trdimo, da ga poznamo, če znamo poljubnemu vhodnemu signalu $x(t)$ določiti ustrezen izhodni signal $y(t)$. Zapišemo lahko, da je izhodni signal transform vhodnega



Slika B.1 – Sistem z enim vhodnim in enim izhodnim signalom

signala:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} \quad (\text{B.1})$$

Transform $\mathcal{T}\{ \}$ je določen z lastnostmi sistema in v celoti opisuje sistem.

B.1 Linearnost in časovna nespremenljivost

Sistem je linearen, kadar da linearna kombinacija signalov na vhodu linearno kombinacijo transformov na izhodu sistema:

$$\mathcal{T}\left\{\sum_i [a_i x_i(t)]\right\} = \sum_i [a_i \mathcal{T}\{x_i(t)\}] \quad (\text{B.2})$$

Sistem je časovno nespremenljiv (invarianten), kadar povzroči časovni premik signala na vhodu enak časovni premik signala na izhodu sistema.

$$\mathcal{T}\{x(t)\} = y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{T}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (\text{B.3})$$

B.2 Sistemska funkcija

Lastnosti LČN sistema moremo opisati v časovnem in v frekvenčnem prostoru. V časovnem prostoru opišemo lastnosti z odzivom na enotin impulz $\delta(t)$. Odziv LČN sistema na enotin impulz imenujemo sistemska funkcija $h(t)$:

$$h(t) = \mathcal{T}\{\delta(t)\} \quad (\text{B.4})$$

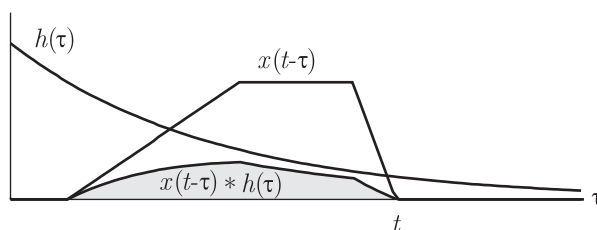
Pri določanju odziva ali sistemske funkcije nastopi vzbujalni impulz v trenutku $t = 0$. Pri ustvarljivih sistemih se lahko odziv $h(t)$ pojavi le kot posledica vhodnega impulza in to v časovnem intervalu $t \geq 0$. Tak sistem je kavzalen in zanj velja:

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (\text{B.5})$$

Sistemska funkcija popolnoma določa LČN sistem. Če poznamo sistemsko funkcijo, lahko vsakemu vhodnemu signalu določimo ustrezen izhodni signal. Izhodni signal je enak konvoluciji vhodnega signala s sistemsko funkcijo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (\text{B.6})$$

Trenutno vrednost izhodnega signala v času t si lahko razlagamo s pomočjo slike B.2, na kateri je narisani odziv $h(\tau)$, časovno transponiran signal $x(t - \tau)$ in produkt $x(t - \tau)h(\tau)$. Vrednost produkta omejuje senčeno ploskev, ki je enaka integralu v enačbi B.6 za dano vrednost t .



Slika B.2 – Predstavitev konvolucije pri določitvi izhodnega signala v času t

B.3 Prevajalna funkcija

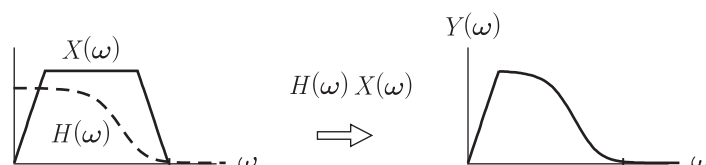
Lastnosti LČN sistema lahko opišemo tudi v frekvenčnem prostoru. Prevajalna funkcija sistema $H(\omega)$ je definirana kot Fourier transform sistemske funkcije $h(t)$:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.7})$$

Časovni odziv sistema je določen s konvolucijo. Konvolucija v časovnem prostoru se transformira v množenje v frekvenčnem prostoru. Od tod sledi:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (\text{B.8})$$

Fourier transform (spekter) signala se pri prehodu skozi sistem množi s prevajalno funkcijo sistema, torej sistem ne prepušča vseh frekvenčnih komponent enako, kakor je to prikazano na sliki B.3. LČN sistemi zato predstavljajo tako imenovana frekvenčna sita (filtre). Pri prehodu



Slika B.3 – Filtriranje signala

signala skozi LČN sistem se ne ustvarjajo nove frekvenčne komponente.

B.4 Prevajalna funkcija v prostoru s

Če namesto Fourier transforma naredimo Laplaceov transform sistemske funkcije, dobimo prevajalno funkcijo v prostoru s :

$$H_L(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)e^{-st} dt \quad (\text{B.9})$$

Za kavzalne sisteme lahko dobimo prevajalno funkcijo $H(\omega)$ iz prevajalne funkcije $H_L(s)$ tako, da zamenjamo kompleksno spremenljivko s s frekvenco $j\omega$.

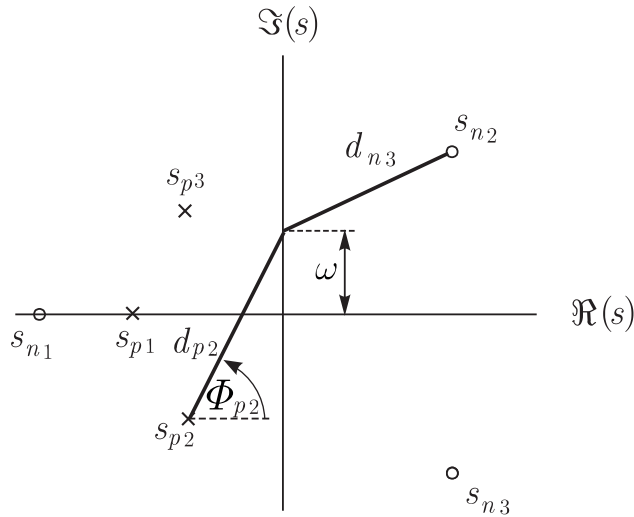
$$H(\omega) = H_L(j\omega) \quad (\text{B.10})$$

B.5 Prevajalna funkcija RLC vezij

Pri RLC-vezjih je $H_L(s)$ kompleksna racionalna funkcija. Poli in ničle so realni ali pa nastopajo v konjugirano kompleksnih parih. Splošen izraz za prevajalno funkcijo RLC vezij je podan z izrazom:

$$H_L(s) = H_0 \frac{\left(1 - \frac{s}{s_{n1}}\right) \left(1 - \frac{s}{s_{n2}}\right) \left(1 - \frac{s}{s_{n3}}\right) \dots}{\left(1 - \frac{s}{s_{p1}}\right) \left(1 - \frac{s}{s_{p2}}\right) \left(1 - \frac{s}{s_{p3}}\right) \dots} \quad (\text{B.11})$$

Lege ničel so označene s s_{ni} in lege polov s s_{pi} . Lege polov in ničel v ravnini s nam veliko povedo o lastnostih sistema. Na sliki B.4 so za zgled narisani poli in ničle prevajalne funkcije $H_L(s)$ v ravnini s . Imaginarna os ($s = j\omega$) predstavlja z ozirom na Fourier transform frekvenčno os. S



Slika B.4 – Ničle in poli prevajalne funkcije $H_L(s)$ v s -ravnini

poli in ničlami prevajalne funkcije so povezane naslednje lastnosti:

- Število ničel je vedno manjše ali največ enako številu polov.

- Razmerje med produktom razdalj do ničel in produktom razdalj do polov predstavlja absolutno vrednost prevajalne funkcije $|H(\omega)|$ oziroma njen amplitudni potek.

$$|H(\omega)| = K \frac{\prod_k |\jmath\omega - s_{nk}|}{\prod_m |\jmath\omega - s_{pm}|} = K \frac{\prod_k d_{nk}(\omega)}{\prod_m d_{pm}(\omega)}$$

kjer je konstanta K enaka:

$$K = H_0 \frac{\prod_m |s_{pm}|}{\prod_k |s_{nk}|}$$

- Razlika vsote kotov ničel in vsote kotov do polov predstavlja fazni potek prevajalne funkcije $\Phi(\omega)$.

$$\Phi(\omega) = \sum_k \Phi_{nk}(\omega) - \sum_m \Phi_{pm}(\omega) + k\pi$$

kjer velja:

$$k = \begin{cases} 0 & ; \quad H_0 \frac{\prod_m s_{pm}}{\prod_k s_{nk}} > 0 \\ 1 & ; \quad H_0 \frac{\prod_m s_{pm}}{\prod_k s_{nk}} < 0 \end{cases}$$

- Vezje je stabilno, če so vsi poli v levi polravnini. Teda j velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad ; \quad \operatorname{Re}[s_{pi}] < 0$$

- Absolutna vrednost prevajalne funkcije $|H(\omega)|$ se ne spremeni, če lego poljubne ničle prezrcalimo na drugo stran osi $\jmath\omega$.

$$|H(\omega)|_{\{z \text{ ničlo pri } s_{ni}\}} = |H(\omega)|_{\{z \text{ ničlo pri } -s_{ni}\}}$$

- Lege ničel imajo odločilen vpliv na zakasnitev odziva in potek faze prevajalne funkcije. Ločimo tri primere:

- vse ničle leže v levi polravnini: zakasnitev vezja je najmanjša, prevajalna funkcija ima minimalni fazni zasuk,
- vse ničle leže v desni polravnini: zakasnitev vezja je največja, prevajalna funkcija ima maksimalni fazni zasuk,
- ničle leže v levi in desni polravnini: zakasnitev in fazni zasuk sta med minimalno in maksimalno vrednostjo. Prevajalno funkcijo lahko v tem primeru odlikuje linearni fazni potek, ki zagotavlja enako zakasnitev vseh frekvenčnih komponent signala.

- RL in RC vezja imajo ničle in pole samo na negativni realni osi.

C Karakteristike analognih prototipnih sit

Če želimo načrtovati digitalna sita na osnovi analognih prototipnih sit, moramo spoznati lastnosti značilnih vrst analognih sit. Predstavili bomo lastnosti Butterworthovih, Čebiševjevih in eliptičnih sit. Pri načrtovanju sita je predvsem pomemben amplitudni potek:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| \quad (\text{C.1})$$

kjer je $H(s)$ Laplaceov transform sistemske funkcije $h(t)$. Amplitudni potek najpogosteje opazujemo v logaritemskem merilu:

$$a(\omega) = 20 \log[A(\omega)] \quad (\text{C.2})$$

Redkeje načrtujemo sita na osnovi predpisanega faznega poteka $\Phi(\omega)$.

Običajno načrtujemo nizko prototipno sito, ki ga lahko nato s pomočjo ustrezne frekvenčne transformacije (glej dodatek D) preslikamo v visoko ali pasovno, prepustno ali zaporno sito.

V karakteristikah sit ločimo prepustna, prehodna in zaporna področja. Znotraj prepustnih in zapornih območij so določena maksimalna dopustna odstopanja od vnaprej predpisanih vrednosti. Potek prevajalne karakteristike v prehodnih področjih ni določen in prav ta nedoločenost olajšuje načrtovanje. Specifikacije za nizko sito so z ojačenjem 1 oziroma 0 dB v prepustnem področju podane z:

ω_p – mejno frekvenco prepustnega področja,

ω_z – mejno frekvenco zapornega področja,

δ_p – maksimalnim odstopanjem (valovitostjo) v prepustnem področju, oziroma z minimalnim dopustnim ojačenjem a_p v prepustnem področju:

$$a_p = 20 \log(1 - \delta_p) \quad (\text{C.3})$$

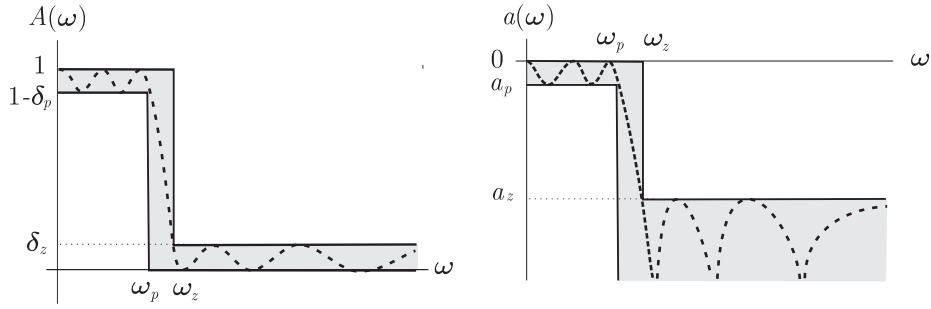
in

δ_z – maksimalnim odstopanjem (valovitostjo) v zapornem področju, oziroma maksimalnim dopustnim ojačenjem v a_z zapornem področju:

$$a_z = 20 \log(\delta_z) \quad (\text{C.4})$$

Ti parametri določajo okvir (gabarit), ki je prikazan na sliki C.1. Amplitudna karakteristika lahko poteka le v področju, ki je na sliki obarvano sivo, kot je za zgled prikazano s črtkano črto. Ustrezno amplitudno karakteristiko lahko realiziramo z različnimi aproksimacijskimi postopki. V enačbah za amplitudne karakteristike prototipnih sit je valovitost v prepustnem področju pogosto podana s parametrom ε^2 , ki ga lahko izrazimo s parametrom δ_p kot:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{(1 - \delta_p)^2} - 1 \quad (\text{C.5})$$



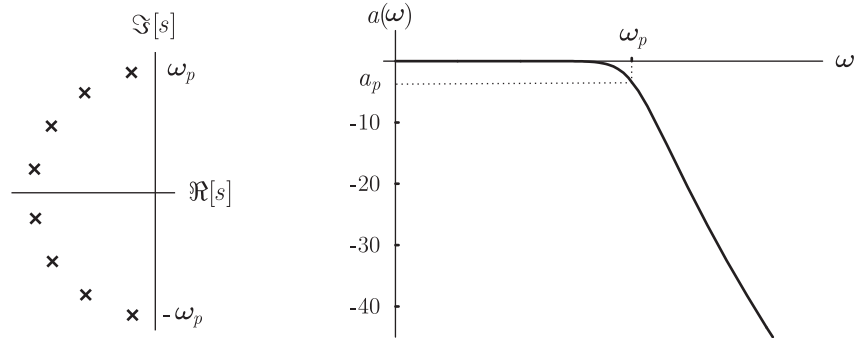
Slika C.1 – Specifikacije amplitudnega poteka nizkega sita

C.1 Butterworthova sita

Prevajalna funkcija $H(s)$ Butterworthovega sita N -tega reda ima N polov v levi polravnini s na krožnici kroga s središčem v koordinatnem izhodišču. Amplitudna karakteristika je določena z izrazom:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}} \quad (\text{C.6})$$

Lega polov in amplitudna karakteristika sita osmega reda sta prikazani na sliki C.2.

Slika C.2 – Razvrstitev polov funkcije $H(s)$ in amplitudna karakteristika $a(\omega)$ Butterworthovega nizkega sita ($N = 8$)

Butterworthova sita so sita z maksimalno položnim potekom amplitudne karakteristike, kar pomeni, da ima $A(\omega)$ en sam ekstrem pri $\omega = 0$, enako pa velja tudi za vseh $N - 1$. $A(\omega)$ je monotonno padajoča funkcija frekvence v celotnem frekvenčnem področju $\omega > 0$.

C.2 Čebiševjeva sita

Boljše aproksimacije idealnim filtrskim karakteristikam dobimo, če dopuščamo enakomerno valovitost znotraj predpisanih območij. Načrtovanje Čebiševjevih sit tipa I ali II temelji na enakomerni valovitosti amplitudne karakteristike v prepustnem ali zapornem področju. Zato s Čebiševjevimi siti dosežemo bolj nagel prehod iz prepustnega v zaporno področje in manjša odstopanja v prepustnem in zapornem področju v primerjavi z Butterworthovimi siti istega reda. Amplitudna karakteristika Čebiševjevega nizkega sita tipa I ima enakomerno valovitost v prepustnem področju in monotonno upadanje v zapornem področju. Pri sitih tipa II imamo

monotono upadanje amplitude v prepustnem področju in enakomerno valovitost v zapornem področju.

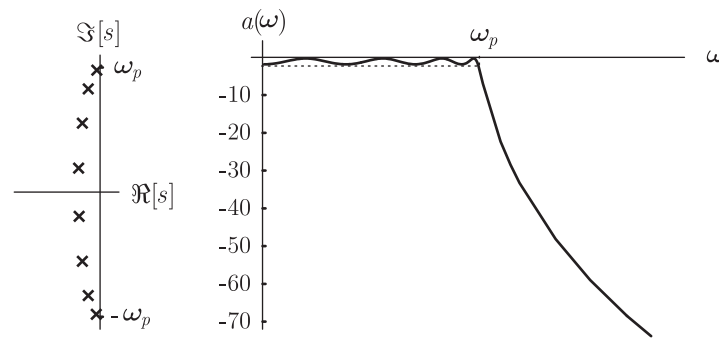
Poli Čebiševjevega nizkega sita leže na elipsi v ravnini s , ničle so v neskončnosti. Lege polov za določene vrednosti parametrov δ_p in δ_z pri normirani frekvenci $\omega_p = 1$ najdemo v priročnikih za načrtovanje sit.

Amplitudni potek Čebiševjevega sita tipa I je podan z enačbo:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} \quad (\text{C.7})$$

kjer je $T_N(x)$ Čebiševjev polinom N -tega reda, *varepsilon*² pa določa odstopanje v prepustu.

Na sliki C.3 je prikazan razpored polov in amplitudna karakteristika Čebiševjevega nizkega sita osmega reda.



Slika C.3 – Lege polov in amplitudna karakteristika Čebiševjevega nizkega sita ($N = 8$)

S pomočjo Čebiševjevih polinomov lahko načrtujemo tudi Čebiševjeva sita tipa II, pri katerih amplitudna karakteristika v prepustnem področju monotonno upada in ima v zapornem področju enako valovitost. Pri teh sitih leže ničle na frekvenčni osi $s = j\omega$, kar povzroča enakomerno valovitost v zapori. Čebiševjeva sita tipa II imajo amplitudno karakteristiko, podano z izrazom:

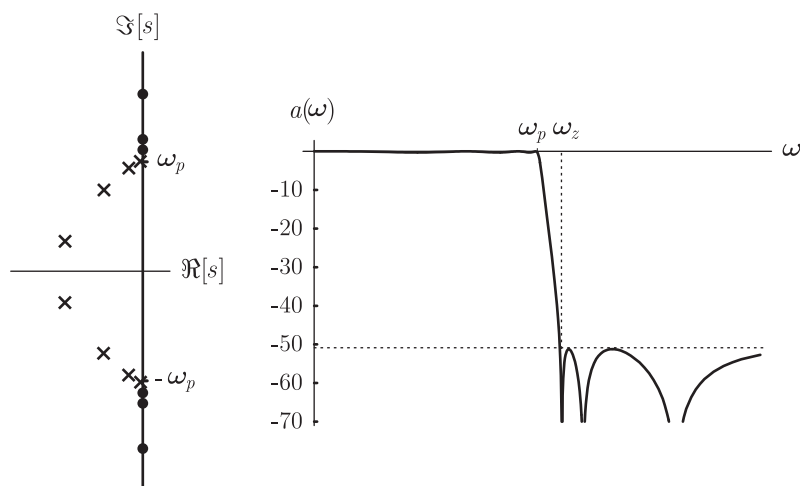
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \frac{T_N\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)}{T_N\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)}}} \quad (\text{C.8})$$

C.3 Eliptična sita

Najbolj nagle prehode iz prepustnega v zaporno področje pri predpisanih parametrih a_p, a_z in redu sita N dosežemo z eliptičnim sitom. To je posledica tega, da imamo pri eliptičnih sitih enakomerno valovitost amplitudne karakteristike tako v prepustnem kot zapornem področju. Amplitudna karakteristika je podana z enačbo:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 U_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}} \quad (\text{C.9})$$

$U_N(\omega)$ je Jakobijeva eliptična funkcija. Lege polov in ničel eliptičnih sit so podane v priročnikih za načrtovanje sit ali pa jih lahko dobimo s pomočjo ustreznega programskega orodja. Na sliki C.4 so prikazane lege polov in ničel ter amplitudna karakteristika eliptičnega nizkega sita osmega reda.



Slika C.4 – Poli, ničle in karakteristika nizkega eliptičnega sita ($N = 8$)

Eliptična sita so optimalna glede na odstopanja od idealiziranih vrednosti. Fazna karakteristika teh filtrov je bolj neugodna kot pri Čebiševjevih in Butterworthovih sitih. To povzroča pri eliptičnih filtrihi bolj neenakomerno zakasnitev frekvenčnih komponent v prepustnem področju, posebno je to kritično v področju prehoda iz prepustnega področja v zaporno področje.

D Frekvenčne preslikave

D.1 Frekvenčne preslikave v prostoru s

Načrtovanje analognih sit vedno temelji na načrtovanju nizkega sita, ki ga nato po potrebi preslikamo v visoko, pasovno prepustno ali zaporno sito. Izhajamo iz normiranega nizkega sita z mejno frekvenco prepustnega območja $\omega_p = 1$.

D.1.1 Sprememba mejne frekvence nizkega sita

Normirano nizko sito $H_{np}(s)$ preslikamo v nizko sito $H_{ns}(s)$ z mejno frekvenco ω_p z zamenjavo:

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_p} \quad (\text{D.1})$$

oziroma

$$H_{ns}(s) = H_{np}\left(\frac{s}{\omega_p}\right) \quad (\text{D.2})$$

Za zgled vzemimo nizko prototipno sito $H_{np}(s)$ prvega reda z mejno frekvenco $\omega_p = 1$:

$$H_{np}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{D.3})$$

Nadomestimo s z s/ω_p . Dobimo:

$$H_{ns}(s) = H_{np}\left(\frac{s}{\omega_p}\right) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} = \frac{\omega_p}{s + \omega_p} \quad (\text{D.4})$$

D.1.2 Preslikava nizkega v visoko sito

Nizko prototipno sito preslikamo v visoko sito z mejno frekvenco ω_p z zamenjavo:

$$s \rightarrow \frac{\omega_p}{s} \quad (\text{D.5})$$

S preslikavo nizkega prototipnega sita prvega reda v izrazu (D.3) v visoko sito dobimo:

$$H_{vs}(s) = H_{np}\left(\frac{\omega_p}{s}\right) = \frac{1}{\frac{\omega_p}{s} + 1} = \frac{s}{s + \omega_p} \quad (\text{D.6})$$

D.1.3 Preslikava nizkega v pasovno prepustno sito

Nizko prototipno sito lahko preslikamo v pasovno prepustno sito s spodnjo mejno frekvenco prepustnega področja ω_{ps} in zgornjo mejno frekvenco prepustnega področja ω_{pz} z zamenjavo:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{ps}\omega_{pz}}{s(\omega_{pz} - \omega_{ps})} \quad (\text{D.7})$$

S preslikavo nizkega prototipnega sita prvega reda v izrazu (D.3) v pasovno prepustno sito dobimo:

$$\begin{aligned}
 H_{pps}(s) &= H_{np} \left(\frac{s^2 + \omega_{ps}\omega_{pz}}{s(\omega_{pz} - \omega_{ps})} \right) = \\
 &= \frac{1}{\frac{s^2 + \omega_{ps}\omega_{pz}}{s(\omega_{pz} - \omega_{ps})} + 1} = \\
 &= \frac{s(\omega_{pz} - \omega_{ps})}{s^2 + s(\omega_{pz} - \omega_{ps}) + \omega_{ps}\omega_{pz}} \quad (D.8)
 \end{aligned}$$

D.1.4 Preslikava nizkega v pasovno zaporno sito

Nizko prototipno sito lahko preslikamo v pasovno zaporno sito s spodnjo mejno frekvenco zapornega področja ω_{zs} in zgornjo mejno frekvenco prepustnega področja ω_{zz} z zamenjavo:

$$s \rightarrow \frac{s(\omega_{zz} - \omega_{zs})}{s^2 + \omega_{zs}\omega_{zz}} \quad (D.9)$$

S preslikavo nizkega prototipnega sita prvega reda v izrazu (D.3) v pasovno zaporno sito dobimo:

$$\begin{aligned}
 H_{pzs}(s) &= H_{np} \left(\frac{s(\omega_{zz} - \omega_{zs})}{s^2 + \omega_{zs}\omega_{zz}} \right) = \\
 &= \frac{1}{\frac{s(\omega_{zz} - \omega_{zs})}{s^2 + \omega_{zs}\omega_{zz}} + 1} = \\
 &= \frac{s^2 + \omega_{zs}\omega_{zz}}{s^2 + s(\omega_{zz} - \omega_{zs}) + \omega_{zs}\omega_{zz}} \quad (D.10)
 \end{aligned}$$

D.2 Frekvenčne preslikave v prostoru z

Podobno kot pri analognih sitih, lahko tudi diskretna sita načrtujemo s pomočjo frekvenčnih preslikav. Nizkemu situ lahko spremenimo mejno frekvenco ali pa ga pretvorimo v pasovno prepustno, pasovno zaporno ali visoko sito. Pri preslikavi nadomestimo spremenljivko z^{-1} z racionalno funkcijo $g(z^{-1})$. Ta funkcija mora ustrezati določenim zahtevam. Najpomembneje je, da mora preslikava $z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$ preslikati točke znotraj enotskega kroga v ravnini z nazaj v enotski krog, točke na frekvenčni krožnici pa se morajo preslikati nazaj v točke na frekvenčni krožnici. Ustrezne funkcije dobimo v obliki:

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \quad (D.11)$$

D.2.1 Sprememba mejne frekvence nizkega sita

Za preslikavo nizkega sita z mejno frekvenco Ω_p v nizko sito z mejno frekvenco Ω'_p uporabimo izraza:

$$a = \frac{\sin((\Omega_p - \Omega'_p)/2)}{\sin((\Omega_p + \Omega'_p)/2)}$$

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} \quad (\text{D.12})$$

D.2.2 Preslikava nizkega v visoko sito

Za preslikavo nizkega sita z mejno frekvenco Ω_p v visoko sito z mejno frekvenco Ω'_p uporabimo izraza:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cos((\Omega_p - \Omega'_p)/2)}{\cos((\Omega_p + \Omega'_p)/2)} \\ z^{-1} &\rightarrow \frac{a - z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

D.2.3 Preslikava nizkega v pasovno prepustno sito

Za preslikavo nizkega sita z mejno frekvenco Ω_p v pasovno prepustno sito z mejnima frekvencama Ω_{ps} in Ω_{pz} uporabimo izraze:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\cos((\Omega_{pz} + \Omega_{ps})/2)}{\cos((\Omega_{pz} - \Omega_{ps})/2)} \\ K &= \cot\left(\frac{\Omega_{pz} - \Omega_{ps}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) \\ a_1 &= -2\alpha K / (K + 1) \\ a_2 &= (K - 1) / (K + 1) \\ z^{-1} &\rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

D.2.4 Preslikava nizkega v pasovno zaporno sito

Za transformacijo nizkega sita z mejno frekvenco Ω_p v pasovno zaporno sito z mejnima frekvencama Ω_{ps} in Ω_{pz} uporabimo naslednje izraze:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\cos((\Omega_{pz} + \Omega_{ps})/2)}{\cos((\Omega_{pz} - \Omega_{ps})/2)} \\ K &= \tan\left(\frac{\Omega_{pz} - \Omega_{ps}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) \\ a_1 &= -2\alpha / (K + 1) \\ a_2 &= (1 - K) / (1 + K) \\ z^{-1} &\rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Stvarno kazalo

- Čebiševjevo sito, 178
- časovna nespremenljivost, 29, 173
- časovni odziv, 173
- časovno diskretni FT, 23
- AD pretvorba, 135
 - kvantizacija, 137
 - s prevzorčenjem, 136
- amplitudni potek, 176, 177
- amplitudni spekter, 16, 23
- analogna sita, 177
- analogni signali, 165
- aperiodičen signal, 21, 166
- avtokorelacijska funkcija, 14, 20, 22, 26, 168, 170
- bilinearna transformacija, 93
- Butterworthovo sita, 178
- DA pretvorba, 150
 - harmoničnega signala, 153
 - s predhodno interpolacijo, 152
 - z impulzi končne širine, 151
- decimacija, 52, 53, 56, 136
- decimacija po frekvenci, 108
- decimacija v času, 104
- determinističen signal, 166
- DFT, 15
 - anliza signalov, 111
 - izvedba FIR sita, 116
 - konvolucije, 18
 - lastnosti, 17
 - linearnost, 17
 - modulacija, 18
 - nabor sit, 113
 - premik spektra, 17
 - produkta, 18
 - realnih signalov, 19
 - uporaba, 103
- diagram pretoka signala, 60
- DIF, 108
- diferenčna enačba, 59
- diferenciator, 84
- digitalni signalni procesor, 159
- Diracov impulz, 46
- direktna struktura, 63
 - struktura I, 64
 - struktura II, 64
- diskreten signal, 11
- diskreten sistem, 29
- diskretni Fourier transform, 15
- DIT, 104
- DTFT, 23
 - energijski spekter, 26
 - in transform Z, 33
 - konvolucija, 25
 - lastnosti, 24
 - linearnost, 24
 - modulacija, 25
 - premik spektra, 25
 - produkta, 25
- eliptično sito, 179
- enakomerna porazdelitev, 127
- enakomerno vzorčenje, 45
- energija, 21, 167
- energijski signal, 166
- enotin impulz, 29, 46
- fazni potek, 176, 177
- fazni spekter, 23
- FFT, 104
 - decimacija po frekvenci, 108
 - decimacija v času, 104
 - hitra konvolucija, 117
 - izvedba FIR sita, 116
 - metuljček, 105
 - računska učinkovitost, 107
 - realnih signalov, 109
- filtriranje, 31
 - periodičnost, 31
- fizikalni signal, 165
- Fourierova vrsta, 169
- frekvenčna preslikava, 181
 - prostor s , 181
 - prostor z , 182
 - v nizko sito, 181, 182
 - v pasovno prepustno sito, 181, 183

- v pasovno zaporno sito, 182, 183
 - v visoko sito, 181, 183
- frekvenčni odziv, 173
- gabarit, 177
- Gaussova porazdelitev, 129
- generiranje signalov, 123
 - harmonični oscilator, 123
 - naključni signal, 126
- harmonični oscilator, 123
 - na osnovi tabele, 124
- Hilbertov transform, 86
- hitra konvolucija, 117
 - prekrij in seštej, 118
 - prekrij in shrani, 119
- hitri Fourier transform, 104
- IDFT, 15
- IDTFT, 23
- impulzno invariantna transformacija, 89
- interpolacija, 52, 54, 56
- inverzni transform Z, 42
 - zgled, 44
- Kaiserjevo okno, 77
- kaskadna vezava, 36, 63, 65
- kavzalni sistemi, 30, 174
- konjugacija, 19, 26
- konvergenčno področje, 33
- konvolucija, 14, 18, 22, 25, 30, 174
- korelacijska funkcija, 167
- kosinusno okno, 75
- kritično vzorčenje, 49
- kvantizacija, 137, 154
 - koeficientov FIR, 155
 - koeficientov IIR, 156
- Laplaceov transform, 175, 177
- lastnosti DFT, 17
- linearna faza, 176
- linearnost, 17, 24, 173
- lineren fazni potek, 68
- metuljček, 105
- minimalna faza, 176
- moč, 12, 22, 168
- močnostni signal, 167
- močnostni signal, 166
- močnostni spekter, 16, 24
- modulacija, 18, 25
- načrtovanje, 67
 - FIR, 68
 - FIR enakomerna valovitost, 78
 - FIR enakomerno vzorčenje, 81
 - FIR frekvenčno vzorčenje, 81
 - FIR oknjenje, 73
 - FIR z inverznim FT, 71
 - IIR, 86
 - IIR bilinearna transformacija, 93
 - IIR impulzno invariantno, 89
 - IIR postopek, 95
 - IIR preprosto, 87
- nabor sit, 113
- nadkritično vzorčenje, 51
- naključen signal, 166
- naključni signal, 126
 - časovni, 174
 - frekvenčni, 174
 - v s-prostoru, 175
- oknjenje, 73
 - Kaiserjevo, 77
 - kosinusno, 75
 - pravokotno, 74
- Parsevalov teorem, 21, 26, 27
- periodičen signal, 12, 166
- periodičnost filtriranja, 31
- podkritično vzorčenje, 51
- polifazno sito, 66
- povprečevalno sito, 83
- povratni sklop, 37, 63
- pravokotno okno, 74
- prekrivanje spektra, 48, 51
- premik spektra, 17, 25
- prepustno področje, 177
- prevajalna funkcija, 31, 174
 - načrtovanje, 67
- RLC, 175
 - ustvarljivih sistemov, 39
- prevzorčenje, 136
- prototipno sito, 177
- računska učinkovitost, 107
- ravnina z , 33
- realen signal, 19
- rekonstrukcija signala, 48
- rekonstrukcijsko sito, 49
- residuum, 43
- signali
 - analogni, 165
 - aperiodični, 21, 166, 171
 - deterministični, 166
 - diskretni, 11

- energijski, 166, 167
- fizikalni, 165
- močnostni, 26, 166, 167
- naključni, 166, 172
- periodični, 12, 166, 169
- realen, 19
- rekonstrukcija, 48
- splošni, 165
- vrste, 11
- vzorčeni, 45
- značilne vrednosti, 12
- signalni procesor, 159
 - analogen, 173
 - diskreten, 29
 - izvedba, 135
 - linearen, 29
 - praktični vidik, 135
 - ustvarljiv, 39, 59, 87
- sistemska funkcija, 29, 30, 173
 - kavzalnih sistemov, 30
 - Čebiševjevo, 178
 - analogno, 177
 - Butterworthovo, 178
 - diskretno, 59
 - eliptično, 179
 - IIR, 86
 - lestvičasto, 67
 - linearna faza, 68
 - nabor sit, 113
 - pasovno, 89
 - polifazno, 66
 - povprečevalno, 83
 - proti prekrivanju, 135
 - prototipno, 177
 - rekonstrukcijsko, 49
 - amplitudni, 16, 23, 170, 172
 - analognih signalov, 169
 - energijski, 23, 24, 171, 172
 - fazni, 23
 - močnostni, 16, 24, 26, 170
 - naključnih signalov, 172
 - periodičnih signalov, 169
 - prekrivanje, 48, 51
 - vzorčenih signalov, 46
- srednja vrednost, 168
- stabilnost, 32, 176
- standardna deviacija, 13
- struktura sita, 63
- struktura vezja, 60
- transform Z, 32
 - in DTFT, 33
 - inverzni, 42
 - konvergenca, 33
 - konvolucije, 35
 - linearnost, 35
 - premik, 36
 - zgledi, 37
- transpozicija, 62, 63
- uporaba DFT, 103
- ustvarljiv sistem, 59
- valovitost, 177
 - enakomerna, 78
- varianca, 13, 22, 168
- vzorčenje, 45
 - kritično, 49
 - nadkritično, 51
 - podkritično, 51
 - spmemba vzorčne frekvence, 52
- vzorčevalna funkcija, 45
- vzporedna vezava, 36, 63, 66
- zaporno področje, 177
- značilne vrednosti, 12, 21, 168

Pričujoča knjiga je mišljena prvenstveno kot učbenik za študente univerzitetnega študija elektrotehnike, vendar je primerna tudi za inženirje, ki so novi na področju digitalne obdelave signalov in se želijo vstopiti na to področje. V njej je sistematično osnovni postopki analize časovno diskretnih signalov. Predstavljeni so postopki načrtovanja FIR in IIR frekvenčnih sit, uporaba diskretne Fourier transforme pri analizi in obdelavi signalov in postopki za generiranje časovno diskretnih signalov. Zadnji del knjige je posvečen problemom pri praktični izvedbi sistemov za digitalno obdelavo signalov. Predstavljeni so digitalno analogni in analogno digitalni pretvorniki ter problemi, ki nastopijo zaradi kvantizacije signala in koeficientov digitalnih sit.

časovno diskreten signal, časovno diskreten sistem, diskretni Fourier transform, časovno diskretni Fourier transform, transform Z, IIR sito, FIR sito, vzorčenje, rekonstrukcija, bilinearna transformacija, nabor sit, analogno digitalni pretvornik, digitalno analogni pretvornik, kvantizacijski šum.

Sašo Tomažič je redni profesor na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani, predstojnik Laboratorija za informacijske tehnologije in večletni predstojnik Katedre za telekomunikacije. Je tudi vodja enega najuspešnejših slovenskih raziskovalnih programov, ki jih financira Agencija za raziskovalno dejavnost. Na Fakulteti za elektrotehniko predava predmete s področja digitalnih komunikacij, informacijskih sistemov in digitalne obdelave signalov.

**DISKRETNI
SIGNALI IN
SISTEMI**

**KLJUČNA
GESLA**

S. TOMAŽIČ

ISBN 978-961-243-344-4



**ZALOŽBA
FAKULTETE ZA
ELEKTROTEHNIKO**